ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
CÁLCULO DIFERENCIAL

TERCERA EVALUACIÓN   Septiembre 17 de 2010

Nombre: ____

Paralelo: ____________   **Firma:** ______________________________

TEMA 1 (10 puntos)

Justificando su respuesta, califique como verdadera o falsa, cada proposición:

a) La función f con regla de correspondencia $f(x) = (x-1)\,sgn(x^2-3x-4)$ es derivable en $x = 0$.

SOLUCIÓN:

Primero se obtiene la regla de correspondencia de f aplicando la definición de la función signo:

$$f(x) = (x-1)\ \mathrm{sgn}(x^2-3x-4) = \begin{cases} x-1\ (1) & ; x^2-3x-4>0 \\ x-1\ (0) & ; x^2-3x-4=0 \\ x-1\ (-1) & ; x^2-3x-4<0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & ;\ (x-4)(x+1)>0 \\ 0 & ;\ (x-4)(x+1)=0 \\ 1-x & ;\ (x-4)(x+1)<0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & ; x<-1 \vee x>4 \\ 0 & ; x=-1 \vee x=4 \\ 1-x & ; -1<x<4 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & ; x<-1 \vee x>4 \\ \text{no existe} & ; x=-1 \vee x=4 \\ -1 & ; -1<x<4 \end{cases}$$

Entonces $f'(0) = -1$ (existe)

Por tanto la proposición es VERDADERA

DESEMPEÑO			
INSUFICIENTE	REGULAR	SATISFACTORIO	EXCELENTE
No establece procesos coherentes o califica correctamente la proposición sin justificar	Trata de encontrar la forma explícita de la regla de correspondencia de f en R o en un intervalo que contenga a cero, pero no sabe la definición de la función signo o se equivoca en aplicarla	Obtiene correctamente la forma explícita de la regla de correspondencia de f, pero se equivoca en obtener $f'(0)$	Procesos correctos y califica correctamente la proposición
0	1-2	3-4	5

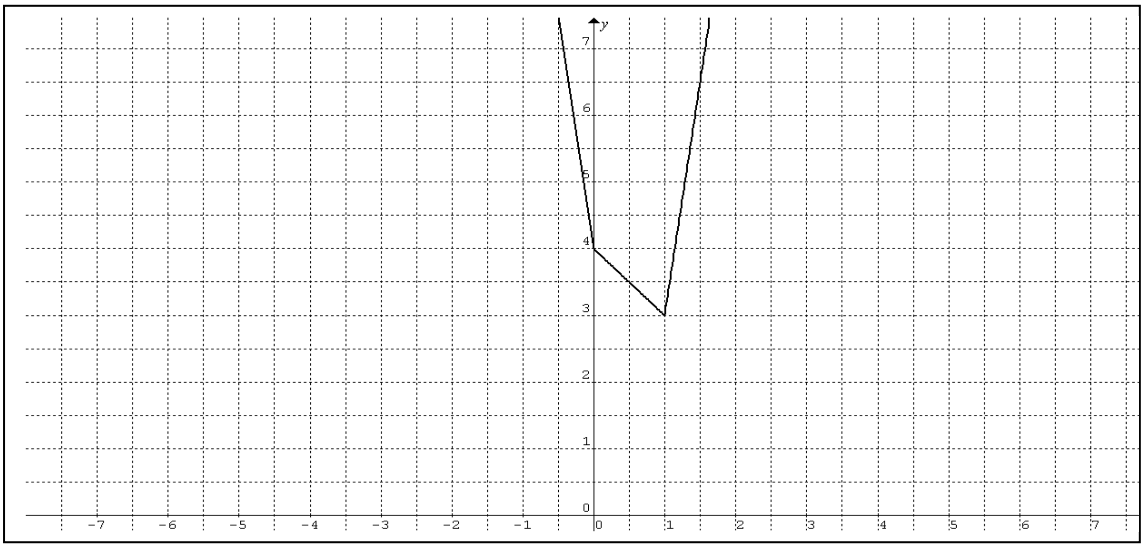
b) Si f es una función definida para todos los reales, con regla de correspondencia $f(x)=3|x|+4|x-1|$, entonces su valor mínimo es 3.

SOLUCIÓN:

Primero se obtiene la regla de correspondencia de f descomponiendo los valores absolutos:

$$f(x)=3(|x|)+4(|x-1|)=\begin{cases}3(-x)+4(-(x-1)) & ;x<0\\ 3x+4(-(x-1)) & ;0\le x<1\\ 3x+4(x-1) & ;x\ge 1\end{cases}=\begin{cases}-7x+4;x<0\\ -x+4;0\le x<1\\ 7x-4;x\ge 1\end{cases}$$

La gráfica de f es:



Entonces:

$$f'(x)=\begin{cases}-7 & ;x<0\\ \text{no existe} & ;\quad x=0\\ -1 & ;0<x<1\\ \text{no existe} & ;\quad x=1\\ 7 & ;x>1\end{cases}$$

En $x=1$ hay un punto crítico singular, donde la derivada es negativa antes de este punto y positiva después de este punto entonces $f(1)=3$ es el valor mínimo de f.

Por tanto la proposición es VERDADERA

DESEMPEÑO			
INSUFICIENTE	REGULAR	SATISFACTORIO	EXCELENTE
No establece procesos coherentes o califica correctamente la proposición sin justificar	Trata de encontrar la regla de correspondencia de f sin valor absoluto pero se equivoca o solo se concentra en examinar los puntos críticos de f	Obtiene correctamente la forma explícita de la regla de correspondencia de f, pero se equivoca en obtener f' o no clasifica correctamente los puntos críticos	Procesos correctos y califica correctamente la proposición
0	1-2	3-4	5

TEMA 2 (10 puntos)

a) Hallar $f'(0)$, si $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-1000)$

SOLUCIÓN:

Trabajando con $f(x) = x\left[(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-1000)\right]$

Obteniendo la derivada de f:

$$f'(x) = \left[D_x(x)\right]\left[(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-1000)\right] + xD_x\left[(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-1000)\right]$$

$$f'(x) = (1)\left[(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-1000)\right] + xD_x\left[(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-1000)\right]$$

Entonces:

$$f'(0) = (1)\left[(0-1)(0-2)(0-3)\cdots(0-1000)\right] + (0)D_x\left[(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-1000)\right]$$

$$f'(0) = (-1)(-2)(-3)\cdots(-1000) = 1000!$$

DESEMPEÑO			
INSUFICIENTE	REGULAR	SATISFACTORIO	EXCELENTE
Vacío o no establece procesos coherentes	Trata de encontrar $f'(x)$ pero no aplica correctamente la regla del producto	Obtiene correctamente $f'(x)$, pero se equivoca en hallar $f'(0)$	Procesos correctos y correcto valor de $f'(0)$
0	1-2	3-4	5

b) Calcular y', si $y = \dfrac{2x^4 + \sqrt[3]{5^x}}{\arctan(x)}$

SOLUCIÓN:

$$y' = \frac{D_x\left(2x^4 + \sqrt[3]{5^x}\right)\arctan x - \left(2x^4 + \sqrt[3]{5^x}\right)D_x\left(\arctan x\right)}{\left(\arctan x\right)^2}$$

$$y' = \frac{\left(8x^3 + \frac{1}{3}\sqrt[3]{5^x}\ln 5\right)\arctan x - \left(2x^4 + \sqrt[3]{5^x}\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{\left(\arctan x\right)^2}$$

$$y' = \frac{\dfrac{\left(24x^3 + \sqrt[3]{5^x}\ln 5\right)\arctan x}{3} - \dfrac{2x^4 + \sqrt[3]{5^x}}{1+x^2}}{\left(\arctan x\right)^2}$$

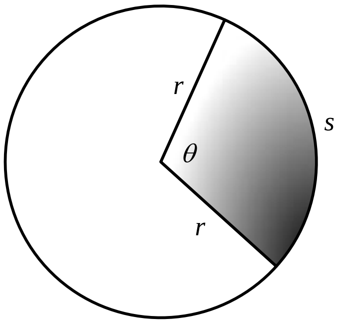
$$y' = \frac{\left(1+x^2\right)\left(24x^3 + \sqrt[3]{5^x}\ln 5\right)\arctan x - 3\left(2x^4 + \sqrt[3]{5^x}\right)}{3\left(1+x^2\right)\left(\arctan x\right)^2}$$

DESEMPEÑO			
INSUFICIENTE	REGULAR	SATISFACTORIO	EXCELENTE
Vacío o no establece procesos coherentes	Se equivoca en aplicar alguna regla de derivación	Aplica correctamente la reglas de derivación pero se equivoca en manipulación algebraica	Derivación y simplificación correctas
0	1-2	3-4	5

TEMA 3 (10 puntos)

Determinar la longitud del radio y la medida del ángulo central de un sector circular de área igual a $9\,u^2$ y de perímetro mínimo.

SOLUCIÓN:



FUNCIÓN OBJETIVO: Perímetro sector circular $= P = 2r + s$

Como $s = \theta r$, entonces $\mathrm{P} = 2r + \theta r$

Como se dice que Area=9 u^2, entonces $9 = \frac{1}{2}\theta r^2 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{18}{r^2} \quad ; r > 0$

Sustituyendo se tiene: $\mathrm{P} = 2r + \frac{18}{r^2} r = 2r + \frac{18}{r} \quad ; r > 0$

Derivando se tiene: $\frac{d\mathrm{P}}{dr} = 2 - \frac{18}{r^2} = \frac{2r^2 - 18}{r^2}$

Obteniendo los puntos críticos estacionarios:

$$\frac{d\mathrm{P}}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2r^2 - 18}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2r^2 - 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 9\,.$$

Se observa un punto crítico estacionario: $\boxed{r = 3}$

Clasificando el punto crítico:

$$\frac{d^2\mathrm{P}}{dr^2} = \frac{36}{r^3} \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{d^2\mathrm{P}}{dr^2}\right|_{r=3} = \frac{36}{3^3} = \frac{18}{27} > 0$$

Entonces con $\boxed{r = 3}$ y $\boxed{\theta = \frac{18}{3^2} = \frac{18}{9} = 2\,rad}$ se tiene el sector circular de perímetro mínimo.

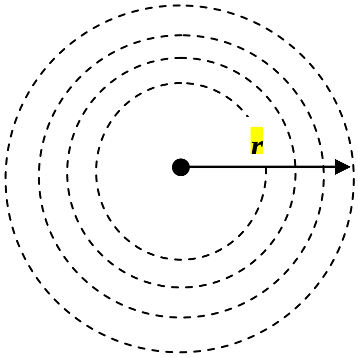
DESEMPEÑO			
INSUFICIENTE	REGULAR	SATISFACTORIO	EXCELENTE
Vacío o no realiza procesos coherentes	Identifica la función objetivo pero se equivoca en relacionar las variables	Relaciona correctamente las variables pero se equivoca en derivar o determinar los valores pedidos.	Obtiene la longitud y la medida pedidas mostrando procedimientos correctos y completos
0	1-4	5-8	9-10

TEMA 4 (10 puntos)

Se lanza una piedra a un estanque de agua en calma dando lugar a ondas circulares concéntricas. Si cada onda se aleja del centro a una velocidad de 1 centímetro por segundo, ¿a qué velocidad está aumentando el área de la superficie del agua agitada al cabo de 10 segundos?

SOLUCIÓN:

Realizando una gráfica del problema:



$$A = \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

Al cabo de 10 seg, se tiene $r = 10cm$ y $\frac{dr}{dt} = 1\frac{cm}{seg}$

Entonces: $\frac{dA}{dt} = 2\pi\ \ 10\ \ \ 1\ \ = 20\pi \frac{cm^2}{seg}$

DESEMPEÑO			
INSUFICIENTE	REGULAR	SATISFACTORIO	EXCELENTE
Vacío o no realiza procesos coherentes	Grafica apropiadamente la situación y plantea correctamente el área de la superficie circular	Deriva en forma implícita y obtiene la expresión correcta pero se equivoca al reemplazar la información y obtener el resultado	Procedimientos correctos y completos
0	1-4	5-8	9-10

TEMA 5 (10 puntos)

Obtenga una expresión para la $n-ésima$ derivada de la función con regla de correspondencia $f(x)=\dfrac{3}{2x-1}$

SOLUCIÓN:

$$f(x)=3(2x-1)^{-1} \Rightarrow f'(x)=-(2x-1)^{-2}3(2)$$

$$\Rightarrow f''(x)=2(2x-1)^{-3}3(2)^{2}$$

$$\Rightarrow f'''(x)=-(2)(3)(2x-1)^{-4}3(2)^{3}$$

$$\Rightarrow f^{IV}(x)=(2)(3)(4)(2x-1)^{-5}3(2)^{4}$$

Se deduce que: $f^{(n)}(x)=3(-2)^{n}\,n!\,(2x-1)^{-(n+1)}$

Otra opción es factorizar f(x) = 3/2 (x-1/2)$^{-1}$ y obtener f ^{n} (x) =3/2 (-1)^{n} n! (x-1/2) $^{-(n+1)}$

DESEMPEÑO			
INSUFICIENTE	REGULAR	SATISFACTORIO	EXCELENTE
Vacío o no realiza procesos coherentes	Encuentra correctamente las primeras tres derivadas	Intenta generalizar pero falla en alguna expresión algebraica	Procedimientos correctos y completos
0	1-4	5-8	9-10

TEMA 6 (10 puntos)

Calcule, de ser posible, el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

SOLUCIÓN:

Se tiene una indeterminación de tipo 1^{∞}

Se manipula la expresión hasta poder aplicar L´Hopital:

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\ln(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(2-x)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2-x}}{-\frac{\pi}{2}\csc^{2}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}$$

$$=e^{\frac{\frac{1}{2-1}}{\frac{\pi}{2}\csc^{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)}}=e^{\frac{2}{\pi}}$$

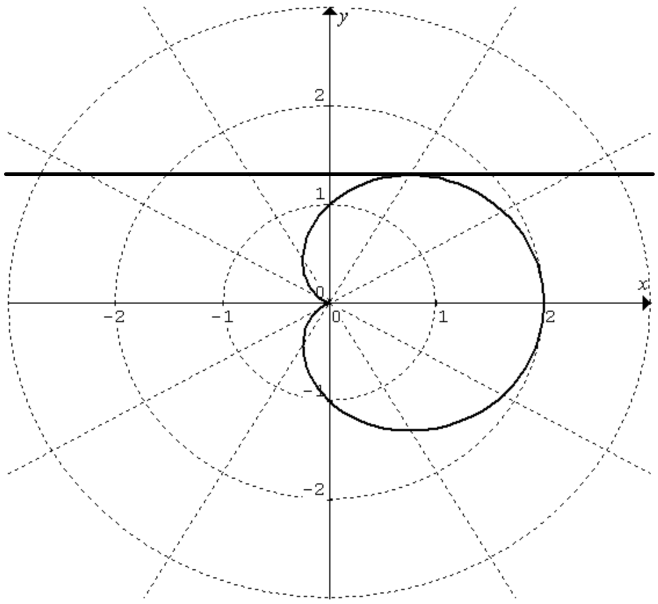
OBSERVACIÓN: También puede resolver el problema sin aplicar la regla de L´Hopital

DESEMPEÑO			
INSUFICIENTE	REGULAR	SATISFACTORIO	EXCELENTE
No sabe cómo enfrentar esta indeterminación	Identifica la indeterminación pero no sabe manipular la expresión para aplicar la regla de L´Hopital.	Aplica correctamente la regla de L´Hopital pero se equivoca en el resultado.	Calcula el límite mostrando procesos correctos y completos
0	1-3	4-9	10

TEMA 7 (15 puntos)

Encuentre y dibuje la ecuación de la recta tangente al cardioide de ecuación polar $r = 1 + cos(\theta)$ cuando $\theta = 60°$

SOLUCIÓN:



La ecuación de la recta tangente está dada por: $y - y_0 = m \quad x - x_0$

Donde:

$$x_0 = r_0\cos\theta_0 = \ 1+\cos 60^0 \ \ \cos 60^0 = \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$y_0 = r_0\operatorname{sen}\theta_0 = \ 1+\cos 60^0 \ \ \operatorname{sen}60^0 = \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$m=\frac{dy}{dx}=\left.\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}\right|_{\theta=60^0}=\frac{r'(60^0)\text{sen}60^0+r(60^0)\cos 60^0}{r'(60^0)\cos 60^0-r(60^0)\text{sen}60^0}$$

$$m=\frac{-\text{sen}60^0\,\text{sen}60^0+\;\;1+\cos 60^0\;\;\;\cos 60^0}{-\text{sen}60^0\cos 60^0-\;\;1+\cos 60^0\;\;\;\text{sen}60^0}=\frac{-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}}{-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}-\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}}=0$$

Por tanto:

$$y-\frac{3\sqrt{3}}{4}=0\left(x-\frac{3}{4}\right)\quad\Rightarrow\quad y=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

DESEMPEÑO			
INSUFICIENTE	REGULAR	SATISFACTORIO	EXCELENTE
No sabe cómo determinar ecuación de recta tangente en coordenadas polares	Determina correctamente las coordenadas del punto de tangencia	Determina correctamente las coordenadas del punto de tangencia, plantea la expresión para la pendiente en coordenadas polares pero se equivoca en obtener su valor	Obtiene la ecuación de la recta en coordenadas polares o cartesianas y la grafica correctamente.
0	1-4	5-10	11-15

TEMA 8 (10 puntos)

Una curva tiene las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x=\sqrt{t},\quad t\geq 0 \\ y=\dfrac{t^2-4}{4} \end{cases}$$

Determine su concavidad en el punto P de coordenadas $\;2,3$

SOLUCIÓN:
Se halla primero el valor de "t" correspondiente al punto $\;2,3$

$$\begin{cases} 2=\sqrt{t} \\ 3=\dfrac{t^2-4}{4} \end{cases}\quad\Rightarrow\quad t=4$$

Se obtienen ahora las derivadas necesarias:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{t}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=t^{3/2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx/dt}=\frac{\frac{d}{dt}\left(t^{3/2}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=\frac{\frac{3}{2}t^{1/2}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=3t$$

Y en $t=4$, sería:

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=4}=\left.3t\right|_{t=4}=3(4)=12>0$$

La curva es cóncava hacia arriba en el punto (2,3)

DESEMPEÑO			
INSUFICIENTE	REGULAR	SATISFACTORIO	EXCELENTE
No sabe hallar derivadas de ecuaciones paramétricas	Determina el valor de parámetro y la primera derivada	Determina correctamente tanto la primera como la segunda derivada, pero se equivoca al simplificar	Cálculos correctos y completos
0	1-3	4-8	9-10

TEMA 9 (15 puntos)

Bosqueje el gráfico de la función definida sobre los reales con regla de correspondencia $f(x)=x\,e^{\frac{2x}{3}}$ indicando simetría, asíntotas, intervalos de monotonía y concavidad, extremos locales o absolutos y puntos de inflexión.

SOLUCIÓN:

- Simetría: $f(-x)=-x\,e^{-\frac{2x}{3}}$; no es par ni impar.
- Asíntotas: Verticales no hay

  $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{2x/3}=\infty$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x/3}=-\infty e^{-\infty}=0$; hay una asíntota horizontal $y=0$
- Puntos críticos:

  $f'(x)=e^{\frac{2x}{3}}+\frac{2}{3}xe^{\frac{2x}{3}}=\frac{1}{3}e^{\frac{2x}{3}}(3+2x)$

  Punto crítico estacionario: $x=-\frac{3}{2}$

  Punto crítico singular: NO HAY
- Monotonía:

  Como $f'(x)=\frac{1}{3}e^{\frac{2x}{3}}(3+2x)$; el signo de la derivada no depende de la función exponencial debido a que es positiva en todo R, por tanto

$$f'(x) < 0; \quad \forall x < -\frac{3}{2}, \text{ entonces } f \text{ es decreciente en } \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$$

$$f'(x) > 0; \quad \forall x > -\frac{3}{2}, \text{ entonces } f \text{ es creciente en } \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$$

- Extremos:

En $x = -\frac{3}{2}$, f tiene un mínimo absoluto. $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)} = -\frac{3}{2}e^{-1} = -\frac{3}{2e}$

- Concavidad:

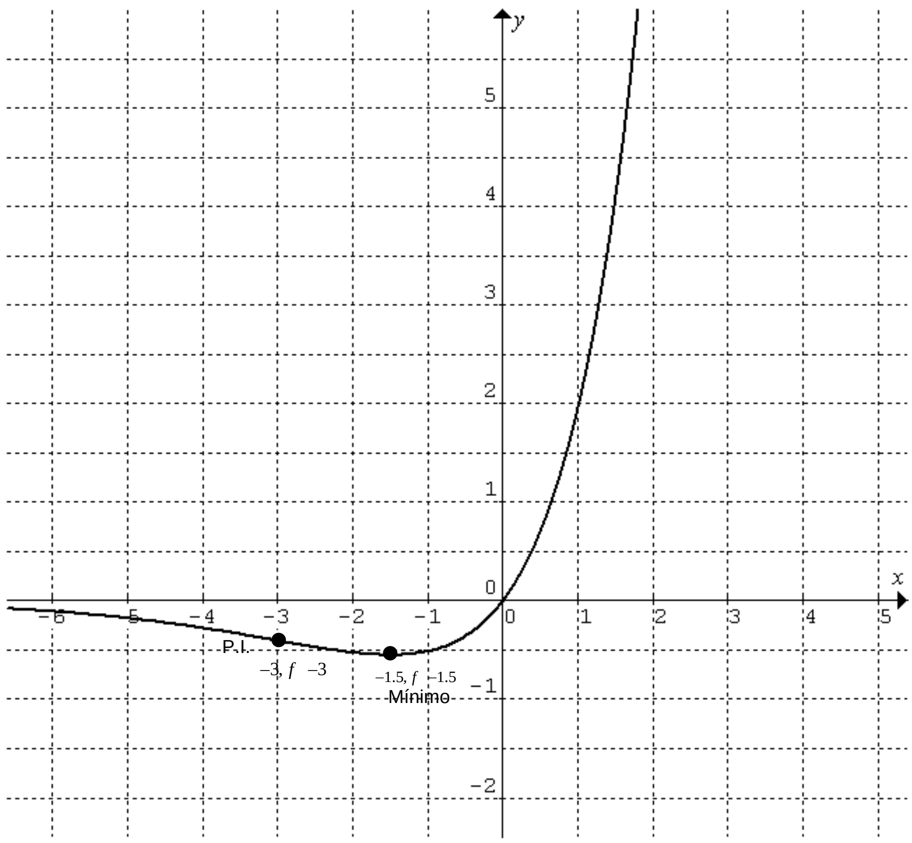
$$f''(x) = \frac{2}{3}e^{\frac{2x}{3}} + \frac{2}{3}\left(e^{\frac{2x}{3}} + \frac{2}{3}xe^{\frac{2x}{3}}\right) = \frac{4}{3}e^{\frac{2x}{3}}\left(1+\frac{x}{3}\right) = \frac{4}{9}e^{\frac{2x}{3}}(x+3)$$

El signo de la segunda derivada no depende de la función exponencial, entonces:

$f''(x) < 0; \quad \forall x < -3$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -3)$

$f''(x) > 0; \quad \forall x > -3$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(-3, \infty)$

- Punto de inflexión: $(-3, f(-3))$



DESEMPEÑO				
INSUFICIENTE	REGULAR	SATISFACTORIO	Muy Bueno	EXCELENTE
Vacío o inicia procedimientos incorrectos	Determina simetría, asíntotas pero se equivoca en derivar	Cálculos correctos pero se equivoca en la determinación de intervalos o interpretación de los resultados	Interpreta correctamente los resultados pero grafica incorrectamente	Bosqueja correctamente el gráfico de f mostrando procesos correctos y completos
0	1-5	5-9	10-14	15