Matemáticas Discretas

Capítulo 1:
Lógica Matemática
Y Demostraciones

Lógica Matemática

La lógica:

- Estudio del razonamiento.
- Se analiza si un razonamiento es correcto.
- Se centra en las relaciones entre los enunciados
- No se centra en el contenido (significado) de un enunciado particular.

Cont...

- **Por ejemplo:**
  - Todos los estudiantes llevan calculadora
  - Los que usan calculadora son estudiosos
  - Por lo tanto:
    - Todos los estudiantes son estudiosos.

Cont...

- A la lógica no le interesa el significado de las dos premisas.
- La lógica no permite determinar si estos enunciados son verdaderos, pero si los dos primeros son ciertos entonces la lógica garantiza que el tercer enunciado (conclusión) es verdadero.
- Los métodos lógicos son usados en matemáticas para probar teoremas, en computación para determinar si un programa realiza lo que se propone y en sistemas digitales para calcular las salidas de los circuitos.

Proposiciones

- Una proposición o enunciado es una oración que declara que algo es verdadero o falso pero no ambas cosas.
- Se expresa con una afirmación declarativa y no como una pregunta, instrucción, etc.
- Son los bloques de construcción básicos para cualquier teoría de la lógica.
- Generalmente se las representa con letras minúsculas: p, q, r (variables positivas)

Cont...

- **Ejemplo:**
  - Son proposiciones:
    - Ayer llovió
    - El sol esta brillando hoy
    - 7 es un número primo
    - 1+1 = 3
    - Margaret Michell escribió *Lo que el viento se llevó*
  - **No** son proposiciones:
    - ¡Qué bonita tarde!
    - Mira si esta lloviendo
    - Si n fuera número primo
    - ¿es 4.5 entero?

Conectores

- Sirven para combinar proposiciones o variables positivas
- Son la conjunción "y" y la disyunción "ó"
- El resultado de unir dos o más proposiciones se llama proposiciones compuestas
- La negación no es un conector pero también nos da una proposición compuesta.

Cont...

- Negación
  - Si p es una proposición, la negación de p es la proposición **"no p"** denotada por **~p o $\overline{p}$**
    - **~p** : "no es el caso p"
  - De esta definición se desprende que:
    - si **p es verdadera** entonces **~p es falsa**
    - si **p es falsa** entonces **~p es verdadera**
  - La tabla de verdad es:

p	~p
V	F
F	V

Cont...

- Conjunción
  - Su símbolo en lógica es el "$\wedge$": $p \wedge q$
  - En programación generalmente se usa el "&": p&q
  - Otras representaciones son: p·q, pq
  - En texto normal se identifica claramente por la conjunción "y"

Cont...

- Cont..
  - Sean p y q proposiciones.
  - La **conjunción** de p y q denotado **p∧q** es la proposición **p y q**
    - Si p: 1 + 1 = 3
      q: Un decenio tiene 10 años
    - La conjunción de p y q es
      p∧q: 1 + 1 = 3 y un decenio tiene 10 años
  - La tabla de verdad es:

p	q	p∧q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Cont...

- Disjunción
  - Su símbolo en lógica es el "$\vee$": $p \vee q$
  - En programación generalmente se usa el "|": p | q
  - Otra representación es: p+q
  - En texto normal se identifica claramente por la disjunción "o"

Cont...

- Cont..
  - Sean p y q proposiciones.
  - La **disjunción** de p y q denotado **p∨q** es la proposición **p o q**
    - Si p: 1 + 1 = 3
      q: Un decenio tiene 10 años
    - La disjunción de p o q es
      p ∨ q: 1 + 1 = 3 ó un decenio tiene 10 años
  - La tabla de verdad es:

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Cont...

- Tablas de Verdad
  - Son el enunciado de todos los valores de verdad que pueden tomar las proposiciones dentro de una proposición compuesta.

Cont...

- **Representación de texto natural**
  - Se puede transformar un texto natural a expresiones lógicas dividiéndolo en proposiciones y operadores (disjunción, conjunción y negación)
  - Esta conversión nos ayuda a determinar más fácilmente el valor de verdad de la expresión.

Cont...

- Cont ...
  - En cierto país esta prohibido tener más de tres gatos y tres perros en una casa. Si una persona tiene 6 perros, pero ningún gato, ¿esta infringiendo la ley?
  - Convirtiendo:
    - p: tiene más de tres gatos
    - q: tiene más de tres perros
    - Si $p \wedge q$ es verdadero, infringen la ley
    - Para el hombre q es verdadero, y p es falso por tanto $p \wedge q$ es falso, por tanto no infringe la ley.

Proposiciones Condicionales

- Cuando tenemos una proposición de la forma si p entonces q, decimos que tenemos una proposición condicional.
- Esto significa que si p es verdadero, q tiene que ser verdadero también para que la expresión sea verdadera.
- Si p es falso, no importa el valor de q, la expresión será verdadera.
- Se representan como:
  - $p \Rightarrow q$
- A “p” se la conoce como hipótesis y a “q” como conclusión.

Cont...

- **Definición:**
  - Si p y q son proposiciones, la proposición compuesta: si p entonces q es una proposición condicional y se denota: $p \to q$
    - p es la hipótesis o antecedente
    - q es la conclusión o consecuente
  - Ejemplo:

1) p: tengo hambre
   q: comeré
   $p \to q$: Si tengo hambre, entonces comeré

2) p: está nevando
   q: 3 + 5 = 8
   $p \to q$: Si está nevando, entonces 3 + 5 = 8

Cont...

- En el lenguaje natural tiene varias formas de ser expresado:
  - **Si p entonces q**
  - **p solo si q**
  - **q es condición necesaria para p**
  - **p es condición suficiente para q**

Cont...

- **Ejercicio en clases 1.2.3:**
  - Enuncie cada proposición en forma de proposición condicional.

a) María será una buena estudiante si estudia mucho.
b) Juan puede cursar cálculo sólo si está en su segundo, tercer o cuarto año de estudio de licenciatura.
c) Cuando cantas, me duelen los oídos.
d) Una condición necesaria para que los cochorros ganen la serie mundial es que consigan un lanzador relevista derecho.
e) Una condición suficiente para que Rafael visite California es que vaya a Disneylandia.

Cont...

- **resolución:**

a) Si María estudia mucho, entonces será una buena estudiante.
b) Si Juan cursa cálculo, entonces está en segundo, tercer o cuarto año de estudio de licenciatura.
c) Si cantas, entonces me duelen los oídos.
d) Si los cachorros ganan la serie mundial, entonces ha contratado un lanzador relevista derecho.
e) Si Rafael va a Disneylandia, entonces estará visitando California.

Cont...

- **Ejercicio en clases 1.2.6:**
  - Si p es verdadera, q es falsa y r es verdadera, determine el valor de verdad de cada proposición condicional.
    a) $(p \wedge q) \rightarrow r$
    b) $(p \vee q) \rightarrow \sim r$
    c) $p \wedge (q \rightarrow r)$
    d) $p \rightarrow (q \rightarrow \sim r)$

Recíproco

- Las proposiciones condicionales son válidas en un solo sentido:
- Que $p \Rightarrow q$ no es lo mismo que $q \Rightarrow p$
- A $q \Rightarrow p$ se le llama el recíproco de $p \Rightarrow q$
- Una proposición condicional puede ser verdadera y su recíproca puede ser falsa

Cont...

- Ejemplo 1:
  - Si me saco la loteria entonces soy millonario
  - Si soy millonario entonces me saco la loteria.
- Ejemplo 2:
  - Si 1<2, entonces 3<6
    - p: 1<2 Verdadero
    - q: 3<6 Verdadero
    - $p \rightarrow q$ Verdadero
    - $q \rightarrow p$ El reciproco es Verdadero
- Ejemplo 3:
  - Si 1>2, entonces 3<6
    - p: 1>2 Falso
    - q: 3<6 Verdadero
    - $p \rightarrow q$ Verdadero
    - $q \rightarrow p$ El reciproco es Falso

Proposición Bicondicional o Equivalencia

- Equivalencia
  - … ya que ambas proposiciones tienen siempre los mismos valores de verdad.
  - A las equivalencias se las representa como:

$$P \equiv Q$$

- Bicondicional
  - … cuando la implicación (proposición compuesta) va en los dos sentidos se
  - Se representa por:

$$p \Leftrightarrow q$$

$$p \leftrightarrow q$$

Cont...

- **Definición:**
  - Supongamos que las propociones compuestas P y Q están formadas por las proposiciones p_1, p_2,…,p_n. Decimos que P y Q son lógicamente equivalentes y escribimos

    $$P \equiv Q$$

    siempre que dados cualesquiera valores de verdad de p_1, p_2,…,p_n, P y Q sean ambas verdaderas o falsas.

Cont...

- Es verdadero solamente cuando p y q tienen el mismo valor de verdad.
- El valor de verdad de la proposición de define por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Cont...

- En el lenguaje natural tiene varias formas de ser expresado:
  - **p si y solo si q**
  - **p es equivalente a q**
  - **p ssi q**
  - **p es condición necesaria y suficiente para q**

Cont...

- Ejemplo 1:
  - Soy buen alumno sí y solo sí tengo buenas notas
- Ejemplo 2:
  - La afirmación 1<5 si y solo si 2<8 se puede escribir **$p \leftrightarrow q$**
  - Definimos:
    - p: 1<5 Verdadera
    - q: 2<8 Verdadera
    - Entonces **$p \leftrightarrow q$ es verdadera**
  - Otra manera de expresar la afirmación es:
    - **Una condición necesaria y suficiente para 1<5 es que 2<8**

Cont...

- Ejemplo: (Leyes de DeMorgan)
  - Los teoremas de DeMorgan son:
    - $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
    - $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
  - Demostración por tabla de verdad.
    - Para la primera:

p	q	~(p v q)	~p ∧ ~q
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	V

- Dados cualesquiera valores de verdad de p y q, P y Q son ambas verdaderas o ambas falses, entonces **P ≡ Q**

Cont...

- **Ejercicio en clases:**
  - Demostrar que la negación de $p \rightarrow q$ es lógicamente equivalente a $p \wedge \sim q$
  - Demostrar que: $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Contrarrecíproco o contrapositiva

- **Definición:**
  - El contrareciproco de una proposición condicional $p \Rightarrow q$ es la proposición
    - $\sim q \Rightarrow \sim p$
  - Se puede demostrar que:
    - $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
  - Nótese que no es lo mismo el recíproco que el contrarecíproco.

Cont...

- Ejemplo 1:
  - Demostrar que la proposición condicional y su contrapositiva son equivalentes:

p	q	~p	~q	p → q	~q → ~p
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

- Ejemplo 2:
  - Si 1<4, entonces 5>8 p: 1<4, q: 5>8
    - Simbólicamente: $p \rightarrow q$ (Falso)
    - Reciprocamente: $q \rightarrow p$ (Verdadero)
      - Si 5>8, entonces 1<4
    - Contrapositiva: $\sim q \rightarrow \sim p$ (Falso)
      - Si 5 no es mayor que 8, entonces 1 no es menor que 4

Lógica Matemática

Cont...

- **Deber:**
  - Hacer los ejercicios Impares de la pagina 16, 17, 18

Lógica Matemática

Cuantificadores

- Cuando se usa variables en las sentencias, necesitamos de cuantificadores para convertirlas en proposiciones.
  - n es primo (no es una proposición, no tiene un valor de verdad, depende de cuanto valga n)
  - Todo n es primo (es una proposición, ya que su valor de verdad es falso)

Lógica Matemática

Cont...

- Definición:
  - Sea P(x) un enunciado que contiene la variable x y sea D un conjunto. P es una función preposicional (con respecto a D) si para cada x en D, P(x) es una proposición. *D es el dominio de discurso de P*.
    - P(x) es la propiedad que tienen en común los elementos de un conjunto. Así un elemento de {x | P(x)} es un objeto t para el cual la proposición P(t) es verdadera.
    - En una oración de estas P(x) es el predicado.

Lógica Matemática

Cont...

- Ejemplo
  - Sea A = {x | x es un entero menor que 8}
    - P(x) es la oración:
      - "x es un entero menor que 8"
    - La proposición común es:
      - "es un entero menor que 8"
    - Como P(1) es verdadero, 1 Є A

Cont...

- Cuantificador Universal
  - Cuando aseveramos que todos los elementos de un conjunto dado, cumplen cierta condición usamos el cuantificador universal.
  - Se representa como: $\forall$x en D, P(x)
    - Donde x es la variable, D es el conjunto o dominio de referencia y P es la proposición que x debe hacer verdadera para todos sus valores, para que toda la expresión sea verdadera.
    - La cuantificación universal de un predicado P(x) es la proposición
      - "Para todos los valores de x, P(x) es verdad"

Cont...

- Cont..
  - En lenguaje natural se expresa de esta manera:
    - Para todo x en D, se cumple P(x)
    - Para cualquier x en D, es verdad que P(x)
  - El cuantificado universal $\forall$ se lee:
    - **"Para cada"**
    - **"Para todo"**
    - **"Para cualquier"**

Cont...

- Cont..
  - Ejemplo 1:
    - Para todo x en los reales, si x>1 entonces x+1>1
    - $\forall$x en R, $x>1 \Rightarrow x+1>1$
  - Ejemplo 2:
    - Sea Q(x): $x + 1 < 4$
    - Entonces $\forall x \geq 0$, Q(x) es una proposición falsa porque Q(5) no es verdadera.

Cont...

- Cuantificador Existencial
  - Cuando aseveramos que al menos un elemento de un conjunto cumple con una condición, estamos utilizando el cuantificador existencial.
  - Se representa como:
    - $\exists$x en D, P(x)
      - Donde x es la variable que tiene como dominio el conjunto D y se afirma que al menos uno de los elementos de este conjunto da un valor verdadero a P(x) al ser reemplazado

Cont...

- Cont...
  - En el lenguaje natural se expresa como:
    - Para algún x en D, se cumple P(x)
    - Para al menos un x en D, es verdad que P(x)
    - Existe al menos un x en D, tal que P(x)
  - Ejemplo:
    - Existen x en los Reales, tales que x>0
    - $\exists x$ en R, x>0

Cont...

- Veracidad de Cuantificadores
  - Para determinar que una proposición cuantificada universalmente es falsa basta con hallar un contraejemplo (valor de la variable que haga que la proposición sea falsa)
  - Para determinar que una proposición existencial es falsa hay que probar que todos los elementos no cumplen con la proposición.

Cont...

- Leyes Generalizadas de DeMorgan
  - Son reglas aplicadas a los cuantificadores:
    - $\sim(\forall x P(x)) \equiv \exists x \sim P(x)$
    - $\sim(\exists\, x P(x)) \equiv \forall x \sim P(x)$
  - Demostración por enumeración y leyes de DeMorgan tradicionales.

Cont...

- Cont...
  - Ejemplo:
  - “No todo lo que brilla es oro” es igual a decir “Hay cosas que brillan y no son oro”
    - p: x brilla
    - q: x es oro
    - P(x): $p \Rightarrow q$
    - $\sim(\forall x P(x)) \equiv \exists x \sim P(x)$

Cont...

- Cuantificadores con múltiples variables
  - Se pueden tener varios cuantificadores para varias variables.
  - Ejemplo:
    - Para todo número real, hay otro número real, tal que sumados, el resultado es 0
    - $\forall x \exists y$ en R, $x+y=0$

Lógica Matemática

Cont...

- Deber
  - Ejercicios impares de las paginas 32 y 33

Lógica Matemática

Propiedades para las operaciones con proposiciones

- **Propiedades Conmutativas**
  - $p \vee q \equiv q \vee p$
  - $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- **Propiedades Asociativas**
  - $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
  - $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
- **Propiedades Distributivas**
  - $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  - $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- **Propiedades Idempotentes**
  - $p \vee p \equiv p$
  - $p \wedge p \equiv p$
- **Propiedades de negación**
  - $\sim(\sim p) \equiv p$
  - $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$
  - $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$

Lógica Matemática

Propiedades para las operaciones de implicación

- $(p \rightarrow q) \equiv ((\sim p) \vee q)$
- $(p \rightarrow q) \equiv ((\sim q) \rightarrow \sim p)$
- $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$
- $\sim(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$
- $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p))$

- Ejercicio en clases:
  - Hacer las tablas de verdad de las dos últimas

Propiedades para los cuantificadores

- $\sim(\forall x\ P(x)) \equiv \exists x \sim P(x)$
- $\sim(\exists x \sim P(x)) \equiv \forall x\ P(x)$
- $\exists x\ (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)$
- $\exists x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x) \equiv \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$
- $\exists x\ (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$

Demostraciones

- Sistemas matemáticos
  - Estas formados por:
    - Axiomas
    - Definiciones
    - Teoremas
      - Lemas
      - Corolarios
    - Términos no definidos en definidos en forma explícita sino implícita mediante los axiomas.

Cont...

- Axiomas
  - Son verdades establecidas e irrebatibles dentro del sistema.
  - Ejemplos:
    - Dados dos puntos, existe una y solamente una línea que los contiene a ambos.
    - Para todos los números reales ***x*** y ***y***, ***x y*** = ***y x***

Cont...

- Definiciones
  - Nuevos conceptos que se elaboran a partir de los términos ya existentes.
  - Ejemplos:
    - Conjunto vacío es aquel que carece de elementos.
    - El valor absoluto |x| de un número real x es x si x es positivo o 0 y en caso contrario es -x

Cont...

- Teoremas
  - Los teoremas se pueden derivar de proposiciones que se han probado, son correctas.
  - Es una proposición cuya verdad se ha demostrado.
  - Algunos se conocen como lemas y corolarios.
  - Ejemplo:
    - x es un número real, si x>1 entonces x+1>1
    - Si los tres lados de un triangulo son iguales, entonces los ángulos opuestos a ellos son iguales. (a)

Cont...

- Lemas
  - Son teoremas que por si mismos no tienen gran uso, pero sirven para demostrar otros teoremas.
  - Ejemplo:
    - Si x es un entero positivo, entonces x -1 es positivo o x -1 =0

Cont...

- Corolarios
  - Son teoremas que se deducen fácilmente de otro teorema.
  - Ejemplo:
    - Si un triángulo es equilátero, tiene sus 3 ángulos iguales
    - Si un triangulo es equilátero, entonces es equiángulo. (a partir de (a))

Las Pruebas

- Las pruebas son el argumento de que nos valemos para establecer la validez de un teorema
- Hay muchos tipos de pruebas, dos de las más sencillas son:
  - La prueba directa (Demostración Directa)
  - La prueba por contradicción (Demostración por Contradicción)

Cont...

- **Prueba Directa**
  - **Frecuentemente los teoremas tienen la forma:**

    Para todo $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, si $p(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, entonces $q(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$
  - Esta afirmación cuantificada universalmente es verdadera siempre que la proposición condicional
    1. **si $p(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, entonce $q(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$**

    sea verdadera para todo $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ en el dominio en discurso

Cont...

- Cont...
  - Para demostrar esto suponemos que $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son elementos arbitrarios del dominio en discurso.
  - Si $p(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ es falsa entonces (1) es verdadero
  - Así sólo es necesario considerar el caso en que $p(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ sea verdadera.
  - Entonces debemos probar que q(x1,...,xn) es verdadero, usando a p(x1,...,xn), demás axiomas y teoremas previamente derivados.

Cont...

- Cont...
  - Ejemplo:
    - Para todos los números reales d, d_1, d_2 y x
    - Si $d = \min[d_1, d_2]$ y $x \leq d$, entonces $x \leq d_1$ y $x \leq d_2$
    - Demostración
      - Asumimos que d, d_1, d_2 y x son números reales arbitrarios
      - Suponemos $d = \min[d_1, d_2]$ y $x \leq d$ es verdadero y tratamos de probar que $x \leq d_1$ y $x \leq d_2$ también lo es.
      - Por la definición de mínimo $d \leq d_1$ o $d \leq d_2$
      - Si $x \leq d$ entonces $x \leq d_1$
      - Si $x \leq d$ y $d \leq d_2$ entonces $x \leq d_2$
      - Entonces $x \leq d_1$ y $x \leq d_2$

Cont...

- **Prueba por Contradicción**
  - Se asume que la conclusión es falsa, siendo la hipótesis verdadera:
    - p y ~q son verdadero y se trata de llegar a una contradicción de la forma: $\sim r \wedge r$
  - A esta prueba también se la conoce como prueba indirecta.
  - Colocado en notación lógica es igual a:
    - $p \wedge \sim q \Rightarrow \sim r \wedge r$

Cont...

- Cont...
  - La demostración por contradicción puede justificarse observando que $p \rightarrow q$ y $p \wedge \sim q \rightarrow r \wedge \sim r$ son equivalentes.

p	q	R	p → q	p ∧ ~q	r ∧ ~ r	p ∧ ~q → r ∧ ~ r
V	V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V

Cont...

- Cont...
  - Otra manera de verla es que:
    - Este método se basa en la tautología
      $((p \rightarrow q) \wedge (\sim q)) \rightarrow (\sim p)$
  - En consecuencia la regla de inferencia

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{\sim q} \\ \therefore \sim p \end{array}$$

es válida

  - Esto establece que si una proposición p implica una proposición falsa q, entonces p debe ser falsa.

Cont...

- Cont...
  - Ejemplo 1:
    - Para todos los reales *x* y *y*, si $x+y \geq 2$ entonces $x \geq 1$ o $y \geq 1$
    - Demostración
      - p: $x+y \geq 2$ (verdadera) y q: $x \geq 1$ o $y \geq 1$ (asumimos falso)
    - Negamos la conclusión y aplicamos DeMorgan
      - $x<1$ y $y<1$
    - Un teorema anterior nos permite sumar las desigualdades
      - $x+y< 1+1 = 2$ ($\sim q$ es falso por lo tanto q es verdadero)
      - Hemos obtenido la contradicción $p \wedge \sim p$
    - De esta manera concluimos que la afirmación es verdadera

Cont...

- Cont...
  - Ejemplo 2:
    - Demuestre que no hay número racional alguno p/q cuyo cuadrado sea 2. En otras palabras demuestre que $\sqrt{2}$ es irracional.
    - Demostración
      - Supóngase que $\mathbf{(p/q)^2=2}$ para algunos enteros p y q, que no tienen factores comunes
      - $\mathbf{p^2/q^2 = 2}$ entonces $\mathbf{p^2= 2q^2}$
      - por lo tanto $\mathbf{p^2}$ **es par** y **p es par** (el cuadrado de un impar es impar)
      - Entonces **p=2n** para algún entero n
      - $\mathbf{2q^2=p^2=(2n)^2=4n^2}$
      - $\mathbf{q^2=2n^2}$ en consecuencia $\mathbf{q^2}$ **es par** y **q es par**
      - **p y q son par** por lo tanto tienen un factor común de 2, lo cual es una contradicción a la suposición
      - Entonces la suposición es falsa

Cont...

- **Prueba por Contrapositiva**
  - Si en una demostración por contradicción deducimos ~p entonces hemos demostrado ~q → ~p
  - Ejemplo:
    - Sea **n** un entero. Demuestre que si n^2 es impar entonces n es impar.

      p: n^2 es impar
      q: n es impar
      - Debemos demostrar que p→q es verdadera
      - En su lugar demostramos la contrapositiva ~q → ~p (verdadero)
      - Suponemos: n no es impar ⇒ n es par
        ⇒ n = 2K, donde k es un entero
      - $n^2 = (2k)^2 = 4K^2 = 2(2k^2)$
      - Por lo tanto n es par y n^2 es par, lo cual es la contrapositiva de la proposición

        p → q ≡ ~q → ~p (verdadero)

Cont...

- **Prueba por Contraejemplo**
  - Ejemplo:
    - Si ***x*** y ***y*** son números reales, $(x^2 = y^2) \leftrightarrow (x=y)$.
      - Por medio de un contraejemplo se demuestra
      - $(-3)^2 = (3)^2$ y $-3 \neq 3$
      - Entonces el resultado es falso

Cont...

- **Argumentos**
  - Consideremos las siguientes proposiciones
    - El problema está en el módulo 17 o en el módulo 81
    - El problema es un error numérico
    - El módulo 81 no tiene un error numérico
  - Suponiendo que son verdaderas entonces es razonable concluir:
    - El problema está en el módulo 17

Cont...

- **Razonamiento deductivo**
  - **Es proceso de extraer una conclusión a partir de una serie de proposiciones**
    - **Hipótesis o premisas**
      - El problema está en el módulo 17 o en el módulo 81
      - El problema es un error numérico
      - El módulo 81 no tiene un error numérico
    - **Conclusión**
      - El problema está en el módulo 17

Lógica Matemática

Cont...

- **Argumento deductivo**
  - Consta de ciertas hipótesis y una conclusión
    - Su forma es:
      - Si p_1 y p_2 y p_3 y … y p_n, entonces q
  - El argumento es válido: si p_1 y p_2 y p_3 y … y p_n son verdaderas, entonces q es verdadera

Lógica Matemática

Cont...

- Cont…
  - **Definición**
    - Un argumento es una serie de proposiciones que se escriben:

Hipótesis o Premisas $\left\{ \begin{array}{l} p1 \\ p2 \\ p3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ pn \end{array} \right.$ o p1, p2, p3, ⋯, pn / ∴q

Conclusión ∴q

Lógica Matemática

Cont...

- Cont…
  - Un argumento es válido siempre que p_1 y p_2 y p_3 y … y p_n sean todas verdaderas, entonces q deberá ser también verdadera, en caso contrario el argumento no es válido (falacia)
  - No se dice que la conclusión es verdadera; si no que si se garantizan las hipótesis entonces también se garantiza la conclusión, pues un argumento es válido debido a su forma, no a su contenido

Lógica Matemática

Cont...

- Cont...
  - Ejemplo 1:
    - Determine si el argumento

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p} \\ \therefore q \end{array}$$

es válido

- Solución 1
  - Observemos que siempre que las hipótesis p→q y p son verdaderas las conclusión q también es verdadera
  - Entonces el argumento es válido

p	q	p → q	P	q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

- Solución 2
  - Podemos verificar directamente y suponemos que p→q y p son verdaderas, entonces q debe ser verdadera , ya que en caso contrario p→q debería ser falsa y el argumento por lo tanto es válido

Cont...

- Cont...
  - Ejemplo 2:
    - Represente el argumento

      Si 2=3, entonces me comí mi sombrero
      me comí mi sombrero
      ___
      ∴ 2=3

    - En forma simbólica
      - p: 2=3,
      - q: me comí mi sombrero
    - El argumento puede escribirse

      $p \rightarrow q$
      q
      ___
      $\therefore p$

  - Si el argumento es válido, entonces siempre que $p \rightarrow q$ y q sean ambas verdaderas, p debería ser verdadera.
  - Supongamos que $p \rightarrow q$ y q son verdaderas. Esto es posible si p es falso y q es verdadero
  - Pero como p no es verdadero, entonces el argumento no es válido.

Cont...

- Deber
  - Ejercicios 7, 8, 9, 10-14, 16, 17, 19, 21, 24, 25, 26 de las paginas 40 y 41

Cont...

- Prueba por Resolución
  - Resolución es un método de prueba propuesto por J. A. Robinson en 1965.
  - Depende de la regla:
    - Si $p \vee q$ y $\sim p \vee r$ son verdaderas, entonces $q \vee r$ es verdadero.
  - Esta regla puede ser probado utilizando las Tablas de verdad

Cont...

- Cont...
  - Para realizar la prueba por resolución, la hipótesis y la conclusión deben estar escritas como cláusulas.
  - Una cláusula consiste en varios términos separados por "o", donde cada término es una variable o la negación de una variable.
  - La siguiente expresión es una cláusula:
    - $a \vee b \vee \sim c \vee d$
  - Estas expresiones no son cláusulas:
    - $xy \vee w \vee \sim z$ (xy no es una variable sino dos)
    - $p \Rightarrow q$ (no están separadas por "o")

Lógica Matemática

Cont...

- Cont...
  - Una demostración directa por resolución se realiza aplicando varias veces la regla a pares de afirmaciones, para deducir nuevas afirmaciones, hasta que se obtenga la conclusión.
  - Se puede probar por resolución que si:
    1. a v b
    2. ~a v c
    3. ~c v d

    ∴ b v d

  Son verdaderos
  b v d es verdadero también

Lógica Matemática

Cont...

- Cont...
  - Aplicamos la regla a 1 y 2, deducimos:
    4. b v c
  - Aplicamos la regla a 3 y 4, deducimos:
    - b v d
  - Esta es la conclusión deseada, con lo cual hemos demostrado la afirmación

Lógica Matemática

Cont...

- Cont...
  - Casos especiales de la regla de resolución son:
    - Si p v q y ~p es verdad, entonces q es verdadera
    - Si p y ~p v r es verdad, entonces r es verdadera

Lógica Matemática

Cont...

- Cont...
  - Ejercicio 1 en clase:
    - Probar que
      1. a
      2. ~a v c
      3. ~c v d
      - Concluimos que: d

Cont...

- Cont...
  - Se puede utilizar el reemplazo en caso de tener dos variables juntas:
    - ~(a v b) = ~a ∧ ~b
    - a v bc = (a v b) ∧ (a v c)
  - Ejercicio 2 en clase:
    - Usar remplazo
      - a v ~bc
      - ~(a v d)

Cont...

- Cont...
  - Ejercicio 3 en clase:
    1. a v ~b
    2. ~a v c
    3. ~c
    4. ~b
    5. Concluimos ~b
  - Resolución
    - Aplicamos la regla a:
    - 1 y 2, deducimos:
      6. ~ b v c
    - 6 y 3, deducimos:
      7. ~ b
    - 7 y 4, deducimos:
      8. ~ b

Cont...

- Deber 3
  - Ejercicios del 1 al 8 de la pagina 46

Inducción Matemática

- La inducción matemática establece la siguiente regla:
  - Si un teorema se cumple para 1 y para n, también se cumple para n+1
- Dicho de otra manera, si un teorema se cumple para un caso base y para un número cualquiera, también se cumplira para el siguiente número.

Cont...

- Cont...
  - Imaginemos que tenemos un número n de esferas.
  - Sabemos que la primera esfera es roja, y que las demás esferas son rojas si todas las anteriores son rojas.
  - A partir de estas dos proposiciones, podemos deducir que todas las esferas son rojas

Cont...

- Cont...
  - Principio de la Inducción Matemática
    - Supongamos que para cada entero positivo n tenemos una afirmación S(n) que es verdadera o falsa.
    - Suponemos que:
      a) S(1) es verdadera
      b) si S(i) es verdadera, para toda i<n+1, entonces S(n+1) es verdadera
    - La conclusión a la que podemos llegar de estas dos verdades es que S(n) es verdadera para todo entero positivo n.

Cont...

- Cont...
  - La prueba por inducción se puede separar en dos pasos:
    - El paso Base, y
    - El paso Inductivo
  - El paso Básico se encarga de demostrar que P(1) es verdadero.
  - El paso Inductivo se encarga de demostrar que si P(n) es verdad, P(n+1) es verdad también.

Cont...

- Cont...
  - Ejemplo1:
    - Demostrar que $n! \geq 2^{n-1}$ para n=1, 2...
    - Paso Base:
      - $1! \geq 2^{1-1}$ (Verdadero)
    - Paso Inductivo
      - Asumimos que $n! \geq 2^{n-1}$
      - Vemos si $(n+1)! \geq 2^{n+1-1}$
      - Utilizando matemáticas llegamos a la conclusión de que es verdadero
    - Conclusión
      - $n! \geq 2^{n-1}$ para n=1, 2...

Cont...

- Cont...
  - Cuando se demuestra que P(i) es verdadero para todos los valores i<n+1, y se prueba que P(n+1) es verdad, se le llama forma fuerte de inducción matemática.
  - La otra alternativa es asumir que si P(n) es verdadero, y demostrar que a partir de ahí que P(n+1) también debe ser verdadero.

Cont...

- Cont...
  - Ejemplo 2:
    - Demostrar que Si n es un entero positivo, entonces n(n+1) es divisible por 2.
    - Paso Base:
      - Sea n = 1 , entonces n(n + 1) = 2 (Verdadero)
    - Paso Inductivo
      - Hipótesis inductiva: k(k + 1) es divisible por 2
        Por demostrar: (k + 1)(k + 2) es divisible por 2
        Demostración:
        (k + 1)(k + 2) = k(k + 1) + 2(k + 1)
        k (k + 1) es divisible por 2 (hipótesis)
        2 (k + 1) es divisible por 2 (entero par)
    - Conclusión
      - Por lo tanto (k + 1)(k + 2) es divisible por 2

Cont...

- Cont...
  - Ejemplo 3:
    - $2 + 6 + 10 + ... + (4n - 2) = 2n^2$, n=1, 2, ...
    - Paso Base:
      - **Si n = 1, entonces 2 = 2 (Verdadero)**
    - Paso Inductivo
      - **Hipótesis inductiva:** $2 + 6 + 10 + ... + (4k - 2) = 2k^2$
      - **Por demostrar:**
        $2 + 6 + 10 + ... + (4k - 2) + (4(k + 1) - 2) = 2(k + 1)^2$
      - **Demostración:**
        $2 + 6 + 10 + ... + (4k - 2) = 2k2$ **(hipótesis)**
        $2 + 6 + 10 + ... + (4k - 2) + (4(k + 1) - 2) = 2k^2 + (4(k + 1) - 2)$
        $2 + 6 + 10 + ... + (4k - 2) + (4(k + 1) - 2) = 2(k + 1)^2$
    - Conclusión
      - Se cumple

Cont...

- Cont...
  - Ejemplo 4:
    - **Demostrar que Si n es un entero positivo, entonces $3^{2n} + 7$ es divisible por 8.**
    - Paso Base:
      - **Sea n = 1, entonces $3^{2n} + 7 = 16$ (Verdadero)**
    - Paso Inductivo
      - **Hipótesis inductiva: $3^{2k} + 7$ es divisible por 8**
      - **Por demostrar: $3^{2(k+1)} + 7$ es divisible por 8**
      - **Demostración:**
        $3^{2k} + 7$ es divisible por 8 (hipótesis)
        $3^{2(k+1)} + 7$ es divisible por 8
        $3^{2k} * 3^2 + 7$ es divisible por 8
        $9(3^{2k}) + 7$ es divisible por 8
        $(8+1)(3^{2k}) + 7$ es divisible por 8
        $8(3^{2k}) + ((3^{2k}) + 7)$ es divisible por 8
    - Conclusión
      - Por lo tanto **$3^{2(k+1)} + 7$ es divisible por 8**

Cont…

- Demuestra por inducción matemática que:

1) Si n es un entero positivo mayor que 1, entonces $2^{2n} - 3n - 1$ es divisible por 9.

2) Sean a y n enteros positivos, entonces $a^{2n} - 1$ es divisible por $a + 1$

3) $a^n - b^n$ es divisible por $a - b$

4) $a^{2n} - b^{2n}$ es divisible por $a + b$

5) $a^{2n-1} - b^{2n-1}$ es divisible por $a - b$

6) $1 * 2 + 2 * 3 + \ldots + n(n+1) = n(n+1)(n+2) / 3$

7) $2^3 + 4^3 + \ldots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$