# Matemáticas Discretas

**Capítulo 2:**
**El lenguaje de las Matemáticas**





## Conjuntos

- **Definiciones**
  - Un conjunto es una colección de objetos en la cual no importa su orden, y no se admiten objetos repetidos.
  - Colección arbitraria.





## Cont...

- Si un conjunto es finito, y no demasiado grande se puede describirlo listando sus elementos:
  - A = {1,2,3,4}
- El conjunto queda determinado por sus elementos y no por el orden. Así:
  - A = {1,3,4,2}
- Los elementos que conforman un conjunto son distintos.
  - Si se duplican en una lista, solo una ocurrencia de cada elemento esta en el conjunto.
  - A = {1,2,2,3,4}





## Cont...

- Si un conjunto es finito pero demasiado grande, o es infinito, lo describimos listando las propiedades necesarias para que un elemento pertenezca a ese conjunto
  - B = {x | x es un entero positivo impar}
  - B es igual al conjunto de todas las x tal que x es un entero positivo impar
- La línea “|” se lee “tal que”, también se representa por “:”.
- La propiedad necesaria es:
  - x sea un entero positivo impar

## Cont...

- Si x está en el conjunto X, escribimos $x \in X$
- Si x no está en el conjunto X, escribimos $x \notin X$
- Si X es un conjunto finito
  - |X| = número de elementos en X





## Cont...

- **Conjunto Vacio**
  - Es el conjunto con 0 elementos
    - $\emptyset = \{ \}$
- **Conjuntos Iguales**
  - X y Y son iguales si X y Y tiene los mismo elementos
    - X=Y si
      - siempre que $x \in X$ entonces $x \in Y$ para todo $x \in X$
      - siempre que $x \in Y$ entonces $x \in X$ para todo $x \in Y$
    - **Ejemplo:**
      - Si $A = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$ y $B = \{2, -3\}$ entonces A=B





## Cont...

- **Subconjuntos**
  - Supongamos que X y Y son conjuntos. Si todos los elementos de X son elementos de Y, decimos que X es un subconjuntode Y y escribimos $X \subseteq Y$
    - $X \subseteq Y$ = si $x \in X$ entonces $x \in Y$
    - **Ejemplo:**
      - Si $C = \{1,3\}$ y $A = \{1,2,3,4\}$ entonces C es un subconjunto de A





## Cont...

- Cont...
  - Todo conjunto es subconjunto de si mismo
  - El conjunto vacio es subconjunto de cualquier conjunto.
- **Subconjunto propio**
  - X es subconjunto propio de Y si todos los elementos de X están en Y, pero X es diferente de Y
    - $X \subset Y \equiv x \in X$ y $x \in Y$ para todo $x \in X$ y $X \neq Y$

## Cont...

- **Conjunto potencia**
  - Si A es un conjunto, el conjunto de todos los subconjuntos de A es el conjunto potencia de A y se designa por P(A)
    - El conjunto de todos los subconjuntos (propios o no) de un conjunto X, se denotan por P(X) y es llamado conjunto potencia de X.
  - **Ejemplo:**
    - Si A={a,b,c} los miembros de P(A) son:
      Ø, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}
    - Todos los subconjuntos, excepto {a,b,c}, son subconjuntos propios de A.





## Cont...

- **Teorema:**
  - Si n es el número de elementos de X, entonces el número de elementos de su conjunto potencia es igual a:
    - Si $|X| = n$ entonces $|P(X)| = 2^n$
  - Esto se puede probar por Inducción Matemática
  - Caso Base
    - Si n=0, X es el conjunto vacio. El único subconjunto del conjunto vacio es el propio conjunto vacio.
      - $|P(X)| = |P(\emptyset)| = 2^n = 2^0 = 1$
  - Caso Inductivo:
    - El número de subconjuntos con un elemento, es igual al número de subconjuntos sin ese elemento.





## Cont...

- **Cont...**
  - **Hipotesis:** Si $|X| = n$ entonces $|P(X)| = 2^n$
  - Suponemos que la hipotesis es válida para n
  - Sea X un conjunto con n+1 elementos. x Є X.
  - Afirmamos que la mitad de los subconjuntos de X contienen x y la otra mitad no.
  - Cada subconjunto de X que contenga x puede asociarse de manera única con el subconjunto obtenido al eliminar x.

| Subconjuntos de X que contienen a **"a"** | Subconjuntos de X que no contienen a **"a"** |
|---|---|
| {a} | ø={} |
| {a,b} | {b} |
| {a,c} | {c} |
| {a,b,c} | {b,c} |





## Cont...

- **Cont...**
  - Si Y es el conjunto obtenido de eliminar x en X, Y tiene n elementos.
  - Por inducción: $|P(Y)| = 2^n$
  - Pero los subconjunto de Y son los subconjuntos de X que no contienen a X.
  - Entonce:

    $|P(Y)| = |P(X)| / 2$

    El número de elementos de P(Y) es la mitad de P(X)
  - Por lo tanto:

    $|P(X)| = 2\,|P(Y)| = 2 * 2^n = 2^{n+1}$
  - Asi:

    $|P(X)| = 2^n$ es válido para n+1

## Cont...

- **Combinaciones de dos conjuntos**
  - Hay varias maneras de combinar los conjuntos para formar otro:
  - **Union:**
    - Consta de todos los elementos que pertenecen a X o Y
    - $X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ o } x \in Y\}$
  - **Intersección:**
    - Consta de todos los elementos que pertenecen a X y Y
    - $X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ y } x \in Y\}$
  - Si $X \cap Y = \emptyset$ entonces X y Y son disjuntos o ajenos
  - **Diferencia** (Complemento Relativo)
    - Consta de todos los elementos en X que no están en Y
    - $X - Y = \{x \mid x \in X \text{ y } x \notin Y\}$





## Cont...

- Cont...
  - **Ejercicio en clases 1:**
    - Si A={1,3,5} y B={4,5,6}
    - Encuentre: $A \cup B$, $A \cap B$, A-B, B-A
- **Ajeno por pares**
    - Una colección de conjuntos S es ajena por pares si siempre que X y Y sean conjuntos distintos en S, X y Y son ajenos.
  - **Ejemplo:**
    - Los conjuntos {1,4,5} y {2,6} son ajenos
    - La colección de conjuntos S={{1,4,5}, {2,6}, {3}, {7,8}} es ajena por pares





## Cont...

- **Conjunto Universo**
  - La mayoría de veces se trabaja con conjuntos que son subconjuntos de un conjunto más grande llamado conjunto universo o "U"
  - El U debe ser dado explicitamente o puede ser inferido del contexto.
- **Complemento de X**
  - Es U – X y se puede representar por $X^c$
  - **Ejemplo:**
    - Sea A={1,3,5}
      - Si U={1,2,3,4,5} entonces $A^c$= {2,4}
      - Si U={1,3,5,7,9} entonces $A^c$= {7,9}





## Cont...

- **Teoremas**
  - Sea U el conjunto universo, y A, B y C subconjuntos de U, entonces se cumplen las siguientes propiedades:
  - Leyes Asociativas:
    - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
    - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

## Cont...

- Cont...
  - Leyes Conmutativas
    - $A \cup B = B \cup A$
    - $A \cap B = B \cap A$
  - Leyes Distributivas
    - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
    - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - Leyes de neutro e Identidad
    - $A \cup ø = A$
    - $A \cap U = A$





## Cont...

- Cont...
  - Leyes Complementarias
    - $A \cup A^c = U$
    - $A \cap A^c = ø$
  - Leyes de Idempotencia
    - $A \cup A = A$
    - $A \cap A = A$
  - Leyes Limitantes (Acotación)
    - $A \cup U = U$
    - $A \cap ø = ø$





## Cont...

- Cont...
  - Ley de Absorción
    - $A \cup (A \cap B) = A$
    - $A \cap (A \cup B) = A$
  - Ley de involución
    - $(A^c)^c = A$
  - Leyes de Complemento (0/1)
    - $U^c = ø$
    - $ø^c = U$





## Cont...

- Cont...
  - Leyes de DeMorgan para conjuntos
    - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
    - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

  - Todas estas leyes se pueden demostrar por diagramas de Venn

## Cont...

- **Partición de un conjunto**
  - La partición de un conjunto, es la subdivisión de este en subconjuntos no vacíos que no tengan elementos en común entre sí.
    - Una partición de un conjunto X divide a X en subconjuntos que no se traslapan.
  - Formalmente:
    - Una colección S de subconjuntos no vacíos de X es una partición del conjunto X si todo elemento de X pertenece exactamente a un miembro de S.
    - Entonces $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$ y $S = \{A_1, A_2, \ldots A_n\}$
  - Si S es una partición de X, S es ajena por pares y US = X





## Cont...

- **Ejemplo:**
  - Sean los conjuntos:
    - X = {1,2,3,4,5,6,7,8} y
    - S = {{1,4,5}, {2,6} , {3} , {7,8}}
  - S si es una partición de X, ya que cada miembro de X está exáctamente en un miembro de S





## Cont...

- **Operaciones con Familias de Conjuntos**
  - **Union**
    - La unión de una familia de conjuntos S son todos aquellos elementos que pertenecen a algún conjunto X dentro de S.
    - $\cup S = \{x \mid x \in X \text{ para algún } X \in S)$





## Cont...

- Cont...
  - Si $S = \{A_1, A_2, \ldots A_n\}$

$$\bigcup S = \bigcup_{i=1}^{n} Ai \qquad \bigcap S = \bigcap_{i=1}^{n} Ai$$

  - Si $S = \{A_1, A_2, \ldots \}$

$$\bigcup S = \bigcup_{i=1}^{\infty} Ai \qquad \bigcap S = \bigcap_{i=1}^{\infty} Ai$$

## Cont...

- **Pares Ordenados**
  - Si bien un conjunto no toma en cuenta el orden de sus elementos, para un par ordenado es importante el orden.
  - Generalmente no es lo mismo decir (a,b) que (b,a), a menos que a = b.
  - (a,b) = (c,d) si y solo si a=c y b=d





## Cont...

- **Producto Cartesiano**
  - Si X y Y son conjuntos, X x Y se denomina producto cartesiano y es igual al conjunto de todos los pares ordenados (x, y) donde $x \in X$ y $y \in Y$.
  - El producto cartesiano se puede realizar entre varios conjuntos, de manera general
  - $X_1 \times X_2 \ldots \times X_n$ esta definido por las n-tuplas $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ donde $x \in X_i$ para i =1... n





## Cont...

- Cont...
  - Si X y Y son conjuntos y XxY es el producto cartesiano entre los dos
    - $|X \times Y| = |X|\,|Y|$
  - De manera más general, si X1, X2,.., Xn son conjuntos
    - $|X_1 \times X_2 \ldots \times X_n| = |X_1|\,|X_2| \ldots |X_n|$
  - Si A es un conjunto de entradas, M es un conjunto de platos principales y D es un conjunto de postres.
    - XxYxZ enumera todas las comidas posibles que constan de una estrada un plato principal y un postre





## Cont...

- **Ejercicio en clases:**
  1. Si X={1,2,3} y Y={a,b}
     - Realice: XxY, YxX, XxX, YxY
     - Realice: |XxY|, |YxX|, |XxX|, |YxY|
  2. Si X={1,2}, Y={a,b} y Z={α,β}
     - Realice: XxYxZ
     - Realice: |XxYxZ|

## Cont...

- **Deber:**
  - Hacer los ejercicios del 1 al 42 de la pagina 71





## Sucesiones o Secuencias

- **Definiciones**
  - Las sucesión son listas en las cuales se toma en cuenta el orden.
  - En una sucesión generalmente denotamos el primer elemento de la sucesión como $s_1$, al segundo $s_2$ y así en adelante. En general Sn denota al n-ésimo elemento de la sucesión.
  - A n se le llama el índice de la sucesión .





## Cont...

- **Ejemplo 1:**
  - Una compañía de taxis cobra 1 dolar por la primera milla y 50 centavos por cada milla adicional.
    - El costo Cn del recorrido de n millas es:

      $$Cn = 1 + 0.5 (n - 1)$$

    - Así:

      $$C_1 = 1 + 0.5 (1 - 1) = 1$$

      $$\ldots$$

      $$C_5 = 1 + 0.5 (5 - 1) = 3$$

    - De esta manera la tarifa por millas recorridas nos da la sucesión: $C_1$= 1.00, $C_2$= 1.50, $C_3$= 2.00, $C_4$= 2.50, ....





## Cont...

- **Ejemplo 2:**
  - La lista
    - 2, 4, 6, ... , 2n
    - es una sucesión. El primer elemento es 2, el segundo es 4 y el enésimo es 2n.

## Cont...

- **Ejemplo 3:**
  - a, a, b, a, d
    - Es una secuencia donde
      - $s_1$=a
      - $s_2$=a
      - $s_3$=b
      - $s_4$=a
      - $s_5$=d





## Cont...

- Una secuencia, a diferencia de un conjunto, puede tener elementos repetidos.
- Una secuencia puede tener un número infinito de elementos o también un número finito.
- Otra forma de escribir una secuencia s es $\{s_n\}$, no confundir con $s_n$ que significa el enésimo elemento de la secuencia s





## Cont...

- **Ejemplo 4:**
  - Defina la sucesión $\{t_n\}$ mediante la reglas $T_n= n^2 -1$, $n\geq1$
    - Entonces:
      $t_1=0$, $t_2=3$, $t_3=8$, $t_4=15$, $t_5=24$,..... $t_{55}=3024$
    - Esta sucesión es infinita
- **Ejemplo 5:**
  - Defina la sucesión u mediante la regla, $u_n$ esta dada por la n-ésima letra de la palabra *digital*.
    - Entonces:
      $u_1$=d, $u_2$=i, $u_3$=g, $u_4$=i, $u_5$=t, $u_6$=a , $u_7$=l
    - Esta sucesión es finita





## Secuencias

- Cont...
  - A pesar de que generalmente se comienza con $S_1$, también puede ser otro valor inicial, como $S_0$.
  - Si queremos mencionar de manera explicita el indice inicial de una sucesión infinita escribimos:

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \qquad \{s_n\}_{n=0}^{\infty}$$

  - Y de una sucesión finita:

$$\{s_n\}_{n=1}^{4}$$

Sucesiones y Cadenas

## Cont...

- Ejemplo:
  - Una secuencia
    - $x_n=(1/2)^n$, donde $-2<n<5$
    - Resultado:
      - 2,1,1/2,1/4,1/8.1/16



Sucesiones y Cadenas

## Cont...

- **Sucesion creciente**
  - Una secuencia s es creciente si
    - $s_n \leq s_{n+1}$, para todo n
- **Sucesion decreciente**
  - Una secuencia es decreciente si
    - $s_n \geq s_{n+1}$, para todo n
  - En ambos casos de permite la igualdad



Sucesiones y Cadenas

## Cont...

- Ejemplos:
  - Creciente
    - La secuencia $s_n = 2*n$
  - Decreciente
    - La secuencia $s_n= (½)^n$



Sucesiones y Cadenas

## Cont...

- **Subsucesiones**
  - Si tomamos un grupo de términos de una secuencia y mantenemos el orden entre ellos, formaremos una subsecuencia de la secuencia original.
  - **Definición:**
  - Sea $\{s_n\}$ es una secuencia definida para n=m, m+1, ... y sea $n_1$, $n_2$, ... una secuencia creciente que satisface que $n_k < n_{k+1}$, para toda k, cuyos valores se hallan en el conjunto (m, m+1,...).
  - Entonces decimos que $\{s_{nk}\}$ es una subsucesión de $\{s_n\}$

## Cont...

- Ejemplo:
  - b,c es una subsecuencia de b,a,d,c
  - c,d no es una subsecuencia de b,a,d,c
  - Analizar que pasa con $2^k$ y 2n





## Cont...

- Definicion
  - Si $\{a_n\}$ es una sucesión, definida para n=m, m+1...n entonces:
    - La suma: $$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$
    - El producto: $$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \bullet a_{m+1} \bullet \ldots \bullet a_n$$





## Cont...

- Ejemplos:
  - Si $\{a_n\}$= 2n para n>0

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n = 2 + 4 + 6 = 12$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \bullet a_{m+1} \bullet \ldots \bullet a_n = 2 \bullet 4 \bullet 6 = 48$$





## Cont...

- **Cambios de Variable**
  - El nombre de la variable no afecta ni la sumatoria ni el producto

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{j=1}^{n} a_j$$

Sucesiones y Cadenas

## Cont...

- **Cambios del Indice y límites de una sumatoria**
  - Si existe alguna relación entre i y j, hay que realizar un cambio de indice y límites.

$$\sum_{i=0}^{n} ir^{n-i} = \sum_{j=1}^{n+1} (j-1)r^{n-j+1}$$

  - Para i=j -1

45

Sucesiones y Cadenas

## Cont...

- **Representación alternativa**
  - Algunas veces la representación del producto y la sumatoria se modifican para indicar que estan indexadas sobre un conjunto arbitrario de enteros.

$$\sum_{i \in S} a_i$$

46

Sucesiones y Cadenas

## Cadenas

- En ciertos contextos a las sucesiones finitas se las denomina cadenas.

- **Definición:**
  - Una cadena sobre un conjunto X es una sucesión finita de elementos de X.

- Ejemplo:
  - Si X={ a, b, c }
    - Si $b_1$= b, $b_2$=a, $b_3$ = a, $b_4$=c
    - Entonces tenemos una cadena de X, esta cadena es baac

47

Sucesiones y Cadenas

## Cont...

- Dado que las cadena es una secuencia, el orden debe ser tomado en cuenta. Por ejemplo la cadena baac es diferente de la cadena acab.
- Las repeticiones en una cadena pueden ser especificadas por superíndices. Por ejemplo bbaaac puede ser escrita $b^2a^3c$

48

## Cont...

- La cadena nula es sin elementos y se denota **λ**
- **X*** es el conjunto de todas las cadenas sobre X
- **$X^+$** es el conjunto de todas las cadenas no nulas sobre X.

- **Ejemplo:**
  - Sea X = {a,b}
  - Algunos elementos de X* son

    Λ, a, b, abab, $b^{20}a^5ba$ …





## Cadenas

- La longitud de una cadena es el número de elementos que esta tiene.
- Se representa con
  - | c |
  - **Ejemplo:**
  - La longitud de $\beta = b^{20}a^5ba$ es:

    $|\beta| = 27$

- Si a y b son dos cadenas, la cadena que se forma al unir a y b juntos se llama la concatenación de a y b.





## Cont...

- **Deber:**
  - Hacer los ejercicios del 1, 2, 3, 9, 10 y 12 de las paginas 79 a la 82





## Teoría de Números

- **BIT =** Dígito binario. La tecnología determina como los bits son físicamente representados en el sistema de una computadora.
- El sistema de numeración binario representa a los enteros utilizando bits.
- El sistema hexadecimal y octal representan a los enteros utilizando 16 y 8 símbolos respectivamente.
- En general, el símbolo en posición n representa el número de $10^n$.
- **Ejemplos:**
  - $10^0 = 1$
  - $10^1 = 10$
  - $10^2 = 100$

Sistemas de Numeración

## Cont...

- **Representación de un número en una base b:**

  **Forma abreviada:**

  $$N = \dots n_4\, n_3\, n_2\, n_1\, n_0\, .\, n_{-1}\, n_{-2}\, n_{-3} \dots$$

  **Valor:**

  $$N = \dots n_4 * b^4 + n_3 * b^3 + n_2 * b^2 + n_1 * b^1 + n_0 * b^0 + n_{-1} * b^{-1} \dots$$

- **Para representar un número:**
  - Resulta más cómodo que los símbolos (cifras) del alfabeto o la base de numeración sean los menos posibles, pero ,
  - Cuanto menos es la base, mayor es el número de cifras que se necesitan para representar una cantidad dada.



Sistemas de Numeración

## Cont…

- **Ejemplo:**

  $$101101_2 = 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$$
  $$= 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1$$
  $$= 45_{10}$$



Sistemas de Numeración

## Cont…

- **Conversión de Decimal a Binario**
  - Se aplica el método de las **"divisiones y multiplicaciones"** sucesivas con la base como divisor y multiplicador (b = 2).

- **Ejemplo:** $26.1875_{)10} = \mathbf{11010.0011}_{)2}$
  - Para la parte entera:

```
26 |_2
 0  13 |_2
     1   6 |_2
         0   3 |_2
             1   1
```

  - Para la parte fraccionaria:

```
0.1875    0.3750    0.7500    0.5000
   x 2       x 2       x 2       x 2
0.3750    0.7500    1.5000    1.0000
```



Sistemas de Numeración

## Cont…

- **Conversión de Binario a Decimal**
  - Se desarrolla la representación binaria (con b=2) y se opera el polinomio en decimal.
  - **Ejemplos:**

$$110100_{(2} = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 52_{(10}$$

$$10100.001_{(2} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 20.125_{(10}$$

  - Realmente basta con sumar los pesos ($2_i$ ) de las posiciones (i) en las que hay un 1.

## Cont…

- **Suma Binaria**

```
  10011011
+ 1011011
----------
  11110110
```

Nótese que al sumar 1+1= 2
En binario decimos 1 + 1 = 10
Escribimos el 0 y llevamos uno.





## Cont…

- **Sistema de numeración octal**
  - La base es 8
  - El conjunto de símbolos es: **{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }**

**Conversión de octal a decimal**
- Se desarrolla el polinomio con b=8 y se opera en decimal.

**Conversión de decimal a octal**
- Aplicar el método de "divisiones y productos" con divisor y multiplicador 8.

**Conversión "rápida" de binario a octal**
- Agrupar cifras binarias de 3 en 3 y transformar con la tabla 1.
- **Ejemplo:** 10|001|101|100.110|10 $_{)2}$ = 2154.64 $_{)8}$

**Conversión "rápida" de octal a binario**
- Convertir cada cifra octal mediante la tabla
- **Ejemplo:** 537.24 $_{)8}$ = 101|011|111.010|100 $_{)2}$





## Cont...

- **Sistema de numeración hexadecimal**
  - La base es 16
  - El conjunto de símbolos es: **{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}**

**Conversión de Hexadecimal a decimal**
- Se desarrolla el polinomio con b=16 y se opera en decimal.

**Conversión de Decimal a hexadecimal**
- Aplicar el método de "divisiones y productos" con divisor y multiplicador 16.

**Conversión "rápida" de binario a hexadecimal**
- Agrupar cifras binarias de 4 en 4 y transformar con la tabla
- **Ejemplo:** 0010|0101|1101|1111 . 1011|1010 $_{(2}$ = 25DF.BA $_{(16}$

**Conversión "rápida" de hexadecimal a binario**
- Convertir cada cifra hexadecimal mediante la tabla
- **Ejemplo:** 1ABC.C4 $_{(16}$ = 0001|1010|1011|1100 . 1100|0100 $_{(2}$





## Cont…

- **Suma Hexadecimal**

```
   84F
+ 42EA
------
  4B39
```

De manera similar al sistema binario.

# Relaciones

- Una relación puede pensarse como una tabla que enumera la relación de algunos elementos con otros.

| Estudiantes | Curso |
|---|---|
| Bill | Ciencias de la Computación |
| Mary | Matemáticas |
| Bill | Arte |
| Beth | Historia |
| Beth | Ciencias de la Computación |
| Dave | Matemáticas |

- En computación:
  - Podemos decir que Bill está relacionado con Ciencias de la Computación
- Esta tabla es sólo un conjunto de pares ordenados (definición abstracta)





## Cont...

- **Definición**
  - Sean X y Y dos conjuntos. Una relación binaria R, de X en Y, es un subconjunto del producto cartesiano X x Y. Si (x,y) Є R, escribimos xRy y decimos que X está relacionado con Y.
  - Si X = Y, decimos que R es una relación binaria sobre X.
  - Como se tratará solamente sobre relaciones binarias, cuando se diga relación en realidad se debe interpretar como relación binaria





## Cont...

- Cont...
  - El conjunto:
    - {x є X | (x,y) ∊ R para algún y є Y} es el dominio de R
  - El conjunto:
    - {y є Y | (x,y) ∊ R para algún x є X} es el rango de R
  - El rango también se llama: Alcance, Ambito o Contradominio
  - Si una relación se indica mediante una tabla:
    - el dominio está formado por los miebros de la primera columna y
    - el rango por la segunda columna.





## Cont...

- **Ejemplo 1:**
  - La inclusión de conjuntos es una relación en cualquier clase de conjuntos. Ya que, dada una pareja de conjuntos A y B,
    - $A \subset B$ o $B \subset A$
- **Ejemplo 2:**
  - El matrimonio es una relación del conjunto H de hombres y el conjunto M de mujeres. Ya que, dado cualquier hombre $h \in H$ y cualquier mujer $m \in M$, h esta casado con m o h no esta casado con m.

## Cont...

- **Ejemplo 3:**
  - Si X = {Bill, Mary, Beth, Dave} y
    Y = {Ciencias de la Computación, Matemáticas, Arte, Historia}
  - La relación R de la tabla puede escribirse
    - R = {(Bill, Ciencias de la Computación), (Mary, Matemáticas), (Bill, Arte), (Beth, Historia), (Beth, Ciencias de la Computación), (Dave, Matemáticas)}
  - Como (Beth, Historia) Є R, podemos escribir Beth R Historia
  - El dominio de R es el conjunto X (primera columna) y
  - El rango de R es el conjunto Y (segunda columna)





## Cont...

- **Ejemplo 4:**
  - Decimos que R es un subconjunto de XxY.
    - X = {huevos, leche, maíz}
    - Y = {vacas, cabras, gallinas}
    - R= {(x,y)|x es producido por y}
    - XxY={(huevos,vacas), (huevos,cabras), (huevos,gallinas), (leche,vacas), (leche,cabras), (leche,gallinas), (maiz, vacas), (maiz,cabras), (maiz,gallinas)}
    - R = {(huevos,gallinas), (leche,vacas), (leche,cabras)}
    - Por tanto R $\subseteq$ XxY





## Cont...

- Cont...
  - Para indicar una relación basta especificar los pares ordenados que pertenecen a la relación.
  - También de puede definir una relación proporcionando una regla para la pertenencia a la relación.





## Cont...

- **Ejercicios en clase:**
  1) Sean X={2, 3, 4} y Y ={3, 4, 5, 6, 7}
     Si definimos una relación R de X en Y como (x,y) є R si x divide a y (residuo=0)
     a) Obtenga la relación
     b) Muestre la R por medio de una tabla
     c) Indique el dominio y el rango de R
  2) Sea R la relación sobre X={1, 2, 3, 4} definida como (x,y) є R, si x<=y, x *y* y є X
     a) Obtenga la relación
     b) Indique el dominio y el rango de R

## Cont...

- **Relaciones especiales**
  - Igualdad
    - Sea el conjunto A
    - R = {(a,a) | a $\in$ A)
  - Universal
    - Sea el conjunto A
    - R = AxA
  - Vacía
    - Sea el conjunto A
    - R = ø





## Cont...

- **Representación**
  - Las Relaciones se pueden representar de muchas maneras:
    - Conjuntos enlazados
    - Mediante grafos dirigidos (digrafos o digraficas)
    - Planos Cartesianos
    - Matrices





## Cont...

- Para realizar el digrafico de una relación en un conjunto X:
  - Primero se marcan los **puntos** o **vértices** que representan los elementos de X.
  - A continuación, si el elemento (x,y) está en la relación, se traza una flecha (llamada **arco dirigido** o **arista**) desde x hasta y.
  - Si existe en la relación un elemento de la forma (x,x), esta arista dirigida se denomina **lazo**



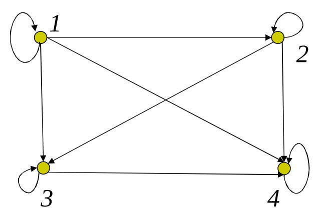


## Cont...

- **Ejemplo 1:**
  - Sea R una relación en X = {1,2,3,4} definida por (x,y) $\in$ R si x $\leq$ y, para x, y $\in$ X.
  - R = { (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4) }
  - Lo representaremos mediante un digrafo.

## Cont...

- **Cont...**

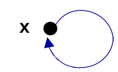







## Cont...

- **Relación Reflexiva**
  - Una relación R sobre un conjunto X es reflexiva si $(x,x) \in R$ para todo $x \in X$
  - Se puede notar que si una relación es reflexiva en el gráfo dirigido, existe un lazo en cada vertice.








## Cont...

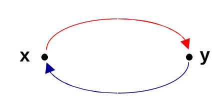
- **Ejemplo:**
  - Sea una relación {(a,a),(b,b),(c,c)} sobre X={a,b,c}
  - Graficarla por medio de digrafos.





## Cont...

- **Relación Simétrica**
  - Una relación R sobre un conjunto X, es simétrica si para todo $x, y \in X$, si $(x,y) \in R$ entonces $(y,x) \in R$
  - Se puede comprobar gráficamente si por cada arco que existe desde x hasta y, existe un arco que va desde y hasta x.



## Cont…

- **Ejemplo:**
  - Si tenemos una relación R sobre X = {a,b,c,d}
    - R={(a,a),(b,c),(c,b),(d,d)}
  - Graficamos por medio de un digrafo.





## Cont…

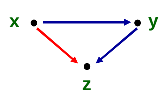
- **Relación Antisimétrica**
  - Una relación R sobre un conjunto X es antisimétrica si para todo $x,y \in X$, si $(x,y) \in R$ *y* $x \neq y$, entonces $(y,x) \notin R$
  - Se puede comprobar graficamente si entre un par de vértices distintos existe solo un arco.
  - Antisimétrica no es lo mismo que no simétrica





## Cont…

- **Relación Transitiva**
  - Una relación R sobre un conjunto X es transitiva si para todo x, y, $z \in X$, si (x,y) *y* $(y,z) \in R$, entonces $(x,z) \in R$
  - Se comprueba graficamente si desde x hasta y existe un arco, y desde y hasta z existe otro arco, entonces debe existir un arco desde x hasta z para que sea transitiva.








## Cont…

- **Orden Parcial**
  - Si Una relación R sobre un conjunto X es reflexiva, antisimétrica y transitiva, entonces la relación R es un orden parcial.
  - Se llama así porque proporciona cierta ordenación en los elementos
  - Si R es de orden parcial, se suele usar

$$x \leq y$$

para indicar que (x,y) Є R

## Cont...

- **Relación Inversa**
  - Si R es una relación de X a Y. La inversa de R que se denota $R^{-1}$, que es una relación de Y en X, definida por:
    - $R^{-1}=\{ (y,x) \mid (x,y) \in R \}$





## Cont...

- **Ejemplo:**
  - En contrar la inversa de R.
  - X={2,3,4}, Y={3,4,5,6,7} y R esta definida por $(x,y) \in R$ si x divide a y.
  - Solución:
    - R={(2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4)}
    - $R^{-1}$={(4,2), (6,2), (3,3), (6,3), (4,4) }





## Cont...

- **Composición**
  - Si tenemos la relación $R_1$, desde X a Y y la relación $R_2$ desde Y a Z. Entonces la composición de $R_1$ y $R_2$ , que se denota $R_2 o R_1$ es la relación de X a Z definida como:
    - $R_2 \text{ o } R_1 = \{(x,z) \mid (x,y) \in R_1 \text{ y } (y,z) \in R_2 \text{ para algun } y \in Y\}$





## Cont...

- **Ejemplo:**
  - Hacer la composiciónde las siguientes relaciones:
    - $R_1$={(1,2), (1,6), (2,4), (3,4), (3,6), (3,8)}
    - $R_2$={(2,u), (4,s), (4,t), (6,t), (8,u) }
  - Solución:
    - $R_2$ o $R_1$ = {(1,u), (1,t), (2,s), (2,t) , (3,s), (3,t), (3,u)}

## Cont...

- **Ejercicios en clases:**
  - Determinar si es reflexiva, simetrica, antisimétrica, transitiva y o de orden parcial
    - $(x,y) \in R$ si $x=y^2$, $x =\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
  - Dar ejemplo de una relación Reflexiva, simétrica y no transitiva.





## Cont...

- **Ejercicios en clases:**
  - Que está mal en en el siguiente razonamiento que quiere demostrar que si R es simétrica y transitiva, entonces es reflexiva.
  - Sea $x \in X$. Usando simetría (x,y) y (y,x) ambos en R. Debido a que (x,y) y (y,x) $\in R$, por transitividad $(x,x) \in R$ por tanto es reflexiva.





## Cont...

- **Deber:**
  - Hacer los ejercicios del 2, 3, 5-7,10, 11,14,15,18,30,31,33,35 de las paginas 99 a la 101





## Relaciones de Equivalencia

- **Ejemplo:**
  - Supóngase que X es un conjunto de 10 bolas, algunas son rojas, otras azules y las que quedan verdes.
  - Si R es el conjunto de Rojas, A el de Azules y V el de Verdes, entonces {R, A, V} es una partición de X
  - Se puede utilizar una partición para definir una relación.
  - xRy si x *y* y pertenecen a S que es conjunto en la partición de X.
  - Para el ejemplo, esta relación podría significar “x es del mismo color que y”.

## Cont…

- **Teorema:**
  - Si L es una partición del conjunto X. Defínase xRy si x *y* y pertenecen a S para algún S elemento de L. Entonces R es reflexiva, simétrica y transitiva.





## Cont…

- **Ejemplo 1:**
  - L = { {1,3,5} , {2,6} , {4} }
  - que es una partición de X={1,2,3,4,5,6}
  - La relación sobre X dada por el teorema anterior contiene los pares
    - (1,1) (1,3) (1,5) (3,1) (3,3) (3,5) (5,1) (5,3) (5,5) (2,2) (2,6) (6,2) (6,6) (4,4)





## Cont…

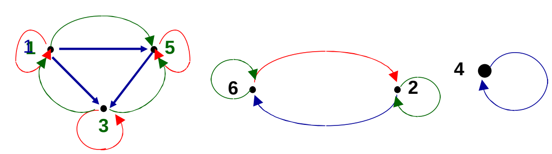
- **Definición:**
  - A las relaciones que son reflexivas, simétricas y transitivas se les llama relaciones de equivalencia.
  - En otras palabras: A una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva en un conjunto X se la conoce con el nombre de relación de equivalencia sobre X.





## Cont…

- **Ejemplo 2:**
  - Considere la relación sobre X={1,2,3,4,5,6}




  - Es reflexiva
  - Es simétrica
  - Es transitiva
  - Por tanto es una relación de equivalencia

## Cont…

- **Ejemplo 3:**
  - Considere la relación:
    - R={ (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (5,1), (5,3), (5,5)} sobre X={1,2,3,4,5}
  - Es reflexiva
  - Es simétrica
  - Es transitiva
  - Por tanto es una relación de equivalencia





## Cont…

- **Ejercicios en clases:**
  1. Considere la relación:
     - R={ (a,a), (b,b), (c,d), (d,d)} sobre X={a,b,c,d}
  2. Considere la relación:
     - R={ (a,a), (b,b), (c,c), (d,d)} sobre X={a,b,c,d}





## Cont…

- **Teorema:**
  - Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto X. Para cada a elemento de X sea
    - [a] = {x ∊ X | xRa}
  - Entonces
    - L={[a] | a ∊ X}
  - Es una partición de X





## Cont…

- **Definición:**
  - Si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto X. Los conjuntos [a] definidos en el anterior teorema se denominan clases de equivalencia de X dadas por la relación R.

## Cont…

- **Ejemplo 4:**
  - Considerando el ejemplo 1, las clases de equivalencia son:
    - [1] = {1,3,5}
    - [3] = [5] = {1,3,5}
    - [2] = [6] = {2,6}
    - [4] = {4}



Relaciones de Equivalencia

## Cont…

- **Ejemplo 5:**
  - Considerando el ejemplo 3, las clases de equivalencia son:
    - [1] = [3] = [5] = {1,3,5}
    - [2] = [4] = {2,4}



Relaciones de Equivalencia

## Cont…

- **Ejercicios en clases:**
  - Encuentre las clases de equivalencia de los ejercios de clases de la diapositiva 94



Relaciones de Equivalencia

## Cont…

- **Ejercicio en clases:**
  - Sea X = {1,2,... 10}. Definase xRy como “3 divide a x-y”. Se puede verificar que esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva. Esto es, que R es una relación de equivalencia sobre X.
  - Determínese los elementos de las clases de equivalencia.

## Cont...

- **Deber:**
  - Hacer los ejercicios del 2, 3, 5, 6, 8, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 24, 25, 26 de las paginas 108 y 109





## Matrices de Relaciones

- **Matriz**
  - Es una forma conveniente de representar una relación R de X a Y
  - Una computadora puede utilizar esta representación para analizar una relación.

1. Etiquetamos los renglones con los elementos de X
2. Etiquetamos las columnas con los elementos de Y
3. Colocamos 1 en el renglón $x_i$ y columna $y_i$ si $x_i R y_i$ o 0(cero) en caso contrario.





## Cont…

- **Ejemplo 1:**
  - La matriz de la relación
    - R = {(1,b), (1,d), (2,c), (3,c), (3,b), (4,a)}
  - de X = {1,2,3,4} y Y = {a,b,c,d} con respecto a los ordenes 1,2,3,4 y a,b,c,d, es:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$





## Cont…

- **Ejemplo 2:**
  - La matriz de la relación del ejemplo 1
  - con respecto a los ordenes 2,3,4,1 y d,b,a,c, es:

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d & b & a & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

**La matriz de la relación de X a Y depende de los órdenes de X y Y**

## Cont…

- **Ejemplo 3:**
  - La matriz de la relación R de X = {2,3,4} y Y = {5,6,7,8}, definida como
    - xRy si x divide a y
  - con respecto a los ordenes 2,3,4 y 5,6,7,8 es:

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$





## Cont…

- **Cont...**
  - Si la relación R es sobre el mismo conjunto X (de X en X), entonces usamos el mismo orden para las columnas y para los renglones.





## Cont…

- **Ejemplo 4:**
    - R = {(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (b,c), (c,b)}
  - Sobre X = {a,b,c,d} con respecto al orden a,b,c,d es:

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

**La matriz de una relación sobre un conjunto X, siempre es cuadrada**





## Cont…

- **Cont...**
  - Analizando una matriz A, podemos determinar rápidamente si R sobre X es:
    - **Reflexiva**
      - La relación R es reflexiva si y solo si A tiene unos en la diagonal principal.
      - La relación R es reflexiva si y solo si (x,x) ∈ R, para todo x ∈ X
    - **Simétrica**
      - La relación R es simétrica si y solo si para todo i y j, la ij-ésima entrada de A es igual a la ji-ésima entrada de A
      - Entonces R es simétrica si y solo si A es simétrica con respecto a la diagonal.
      - La relación R es simétrica si y solo si siempre que (x,y) este en R, entonces (y,x) también lo está.

## Cont…

- **Multiplicación Matricial**
  - Se relaciona con la composición de relaciones.
  - **Teorema:**
    - Sea $R_1$ una relación de X en Y y sea $R_2$ una relación de Y en Z. Elíjanse órdenes para X, Y y Z. Todas las matrices de la relación están dadas respecto de éstos órdenes.
    - Sea $A_1$ la matriz de $R_1$ y $A_2$ la matriz de $R_2$. La matriz de la relación $R_2oR_1$ se obtiene remplazando cada término distinto de cero y uno, en el producto de las matrices A1A2, por 1





## Cont…

- **Ejemplo:**
  - Sea $R_1$ la relación de X={1,2,3} en Y={a,b} definida por:
    - $R_1$={(1,a), (2,b), (3,a), (3,b)}
  - Y sea $R_2$ la relación de Y en Z={x,y,z} definida por:
    - $R_2$={(a,x), (a,y), (b,y), (b,z)}





## Cont…

- **Solución:**

$$A1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A1A2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A1A2 = R2oR1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$





## Cont...

- **Deber:**
  - Hacer los ejercicios del 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11,12,15 y16 de las paginas 117 y 118
  - De los ejercicios 15 y 16 hacer las respectivas composiciones.

## Funciones

- **Función:**
  - Es un tipo especial de relación.
  - Recordemos que:
    - Una relación binaria R, de X en Y, es un subconjunto del producto cartesiano X x Y.
    - Y que
      - dominio R = {x є X | (x,y) ∈ R para algún y є Y}
  - Si f es una relación de X en Y, para que f sea además una función, el dominio de f debe ser igual a X y si (x,y) y (x,y´) están en f, debemos tener y=y´





## Cont…

- **Definición:**
  - Una función f de X en Y es una relación de X en Y con las siguientes propiedades:
    - El dominio de f es X
    - Si (x,y), (x,y') son elementos de f entonces y = y'
  - A veces, una función de X en Y se denota como f:X→Y





## Cont…

- **Ejemplo:**
  - La relación
    - f = {(1,a), (2,b), (3,a) }
  - de X = {1,2,3} en Y = {a,b,c}
  - Es una función de X en Y porque cumple:
    - El dominio de f es X
    - El rango de f es {a,b}
  - Para este ejercicio:
    f(1)=a, f(2)=b, f(3)=a





## Cont…

- **Ejemplo:**
  - La relación
    - f = {(1,a), (2,b), (3,a) }
  - de X = {1,2,3,4} en Y = {a,b,c}
  - No es una función, ya que 4 no forma parte del dominio de la relación.
    - No cumple la primera propiedad

## Cont…

- **Ejemplo:**
  - La relación
    - f = {(1,a), (2,b), (3,c) , (1,b) }
  - de X = {1,2,3} en Y = {a,b,c}
  - No es una función ya que existen (1,a) y (1,b) y sabemos que a ≠ b.
    - No cumple la segunda propiedad





## Cont…

- **Función Inyectiva**
  - **Definición**
    - Se dice que una función f de X en Y es inyectiva (uno a uno) si para cada y elemento de Y existe a lo sumo una x elemento de X con f(x)=y.
    - Osea: si x, x’ Є X y f(x)=f(x’), entonces x = x’





## Cont…

- **Ejemplo 1:**
  - La función:
    - f = {(1,b), (3,a), (2,c)}
  - de X = {1,2,3} en Y = {a,b,c,d}
  - es uno a uno
- **Ejemplo 2:**
  - La función:
    - f = {(1,a), (2,b), (3,a)}
  - de X = {1,2,3} en Y = {a,b,c}
  - No es uno a uno, pues f(1)=f(3)=a





## Cont…

- **Función Sobreyectiva**
  - **Definición**
    - Si f es una función de X a Y y el rango de f es Y, se dice que f es sobre Y, o que es sobreyectiva con respecto a Y.
    - Si el contradominio de una función f es Y, la función es sobre (o sobreyectiva) Y.

## Cont…

- **Ejemplo 1:**
  - La función:
    - f = {(1,a), (2,c), (3,b)}
  - de X = {1,2,3} en Y = {a,b,c}
  - es uno a uno y sobre Y
- **Ejemplo 2:**
  - La función:
    - f = {(1,b), (3,a), (2,c)}
  - de X = {1,2,3} en Y = {a,b,c,d}
  - No es sobre Y, pero si es uno a uno





## Cont…

- **Función Biyectiva**
  - **Definición**
    - Si una función es simultáneamente inyectiva y sobreyectiva, se dice que esta función es biyectiva.
      - Una funcíón que es uno a uno y sobre Y
    - Si una función es biyectiva, su inversa también es una función y se denota por $f^{-1}$.
      - La inversa { (y,x) | (x,y) Є f } es una función de Y en X





## Cont…

- **Ejemplo 1:**
  - La función:
    - f = {(1,a), (2,c), (3,b)}
  - de X = {1,2,3} en Y = {a,b,c} que es uno a uno y sobre Y
    - $F^{-1}$ = {(a,1), (c,2), (b,3)}





## Cont…

- **Composición de Funciones**
  - **Definición**
    - Suponga que:
      - g es una función de X en Y y
      - f es una función de Y en Z
    - Dado x Є X, podemos aplicarle g para determinar un único elemento y = g(x) Є Y
    - Luego aplicamos f para determinar un único elemento z = f(y) = f(g(x)) Є Z
    - La función resultante de X en Z es la composición. De f en g y se denota fog
      - si f(x)=y y g(y)=z entonces fog(x)=z.

## Cont…

- **Ejemplo 1:**
  - Dadas:
    - g = {(1,a), (2,a), (3,c)} una función de de X = {1,2,3} en Y = {a,b,c}
    - f = {(a,y), (b,x), (c,z)} una función de Y en Z = {x,y,z}
  - La composición de X en Z es:
    - fog = {(1,y), (2,y), (3,z)}





## Cont…

- **Operador Binario**
  - **Definición**
    - Una función de XxX en X es un operador binario sobre X
    - Un operador binario sobre un conjunto X asocia a cada par de elementos de X, un elemento de X.





## Cont…

- **Ejemplo 1:**
  - Sea X={1,2,...}
  - Si definimos f(x,y)=x+y,
  - entonces f es un operador binario sobre X.
- **Ejemplo 2:**
  - Sea X={a,b,c}
  - Si definimos f(s,t)=st, donde s y t son cadenas sobre X y st es la concatenación de s y t
  - entonces f es un operador binario sobre X*.





## Cont…

- **Operador Unario**
  - **Definición**
    - Una función de X en X se conoce como operador unario sobre X.
      - Sea U un conjunto universal
      - Si f(X) = ~X, $X \subseteq U$
      - entonces f es un operador unario sobre P(U)
    - Un operador unario sobre un conjunto X asocia a cada elemento particular de X un elemento en X.

## Cont…

- **Función Módulo (operador módulo)**
  - Desempeña un importante papel en la Computación
  - Si *x* es un entero no negativo y *y* es un entero positivo, se define *x* mod *y* como el residuo de dividir *x* entre *y*.
  - **Ejemplos:**
    - 6 mod 2 = 0
    - 5 mod 1 = 0
    - 8 mod 12 = 8





## Cont…

- **Ejemplo 1:**
  - Qué día de la semana será 365 días después de un miércoles.
- **Solución:**
  - 7 días después del miércoles será miércoles
  - 14 días después del miércoles será miércoles
  - 7n días después del miércoles será miércoles
  - Entonces:
    - 365 mod 7 = 1
    - Por lo cual será un día depues del miércoles o sea Jueves





## Cont…

- **Ejemplo 2:**
  - Un número estándar internacional de un libro (ISBN) es un código de 10 caracteres de la siguiente forma:

    **0-8065-0959-7**

    Código de grupo – código de editor – código del libro – caracter de verificación
  - El caracter de verficación sirve para validar el ISBN
  - Este se verfica con **s mod 11**, siendo:
    - s = **0** + 2***8** + 3***0** + 4***6** + 5***5** + 6***0** + 7***9** + 8***5** + 9***9** = 249
  - Entonces:
    - 249 mod 11 = **7**





## Cont…

- **Función Localizadora (Hash)**
  - o **Función de Dispersión**
  - Suponga que tenemos celdas en la memoria de una computadora, numeradas del 0 al 10 (indices).
  - Se desea almacenar y recuperar en dichas celdas enteros no negativos arbitrarios.
  - Una forma es empleando las función localizadora (hash).

## Cont…

- **Cont...**
  - Una función de este tipo toma datos por almacenar o recuperar y calcula la primera elección para su localización.
  - En este problema, para guardar o recuperar el número n, se podría tomar n mod 11 como una primera elección para localizarlo. La función de hash sería
    - h(n) = n mod 11





## Cont…

- **Ejemplo:**
  - Supóngase que almacenamos 15, 558, 32, 132, 102 y 5.
    - 15 mod 11 = 4
    - 558 mod 11 = 8
    - 32 mod 11 = 10
    - 132 mod 11 = 0
    - 102 mod 11 = 3
    - 5 mod 11 = 5
    - 257 mod 11 = 4

| 132 | | | 102 | 15 | 5 | 257 | | 558 | | 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

  - Si almacenamos 257 se produce una colisión por lo tanto tenemos que manejar una política de manejo de colisiones.
  - Buscamos la siguiente celda mayor no ocupada.





## Cont…

- **Cont...**
  - Si se desea localizar el valor almacenado n, se calcula m=h(n) y se le busca en la posición m. Si n no está en esa ubicación, se busca en el lugar subsiguiente
  - Si tampoco está allí, se busca en el lugar que sigue hasta llegar a una celda vacía, lo que significa que ese valor no ha sido ingresado.





## Cont…

- **Función Piso y Función Techo**
  - El piso de x denotado por $\lfloor x \rfloor$, es el mayor entero que es menor o igual a x (redondeo hacia abajo).
  - El techo de x denotado por $\lceil x \rceil$ es el menor entero que es mayor o igual a x (redondeo hacia arriba).
  - **Ejemplos:**
    - $\lfloor 8.3 \rfloor = 8$ , $\lfloor -8.9 \rfloor = -9$
    - $\lceil 9.1 \rceil = 10$, $\lceil -11.3 \rceil = -11$

## Cont…

- **Ejemplo:**
  - En 1996, las tarifas postales de primera clase en una empresa de correos, para pesos de hasta 11 onzas, eran:
    - 32 centavos de dolar por la primera onza o fracción
    - 23 centavos de dolar por cada onza o fracción adicional
  - De esta manera la tarifa postal queda:
    - $P(w) = 32 + 23 \lceil w - 1 \rceil$ , $11 \geq w > 0$
  - Asi:
    - $P(3.7) = 32 + 23 \lceil 3.7 - 1 \rceil = 32 + 23 \lceil 2.7 \rceil =$
      $32 + 23*3 = 101$ centavos
    - $P(2) = 32 + 23 \lceil 2 - 1 \rceil = 32 + 23 \lceil 1 \rceil =$
      $32 + 23*1 = 55$ centavos





## Cont...

- **Deber:**
  - Hacer los ejercicios del 2, 3, 5, 10, 13,14, 16, 17, 19, 26, 27, 62, 63, 65, 66, 68, 70 y 71 de las paginas 131 a la 136