# Matemáticas Discretas

**Capítulo 4:**

**Relaciones de Recurrencia**

1



## Introducción

- Consideremos las siguientes instrucciones para generar una sucesión:
  1. Comenzar con 5
  2. Dado cualquier término, sumarle 3 para obtener el siguiente término.
- Los terminos serán:

  5, 8, 11, 14, 17, ...
- Denotando la sucesión como $a_1, a_2, \ldots$:

  $a_1 = 5$

  $a_n = a_{n-1} + 3, n \geq 2$

2



## Relaciones de Recurrencia

- **Definiciones**
  - Una relación de recurrencia para la sucesión $a_0, a_1, \ldots$, es una ecuación que relaciona $a_n$ con algunos de sus predecesores $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$
  - Las condiciones iniciales para la sucesión $a_0, a_1, \ldots$ son valores dados en forma explícita para un número finito de términos de la sucesión.

3



## Cont...

- **Ejemplo 1:**
  - **Sucesion de Fibonacci**
    - Cuyos valores comienzan con 1, 1, 2, 3, 5, 8,13,.....
    - Se define mediante la relación de recurrencia

      $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 3$
    - Las condiciones iniciales son:

      $f_1 = 1, f_2 = 1$

4

# Cont...

- **Ejemplo 2:**
  - **Una persona invierte \$1000 a 12% compuesto anualmente. Si $A_n$ representa la cantidad al final de n años.**
  - **Determinar una relación de recurrencia y las condiciones iniciales que definan la sucesión { $A_n$}**
    - **Al final de n – 1 años , la cantidad es $A_{n-1}$.**
    - **1 año después, tendremos la cantidad $A_{n-1}$ + los intereses, así:**

$$A_n = A_{n-1} + (0.12)\ A_{n-1},\ n \geq 1$$

    - **Para aplicar está relación de recurrencia a n = 1 , necesitamos saber el valor de $A_0$.**
    - **Entonces obtenemos la condición inicial $A_0$**

**A0 = 1000**

  - **Esta relación de recurrencia permite calcular el valor de $A_n$ para cualquier n .**
  - **Por ejemplo para 3 años:**

**A3 = (1.12) A2**
**= (1.12) (1.12) A1**
**= (1.12) (1.12) (1.12) A0**
**= (1.12)3 (1000)**
**= 1404.93**





# Cont...

- **Ejemplo 3:**
  - **Cálculo del Interes Compuesto**
    - Este algoritmo recursivo calcula la cantidad de dinero al final de n años, para un capital inicial de 1000 dólares y una tasa de interes de 12% compuesto anualmente.
    - Entrada: n (# de años)
    - Salida: La cantidad de dinero al final de n años

```
Procedure interes_compuesto (n)
  if n=0 then
    return (1000)
  return (1.12 * interes_compuesto (n-1))
End interes_compuesto
```





# Cont...

- **Ejemplo 3:**
  - Sea $S_n$ el número de cadenas de n bits que no contienen el patrón 111.
  - Desarrollaremos una relación de recurrencia para $S_1$, $S_2$, ... y las condiciones iniciales que definen la sucesión S.
  - Contaremos el número de cadenas de n bits que no contienen el patrón 111.
    - a) que comienzan con 0
    - b) que comienzan con 10
    - c) que comienzan con 11
  - Los conjuntos de cadenas de tipos a, b y c son ajenos, por el principio de la suma.
  - Entonces Sn será igual a la suma de las cantidades de cadenas de los tipos a, b y c



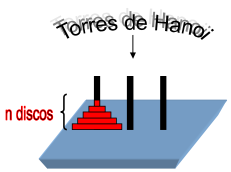


# Cont...

- **Cont...**
  - Supongamos que una cadena de n bits comienza con:
    - **0 y no contiene el patrón 111**
      - Entonces, la cadena de ( n – 1 ) bits que va después del 0 inicial no contiene el patrón 111.
      - Como después del 0 inicial puede aparecer cualquier cadena de ( n - 1 ) bits que no contenga 111, existen $S_{n-1}$ cadenas de tipo (a).
    - **10 y no contiene al patrón 111**
      - Entonces, la cadena de ( n - 2 ) bits posterior al 10 inicial no contiene al patrón 111.
      - Por tanto ; existen $S_{n-2}$ cadenas de tipo (b) .
    - **11 y no contiene al patrón 111**
      - Entonces el tercer bit debe ser 0. La cadena de ( n - 3 ) bits posterior al 110 inicial no puede contener el patrón 111
      - Por tanto , existen $S_{n-3}$ cadenas de tipo (c).
  - Así: $S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}$ , $n \geq 4$
  - Encontramos las condiciones iniciales por inspección: $S_1 = 2$, $S_2 = 4$, $S_3 = 7$ 

## Cont…

- **Ejemplo 4:**
- **Torres de Hanoi**
  - La torre de Hanoi es un juego que consta de tres postes montados sobre un tablero y n discos de diversos tamaños con agujeros en sus centros.
  - Se supone que si un disco está en algún poste, sólo se puede colocar sobre tal disco otro con diámetro menor.
  - Dados todos los discos apilados en un poste, el problema consiste en transferir los discos a otro poste, moviendo un disco a la vez y haciendo que siempre el disco superior sea de menor diámetro que el inferior.
  - Hallar una expresión que describa la cantidad de movimientos para lograrlo.








## Cont…

- **Cont...**
  - Sea **An** el número de movimientos que se realizan para trasladar n discos.
  - Entonces **An-1** es el número de movimientos que se requieren para trasladar **n-1** discos.
  - …entonces podemos deducir que para hallar la cantidad de movimientos que se requiere para mover n cantidad de discos mediante recurrencia la obtenemos de:
    $$A_n = 1 + 2\,A_{n-1}\ ,\ n > 1$$
  - **Otra manera es** $A_n = 2^{n-1} + A_{n-1}\ ,\ n > 1$
  - Analicemos el algoritmo recursivo:
  - ¿Qué pasa..? cuando tenemos:
    - **1 disco**
    - **2 discos**
    - **3 discos**
    - **n discos**





## Cont…

- **Cont...**
  - Para encontrar la relación de recurrencia podemos hacer un análisis hacia atrás.
    $$A_n = F(A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_2, A_1, A_0)$$





## Cont…

- **Ejemplo 4:**
- **Crecimiento de Poblaciones**
  - Suponga que la población de venados en Rustic Country es de 1000 en el instante n = 0 y que el incremento desde el instante n – 1 hasta el instante n es 10% del tamaño en el instante n – 1.
  - Escriba una relación de recurrencia y una condición inicial que defina la población de venados en el instante n, y luego resuelva la relación de recurrencia.
    - Sea $d_n$ la población de venados en el instante n.
    - Como condición inicial tenemos $d_0 = 1000$

## Cont…

- **Cont...**
  - El incremento del instante n – 1 al instante n es:

    $d_n - d_{n-1}$

  - El incremento es 10% del tamaño en el instante n – 1 , entonces tenemos la relación de recurrencia:

    $d_n - d_{n-1} = 0.1\ d_{n-1}$

  - También se puede escribir como

    $d_n = 1.1\ d_{n-1}$

  - Resolviendo la relación de recurrencia por medio del método de iteración resulta:

    $d_n = 1.1\ d_{n-1} = 1.1\ (1.1\ d_{n-2}) = (1.1)^2\ d_{n-2}$

    $= \ldots = (1.1)^n\ d_0 = (1.1)^n\ 1000$



## Algo de Historia

- **Las torres de Hanoi**
  - Cuenta la leyenda que en la lejana ciudad de Benarés, India, había un templo, en el cual el dios hindú Brahma, al crear el mundo, puso verticalmente tres palitos de diamantes, colocando en uno de ellos 64 anillos de oro: el más grande, en la parte inferior, y los demás por orden de tamaño uno encima del otro.
  - Los sacerdotes del templo debían, trabajando noche y día sin descanso, trasladar todos los anillos de un palito a otro, utilizando el tercero como auxiliar, moviendo uno solo a la vez y siempre colocando el anillo de menor diámetro sobre otro de mayor.
  - En el momento en que los sacerdotes trasladaran los 64 anillos al otro palo llegaría el fin del mundo....

    ¿Cuánto tiempo crees que tardaría el traslado de los 64 anillos?
  - Si se hiciera un cambio cada segundo, en una hora se realizarían 3600 traslados. Suponiendo que los sacerdotes trabajaran a esa rapidez, entonces tardarían 500,000 millones de años, en números redondos.
  - ¿Pero, por qué?
    - Lo que pasa es que el número de cambios que se necesitan es igual a la multiplicación sucesiva de 64 doces menos una unidad. ¡Qué locura!



## Cont…