Matemáticas Discretas

Capítulo 5:
Teoría de Gráficas

Conceptos Básicos

- Algunos grafos se pueden considerar grafos de ciertas relaciones, pero hay otros que no.
- Tome en cuenta que todos los diagramas (grafos) constan de:
  - **Vértices (Nodos):** Un conjunto de puntos que se muestran mediante círculos, puntitos u otros iconos que a veces se rotulan en la forma v_1, v_2, ... o bien 1,2, . . .
  - **Aristas (arcos o líneas):** Líneas que conectan dos nodos entre sí. Las aristas se etiquetan con e_1, e_2, ...

Cont...

- **Recorrido, camino o ruta:**
  - De v_0 a v_n es cuando partiendo de v_0 recorremos una arista hasta el vértice v_1, recorremos otra arista hasta el vértice v_2, y así sucesivamente hasta que llegamos al vértice v_n .
  - Existen dos recorridos básicos que se pueden realizar en los grafos:
    - Un recorrido de amplitud
    - Un recorrido de profundidad.

Cont...

- **Cont...**

RECORRIDO DE AMPLITUD

- Es considerado por niveles, donde cada nivel está identificado.
- Para recorrer este grafo por amplitud en un lenguaje de programación se lo hará implementando una estructura de colas en donde se colocan los nodos correspondientes a cada nivel del grafo.
- Estos nodos son tratados uno por uno, luego sus nodos adyacentes son visitados, y a así sucesivamente hasta que todos los nodos hayan sido visitados.
- Esta condición de terminación se alcanza cuando la cola queda vacía.

Cont...

- **Cont...**

RECORRIDO EN PROFUNDIDAD

- El recorrido por profundidad sigue primero una trayectoria desde el nodo inicial hasta un nodo terminal, después otra trayectoria desde el mismo punto inicial hasta alcanzar otro final., y así sucesivamente hasta que todos los nodos hayan sido visitados.

Cont...

- **Definición:**
  - **Una Gráfica (o gráfica no dirigida)** consta de un conjunto V de vértices (o nodos) y un conjunto E de aristas (arcos o lados) tales que a cada arísta $e \in E$ queda asociada un par no ordenado de vértices.
  - Si existe una única arista e asociada con los vértices v y w, escribimos

    e = (v , w) o e = (w , v)

  - En este contexto (v,w) denota una arista de v a w en una gráfica no dirigida y no un par ordenado.

Cont...

- **Definición:**
  - **Una Gráfica dirigida (o digráfica) G** consta de un conjunto V de vértices (o nodos) y un conjunto E de aristas (arcos o lados) tales que a cada arísta $e \in E$ se asocia con un par ordenado de vértices.
  - Si existe una única arista e asociada con el par ordenado (v,w) de vértices escribimos

    e = (v , w)

    lo cual denota una arista de v a w

Cont...

- **Cont...**
  - Una arista **e** en una grafica (dirigida o no) asociada con un par de vértices v y w es incidente en v y w.
    - Se dice que:
      - v y w son incidentes en **e**
      - v y w son vértices adyacentes
  - Si **G** es una grafica (dirigida o no) con vértices V y aristas E, escribimos

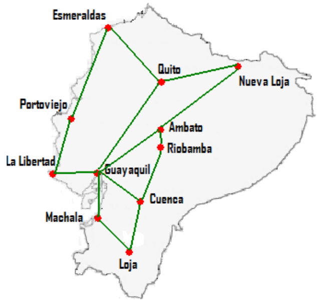
    G = (V, E)

  - A menos que se indique lo contrario supondremos que V y E son conjuntos finitos y que V es no vacío.

Teoría de Gráficas

Cont...

- **Ejemplo 1:**
  - El sistema de carreteras del Ecuador va a ser recorrido por un inspector.
  - Debe recorrer cada uno de los caminos y crear un archivo con información del estado de cada carretera.
  - El inspector vive en Guayaquil, asi que saldrá de ahí para recorrer todos los caminos exactamente una vez y regresará a Guayaquil.
  - ¿Es esto posibles?



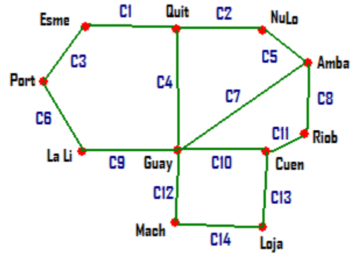
9

Teoría de Gráficas

Cont...

- **Solución**

  Grafica no dirigida
  - V = {Esme, Quit, NuLo, Port, Amba, LaLi, Guay, Riob, Cuen, Mach, Loja}
  - E = {c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9, c10, c11, c12, c13, c14}
  - La arista c1 = (Esme, Quit) = (Quit, Esme), c2 = (Quit, NuLo) = (NuLo, Quit), etc



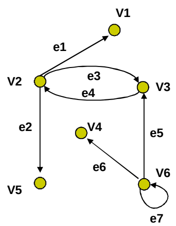
10

Teoría de Gráficas

Cont...

- **Ejemplo 2:**

  Gráfica Dirigida
  - Para la gráfica dada enuncie todas sus aristas en terminos de sus vértices incidentes.



11

Teoría de Gráficas

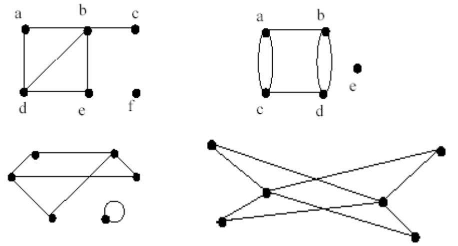
Cont...

- **Aristas Paralelas:** Son aristas distintas asociadas con el mismo par de vértices.
  - $e_1 = (v_1, v_2)$ y $e_2 = (v_1, v_2)$
- **Lazo:** Es una arista incidente en un único vértice.
  - $e_1 = (v_3, v_3)$
- **Vértice aislado:** Es un vértice que no es incidente en arista alguna.
- **Gráfica Simple:** Es una gráfica sin lazos ni aristas paralelas.

12

Cont…

- **Ejercicio en Clases:**
  - Para cada una de las graficas presentadas indique si tienen aristas paralelas, lazos, vértices aislados y si son gráficas simples



Cont…

- **Gráfica con Pesos (grafos ponderados):** Una gráfica con números (pesos) sobre cada una de sus aristas.
  - $e_1 = (v_1, v_3) = 5$, $e_2 = 7$
- **Peso de la Arista:** Es la etiqueta de la arista.
  - El peso de la arista $e_1 = 5$
- **Longitud de un Camino:** Es la suma de los pesos de las aristas en el camino de v a w.
- **Grafo nulo:** Un grafo que contenga solamente nodos aislados.

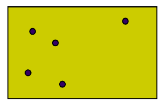
Cont…

En un grafo dirigido:

- **Grado de Entrada:** Para todo nodo v es el número de aristas que tienen a v como nodo inicial.
- **Grado de Salida:** El número de aristas que tienen a v como nodo terminal.
- **Grado total del nodo:** Es la suma del índice de entrada y el índice de salida del nodo.
  - El grado total de un nodo aislado es 0 , y el de un nodo con un bucle y sin otras aristas que incidan en él son 2.

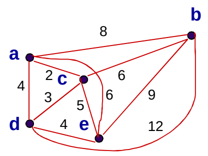
Cont…

- **Ejemplo 3:**
  - En un proceso de producción con frecuencia es necesario realizar muchos agujeros en hojas de metal. Los componentes se tornillan luego en estas hojas.
  - Los agujeros se realizan bajo el control de una computadora. Para ahorrar tiempo y dinero el taladro debe moverse lo más rápido posible.



Cont...

- **Solución:**



Camino	Longitud
a, b, c, d, e	21
a, b, d, c, e	28
a, c, b, d, e	24
a, c, d, b, e	26
a, d, b, c, e	27
a, d, c, b, e	22

Cont...

- **Ejemplo 3:**
- Hay muchos programas que constan de módulos que se invocan unos a otros. Los grafos de llamadas representan módulos mediante nodos.
- Una línea dirigida que va del nodo x al nodo y indica que x invoca a y, en el grafo de llamadas de la figura, por ejemplo el modulo A invoca a los módulos B,C y D.
- Los módulos B y C invocan al módulo E.
- Cuando uno de los módulos invoca a otro, tiene que haber una comunicación entre esos módulos a través de una interfaz.

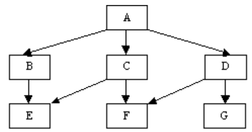


Figura 4.24 Representación de un programa mediante un grafo

Cont...

- **Ejemplo 4:**
  - Una aplicación más reciente de los grafos es el modelado de redes de computadoras.
  - Una red de computadoras consta de toda una gama de elementos, tales como computadoras y líneas de comunicación.
  - En el grafo que representa la red de computadores:
    - cada nodo es un dispositivo (una computadora o una terminal)
    - y cada arista o enlace denota un medio de comunicación (una línea telefónica o un cable de comunicación)
  - Los grafos son importantes para modelar estas redes con respecto a su fiabilidad y a su eficiencia.
  - En la figura.
    - La parte subred representa la parte de comunicaciones de la red.
    - Los demás dispositivos que se encuentran alrededor de la subred de comunicaciones se pueden considerar dispositivos externos.

Cont...

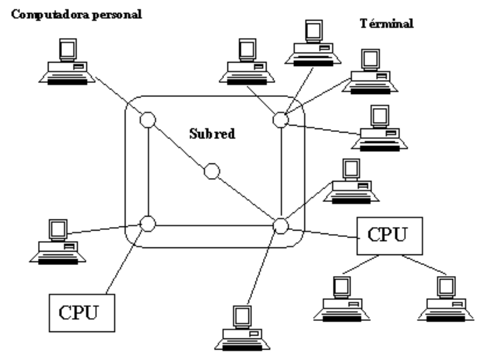
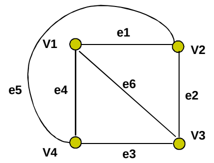


Figura 4.2.3 Representación en forma de grafo de una red de computadoras.

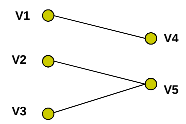
Cont...

- **Gráfica Completa de n vértices**
  - **Definición:**
    - Que se denota K_n, es la gráfica simple con n vértices en la cual existen una arista entre cada par de vértices distintos.
  - **Ejemplo:**



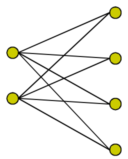
Cont...

- **Gráfica Bipartita**
  - **Definición:**
    - Una gráfica G=(V,E) es bipartita si el conjunto de vértices V se puede separar en dos subconjuntos V_1 y V_2 de modo que cada arista en E sea incidente en un vértice de V_1 y un vértice de V_2.
  - **Ejemplo:**
    - En la gráfica tenemos que V se puede dividir en:
      - V1 = $\{v_1, v_2, v_3\}$
      - V2 = $\{v_4, v_5\}$



Cont...

- **Gráfica Bipartita Completa con m y n vértices**
  - **Definición:**
    - La gráfica bipartita completa con m y n vértices, denota $K_{m,n}$, es la gráfica simple cuyo conjunto de vértices está dividido en conjuntos V_1 con m vértices y V_2 con n vértices, en los cuales existe una arista entre cada par de vértices v_1 y v_2, donde v_1 está en V_1 y v_2 está en V_2.
  - **Ejemplo:**

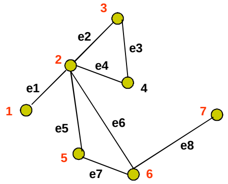


Cont...

- **Deber:**
  - **Ejercicios del 1 al 18 de la pagina 326**

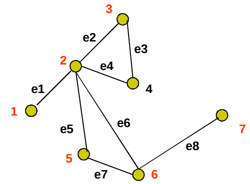
Cont…

- **Caminos y Ciclos**
  - **Definición:**
    - Sea v_0 y v_n vértices de una gráfica. Un camino (ruta) de v_0 a v_n de longitud n es una sucesión alternante de n+1 vértices y n aristas que comienzan con el vértice v_0 y terminan con el vértice v_n.
  - **Ejemplo:**
    - Un camino de 1 a 2 es:
      (1, e1, 2, e2, 3, e3, 4, e4, 2)
      (1, 2, 3, 4, 2)



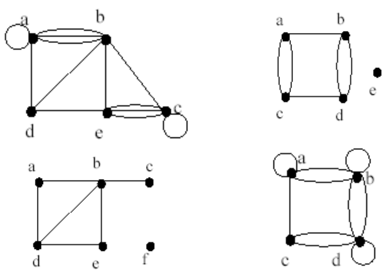
Cont…

- **Gráfica Conexa**
  - **Definición:**
    - Una gráfica G es conexa si dados cualesquiera dos vértice v y w en G, existe un camino de v a w.
  - **Ejemplo:**



Cont…

- **Ejercicio en Clases:**
  - Para cada una de las graficas presentadas indique dos caminos distintos de d a c, e indique si es conexo.

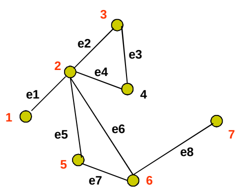


Cont…

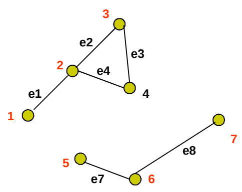
- **Subgráficas**
  - Una gráfica conexa consta de una pieza.
  - Una gráfica no conexa consta de dos o mas piezas.
    - Estas piezas son subgráficas de la gráfica original y se llaman componentes.
- **Definición:**
  - Sea G=(V,E) una gráfica. (V´,E´) es una subgráfica de G si
    - a) $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.
    - b) Para cada arista $e' \in E'$, si e´ es incidente en v´y w´, entonces $v', w' \in V'$.
  - Una subgráfica G´de una gráfica G se obtiene eligiendo ciertas arista y vértices de G, sujetos a las restricciones de que si elegimos una arista e en G que sea incidente en los vértices v y w, entonces debemos incluir los vértices v y w en G´.

Cont…

- **Cont…**
  - **Ejemplo:**
    - G´ es una subgráfica de G



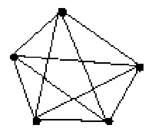
G

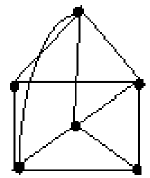


G´

Cont…

- **Cont…**
  - **Ejercicio en clases:**
    - Encuentre dos subgráficas para cada gráfica.



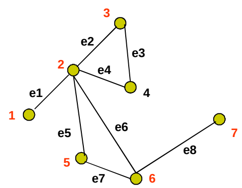


Cont…

- **Definiciones:**
  - Sean v y w vértices en una gráfica G
  - **Camino Simple:**
    - Un camino simple de v a w es un camino de v a w sin vértice repetidos.
  - **Ciclo o circuito:**
    - Es un camino de longitud distinta de cero de v a v, sin aristas repetidas.
  - **Ciclo Simple:**
    - Es un ciclo de v a v en el cual no existen vértices repetidos, excepto por los vértices inicial y final, que son iguales a v.

Cont…

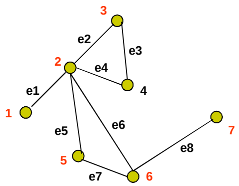
- **Ejercicio en clases:**
  - Para la grafica dada llene la siguiente tabla:



Camino	¿Es camino simple?	¿Es ciclo?	¿Es un ciclo simple?
(6,5,2,4,3,2,1)			
(6,5,2,4)			
(2,6,5,2,4,3,2)			
(5,6,2,5)			
(7)			

Cont…

- **Solución:**



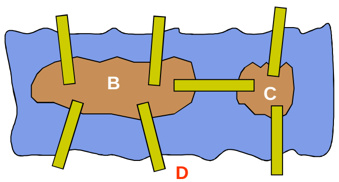
Camino	¿Es camino simple?	¿Es ciclo?	¿Es un ciclo simple?
(6,5,2,4,3,2,1)	n	n	n
(6,5,2,4)	s	n	n
(2,6,5,2,4,3,2)	n	s	n
(5,6,2,5)	n	s	s
(7)	s	n	n

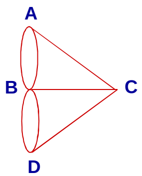
Cont...

- **Cont...**
  - **Ejemplo:**
    - Problema de los Puentes de Konigsberg.
    - La primera publicación en la teoría de grafos fue hecha por Leonhard Euler en 1736.
    - Tal publicación expone una teoría general que incluye una solución a lo que es conocido como Problema de los Puentes de Konigsberg.
    - Dos islas que se hallan en el río Pregel en Konigsberg (antes en Prusia Oriental; llamada ahora Kaliningrado, en la Unión Soviética) están conectadas entre si y con las márgenes del río por puentes.

Cont...

- **Cont...**
  - **Cont...**
    - **El problema consiste en partir desde cualquier lugar A, B. C o D; seguir caminando y pasar por cada uno de los puentes exactamente una vez, y luego volver al punto de partida.**
    - **Tal ruta se llama circuito o recorrido de Euler.**
      - **Tal recorrido se puede representar como lo indica la Figura.**
      - **Los vértices corresponden a los lugares, y los lados, a los puentes.**





Cont...

- **Cont...**
  - **Cont...**
    - La solución puede obtenerse fácilmente usando el concepto de grado (valencia) de un vértice.
      - El grado de un-vértice v, (v), es el numero de aristas incidentes en v. (Por definición cada lazo de v contribuye en 2 al grado de v.)
    - Cada lado incidente en v se emplea solo una vez. Por lo tanto, los lados incidentes en v están en pares (o pareados) y , como consecuencia , v tiene valencia par .
      - Los lados incidentes al vértice inicial v también están pareados.
      - El lado por el cual se sale de v por primera vez, esta pareado con el lado por el cual se vuelve a v por ultima vez.
      - Lo mismo ocurre en los vértices no iniciales.
    - Por consiguiente, si se puede partir de cualquier vértice, caminar a lo largo de cualquier lado exactamente una vez y volver al punto de partida, entonces todos los vértices deben tener grado par.
    - **En un circuito de Euler se pasa por cada lado exactamente una vez, en tanto que en un circuito de Hamilton se pasa por cada vértice exactamente una vez.**

Cont…

- **Circuitos de Euler**
  - Un grafo no dirigido representa un dibujo de líneas.
  - Cada nodo del grafo representa un punto del dibujo y una arista entre dos nodos indica que existe una línea entre los dos puntos correspondientes.
  - ¿Es posible dibujar estas figuras con un bolígrafo, pintando cada línea una sola vez, sin levantar el bolígrafo y acabando donde se empezó?
  - **Circuito de Euler:** es un ciclo (no necesariamente simple) que visita todas las aristas exactamente una vez.
  -
  - **Condiciones necesarias para que exista un circuito de Euler:**
    - El grafo debe ser conexo.
    - Todos los nodos deben tener grado (número de aristas) par, ya que el camino entra y sale de los nodos.

Cont…

- **Algoritmo para encontrar un circuito de Euler en un grafo G, partiendo de un nodo v**
  - 1. Buscar un ciclo en G empezando por v (por ejemplo con una búsqueda en profundidad). Puede que no todas las aristas hayan sido visitadas.

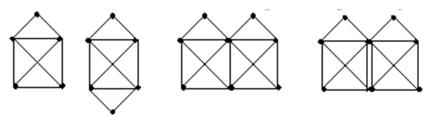
    2. Si quedan aristas por visitar, seleccionar el primer nodo w del ciclo anterior que tenga una arista sin visitar. Buscar un ciclo partiendo de w que pase por aristas no visitadas.
  - 3. Unir el ciclo del paso 1 con el obtenido en el paso 2. Repetir sucesivamente los pasos 2 y 3 hasta que no queden aristas por visitar.
- Un **camino euleriano** en un grafo es un camino que contiene a todas las aristas del grafo exactamente una vez.
- Un grafo es euleriano si contiene un camino euleriano cerrado.

Cont…

- **Teorema 1:**
  - Si una gráfica G tiene un ciclo de Euler, entonces G es conexa y cada vértice tiene grado par.
- **Teorema 2:**
  - Si g es una gráfica conexa y todo vértice tiene grado par, entonces G tiene un ciclo de Euler.

Cont…

- **Ejercicio en clases:**
  - Para las graficas dadas indique si tienen ciclos de Euler:



Cont…

- **Ciclos Hamiltonianos**
  - Dado un grafo no dirigido G, un ciclo hamiltoniano es un ciclo simple que visita todos los vértices.
- **Un camino hamiltoniano**
  - En un grafo es un camino que contiene a todos los vértices del grafo exactamente una vez (salvo v_0=v_n, si el camino es cerrado).
  - Un grafo hamiltoniano es aquel que contiene un ciclo hamiltoniano.
  - **Propiedad:**
    - Un grafo bipartido G=(V1 È V2 , A) con ½ V1½ ¹ ½ V2½ no es hamiltoniano.

Cont…

- **Cont...**
  - **Teorema:**
    - Sea G un grafo simple de n vértices. Si para todo par de vértices x e y no adyacentes se cumple que d(x)+d(y) ³ n , entonces G es hamiltoniano.
  - **Teorema:**
    - Si G es un grafo hamiltoniano entonces, para todo SÌ V se cumple que el número de componentes conexas de G - S, es menor o igual que ½ S½ .
  - **Observacion:**
    - NO hay caracterización especifíca para los grafos hamiltonianos.
  - Un circuito hamiltoniano, o de Hamilton, en un grafo G es un camino que comienza y termina en un mismo vértice, pasando exactamente una vez por cada vértice.

Cont…

- **Determinar si un grafo no dirigido dado tiene un ciclo hamiltoniano.**
  - Aunque el problema es muy parecido al del circuito de Euler, no se conoce ningún algoritmo eficiente para resolverlo.
  - El problema del ciclo hamiltoniano pertenece a un conjunto de problemas de difícil solución llamado problemas NP-completos.
  - La solución requiere básicamente evaluar todas las posibilidades, dando lugar a un orden de complejidad exponencial o factorial.
  - Otra posibilidad es usar métodos heurísticos, que pueden funcionar en algunos casos y en otros no.

Cont…

- **Cont...**
  - A diferencia de la situación relacionada con los circuitos de Euler, no hay condiciones necesarias y suficientes para la existencia de los circuitos de Hamilton en un grafo que se puedan verificar con facilidad.
  - Los circuitos de Hamilton son llamados así en honor de Sir William Rowan Hamilton, quien patento un juego con la forma de un dodecaedro, a mediados del siglo XIX .
  - Cada esquina del dodecaedro tenia el nombre de una ciudad y el problema era comenzar en cualquier ciudad, viajar a lo largo de las líneas, visitar cada población exactamente una vez y volver al punto de partida.

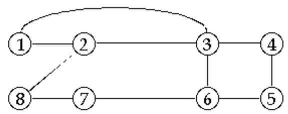
Cont...

- **Cont...**
- *Problema del viajante (agente viajero)*
  - Dado un grafo no dirigido, completo y ponderado G = (V, A), encontrar un ciclo simple de costo mínimo.

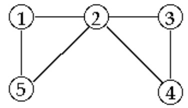
- **Ejemplos:**
  - Un repartidor de determinadas mercancías tiene encargos en varias ciudades. ¿Qué ruta debe seguir para que el costo de desplazamiento sea mínimo?
  - El problema del viajante es un problema NP-completo, con un orden de complejidad exponencial. No existe una solución polinómica.
  - Podemos aplicar heurísticas, obteniendo soluciones aproximadas, no necesariamente óptimas.

Cont...

- **Ejemplos:**



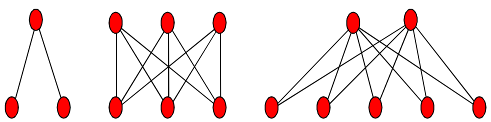
Hamiltoniano: 1-2-8-7-6-5-4-3-1



No contiene ningún hamiltoniano.

Cont...

- **Ejercicios:**



Cont...

- **Deber:**
  - **Hacer los ejercicios 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 16 de las páginas 345 a 347.**

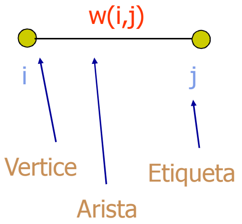
Cont…

- **Edward W. Dijkstra**
  - Nacio en Países Bajos en 1930.
  - De profesión programador.
  - Ganó el Premio Turing (1972)
  - Diseñó el Algoritmo de la Ruta más Corta
  - Muere de cáncer en el 2002

Cont…

- **Grafica con pesos:**
  - Es una grafica en la cual se le asignan valores a las aristas y que la longitud de una ruta (camino) en una grafica con pesos es la suma de los pesos de las aristas de la ruta.
  - El peso siempre va a ser positivo

- El peso de i a j se representa así: w(i,j)



Cont…

- **El Algoritmo en Pseudocódigo**
  - Este algoritmo determina la ruta mas corta del vértice a al vértice z en una grafica conexa con pesos.
    - El peso de la arista (i,j) es w(i,j)>0
    - La etiqueta del vértice x es L(x)
    - Al concluir, L(z) es la longitud de una ruta mas corta de a a z.
  - Entrada: Gráfica conexa con pesos positivos, Vértice a y Vértice z
  - Salida: L(z), longitud de una ruta mas corta de a a z

Procedure dijkstra (w,a,z,L) — w=peso, a=vértice inicial, z=vértice final, L= etiqueta del vértice
L(a):= 0 — El vértice inicial siempre toma el valor de 0
for todos los vértices x!=a do
  L(x) := ∞ — Inicialización
End for

Cont…

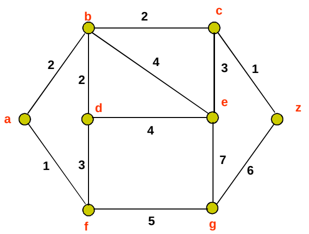
- **Cont...**

T={a,b,c,d,e,f,g,z}

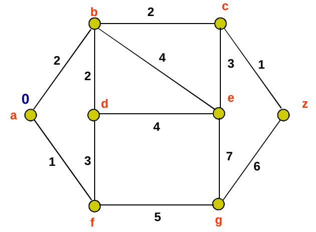
T:= conjunto de todos los vértices
*\ T es el conjunto de vertices cuya distancia mas corta a a no ha sido determinada *
While z Є T do — Z es el elemento final. Mientras Z e de T ....
  begin
  Elegir v Є T con L(v) mínimo — Elige el vértice con long menor (v) y la quita de T
  T := T - {v}
  For cada x Є T adyacente a v **do** — Para cada vértice elemento de T y adyacente a v -> x
    L(x):= min { L(x), L(v) + w(v,x) } — Se elige el mínimo entre la long de x y la long de x + el peso de v a x
  end For
end While
end dijkstra

Cont…

- **Cont...**
  - **Ejemplo:**
    - Determinar la ruta mas corta de a a z usando el algoritmo de Dijkstra.



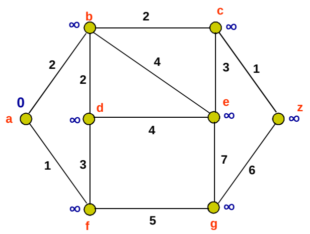
Cont…



- Conjunto de vértices cuya dist. mas corta a la arista inicial no ha sido determinada: T={a,b,c,d,e,f,g,z}
- Calculamos la ruta mas corta de a a z.
- Pasos para resolver el algoritmo:
  1. Siempre el vértice de partida es igual a cero. a=0

Cont…

2. En la inicialización se le asigna un valor de ∞ a todas las etiquetas desconocidas.



Cont…

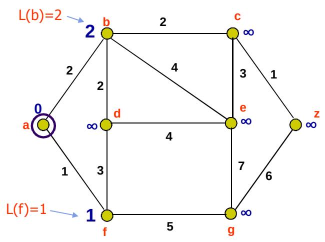
3. Sacamos los valores de los vértices adyacentes al inicial.

   L(x):= min{L(x),L(v)+w(v,x)}

   Para nuestro caso a es la inicial encerrada con un circulo.

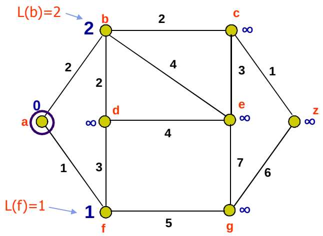
   L(b)=min{L(b),L(a)+w(a,b)}
   L(b)=min{∞, 0+2}=2

   L(f)=min{L(f),L(a)+w(a,f)}
   L(f)=min{∞, 0+1}=1



Cont…

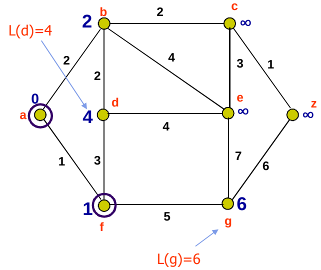
4. Ahora ordenamos los vértices de menor a mayor. En nuestro caso:
   1ero va a ser L(f)=1.
   2do va a ser L(b)=2
   Según este orden nos regiremos en los sgtes. pasos.



Cont…

5.1. Sacamos los vértices adyacentes del 1ero en nuestro caso de f (encerrado)
Determinamos d y g
L(d)=min{L(d),L(f)+w(d,f)}
L(d)=min{∞, 1+3}=4

L(g)=min{L(g),L(f)+w(g,f)}
L(g)=min{∞,1+5}=6

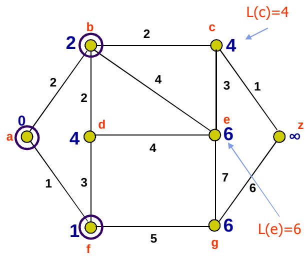


Cont…

5.2. Sacamos los vértices adyacentes del 2do. En nuestro caso de b (encerrado)
Determinamos c y e.

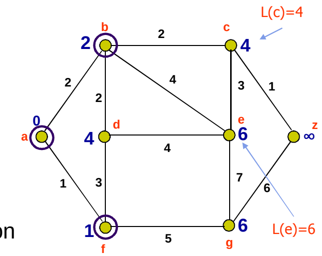
L(c)=min{L(c), L(b)+w(b,c)}
L(c)=min{∞, 2+2}=4

L(e)=min{L(e),L(b)+w(b,e)}
L(e)=min{∞, 2+4}=6



Cont…

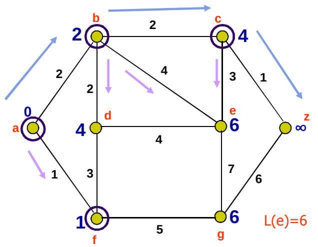
6. Ahora ordenamos los vértices próximos a z calculados anteriormente de menor a mayor. En nuestro caso:
   1ero va a ser L(c)=4
   2do va a ser L(g)=6
   Como el menor es L(c), con c nos regiremos para calcular z



Cont…

7. Se obtiene la ruta mas corta y L(z).
   Sacamos el vértice adyacente al menor anterior calculado, o sea C. (encerrado)

   Así.
   L(z)=min{L(z),L(c)+w(c,z)}
   L(z)=min{∞, 4+1}=5
   L(z)=5



La ruta mas corta es :
{a,b,c,z}

La ruta mas corta
Otras Rutas

Cont…

/* S y Q son listas */

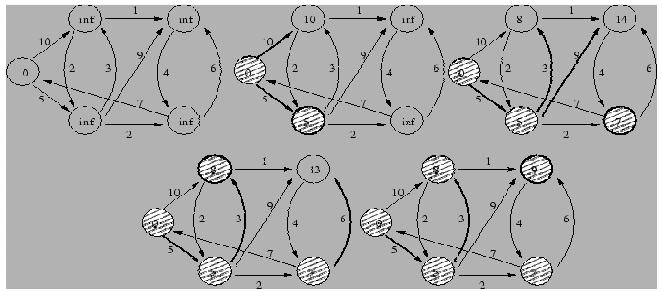
Implementación en C

```
void Dijkstra(heads *G, int s)
{
    int i; no *aux;
    for (i=0; i<NUMVERT; i++)
        G[i].DIST = MAXINT;
    G[s].DIST = 0;
    S = NULL;
    Q = V;     /* Q es una lista que inicia con todos los vertices de G */
    while (EMPTY(Q) != 1)
        {
            i = REMOVE_MINIMO(Q);
            /* remueve el vertice con menor valor de Q */
            INSERE(S,i);
            /* inserta i al conjunto S */
            for (aux = G[i].ADJ; aux; aux=aux->NEXT)
                if (G[aux->VERTEX].DIST > G[i].DIST + p(i,aux->VERTEX));
                    G[aux->VERTEX].DIST = G[i].DIST + p(i,aux->VERTEX);
        }
}
```

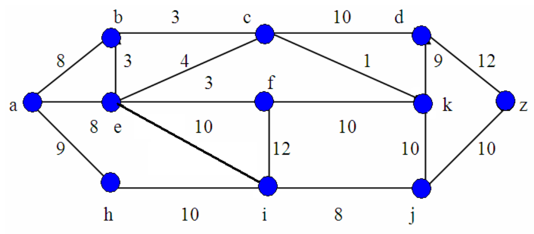

Cont...

- **Aplicación: Ruteo en Redes de Datos**
  - Una red de comunicaciones involucra un conjunto de computadoras (nodos) conectadas mediante enlaces de comunicación (aristas), que transfiere paquetes (grupos de bits) desde determinados nodos origen a otros nodos destino.
  - La forma más común para seleccionar la trayectoria (o ruta) de dichos paquetes, se basa en la formulación de la ruta más corta.
  - En particular a cada enlace de comunicación se le asigna un escalar positivo el cual se puede ver como su longitud.
  - Un algoritmo de ruteo de trayectoria más corta, rutea cada paquete a lo largo de la trayectoria de longitud mínima (ruta más corta) entre los nodos origen y destino del paquete.

Cont...



Cont...

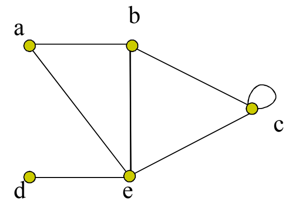


Representaciones de Graficas

Matriz de Adyacencia

- Nuestro primer método de representación de una gráfica utiliza la matriz de adyacencia.
- Consideremos la gráfica:

z

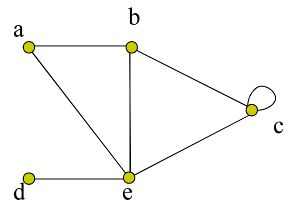


Cont...

- Si consideramos la gráfica anterior para obtener la matriz de adyacencia:
  - Primero elegimos un orden para los vértices digamos a,b,c,d,e
  - Luego etiquetamos los renglones y columnas de una matriz con los vértices ordenados.
  - La entrada en esta matriz es:
    - 1 si los vértices de renglón y la columna son adyacentes y
    - 0 en caso contrario.
- La matriz de adyacencia no es una manera muy eficiente para representar una gráfica.

Cont...

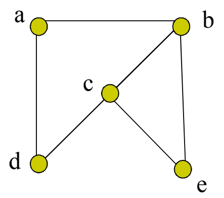
$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



- Observe que podemos obtener el grado de un vértice v en una gráfica simple G, sumando el renglón v o la columna v en la matriz de adyacencia de G.
- Esta matriz nos permite representar lazos, pero no aristas paralelas.

Cont...

- **Cont...**
  - **Ejemplo 2:**



  - **Solución**:

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cont...

- Caminos de longitud n de un vértice i a un vértice j
  - Mostraremos que si A es la matriz adyacencia de una gráfica simple G, las potencias de A,

    $A, A^2, A^3, \ldots,$

    Cuentan el número de caminos de diversas longitudes.
  - Si los vértices de G se etiquetan 1, 2, 3..., la entrada ij-ésima en la matriz A^n es igual al número de caminos de i a j de longitud n.
  - **Teorema:**
    - Si A es la matriz de adyacencia de una gráfica simple, la entrada ij-ésima de A^n es igual al numero de caminos de longitud n del vértice i al vértice j,n=1´,2,......

Cont...

- Por ejemplo, supongamos que obtenemos el cuadrado de la matriz A del ejemplo anterior:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

- La entrada de la diagonal principal de A^2 proporciona los grados de los vértices (cuando la gráfica es una gráfica simple)

Cont...

- Los caminos de longitud 4 de i a j del ejemplo anterior están dados por A4:

$$A^4 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 9 & 3 & 11 & 1 & 6 \\ 3 & 15 & 7 & 11 & 8 \\ 11 & 7 & 15 & 3 & 8 \\ 1 & 11 & 3 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & 8 & 6 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

- La entrada del renglón d, columna e es 6, lo cual significa que existen seis caminos de longitud 4 de d a e. Por inspección, vemos que estos caminos son:

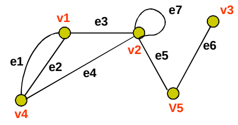
  (d,a,d,c,e), (d,c,d,c,e), (d,a,b,c,e), (d,c,e,c,e), (d,c,e,b,e), (d,c,b,c,e)

Cont...

- **Matriz de Incidencia**
  - Para obtener la matriz de incidencia de una gráfica:
    - Etiquetamos los renglones con los vértices y
    - Etiquetamos las columnas con las aristas, en algún orden arbitrario.
  - La entrada del renglón v y la columna e es:
    - 1 si e es incidente en v
    - 0 en caso contrario
  - La matriz de incidencia nos permite representar las aristas paralelas y los lazos.
  - En una gráfica sin lazos, cada columna tiene dos 1.
  - La suma de los elementos de un renglón proporciona el grado del vértice identificado con ese renglón.

Cont...

- **Cont...**
  - **Ejemplo:**



  - **Solución:**

$$A = \begin{array}{c} \\ v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \\ v5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cont...

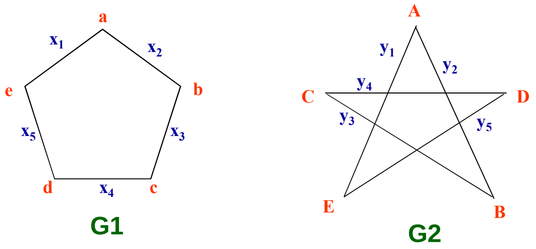
- **Deber:**
  - **Hacer los ejercicios del 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14 y 15 de las páginas 355 y 356.**

Isomorfismo de Gráficas

- **Definición**
  - Las gráficas G1 y G2 son isomorfas si existe una función uno a uno y sobre, f, de los vértices de G1 a los vértices G2 y una función uno a uno y sobre, g, de las aristas de G1 a las aristas de G2, de modo que una arista e es incidente en v y w en G1 si y solo si la arista g(e) es incidente en f(v)y f(w) en G2. El par de funciones f y g es un Isomorfismo de G1 sobre G2

Cont...

- **Cont...**
  - **Ejemplo 1:**



Cont...

- **Cont...**
  - Un isomorfismo de las gráficas mostradas anteriormente se define como:

$$f(a) = A,\ \ f(b) = B,\ \ f(c) = C,\ \ f(d) = D,\ \ f(e) = E$$

$$g(x_i) = Y_i\ ,\ \ i = 1,.....,5.$$

Cont...

- **Clases de Equivalencia**
  - Si definimos una relación R en un conjunto de gráficas mediante la regla G1RG2 si G1 y G2 son isomorfas, entonces R es una relación de equivalencia.
  - Cada clase de equivalencia consta de un conjunto de gráficas isomorfas entre ellas.

Cont...

- **Teorema 1:**
  - Sean G_1 y G_2 gráficas simples. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.
    a) G_1 y G_2 son isomorfas
    b) Existe una función uno a uno y sobre, f, del conjunto de vértices de G_1 al conjunto de los vértices de G_2 que satisface: Los vértices *v* y *w* son adyacentes en G_1 y sólo si los vértices f(*v*) y f(*w*) son adyacentes en G_2.

Cont...

- **Teorema 2:**
  - Las gráficas simples G_1 y G_2 son isomorfas si y sólo si para cierto orden de sus vértices, las matrices de adyacencia son iguales
- **Ejemplo:**
  - Las matrices de adyacencia de las gráficas G1, con respecto del orden de los vértices a, b, c, d, e, y G2, con respecto del orden de los vértices A, B, C, D, E, del ejemplo 1, son:

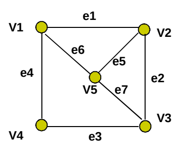
Cont...

- **Solución:**

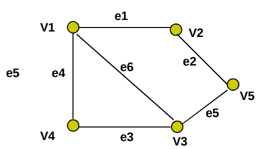
$$A1 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A2 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cont...

- **Ejemplo:**
  - Las gráficas G_1 y G_2 no son isomorfas, pues G_1 tiene siete aristas y G_2 tiene seis aristas.



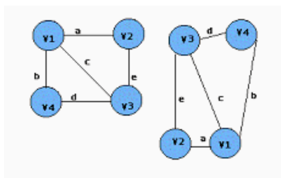
G1

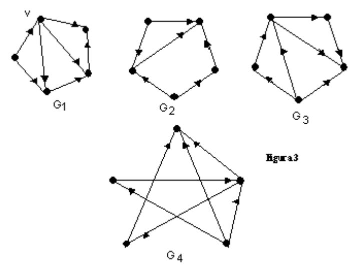


G2

Cont...

- **Ejercicio en clases:**
  - Indicar si las graficas presentadas son isomorfas.





Cont...

- **Deber:**
  - **Hacer los ejercicios 2, 3, 5, 6 y 9 de la página 361.**