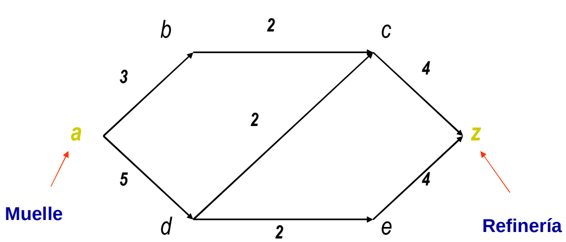
Matemáticas Discretas

Capítulo 7:
Modelo de Redes
y Redes de Petri

Modelo de Redes

- Consideremos la gráfica mostrada, que representa una red de tuberías de petróleo:
  - El petróleo se descarga en el muelle ***a*** y se bombea a través de la red hasta la refinería ***z***.
  - Los vértices ***b, c, d*** y ***e*** representan estaciones de bombeo intermedias.
  - Las aristas dirigidas representan las subtuberías del sistema y muestran la dirección en que el petróleo puede fluir.
  - Las etiquetas sobre las aristas indican la capacidad de cada subtubería.

Cont...

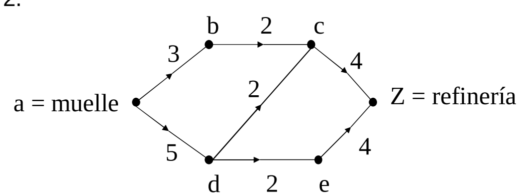


Cont...

- **Red de Transporte**
  - Una red de transporte (o más simple, una red) es una gráfica dirigida, simple, con pesos que satisface:
    a) Un vértice fijo, la *fuente* denotada por *a*, no tiene aristas de entrada
    b) Un vértice fijo, el *sumidero* (o destino) denotada por *z*, no tiene aristas de salida
    c) El peso Cij de la arista dirigida (i, j), llamado la *capacidad* de (i, j), es un número no negativo

Cont...

- **Ejemplo:**
  - La gráfica es una red de transporte. La fuente es el vértice *a* y el sumidero es el vértice *z.* La capacidad de la arista (a,b), C_{ab} es 3, y la capacidad de la arista (b,c), C_{bc} es 2.



Cont…

- **Flujo en una Red**
  - Un Flujo en una red asigna un flujo de una arista dirigida que no excede la capacidad de dicha arista.
- **Definición:**
  - Sea G una red de transporte. Sea C_{ij} la capacidad de la arista dirigida (i,j). Un flujo F en G asigna a cada arista dirigida (i,j) un número no negativo F_{ij} tal que:
    - a) Fij <= Cij
    - b) Para cada vértice j, que no sea la fuente ni el sumidero,

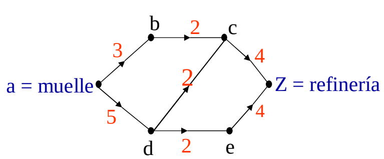
      ΣFij = ΣFji **(Propiedad de la conservación del Flujo)**
  - En esta suma a menos que se indique lo contrario, se supone que la suma se realiza sobre todos los vértices *i.* Además si (i,j) no es una arista, hacemos Fij = 0
  - Fij es el flujo de la arista (i,j). Para cualquier vértice j,
    - **Σ**fij es el flujo de entrada a *j,* y
    - **Σ**Fji es el flujo de salida de *j*

Cont...

- **Ejemplo 1:**
  - Las asignaciones:
    - $F_{ab} = 2$, $F_{bc} = 2$, $F_{cz} = 3$, $F_{ad} = 3$, $F_{dc} = 1$, $F_{de} = 2$, $F_{ez} = 2$

    definen un flujo para la red de la figura.
  - Por ejemplo, el flujo de entrada del vértice d, es $F_{ad} = 3$, es igual al flujo de salida del vértice *d,*

    $F_{dc} + F_{de} = 1 + 2 = 3$



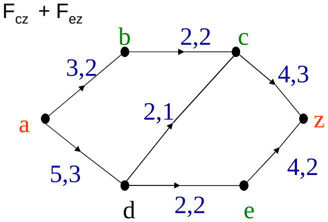
Cont...

- **Cont...**
  - Una arista *e* se etiqueta "x, y" si la capacidad de *e* es *x* y el flujo en *e* es *y.*
  - En este ejemplo, el flujo de salida de la fuente *a*

    $F_{ab} + F_{ad}$

    es igual al flujo de entrada del sumidero *z*

    $F_{cz} + F_{ez}$
  - ambos iguales suman 5 .



Cont...

- **Teorema:**
  - Dado un flujo F en una red, el flujo de salida de la fuente ***a*** es igual al flujo de entrada del sumidero ***z***, es decir:

$$\Sigma F_{ai} = \Sigma F_{iz}$$

- **Valor del Flujo**
  - Sea F un flujo en una red G. El valor

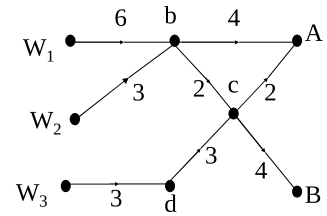
$$\Sigma F_{ai} = \Sigma F_{iz}$$

    es el valor del flujo F

  - En el ejemplo anterior el valor del flujo en la red es 5.

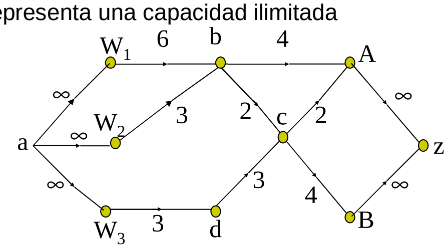
Cont...

- **Ejemplo 2:**
  - **Una red de Bombeo**
  - La figura representa una red de bombeo por medio de la cual se envía agua a 2 ciudades, A y B, desde 3 pozos, W1, W2, W3.
  - Las capacidades de los sistemas intermedios aparecen sobre las aristas.
  - Los vértices b, c y d representan estaciones de bombeo intermedias.
  - Modelar este sistema como una red de transporte



Cont...

- **Cont...**
  - Para obtener una fuente y un sumidero fijos, podemos obtener una red de transporte equivalente, uniendo las fuentes en una **superfuente** y los sumideros en un **supersumidero.**
  - ∞ representa una capacidad ilimitada

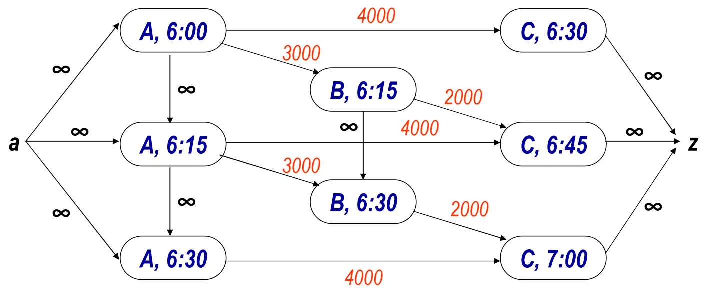


Cont...

- **Ejemplo 3:**
  - **Una red de Flujo de Tráfico**
    - Es posible ir de la ciudad A a la ciudad C directamente o pasar por la ciudad B. Durante el periodo de 6:00 a 7:00 PM, los tiempos promedios son:
      - ***A a B*** (15 minutos)
      - ***B a C*** (30 minutos)
      - ***A a C*** (30 minutos)
    - Las capacidades máximas de las carreteras son:
      - ***A a B*** (3000 carros)
      - ***B a C*** (2000 carros)
      - ***A a C*** (4000 carros)
    - Representar el flujo de tráfico de A a C, de 6:00 a 7:00 PM como una red.

Cont...

- **Cont...**



Un Algoritmo de Flujo Máximo

- **¿Qué es el Flujo Máximo?**
  - Siendo ***G*** una red de trasporte, un flujo máximo es un flujo con valor máximo.
  - En general, habrá varias flujos con el mismo valor máximo.
  - La idea es sencilla: *comenzar con cierto flujo inicial e incrementar de forma iterativa hasta que no pueda mejorarse más. El flujo resultante será el máximo.*
  - Para aumentar el valor de un flujo dado, debemos determinar un camino de la fuente al sumidero e incrementar el flujo a lo largo de ese camino.

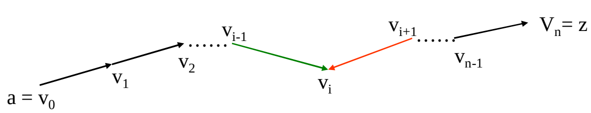
Cont...

- **Terminología**
  - Se denotará a ***G*** como una red con fuente ***a***, sumidero ***z*** y capacidad ***C***.
  - Las aristas se tomarán como no dirigidas, por el momento, y sea:

$$P = (v_o, v_1, \ldots, v_n), \qquad v_0 = a \qquad v_n = z$$

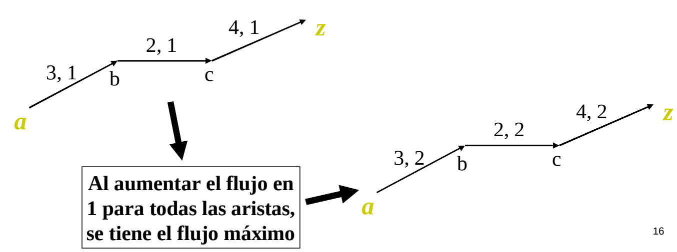
  un camino de ***a*** a ***z*** de esta gráfica.

  - Si una arista ***e*** en ***P*** está dirigida de v_{i-1} a v_i, decimos que ***e*** está **orientada en forma propia (con respecto a *P*)**, caso contrario, se dice que ***e*** está **orientada en forma impropia (con respecto a *P*).**



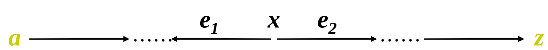
Cont...

- **Aumento de Flujo en Orientación Propia**
  - Sólo se podrá hacer si al determinar un camino ***P*** de la fuente al sumidero, todas las aristas están orientadas en forma propia, y el flujo en cada arista es menor que la capacidad de ésta.



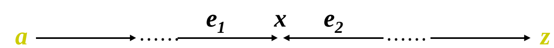
Cont...

- **Aumento de Flujo en Orientación Impropia**
  - Sea ***P*** un camino de ***a*** a ***z***, y ***x*** un vértice intermedio (que no sea si a ni z) en P. Existen <u>tres</u> posibilidades para las orientaciones de las aristas e_1 y e_2 incidentes en ***x***:
  - <u>Caso A</u>
    - La arista e_1 está de forma impropia y e_2 no. Si incrementamos en **Δ** el flujo en e_2, *debemos disminuir en* **Δ** el flujo en e_1, de modo que el flujo de entrada siga siendo igual al flujo de salida.

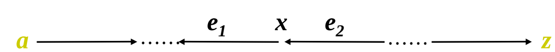


Cont...

- <u>Caso B</u>
  - La arista e_2 está de forma impropia y e_1 no. Si incrementamos en **Δ** el flujo en e_1, *debemos disminuir* en **Δ** el flujo en e_2, de modo que el flujo de entrada siga siendo igual al flujo de salida.

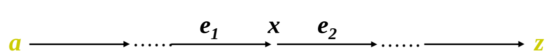


- <u>Caso C</u>
  - Las dos aristas están en forma impropia. Ahora *debemos disminuir* el flujo en ambas aristas en **Δ**.



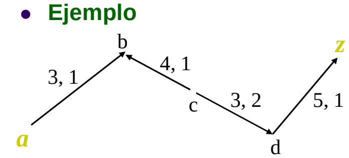
Cont...

- <u>Caso D</u>
  - Las dos aristas están en forma propia. Si incremento el flujo en ambas aristas en **Δ,** el flujo de entrada en x seguirá siendo igual al flujo de salida de x.



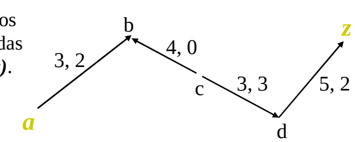
Cont...

- **Ejemplo**



- Las aristas ***(a,b), (c,d)*** y ***(d,z)*** están en forma propia. La arista ***(c,b)*** está orientada en forma impropia.

- Disminuimos el flujo en 1 en la arista impropia ***(c,b)*** y aumentamos el flujo en 1 en las aristas orientadas en forma propia ***(a,b), (c,d)*** y ***(d,z)***. El valor del nuevo flujo es 1 más que el original.



Cont...

- **Teorema:**
  - Sea ***P*** un camino de ***a*** a ***z*** en una red ***G*** tal que:
    1) Para cada arista ***(i,j)*** de ***P***, orientada en forma propia, $F_{ij} < C_{ij}$
    2) Para cada arista ***(i,j)*** de ***P***, orientada en forma impropia, $F_{ij} > 0$
  - Sea

    $$\Delta = \text{mín } X$$

    donde ***X*** consta de los números $C_{ij} - F_{ij}$ para las aristas ***(i,j)*** de ***P*** orientadas en forma propia, y F_{ij} para las aristas ***(i,j)*** de ***P*** orientadas en forma impropia. Definimos

$$F^*_{ij} = \begin{cases} F_{ij} & \text{si } (i,j) \text{ no está en } P \\ F_{ij} + \Delta & \text{si } (i,j) \text{ está orientada en forma propia en } P \\ F_{ij} - \Delta & \text{si } (i,j) \text{ está orientada en forma impropia en } P \end{cases}$$

  - Entonces ***F**** es un flujo cuyo valor es Δ unidades mayor que el valor de ***F***.

Cont…

- **Algoritmo de Flujo Máximo**
  - Si no existen caminos que satisfagan las condiciones del teorema recién mencionado, entonces el flujo es máximo. Así, es posible construir un algoritmo con base a dicho teorema.
  - La idea se centra en:
    - Iniciar con un flujo (por ejemplo, uno tal que el flujo en cada arista sea 0).
    - Buscar un camino que satisfaga las condiciones del teorema del flujo máximo. Si no existe tal camino, se habrá terminado y el flujo es máximo.
    - Se incrementa el flujo en **Δ**, donde **Δ** se define como en el teorema, y se regresa al paso **2**.
  - En el algoritmo formal, se busca un camino que satisfaga las condiciones del teorema, a la vez que se lleva un registro de las cantidades:

$$C_{ij} - F_{ij},\ F_{ij}$$

Cont…

- **Algoritmo**
  - **Entrada:** Una red de fuente ***a***, sumidero ***z***, capacidad ***C***, vértices $a = v_0, \ldots\ldots, v_n = z$ ***y n***
  - **Salida:** Un flujo máximo F

```
procedure max_flow(a, z, C, v, n)
// la etiqueta de v es (predecessor (v), val (v))
// se inicia con un flujo nulo
1.  for cada arista (i,j) do
2.     Fi j :=0
3.  while true do
4.     begin
       // se eliminan todas las etiquetas
1.     for i :=0 to n do
```


Cont…

```
6.   begin
7.      predecesor(vi) := null
8.      val(vi) := null
9.      end
      // se etiqueta a
10.  predecessor(a) := -
11.  val (a) := ∞
        // U es el conjunto de vértices etiquetados no examinados
12.  U ;= {a}
        // se continúa hasta que z es etiquetado
13.  while val(z) = null do
14.     begin
```

Cont…

if $U = \emptyset$ **then** // el flujo es máximo
return (F)
se elige v en U
$U := U - \{v\}$
$\Delta := val(v)$
for cada arista (v,w) con $val(w) = null$ **do**
if $F_{vw} < C_{vw}$ **then**
begin
$predecessor(w) := v$
$val(w) := \min\{\Delta, C_{vw} - F_{vw}\}$
$U := U \cup \{w\}$
end

Cont…

for cada arista (v,w) *con* $val(w) = null$ **do**
if $F_{wv} > 0$ **then**
begin
$predecessor(w) := v$
$val(w) := \min\{\Delta, F_{wv}\}$
$U := U \cup \{w\}$
end
end
// se determina un camino P de a a z para el cual se
// revisa el flujo
$w_0 := z$
$k := 0$

Cont…

while $w_k \neq$ a **do**
begin
$w_{k+1} := predecessor(w_k)$
$k := k + 1$
end
$P := (w_k, w_{k+1}, \ldots, w_1, w_0)$
$\Delta := val(z)$
for $i = 1$ **to** k **do**
begin
$e := (w_i, w_{i-1})$

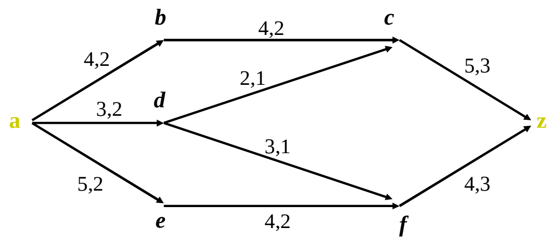
Cont…

if e esta orientado en forma propia en P **then**
$F_e := F_e + \Delta$
else
$F_e := F_e + \Delta$
else
end
end *max_flow*

A este algoritmo se lo conoce también como
ALGORITMO DE ETIQUETADO

Cont…

- **Ejemplo:**
  - Maximizar el flujo en la red de transporte dada a continuación:



Cont…

- **Conclusión:**
  - Variantes del *modelo de redes* mostrado se utilizan hoy en, por ejemplo, el diseño de redes de computadoras eficientes. Al modelar una de estas redes, un vértice representa un centro de intercambio, una arista es un canal de transmisión de datos, un flujo es el número promedio de bits por segundo que se transmiten en el canal, y la capacidad de la arista representa la capacidad de transmisión del canal, o sea, el ancho de banda.
  - El *algoritmo de flujo máximo*, obviamente tiene una aplicación importante, pues se puede con él hallar la manera más eficiente de transmitir datos por una red de computadoras, usando los canales con mayor capacidad disponible.

Redes de Petri

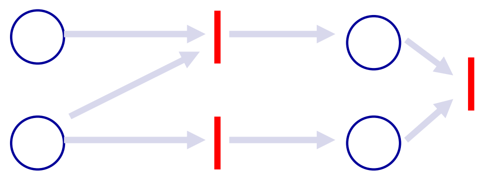
- Redes de Petri o gráficas modelo del procesamiento concurrente, es un método para modelar y estudiar el procesamiento concurrente.
- “Una red de Petri es una gráfica dirigida, bipartita, en la cual las dos clases de **vertices** se llaman **lugares** y **transiciones**.”
- En una red de Petri se permite la existencia de aristas paralelas.

Cont…

- **Definición:**
  - Una red de Petri es una grafica dirigida $G=(V,E)$, donde V = P U T y P ∩ T ≠ Ø.
  - Cualquier arista e en E es incidente en un miembro de P y un miembro de T.
    - **P** es el conjunto de **lugares**:.
    - **T** es el conjunto de **transiciones**:.
    - **E** es el conjunto de **aristas**:.

Cont…

- **Ejemplo:**
  - La figura muestra un ejemplo de red de Petri, en general, los *lugares* se dibujan como *círculos* y las *transiciones* como barras o *rectángulos*.

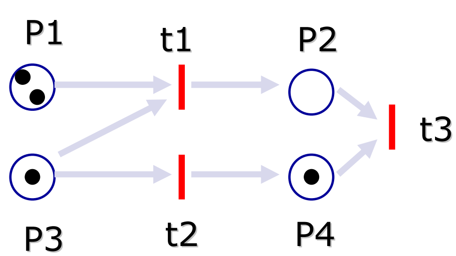


Cont…

- **Marcado de una red de Petri**
  - Un marcado de una red de Petri asigna a cada lugar un entero no negativo.
  - Una red de Petri con un marcado es una red de Petri marcada.
  - Si un marcado asigna el entero no negativo n al lugar p, decimos que existen n elementos en p.
  - Los elementos se representan mediante puntos.

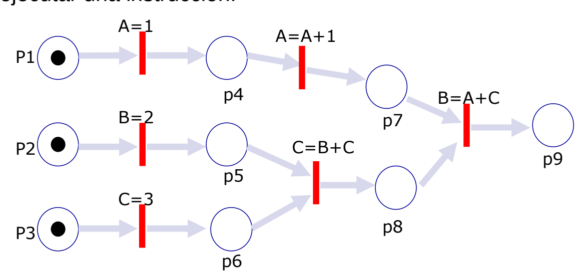
Cont…

- **Ejemplo de red de Petri Marcada:**
  - Los lugares representan condiciones, las transiciones representan eventos, y la presencia de al menos un elemento en un lugar indica que tal condición se cumple.



Cont…

- **Ejemplo:**
  - **Modelo de red de Petri para un programa de computadora**
    - En este caso los eventos (transiciones) son las instrucciones, y los lugares representan las condiciones bajo las cuales se puede ejecutar una instrucción.

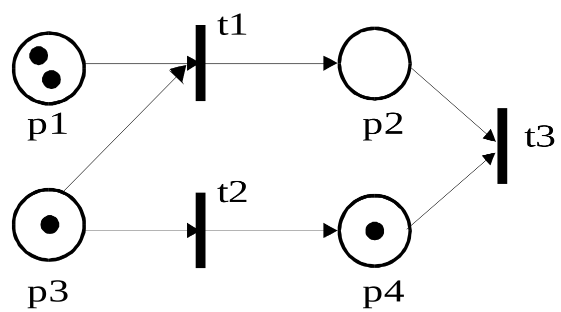


Cont…

- **Definición:**
  - En una red de Petri, si una arista va del lugar p a la transición t, decimos que p es un **lugar de entrada** para la transición t.
  - Un **lugar de salida** se define de manera análoga.
  - Si cada lugar de entrada de una transición t tiene al menos un elemento, decimos que t esta **activada** .
  - La **descarga** de una transición elimina un elemento de cada lugar de entrada y agrega un elemento a cada lugar de salida.

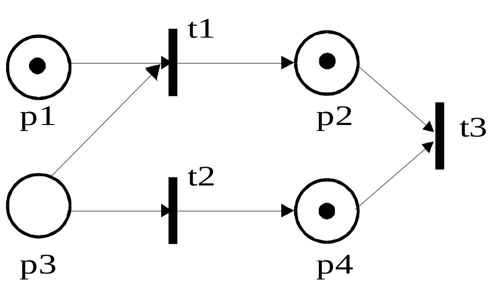
Cont…

- **Ejemplo:**



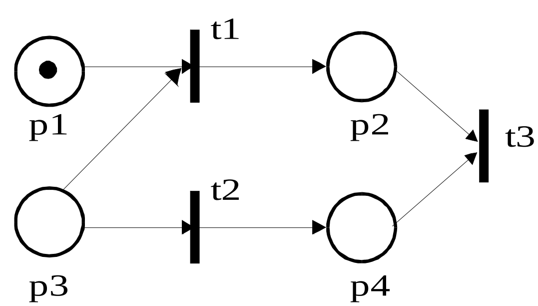
Cont…

- Las transiciones t1 y t2 están activadas
- Se descarga solo t1.



Cont…

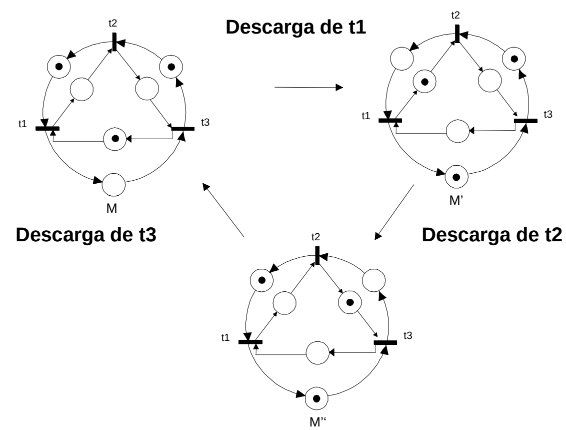
- t3 está activada.



Cont…

- **Marcados Alcanzables**
  - Si una serie de descargas transforma un marcado M en un marcado M´, decimos que M´ es alcanzable desde M.
- **Ejemplo:**
  - En la siguiente figura nos muestra que haciendo la descarga de la transición t1 y luego de t2. M´´ es alcanzable desde M.

Cont…



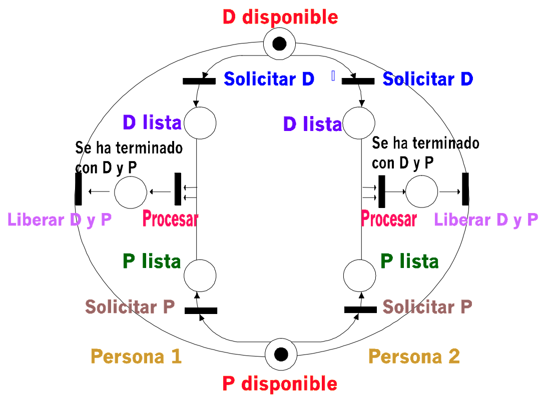
Cont…

- **Propiedades importantes de las redes de Petri.**
  - **La Supervivencia**
    - Se refiere a la ausencia de estancamientos.
  - **La Seguridad**
    - Se relaciona a la capacidad de memoria.

Cont…

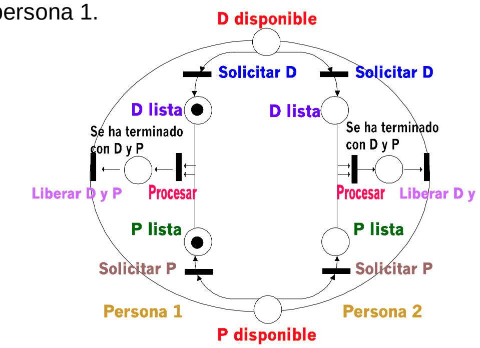
- **Ejemplo:**
  - Modelo de petri para un sistema de computo compartido
    - Dos personas comparten un sistema de computo que contiene una unidad de disco d y una impresora P.
    - La figura nos muestra un posible modelo de red de petri para el sistema compartido.
    - La primera figura nos indica que las 2 unidades están disponibles.

Cont…



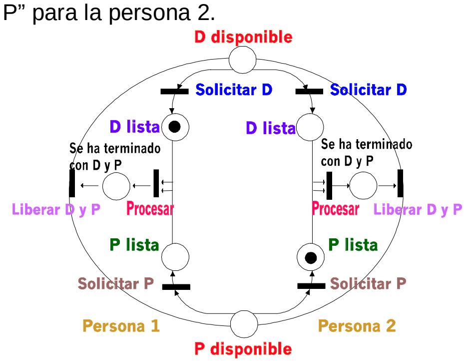
Cont…

- Después de descargar " solicitar D" y luego "solicitar P" para la persona 1.



Cont…

- Después de descargar "solicitar D" para la persona 1 y "solicitar P" para la persona 2.

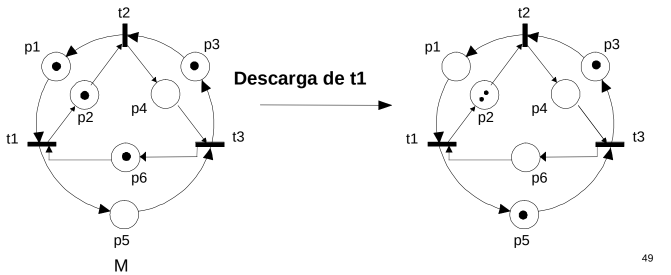


Cont…

- La figura 2 indica que tanto D como P ya han sido solicitados por la persona 1.
- La figura 3 indica que la persona 1 ha solicitado a D y la persona 2 ha solicitado a P.
- Formalmente podemos decir que la red esta estancada si ninguna transición se puede descargar.

Cont...

- **Ejemplo:**
  - El marcado M no es seguro. Después de descargar t1 , p2 tiene dos elementos.

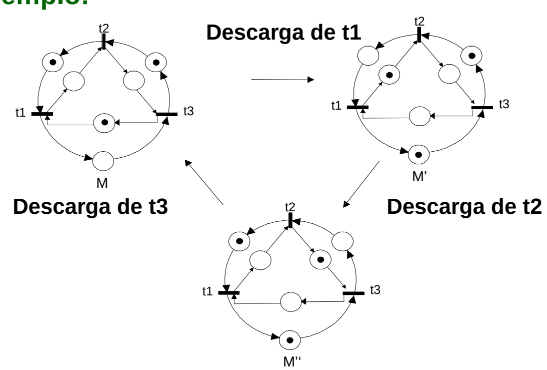


Cont...

- **Definición:**
  - Un marcado M de una red de Petri está vivo si, partiendo de M sin importar la serie de descargas realizadas, es posible descargar cualquier transición dada mediante alguna secuencia de descargas adicionales.
  - Si esto se cumple decimos que P nunca se estancará.

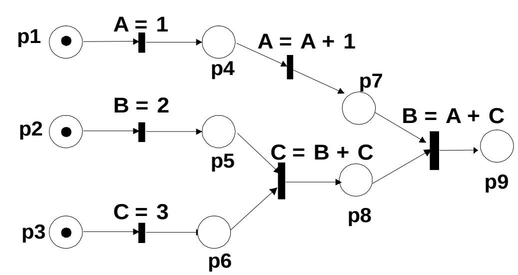
Cont...

- **Ejemplo:**



Cont...

- Este marcado no está vivo, se considera que tiene capacidad limitada. El hecho de que una red sea acotada nos garantiza que no habrá un desbordamiento de los lugares.

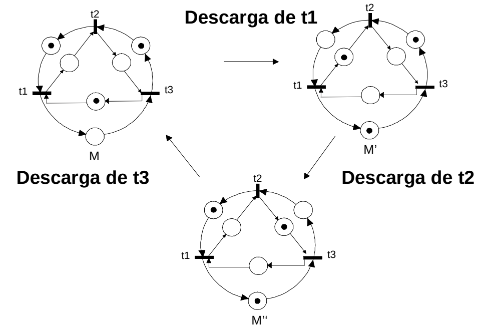


Cont...

- **Definición:**
  - Un marcado M para una red de Petri está acotado si existe algún entero positivo n con la propiedad de que, en cualquier secuencia de descarga , ningún lugar recibe más de n elementos.
  - Es un marcado seguro, si un marcado M está acotado y en cualquier secuencia de descarga ningún lugar recibe más de un elemento.

Cont...

- **Ejemplo 1:**
  - Los marcados son seguros.



Cont...

- **Ejemplo 2:**
  - EL marcado no es seguro.