ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
CÁLCULO DIFERENCIAL

TERCERA EVALUACIÓN 18 de Febrero de 2011

Nombre: ....

#Matrícula:................... Firma:............................. Paralelo:.....

CALIFICACIÓN	
TEMA 1	
TEMA 2	
TEMA 3	
TEMA 4	
BONUS	
TOTAL EXAMEN	
DEBERES Y LECCIONES	
TOTAL	

TEMA 1 (25 puntos)

a) Sea $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ una función continua. Demuestre que existe por lo menos un punto $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$. El punto c se llama un *punto fijo* de f. (**VALOR 13 puntos**)

b) Se desea cortar un alambre de longitud L en dos trozos. Uno de estos se doblará luego para formar una círculo y el otro se doblará dándole forma de un cuadrado. ¿Cómo habrá de cortarse el alambre para que la suma de las áreas de ambas figuras sea mínima?.
(**VALOR 12 puntos**)

TEMA 2 (25 puntos)

a) Sean $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables y sea $f \circ g$ la función compuesta de f con g. Suponga que $f'(3) = g(1) = 3$ y $g'(1) = 2$. Calcule $(f \circ g)'(1)$. (**VALOR 5 puntos**)

b) Determine de ser posible los puntos de la curva dada por $x + y = x^2 + 2$ tales que la recta tangente es paralela a $2x + y = 1$. (**VALOR 10 puntos**)

c) Dada la curva definida por las ecuaciones paramétricas:

$$x(t) = \mathrm{e}^t, \quad y(t) = \cos(3t).$$

Determine:

i) La ecuación de la recta tangente cuando $t = 2$. (**VALOR 5 puntos**)

ii) La segunda derivada de y respecto a x. (**VALOR 5 puntos**)

<u>TEMA 3</u> (25 puntos)

a) Demuestre formalmente, usando la definición de límite con épsilons y deltas, que

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{2x^2 - x}{x} \right) = -1. \qquad (\textbf{VALOR 13 puntos})$$

b) La concentración C en moles/litro de una droga en la sangre t minutos después de administrada está dada por la ecuación:

$$C(t) = b\, t\, \mathrm{e}^{-kt}; \;\; t \geq 0, \; b > 0, \; k > 0.$$

Determine el instante en el cual el nivel de concentración empieza a decrecer.
(**VALOR 12 puntos**)

<u>TEMA 4</u> (25 puntos)

a) Considere la siguiente función:

$$\begin{array}{rcl} f:\{-5\}\cup(0,+\infty) & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=\left\{\begin{array}{l} 1/x, \text{ si } x>0, \\ 2, \text{ si } x=-5. \end{array}\right. \end{array}$$

¿Es la función f continua en el punto $x=-5$?. Justifique rigurosamente su respuesta. (**VALOR 8 puntos**)

b) Sea $f:(0,1)\mapsto\mathbb{R}$ una función. Suponga que exista la derivada f' de f en el punto $x=1/2$ y que además $f'(1/2)>0$. ¿Se puede concluir entonces que f es estrictamente creciente en un intervalo alrededor del punto $x=1/2$?. En caso de ser negativa su respuesta, ¿qué podría entonces concluir a partir de la hipótesis $f'(1/2)>0$?. Justifique rigurosamente su respuesta en caso de ser afirmativa o negativa la misma. (**VALOR 10 puntos**)

c) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{x}. \qquad (\textbf{VALOR 7 puntos})$$

<u>BONUS</u> (50 puntos, opcional) Decimos que un subconjunto B de los números reales, $B \subset \mathbb{R}$, es *abierto* si dado cualquier punto $b \in B$, existe un número positivo $\delta > 0$ tal que el intervalo abierto $(b - \delta, b + \delta)$ está contenido en B. Califique la siguiente proposición como Verdadera o Falsa y justifique rigurosamente su respuesta:
"Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función continua. Si dado cualquier conjunto abierto $B \subset \mathbb{R}$, se tiene que el conjunto $f(B) = \{f(b); b \in B\}$ también es abierto (el conjunto denotado por $f(B)$ es el conjunto formado por las imágenes de los elementos del conjunto B por la función f), entonces f es inyectiva".

Observación: Recuerde que si la suma de las calificaciones de las preguntas que no son del tipo Bonus (Temas 1-4) con la calificación de la pregunta tipo Bonus que el estudiante ha optado por desarrollar llegara a ser superior a la nota máxima del Examen, entonces el resultado final del Examen será el equivalente al 100% de la nota del Examen.