Escuela Superior Politécnica del Litoral

Instituto de Ciencias Matemáticas

Primera Evaluación de Algebra Lineal

Solución y Rúbrica

1.- (4 puntos) Defina:

a) Subespaciovectorial .- Sea (V,+,®α) un espacio vectorial sobre el campo K. Sea W un subconjunto de V. Si W junto a las mismas operaciones definidas en V es también un espacio vectorial entonces W es un SUBESPACIO de V.

b) Conjunto Linealmente independiente de vectores.- Sea S = { v1,v2,..,vk} un conjunto de vectores del espacio vectorial V. S es un conjunto LINEALMENTE INDEPENDIENTE de vectores si y solo sí el vector neutro de V se obtiene como combinación lineal de los vectores de S solo si todos los escalares de la combinación lineal deben ser cero.

|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Excelente** |
| No escribe definiciones coherentes , o deja el espacio vacío | Presente una idea relacionada con el concepto pera falta precisión. | Presenta en forma explícita todos los elementos claves de los conceptos. |
| **0** | **1**  | **2** |

2. (6 puntos) Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas y justifique formalmente su calificación:

a)Sea V un espacio vectorial. Sea S un conjunto linealmente independiente en V. Si w es un vector

cualquiera de V, entonces  es linealmente independiente en V. (FALSO)

**CONTRAEJEMPLO**

Por hipótesis es un conjunto L.I., entonces podemos escribir:

Siendo  arbitrario, lo elijo para que pueda escribirse como combinación lineal de los vectores anteriores, así:



Luego, por lo que es un conjunto linealmente dependiente.

|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes , solo califica como falso o deja el espacio vacío | Define correctamente a un conjunto de vectores linealmente independientes en V pero no explicita algún contraejemplo o algún método de refutación | Define en forma precisa la condición de que los escalares sean exclusivamente cero para escribir como una combinación lineal de los elementos del conjunto S. Busca un contraejemplo pero no concluye | Plantea un buen contraejemplo y concluye que la afirmación es FALSA |
| **0** | **1**  | **2** | **3** |

b)Si A es una matriz cuadrada nxn entonces, A+AT es una matriz simétrica.(VERDADERO)

Sea B= A+AT, entonces BT = (A+AT )T = AT+ (AT)T= AT + A = A+AT = B por lo tanto B es simétrica. También pueden trabajar con las entradas de la matriz suma B y probar que bij=bji para toda i,j.

|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes , solo califica o deja el espacio vacío | Define correctamente a la condición de simetría  | Realiza la matriz suma e intenta verificar la condición para simetría | Callifica y prueba correctamente. |
| **0** | **1**  | **2** | **3** |

3.-(20 puntos)Sea $V=\left\{\left(x,y,z\right)/ x, z\in R ∧y\in R^{+}\right\}$ un espacio vectorial real con operaciones definidas $⊕y ⊙$ tal que:

$$⊕:\left(x\_{1},y\_{1},z\_{1}\right)⊕\left(x\_{2},y\_{2},z\_{2}\right)=\left(x\_{1}+x\_{2},y\_{1}y\_{2},z\_{1}+z\_{2}\right)$$

$$⊙:α⊙\left(x,y,z\right)=\left(αx,y^{α},αz\right)$$

Sea $W=L\left\{\left(1,3,-1\right)\left(2,9,-2\right),\left(1,3,1\right)\right\}$ un subespacio vectorial de $V$.

Justificando su respuesta,determine lo siguiente:

1. Si $\left(3,9 ,-3\right)\in W$.
2. Una base, $β,$ de $W$.
3. $\left(5, 243, 1\right)\_{β}$

SOLUCION:

a.-

$$\left(3,9 ,-3\right)=\left(α\_{1}⊙\left(1,3,-1\right)\right)⊕\left(α\_{2}⊙\left(2,9,-2\right)\right)⊕\left(α\_{3}⊙\left(1,3,1\right)\right)$$

$$\left(3,9 ,-3\right)=\left(α\_{1},3^{α\_{1}},-α\_{1}\right)⊕\left(2α\_{2},9^{α\_{2}},-2α\_{2}\right)⊕\left(α\_{3},3^{α\_{3}},α\_{3}\right)$$

$$\left(3,9 ,-3\right)=\left(α\_{1}+2α\_{2}+α\_{3},3^{α\_{1}}9^{α\_{2}}3^{α\_{3}},-α\_{1}-2α\_{2}+α\_{3}\right)$$

$$\left(3,9 ,-3\right)=\left(α\_{1}+2α\_{2}+α\_{3},3^{α\_{1}+2α\_{2}+α\_{3}},-α\_{1}-2α\_{2}+α\_{3}\right)$$

Por lo tanto:

$$\left\{\begin{array}{c}α\_{1}+2α\_{2}+α\_{3}=3\\α\_{1}+2α\_{2}+α\_{3}=2\\-α\_{1}-2α\_{2}+α\_{3}=-3\end{array}\right.$$

El mismo que es un sistema inconsistente, por lo que $\left(3,9 ,-3\right)\notin W$

b.-

Para determinar una base, se puede verificar que el conjunto generador de $W$ es linealmente dependiente ya que:

$$\left(0,1,0\right)=\left(α\_{1}⊙\left(1,3,-1\right)\right)⊕\left(α\_{2}⊙\left(2,9,-2\right)\right)⊕\left(α\_{3}⊙\left(1,3,1\right)\right)$$

$$\vdots $$

$$\left(0,1,0\right)=\left(α\_{1}+2α\_{2}+α\_{3},3^{α\_{1}+2α\_{2}+α\_{3}},-α\_{1}-2α\_{2}+α\_{3}\right)$$

Por lo tanto:

$$\left\{\begin{array}{c}α\_{1}+2α\_{2}+α\_{3}=0\\α\_{1}+2α\_{2}+α\_{3}=0\\-α\_{1}-2α\_{2}+α\_{3}=0\end{array}\right.$$

El mismo que es un sistema con infinitas soluciones.

Se puede verificar que, los dos primeros vectores son múltiplo escalar uno de otro. Realizando un análisis similar se puede determinar que una base de $W$ está dada por:

$$β=\left\{\left(1,3,-1\right),\left(1,3,1\right)\right\}$$

c.-

$$\left(5,243 ,1\right)=\left(α\_{1}⊙\left(1,3,-1\right)\right)⊕\left(α\_{2}⊙\left(1,3,1\right)\right)$$

$$\vdots $$

$$\left(5,243 ,1\right)=\left(α\_{1}+α\_{2},3^{α\_{1}+α\_{2}} ,-α\_{1}+α\_{2}\right)$$

Por lo tanto:

$$\left\{\begin{array}{c}α\_{1}+α\_{2}=5\\-α\_{1}+α\_{2}=1\\α\_{1}+α\_{2}=5\end{array}\right.$$

A partir de lo anterior se obtiene:

$$α\_{1}=2 α\_{2}=3$$

Por lo que:

$$\left(5, 243, 1\right)\_{β}=\left(2,3\right)$$

Rúbrica:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Literal | Grado de cumplimiento | Puntaje máximo |
| a | Expresa el vector dado en combinación lineal de los vectores del conjunto generador | 2 |
| Realiza correctamente las operaciones definidas en $W$ | 2 |
| Determina que el vector dado no pertenece al subespacio$W$ | 2 |
| b | Construye algún conjunto de vectores que pertenecen a $W$ y analiza la independencia lineal | 4 |
| Construye la base solicitada | 2 |
| c | Expresa el vector dado en combinación lineal de los vectores de la base determinada en el literal anterior | 2 |
| Realiza correctamente las operaciones definidas en $W$ | 2 |
| Resuelve el sistema asociado, y determina las coordenadas del vector solicitado. | 4 |

4.-(20 puntos) Considerando el gráfico dado.



a) Determine la regla de correspondencia de la transformación lineal que rota 45º, en contra de las manecillas del reloj, cada punto del gráfico. Para las imágenes de los puntos A, B, C, D, E, F use correspondientemente la notación A’, B’, C’, D’, E’, F’

b) Suponga que una segunda transformación lineal toma cada punto del “nuevo gráfico”y les conserva su abscisa pero les duplica su ordenada. Llame correspondientemente A”, B”, C”, D”, E”, F” a las imágenes de los puntos A’, B’, C’, D’, E’, F’. Grafique en el plano este “último gráfico”

c) Determine con dos decimales de precisión las coordenadas de los puntos finales A”, B”, C”, D”, E”, F”

La regla de correspondencia de T1 puede ser expresada por la matriz M

$$M=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\begin{matrix}1&-1\\1&1\end{matrix}\right]$$

De la misma manera la regla de correspondencia de T2 puede ser expresada por la matriz E:

$$E=\left[\begin{matrix}1&0\\0&2\end{matrix}\right]$$

Por lo tanto para obtener las coordenadas dos primas se tiene que:

$$\left[\begin{matrix}X´´\\Y´´\end{matrix}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\begin{matrix}1&0\\0&2\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}1&-1\\1&1\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}X\\Y\end{matrix}\right]$$

$$\left[\begin{matrix}X´´\\Y´´\end{matrix}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\begin{matrix}1&-1\\2&2\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}X\\Y\end{matrix}\right]$$

$$\left[\begin{matrix}X´´\\Y´´\end{matrix}\right]=\sqrt{2}\left[\begin{matrix}\frac{X-Y}{2}\\X+Y\end{matrix}\right]$$

Aproximaremos la raíz de 2 con 1.4142 entonces tendremos:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Punto | X | Y | Punto | X´´ | Y´´ |
| A | 3 | 0 | A´´ | 2.12 | 4.24 |
| B | 7 | 0 | B´´ | 4.95 | 9.90 |
| C | 2 | 2 | C´´ | 0.00 | 5.66 |
| D | 8 | 2 | D´´ | 4.24 | 14.14 |
| E | 5 | 8 | E´´ | -2.12 | 18.38 |
| F | 5 | 6 | F´´ | -0.71 | 15.56 |

Para observar que les pasa a los segmentos de recta verticales consideramos los puntos de tipo (a,Y)$$\left[\begin{matrix}X´´\\Y´´\end{matrix}\right]=\sqrt{2}\left[\begin{matrix}\frac{a-Y}{2}\\a+Y\end{matrix}\right]=\left[\begin{matrix}u\\v\end{matrix}\right]$$

De donde despejamos la relación entre las nuevas variables u y v

$$v=2\sqrt{2}a-2u$$

Estos serán segmentos de recta con pendiente -2. También podemos sacar las nuevas coordenadas de otros puntos para completar el gráfico

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 3 | 2 |  | 0.71 | 7.07 |
| 7 | 2 |  | 3.54 | 12.73 |
| 2 | 5 |  | -2.12 | 9.90 |
| 8 | 5 |  | 2.12 | 18.38 |
| 4 | 5 |  | -0.71 | 12.73 |
| 6 | 5 |  | 0.71 | 15.56 |

|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes , deja el espacio vacío o solo intenta adivinar el gráfico | Determina alguna de las reglas de correspondencia de las matrices e intenta encontrar las coordenadas o graficar los puntos dos primas | Determina correctamente las matrices de las transformaciones y bosqueja aproximadamente el gráfico con algún error de calculo | Cálculos y gráfico correcto. |
| **0-5** | **6-12** | **13-19** | **20** |

5.- (20 puntos) Sea V = P2. Sean B = { v, u, w} y S = { p, q, r} dos bases ordenadas de V. Se conoce que:

$$C\_{B\rightarrow S}\left(\begin{matrix}-1&0&-1\\0&1&0\\2&0&1\end{matrix}\right)$$

es la matriz de cambio de base de B en S. Además:

[ x + 1]B = (1, 1, 1) ; [ x – 1]B = (1, 0, 0) y [ x2 ]B = ( 0, 0, 1)

Determine los vectores de las bases B y S.

**SOLUCION:**

De la matriz de cambio de base se obtiene:

[ v ]S = (-1,0,2) → v = -p + 2r

[ u ]S = (0,1,0) → u = q

[ w ]S = (-1,0,1) → w = -p + r

De los vectores coordenadas se obtiene:

[ x + 1 ]B = (1,1,1) → x + 1 = v + u + w

[ x - 1 ]B = (1,0,0) → x – 1 = v

[ x2 ]B = (0,0,1) → x 2 = w

De la primera ecuación de los vectores coordenadas se tiene que: u = x + 1 – v – w.

Remplazando se tiene: u = x + 1 – ( x – 1) – ( x2)

 u =2 - x2=q

Este es el mismo valor de q.

Finalmente: r = v – w y esto es: r = x – 1 - ( x2).

Así, p = r – w = x-1-x2-x2**=x-1-2x2**

Por lo tanto las bases son: B = { x – 1, 2-x2, x2} y

 S = {- 2x2 + x - 1, 2- x2, -x2+ x -1}.

|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes o deja el espacio vacío. | Escribe los vectores coordenadas a partir de la matriz de cambio de base y/o escribe las ecuaciones que relacionan los vectores de ambas bases. | Intenta resolver las ecuaciones, presenta errores conceptuales o de manipulación algebraica.  | Obtiene los vectores de cada base correctamente y presenta las bases resultantes. |
| **0** | **1-10** | **11-19** | **20** |