ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
PRIMERA EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS
INGENIERÍAS
GUAYAQUIL, JULIO 16 DE 2012

Nombre: ____ Paralelo: _____

VERSIÓN 0

INSTRUCCIONES

- Escriba sus datos de acuerdo a lo solicitado en la Hoja de Respuestas.
- Verifique que el presente examen consta de 20 preguntas:
  - 18 preguntas son de Opción Múltiple.
  - 2 preguntas son de Desarrollo.
- Todas las preguntas tienen el mismo valor, 3.5 puntos cada una.
- Usted dispone de 2 horas para realizar este examen.
- No se permite el uso de calculadora en el desarrollo del examen.
- El examen es estrictamente personal.
- Si tiene alguna inquietud, levante la mano hasta que el profesor pueda atenderlo.

---

1) La forma proposicional $(p \leftrightarrow q)$ es EQUIVALENTE a:

a) $(p \to q) \to (q \to p)$
b) $(p \to q) \wedge (q \to p)$
c) $(p \to q) \vee (q \to p)$
d) $(q \to p) \to (p \to q)$
e) $(p \to q) \wedge (\neg p \vee q)$

2) Identifique la forma proposicional que NO es una contingencia.

a) $p \wedge (p \vee q)$
b) $(p \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)$
c) $\neg p \vee (p \leftrightarrow p)$
d) $(p \vee 0) \to q$
e) $\neg(p \to \neg p) \wedge p$

3) Al simplificar al máximo la forma proposicional:

$$\{[(p \vee q) \vee (\neg p \vee q)] \leftrightarrow (r \vee \neg q)\} \wedge (r \rightarrow \neg q)$$

se obtiene:

a) p
b) $\neg q$
c) $p \vee q$
d) 1
e) 0

4) Dadas las siguientes hipótesis de un razonamiento:

H_1: Si Corinthians gana el último partido, su hinchada festeja.
H_2: Sólo si la hinchada festeja, Corinthians queda campeón.
H_3: La hinchada no festeja ya que Corinthians no gana el último partido ni queda campeón.

Una conclusión que hace válido el razonamiento es:

a) Corinthians gana el último partido ya que su hinchada festeja.
b) Corinthians no queda campeón puesto que no gana el último partido.
c) Si Corinthians queda campeón, entonces su hinchada no festeja o gana el último partido.
d) Si Corinthians queda campeón, entonces Corinthians gana el último partido.
e) Si la hinchada de Corinthians no festeja, entonces Corinthians no queda campeón.

5) Los 43 alumnos de un curso deben realizar una tarea, para lo cual:

- 25 alumnos utilizan computadoras de escritorio
- 23 utilizan portátiles
- 13 utilizan tabletas
- 2 utilizan los tres dispositivos
- 5 utilizan computadoras de escritorio y tabletas
- 10 utilizan solamente computadoras de escritorio y portátiles
- 3 realizan la tarea a mano

El número de estudiantes que utilizan sólo portátiles es:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

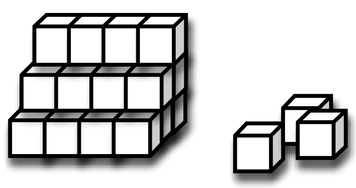
6) Una de las opciones presentadas a continuación NO es una propiedad válida para los números naturales.

a) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$
b) $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$
c) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=2n^2$
d) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$
e) $\dfrac{0}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\ldots+\dfrac{n-1}{n!}=\dfrac{n!-1}{n!}$

7) El término central en el desarrollo de $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$, es:

a) $2n!$
b) $\dfrac{2}{n!}$
c) $\dfrac{(n!)^2}{4}$
d) $\dfrac{4n!}{(n!)^2}$
e) $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

8) Se desea construir una escalera con bloques de piedra tal como se muestra en la figura adjunta. El número de bloques que se necesitan para que la escalera tenga 28 escalones, es:



a) 130
b) 700
c) 784
d) 1624
e) 3248

9) En cierta área de un hospital se tienen 5 doctores y 8 enfermeras, y se quieren agrupar 5 personas diferentes, pero como máximo deben haber 2 doctores en el grupo. La cantidad de grupos diferentes que se pueden conformar es:

a) 350
b) 966
c) 1120
d) 1470
e) 1582

10) Sea la función de variable real $f(x) = \text{sgn}(x)$. Al evaluar $f\left(\dfrac{e^{-2} + \mu(\llbracket -e \rrbracket)}{|-e|}\right)$ se obtiene:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

11) Se definen las funciones de variable real u_a y f con las siguientes reglas de correspondencia:

$$u_a(x) = \begin{cases} 1, & x > a \\ 0, & x \leq a \end{cases} \quad \text{y} \quad f(x) = u_2(x) - u_5(x)$$

Identifique la proposición VERDADERA.

a) El rango de f es el intervalo $[0,1]$.
b) f es creciente en todo su dominio.
c) $f(3) + f(-3) = 0$
d) $\forall x_1, x_2 \in dom\, f\left[\left(f(x_1) = f(x_2)\right) \rightarrow (x_1 = x_2)\right]$
e) f es acotada.

12) Sean las funciones de variable real $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ y $g(x) = -x$. Determine la regla de correspondencia de $(f - g)(x)$ e identifique la proposición VERDADERA.

a) $f - g$ es periódica.
b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f - g)(x) \leq 0$
c) $f - g$ es impar.
d) $f - g$ no es inyectiva.
e) $f - g$ es par.

13) Al dividir la función polinomial $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + ax^2 + bx - 6$ entre $(x+1)$ se obtiene 15 de residuo y al dividirla entre $(x-1)$ se obtiene 9 de residuo. El producto (ab) es igual a:

a) -14
b) -16
c) 0
d) 16
e) 32

14) Sean las funciones de variable real:

$$f(x) = sen|x| \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{\pi}{2}x$$

Construya $(f \circ g)$ e identifique la proposición FALSA.

a) $(f \circ g)$ es impar.
b) $(f \circ g)$ no es biyectiva.
c) $(f \circ g)$ es estrictamente creciente en el intervalo $(3,4)$.
d) $(f \circ g)$ es par.
e) $(f \circ g)$ es acotada.

15) Sea la función de variable real $f(x)=\begin{cases} e^{-2x-3}, & x\le -\frac{3}{2} \\ sen(\pi x), & -\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2} \\ \log_{1/2}(2x+3), & x\ge -\frac{1}{2} \end{cases}$, la regla de correspondencia de su función inversa es:

a) $f^{-1}(x)=\begin{cases} \dfrac{-3-\ln(x)}{2}, & x\ge 1 \\ \dfrac{arcsen(x)}{\pi}, & -1<x<1 \\ \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^x-3}{2}, & x\le -1 \end{cases}$

b) $f^{-1}(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(x+3)}{2}, & x\ge \frac{3}{2} \\ \dfrac{arcsen(x)}{2\pi}, & -1<x<\frac{3}{2} \\ \dfrac{(2)^x-1}{2}, & x\le -1 \end{cases}$

c) $f^{-1}(x)=\begin{cases} \dfrac{arcsen(\pi x)}{2}, & x\ge 1 \\ \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^x-3}{2}, & x<1 \end{cases}$

d) $f^{-1}(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{2}, & x\ge 2 \\ \dfrac{arcsen(x)}{2}, & -1<x<2 \\ \dfrac{2^x+1}{2}, & x\le -1 \end{cases}$

e) $f^{-1}(x)=\begin{cases} \dfrac{-3-\ln(x)}{2}, & x\le -\frac{3}{2} \\ \dfrac{arcsen(x)}{\pi}, & -\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2} \\ \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^x-3}{2}, & x\ge -\frac{1}{2} \end{cases}$

16) Al simplificar la expresión trigonométrica:

$$\frac{-2\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^3(x)\csc(x)-sen^3(x)\sec(x)}$$

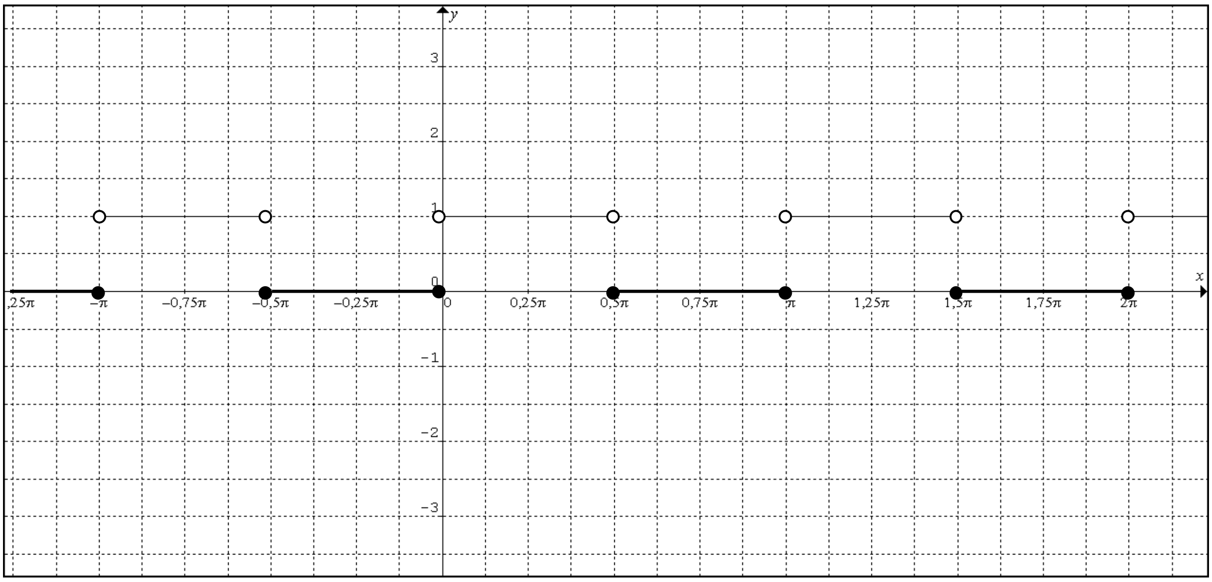
se obtiene:

a) −2
b) −1
c) 1
d) 2
e) 3

17) Sea $\mathrm{Re}=[0,1]$ y $p(x):\ 2\cos(\pi x)sen(\pi x)>0$, $Ap(x)$ es el intervalo:

a) $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$
b) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$
c) $\left(\frac{1}{2},1\right)$
d) $\left[0,\frac{1}{2}\right]$
e) $[0,1]$

18) Considere la gráfica de una función de variable real:



Su regla de correspondencia es:

a) $f(x) = \mu(\text{sen}(2x))$

b) $f(x) = \mu(\tan(2x))$

c) $f(x) = \mu(\cos(2x))$

d) $f(x) = \mu(\cot(2x))$

e) $f(x) = \mu(\sec(2x))$

Nombre: ____ Paralelo: _____

TEMAS DE DESARROLLO

19) Sean A y B conjuntos no vacíos de un conjunto referencial Re. Demuestre la siguiente propiedad:

$$(A \subseteq B) \equiv \left(B^C \subseteq A^C\right)$$

$(A \subseteq B)$	$\equiv$	$\forall x\left[(x \in A) \to (x \in B)\right]$	**Definición de subconjunto**
	$\equiv$	$\forall x\left[\neg(x \in B) \to \neg(x \in A)\right]$	**Contrarrecíproca**
	$\equiv$	$\forall x\left[\left((x \in \mathrm{Re}) \wedge \neg(x \in B)\right) \to \left((x \in \mathrm{Re}) \wedge \neg(x \in A)\right)\right]$	**Identidad**
	$\equiv$	$\forall x\left[\left(x \in B^C\right) \to \left(x \in A^C\right)\right]$	**Definición de complementación**
$(A \subseteq B)$	$\equiv$	$\left(B^C \subseteq A^C\right)$	

Rúbrica

Aplica la definición de subconjunto	**Hasta 1 punto**
Aplica la ley contrarrecíproca	**Hasta 1 punto**
Aplica la ley de Identidad de la intersección	**Hasta 0.5 puntos**
Aplica la definición de complementación	**Hasta 1 punto**

20) Sea la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1, x \in [0, \pi]$:

a) Aplique la identidad trigonométrica de la suma de medidas angulares y si es posible, determine la regla de correspondencia de f^{-1}

b) Grafique, de ser posible, f y f^{-1} en el mismo plano cartesiano.

a) Para determinar la regla de correspondencia de f:

$$y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = \operatorname{sen}(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(x)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$y = \cos(x) + 1$$

Para graficar f, debe desplazarse la función $y = \cos(x)$ y el rango que se obtiene es $rg\ f = [0,2]$. La función es inyectiva y sobreyectiva a la vez, es decir, biyectiva. Por lo tanto, la función es inversible.

Para obtener la regla de correspondencia de la función inversa f^{-1}:

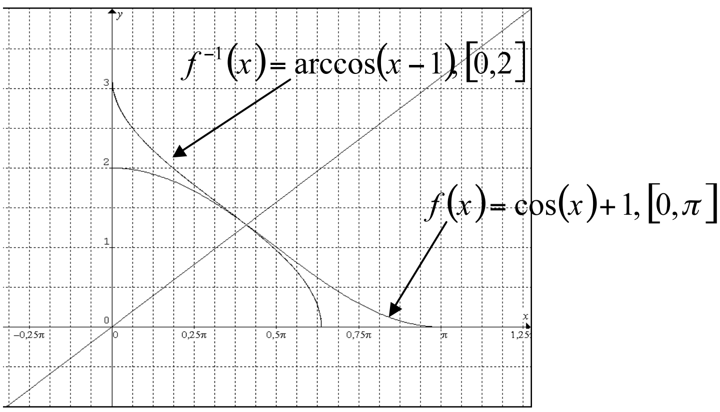
$$x = \cos(y) + 1$$

$$\cos(y) = x - 1$$

$$y = \arccos(x - 1)$$

$$f^{-1}(x) = \arccos(x - 1), \quad x \in [0,2]$$

b) A continuación la gráfica de ambas funciones en el mismo plano.



Rúbrica

Aplica la identidad de la suma	**Hasta 0.5 puntos**
Grafica la función f y concluye que es biyectiva	**Hasta 1 punto**
Realiza correctamente el procedimiento algebraico para obtener la inversa de la función	**Hasta 1 punto**
Grafica la función f	**Hasta 0.5 puntos**
Grafica la función f^{-1}	**Hasta 0.5 puntos**