Implementación de un Algoritmo para optimizar el flujo en una Red

Carlos Aníbal Suárez Hernández[1], Fernando Sandoya[2]

[1]Ingeniero en Estadística Informática 2003
[2]Director de Tesis, Matemático, Escuela Politécnica Nacional, 1994 Quito, Profesor de la ESPOL desde 1996

Resumen

La presente investigación se efectúa con el objetivo de analizar la importancia de las redes y describir un método para optimizar su uso. Existen varios problemas relacionados con el flujo en una red tales como: flujo de costo mínimo, camino más corto, flujo máximo con restricciones, circulación, asignación y de transporte. De todos ellos el problema más relevante es el de flujo de costo mínimo, debido a que los demás son casos especiales del mismo.
Los problemas de flujo en redes tienen aplicaciones tales como: nivelación de terrenos montañosos, distribución, carga óptima de un avión, planeación con costos de aplazamiento, evacuación de edificios, asignación de moldes de neumáticos, y determinación de política energética óptima. Se han desarrollado varios algoritmos para resolver el problema de flujo de costo mínimo en una red, de los cuales se ha seleccionado el algoritmo de la ruta sucesiva más corta. A continuación analizaremos dicho algoritmo.

Introducción

El desarrollo de nuestras actividades está vinculado a la interacción con distintos tipos de redes. Las Redes eléctricas traen iluminación y entretenimiento a nuestros hogares, las redes telefónicas permiten comunicarnos con lugares distantes de manera instantánea. Gracias a las redes de líneas férreas, sistemas de carreteras y redes de aerolíneas podemos desplazarnos a través de grandes distancias para llevar a cabo diversas actividades, ya sea vinculadas al trabajo o simplemente por diversión.

En todas las situaciones mencionadas se pretende trasladar entidades, que pueden ser personas, bienes, información o energía, de un punto a otro, pero siempre con recursos limitados, por lo que dicho traslado se hará tan eficiente como sea posible. Para esto se han desarrollado modelos matemáticos y algoritmos con el objetivo de solucionar los problemas relacionados con el flujo óptimo en una red.

El flujo en una red está vinculado a varios campos como las Matemáticas Aplicadas, Investigación de Operaciones, Ingenierías, Administración y Computación. Varias de las ideas que se conocen actualmente al respecto provienen de Gustav Kirchof y otros pioneros en Ingeniería Mecánica y Eléctrica, quienes analizaron los problemas que se presentaban en los circuitos eléctricos. Colocaron las bases de la teoría que se conoce actualmente y modelaron a las redes como objetos matemáticos, conocidos como grafos, para poder representar los sistemas físicos.

En problema más importante en una red es el problema de flujo de costo mínimo, el que plantea cómo se pueden enviar unidades de un ente desde uno o varios puntos en la red hacia uno o más destinos, tomando en cuenta que se asocia un costo por unidad enviada y que cada arco puede poseer una capacidad definida de flujo.

1. Planteamiento del Problema de Flujo de Costo mínimo

Sea G=(N,A) una red dirigida con un costo c_{ij} y una capacidad u_{ij} asociada con cada arco (i,j) ∈ A. El problema que se plantea es:

Minimizar

$$\sum_{(j:(i,j)\in A)} c_{ij}x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{(j:(i,j)\in A)} x_{ij} - \sum_{(j:(j,i)\in A)} x_{ij} = b(i); i \in N$$
$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad (i,j) \in A$$

Se representará con C la mayor magnitud de los costos asociados a los arcos y con U la mayor magnitud de la demanda u oferta de algún arco o a la capacidad finita de dicho arco. Se asumirá que el límite inferior de capacidad de cada arco (i,j), l_{ij} es cero.

Además se harán las siguientes suposiciones:

1.-Todos los costos, ofertas, demandas y capacidades de los arcos son enteros.

2.-La red es dirigida.

3.-Las ofertas y las demandas de los nodos satisfacen la condición $\sum_{i\in N} b(i) = 0$ y el problema de flujo de costo mínimo posee una solución factible.

4.- Supondremos que la red posee una ruta con una capacidad ilimitada entre cada par de nodos de los arcos que la componen.

5.-Todos los costos de los arcos son no negativos.

Los algoritmos a ser analizados emplean el concepto de redes residuales. En tales redes se ha reemplazado cada arco (i,j) por dos arcos (i,j) y (j,i). El arco (i,j) posee un costo c_{ij} y una capacidad residual $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$, y el arco (j,i) tiene un costo $c_{ij} = -c_{ji}$ y una capacidad residual $r_{ij} = x_{ij}$. La red residual está compuesta de los arcos que posean una capacidad residual positiva.

Previo al análisis es necesario familiarizarnos con el significado de algunos símbolos.

(i, j)	Arco que une al nodo i con el nodo j
x_{ij}	Flujo correspondiente al arco (i, j)
c_{ij}	Costo de trasladar una unidad de flujo por el arco (i, j)
l_{ij}	Límite inferior de flujo del arco (i, j)
u_{ij}	Límite superior de flujo del arco (i, j)
$b(i)$	Oferta o demanda del nodo i, dependiendo de su signo
$e(i)$	Desequilibrio del nodo i
r_{ij}	Capacidad residual del arco (i, j)
$\pi(i)$	Potencial del nodo i
c_{ij}^{π}	Costo reducido

Los costos reducidos y su desequilibrio se definen de la siguiente manera:

$$c_{ij}^{\pi} = c_{ij} - \pi(i) + \pi(j)$$

$$e(i) = b(i) + \sum_{\{j:(j,i)\in A\}} x_{ji} - \sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} \quad \text{para cada i} \in N$$

2. Descripción del Algoritmo de la ruta sucesiva más corta

Comienzo

$x = 0$ y $\pi = 0$

$e(i) = b(i)$ para todo $i \in N$

inicializar los conjuntos $E = \{i : e(i) > 0\}$ y $D = \{i : e(i) < 0\}$

Mientras $E \neq \varnothing$ **hacer**

Comienzo

Seleccione un nodo $k \in E$ y un nodo $l \in D$;

Determine las distancias de las rutas más cortas desde el nodo K a todos los otros nodos en G(x) con respecto a los costos reducidos c_{ij}^{π} ;

Defina a P como la ruta más corta desde del nodo k al nodo l;

Actualice $\pi = \pi - d$;

$\delta = \min\lfloor e(k), -e(l), \min(r_{ij}) : (i, j) \in P \rfloor$;

incrementar δ unidades de flujo a lo largo de la ruta P;

Actualizar x, G(x), E, D y los costos reducidos;

Fin;

Fin;

Para determinar las distancias más cortas desde el nodo k a los demás nodos utilizaremos el algoritmo de Dijkstra.

Algoritmo de Dijkstra.
Comienzo

$S = \varnothing$; $\bar{S} = N$;

$d(i) = \infty$ para cada nodo $i \in N$;

$d(s) = 0$ y $pred(s) = 0$;

Mientras cardinalidad(S)<n **hacer**

Comienzo

Sea $i \in \bar{S}$ un nodo para el cual $d(i) = \min\{d(j) : j \in \bar{S}\}$;

$S = S \bigcup \{i\}$

$\bar{S} = \bar{S} - \{i\}$

Para cada $(i, j) \in A(i)$ **hacer**

Si $d(j) > d(i) + c_{ij}$ **entonces**

$d(j) = d(i) + c_{ij}$ y *pred(j)=i*

Fin;

Fin;

Fin;

Cabe resaltar que el algoritmo resuelve el problema dual de flujo de costo mínimo, maximizando el flujo en la red residual correspondiente. El primer paso consiste en inicializar en cero los potenciales de cada nodo y calcular la oferta o demanda de los nodos, $b(i)$.

A continuación se presenta una red con sus respectivos costos, capacidades y flujo inicial en cada arco.

En la red se observa que el nodo 1, es un nodo de oferta y el nodo 4 es un nodo de demanda.

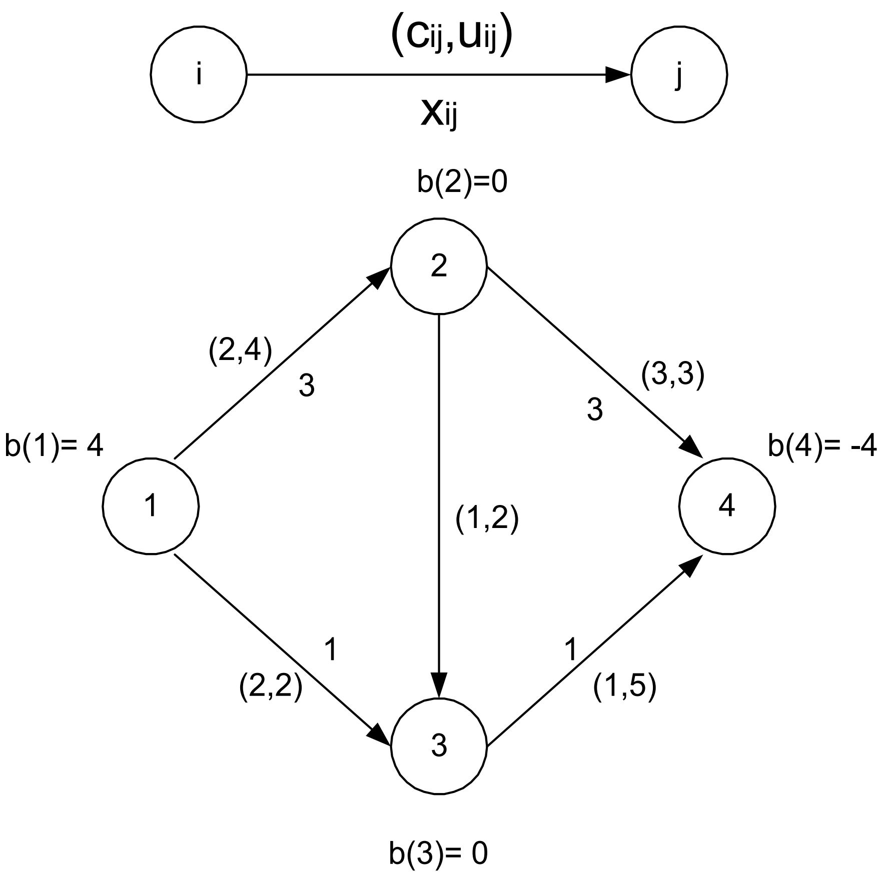


Figura 1 Red inicial con flujo factible x

Los desequilibrios de los nodos son inicializados con sus correspondientes ofertas o demandas. La siguiente figura es la red residual inicial para un flujo $x = 0$, por lo que es igual a la red original. Además se observan los potenciales inicializados en cero y los desequilibrios de cada nodo inicializados con sus respectivos $b(i)$.

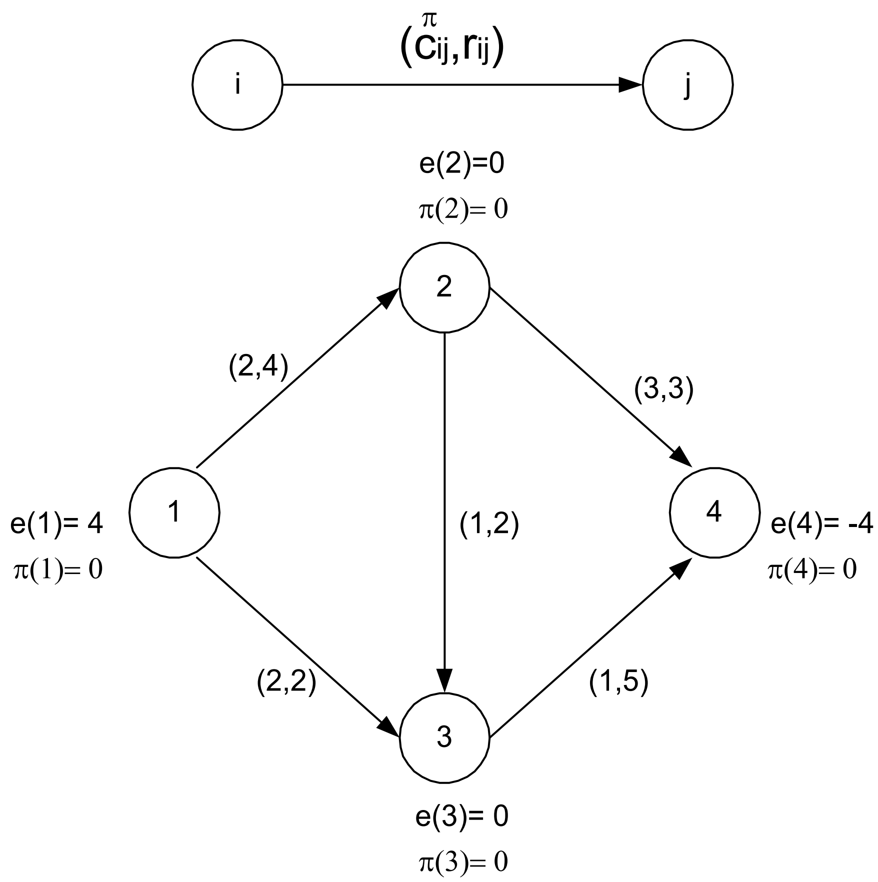


Figura 2 Red residual inicial para x=0 y π=0

En esta red los costos reducidos son iguales a los costos originales debido a que los potenciales son iguales a cero.
Una vez determinados los valores de los desequilibrios de cada nodo es posible inicializar los conjuntos E y D, por lo tanto:

$$E = \{1\} \text{ y } D = \{4\}$$

Luego se selecciona un nodo k perteneciente al conjunto E y un nodo l perteneciente al conjunto D, es decir k=1 y l=4. Posteriormente, mediante el algoritmo de Dijkstra se determinan las distancias de las rutas más cortas desde el nodo K a todos los otros nodos en G(x) con respecto a los costos reducidos c_{ij}^{π} y se obtiene el vector $d = \{0,2,2,3\}$. Se define a P como la ruta de menor costo entre los nodos k y l, por lo que P=1-3-4. Conocidas las distancias más cortas desde el nodo k a los demás nodos se deben actualizar los nodos potenciales, por lo tanto se tiene que $\pi = \{0,-2,-2,-3\}$. A continuación se presenta la red residual con los potenciales y los costos reducidos actualizados.

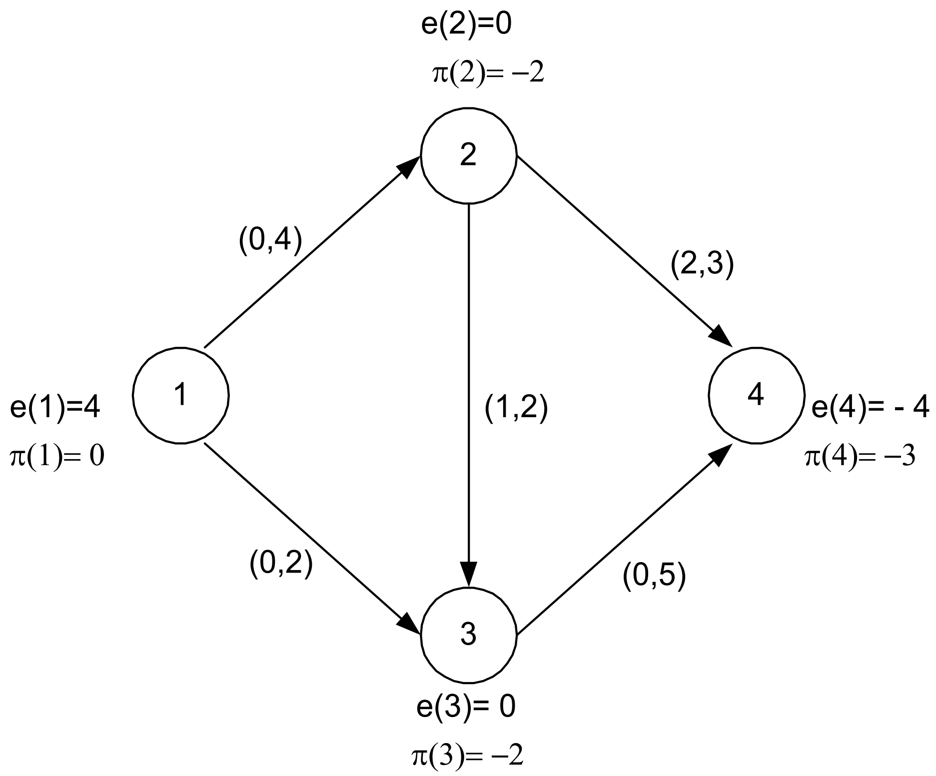


Figura 3 Red luego de actualizar los potenciales π

El paso siguiente consiste en aumentar δ unidades de flujo a lo largo de la ruta P, por lo que se tienen que actualizar los desequilibrios restando las dos unidades de $e(i)$ si el arco sale del nodo i y sumando las dos unidades a $e(i)$ si el arco llega al nodo i. Finalmente se debe actualizar la red residual, por lo que al término de la iteración se obtiene la siguiente red residual.

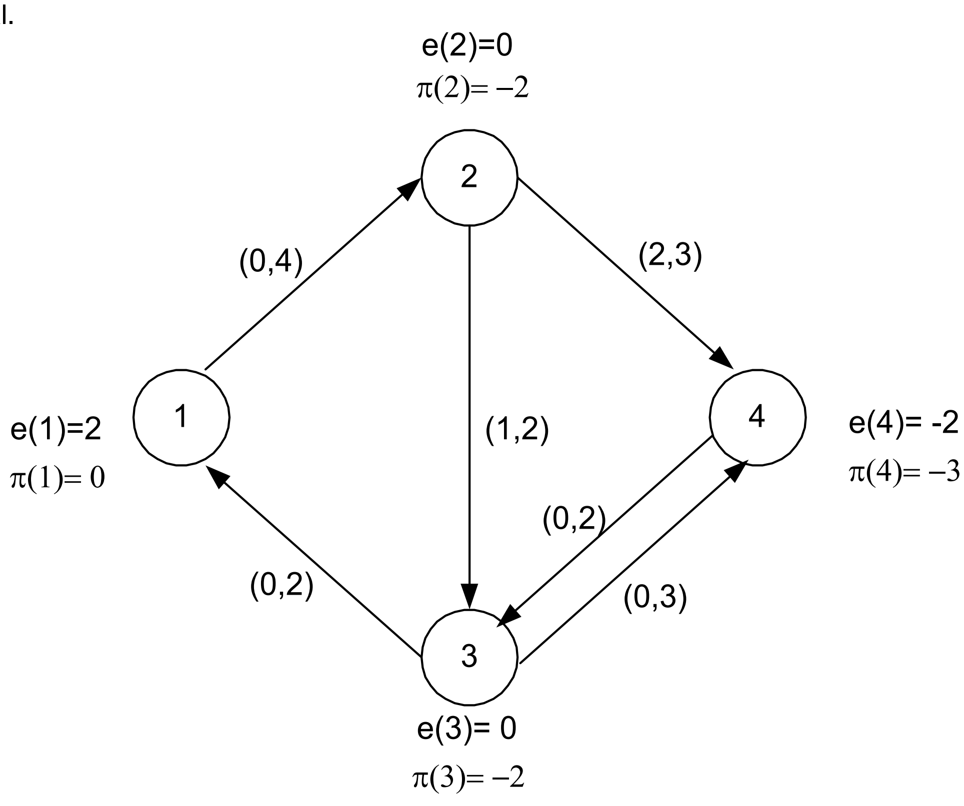
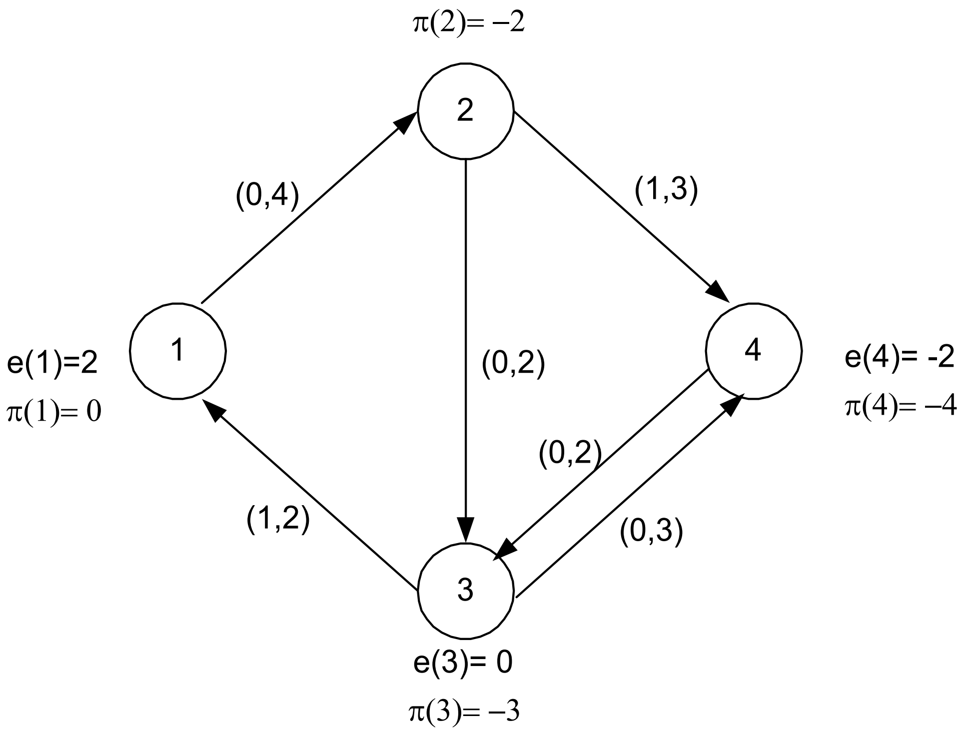


Figura 4 Red luego de aumentar dos unidades de flujo a lo largo de la ruta 1-3-4

El procedimiento se repite hasta que todos los desequilibrios sean iguales a cero. En la última iteración se obtienen las siguientes redes residuales:



Figuar 5 Red luego de actualizar los potenciales π

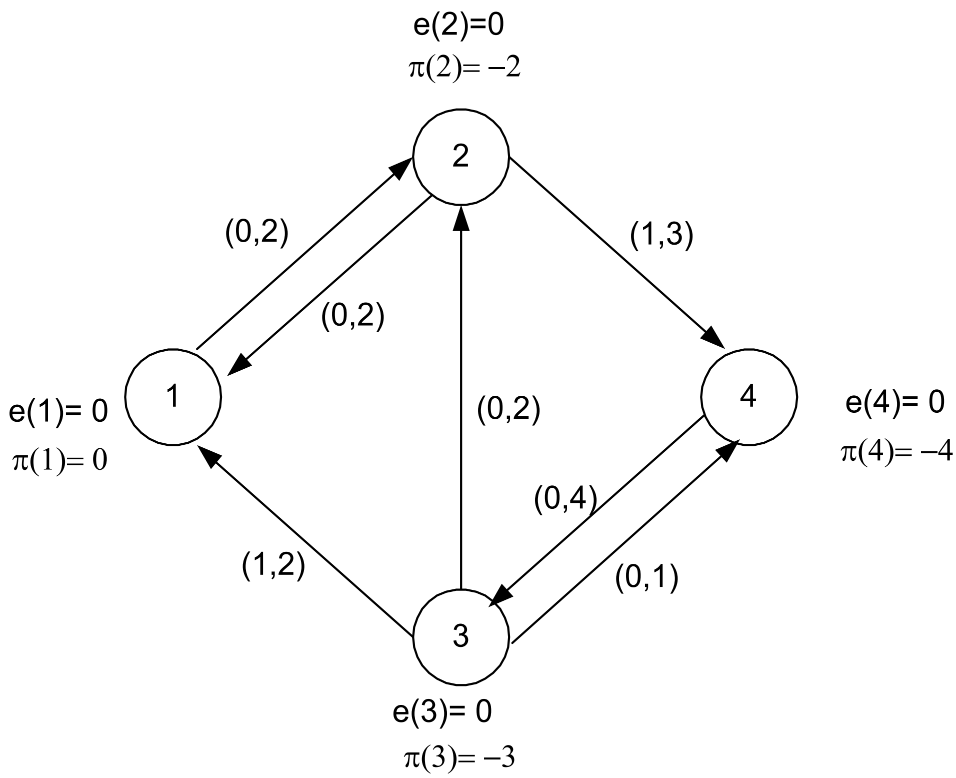


Figura 6 Red luego de aumentar dos unidades de flujo a lo largo de la ruta 1-2-3-4

A partir de la red residual resultante se debe obtener la solución del problema primal. Se debe tener en cuenta que para un arco (i, j) de la red original

$$r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}^{o}$$

y

$$r_{ji} = x_{ij}^{0}$$

Por lo tanto el flujo óptimo es el que consta en la siguiente figura:

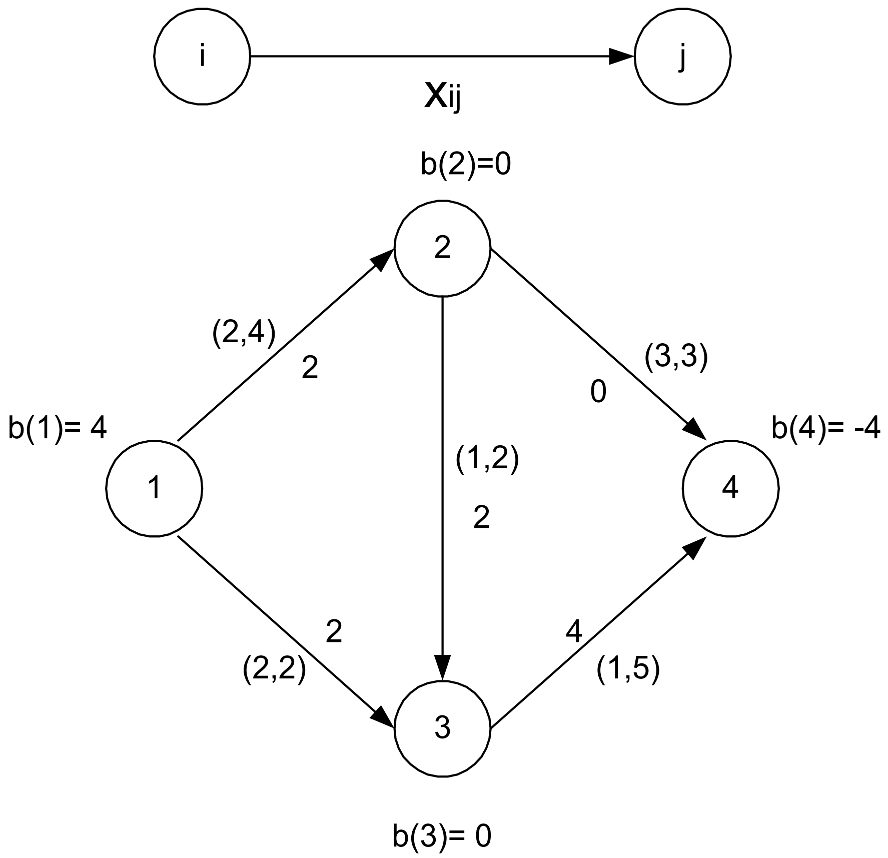


Figura 7 Red con flujo óptimo x

El costo asociado a este flujo es de 14 unidades, mientras que el del flujo factible inicial era de 18 unidades.

CONCLUSIONES

- Es común hallar problemas de flujo de costo mínimo en la mayoría de las industrias, como la agricultura, la industria de los neumáticos, transportación, manufactura, medicina, asignación de materiales de diversa índole etc.

- Existen problemas que a simple vista no parecieran poder modelarse como una red, pero una vez logrado tal modelamiento, es posible resolverlos con los algoritmos mencionados a lo largo del presente trabajo investigativo.

- Se puede observar que en cada iteración del algoritmo empleado, se resuelve un problema de la ruta más corta, con la restricción de que las longitudes de los arcos son no negativas.

- Durante la ejecución del algoritmo, se mantiene un pseudoflujo x que satisface las condiciones de optimalidad y se aumenta una cantidad determinada de flujo a través de la ruta más corta desde los nodos de exceso hasta los nodos de demanda en la red residual G(x)

- Durante cada iteración el algoritmo selecciona un nodo con exceso de oferta un nodo con exceso de demanda y termina cuando la solución satisface todas las restricciones de balance.

- Para determinar la distancia más corta entre un nodo y otro se empleó el algoritmo de Dijkstra.

- Siempre existirá el mismo número de nodos de oferta y de demanda, debido a que la red es planteada como un sistema cerrado, es decir no existe flujo que salga de la red.

- Los costos reducidos correspondientes a la ruta más corta desde un nodo de oferta hacia un nodo de demanda en la red residual será iguales a cero.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. **C. Suárez,** "Implementación de un algoritmo para optimizar el flujo en una red" (Tesis de Grado, Ingeniería en Estadística Informática, Escuela Superior Politécnica del Litoral, 2002)

2. **Radindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti y James B. Orlin,** Network Flows Theory, Algorithms and Applications (Primera Edición, New Jersey, Prentice Hall, 1993), pp. 1-9,23-45, 108-112,296-316,320-323 y 765-786.

3. **H. M. Deitel y P.J. Deitel,** C++ Cómo Programar (Segunda Edición, México ,Prentice Hall, 1999), pp. 282-293.

4. **Mark Allen Weiss**, Estructuras de Datos y Algoritmos (Addison Wesley Iberoamericana S.A., Wilminton-Delaware E.U.A.,1995), pp. 47-48 y 183-189.