ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROYECTO DE GRADUACIÓN
PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE:

"MAGÍSTER EN EDUCACIÓN CON MENCIÓN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA"

TEMA

"ELABORACIÓN E IMPLEMENTACIÓN DE UNA ESTRATEGIA METODOLÓGICA PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DE LAS CÓNICAS BASADA EN PROBLEMAS POR NIVELES"

AUTORES:

MERCEDES MARGARITA PÉREZ ZAMBRANO
SEGUNDO BIENVENIDO CAMATÓN ARIZABAL

GUAYAQUIL - ECUADOR

Año
2013

DEDICATORIA

A DIOS

A MIS PADRES

A MI HIJO CHRISTOPHER

Autor: Mercedes Pérez

A DIOS

A MI MADRE

A MI ESPOSA

A MIS HIJOS

Autor: Segundo Camatón

AGRADECIMIENTO

Agradezco primeramente a Dios, porque me ha permitido alcanzar mis metas propuestas, brindándome salud y fortaleza para así alcanzar lo deseado.

A los directivos de departamento de matemática porque sin su ayuda no hubiese sido posible alcanzar este sueño.

A mi hijo Christopher y a mis Padres que han sido la razón para ser quien soy.

Al Matemático Jorge Medina, Director de Proyecto, por su valiosa ayuda.

Autor: Mercedes Pérez Zambrano

Agradezco a Dios por haberme dado la vida, salud y la oportunidad de alcanzar esta meta.

A mi esposa e hijos por apoyarme con su tiempo y por el ahínco brindado todos los días para alcanzar con éxito este sueño.

De igual manera a nuestro Director de Proyecto el Matemático Jorge Medina, por su valiosa ayuda.

Autor: Segundo Camatón Arizabal

DECLARACIÓN EXPRESA

La responsabilidad por los hechos y doctrinas expuestas en este Proyecto de Graduación, nos corresponden exclusivamente; el patrimonio intelectual del mismo, corresponde exclusivamente a la **Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas**, Departamento de Matemáticas de la Escuela Superior Politécnica del Litoral.

Ing. Mercedes Pérez Zambrano

Lic. Segundo Camatón Arizabal

TRIBUNAL DE GRADUACIÓN

Máster Gaudencio Zurita Herrera
DECANO

Máster Félix Ramírez Cruz
PRESIDENTE

Máster Jorge Medina Sáncho
DIRECTOR

Máster Sonnia Reyes Ramos
VOCAL

Í N D I C E GENERAL

INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente la enseñanza de la Matemática en nuestro país ha estado dirigida a la ejecución de operaciones con creciente complejidad de cálculos, a la memorización de conceptos, al desarrollo de actividades que giran en torno al docente y provocan la pasividad del estudiante considerado éste únicamente como receptor de información y cuyo grado de abstracción muchas veces no se adecua a su nivel de desarrollo mental. El presente proyecto de grado consiste en una estrategia metodológica (taller) basada en el paradigma constructivista, concretando sus conocimientos en saberes prácticos y estimulando su aprendizaje.

Al elaborar el taller con actividades creativas e innovadoras (problemas por niveles) para el estudio de las “Cónicas” e implementarlo por los docentes de matemática Segundo Camatón Arizabal y Mercedes Pérez en los estudiantes del segundo y tercero de bachillerato se espera mejorar el aprendizaje de las mismas en ellos.

Cabe recalcar que el uso de las tecnologías informáticas es de mucha ayuda y ventaja para que los estudiantes se motiven, por tal motivo se trabajará con el programa matemático GEOGEBRA, permitiendo al estudiante a través de las conceptualizaciones y su utilización adquirir habilidades para construir (parábolas, hipérbolas, circunferencias y elipses).

RESUMEN

El presente proyecto de grado cuyo título es “Elaboración e Implementación de una estrategia metodológica para mejorar el aprendizaje de las cónicas basada en problemas por niveles” consta de cinco capítulos en los que se van desarrollando a partir del planteamiento del problema, hasta elaborar un taller basándose en niveles; permitiendo mejorar el aprendizaje de las cónicas en los estudiantes del segundo y tercero de bachillerato de las especializaciones “Contabilidad y Fima” de los colegios fiscales “Dr. Eduardo Granja Garcés” y “Aguirre Abad” pertenecientes a los cantones Pedro Carbo y Guayaquil de la provincia del Guayas; implementado por el Licenciado Segundo Camatón Arizabal y Licenciada Mercedes Pérez Zambrano docentes de matemática. Finaliza el proyecto con un análisis de los resultados de la información recolectada con el cuestionario aplicado a los estudiantes, en la que se evaluó el impacto de la estrategia metodológica implementada en ellos.

Debemos indicar que al ser motivados los estudiantes con esta estrategia metodológica se observó que al ser partícipes pudieron ser críticos al momento de resolver los problemas, siendo muy favorable sus resultados. Por ello exponemos las conclusiones y sugerencias de nuestra investigación.

Cabe recalcar además que el marco teórico está orientado de acuerdo al modelo constructivista por ser el más adecuado ya que permite llegar eficientemente a los estudiantes.

CAPÍTULO I

1.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Es posible mejorar el aprendizaje de las cónicas en los estudiantes del segundo y tercero de bachillerato de los colegios fiscales “Dr. Eduardo Granja Garcés” y “Aguirre Abad” pertenecientes a los cantones Pedro Carbo y Guayaquil, provincia del Guayas, año lectivo 2012-2013 a través de la elaboración e implementación de un taller como estrategia metodológica que incluya actividades didácticas basadas en problemas por niveles?

1.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Un enfoque inadecuado en la enseñanza aprendizaje de las “Cónicas”, ha dado como resultado que su estudio se convierta en aburrido y difícil en los estudiantes, debido a que los docentes la explican de manera tradicional.

Frente a la dificultad que se presenta en el proceso de la enseñanza aprendizaje de las “Cónicas” para los estudiantes del segundo y tercero de bachillerato de las especializaciones contabilidad y fima de los colegios fiscales “Dr. Eduardo Granja Garcés” y “Aguirre Abad”, se ha visto la necesidad de elaborar e implementar un “taller” como estrategia metodológica para mejorar el aprendizaje de las cónicas basada en problemas por niveles y a su vez motive a los estudiantes a su estudio, basada en un paradigma constructivista, donde el estudiante es partícipe de su propio aprendizaje interactuando con la realidad (sujeto-objeto).

Con esta propuesta se pretende hallar una forma, sin excluir que existan otras para el estudio de las cónicas. La tarea del docente es motivar con actividades que sean de interés a los estudiantes e indicándole la importancia de su utilidad.

Es importante señalar que el material que se propone se centra en una estrategia metodológica cuya finalidad es vencer la monotonía dentro del aula y renovar el pensamiento del docente cada día, para que puedan impartirla a sus estudiantes de forma apropiada.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GENERAL

Proponer y aplicar una estrategia metodológica basada en problemas por niveles, que ayude al estudiante a desarrollar el pensamiento y así mejorar el aprendizaje de las “Cónicas” mediante un taller con actividades creativas.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Establecer las causas del bajo rendimiento académico en los estudiantes de bachillerato en el aprendizaje de las “Cónicas”.
- Diseñar un taller con actividades relacionadas al estudio de las “Cónicas” que motive a los estudiantes, las cuales les permitan comprender el estudio de las cónicas.

- Analizar los aportes relevantes del taller en la resolución de problemas por niveles para que el estudiante tenga un aprendizaje significativo de las “Cónicas”.

1.4 JUSTIFICACIÓN

Se sabe que la responsabilidad fundamental que tienen los docentes es formar y guiar a los estudiantes, a su vez deben prepararse de forma permanente.

Por tal motivo todo docente de Matemática debe poseer un alto conocimiento y a su vez el uso apropiado de estrategias metodológicas dentro del aula para la enseñanza - aprendizaje de la asignatura que imparte a sus educandos.

Es por eso que se ha visto la necesidad de elaborar una estrategia metodológica (taller) con problemas por niveles como guía, la cual permita mejorar el aprendizaje de las “Cónicas” en los estudiantes de bachillerato para que el docente que esté tratando el tema lo implemente con facilidad en el aula de clase.

Este taller contiene actividades creativas permitiéndole a los estudiantes: motivarse, desarrollar el pensamiento y enfrentarse a problemas donde es de suma utilidad las cónicas.

CAPÍTULO II
MARCO TEÓRICO

2.1 TEORÍA CIENTÍFICA

La Matemática es una ciencia que debido a su particularidad (demostraciones, ramas u otros), facilita el desarrollo del pensamiento y a su vez a integrarse a equipos de trabajo interdisciplinarios para resolver problemas que se encuentran en nuestro entorno.

2.1.1 LA GEOMETRÍA COMO RAMA DE LA MATEMÁTICA

La Geometría es una rama de la matemática que permite a los estudiantes ser conscientes del espacio que los rodea, a través de analizar las diferentes formas y movimientos de figuras y a su vez relacionándolas con los objetos que se encuentran a su alrededor, mediante la manipulación y la experimentación.

La enseñanza de la Geometría dentro del área de matemática también tiene como propósito contribuir efectivamente al desarrollo del pensamiento en los estudiantes (visualizar y comprender los problemas a través de figuras).

Es importante que los estudiantes en la primaria estén en contacto con la Geometría aprendiendo a medir, dibujar, crear cuerpos y figuras, esta etapa permitirá fomentar en ellos imaginación y orientación espacial, la cual facilitará para la secundaria en el tema “Cónicas” ubicándolas en el plano y aplicando a su vez las simetrías, traslaciones, rotaciones, ampliaciones y reducciones.

Para obtener un aprendizaje significativo en los estudiantes del tercero bachillerato acerca de las cónicas es primordial llevarlo a la práctica, mediante la utilización adecuada de estrategias metodológicas por parte del docente.

2.1.2 ORIGEN DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA Y SUS PRECURSORES.

Por el siglo XVII gracias a ***Renato Descartes*** quien pretendió siempre explicar el comportamiento de las lentes y el movimiento de los astros; publicó un extenso documento llamado “La Géométrie” en 1637 en la cual señala el nacimiento de la Geometría Analítica, integración potente y útil del Álgebra y la Geometría; es aquí donde indica que las coordenadas cartesianas se introducen, entonces, a través de la recta real, asumiendo una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos de la recta (cada punto del plano queda representado por un par ordenado de números reales, y a cada punto del espacio por una terna ordenada de números reales).

Aunque Renato Descartes fue quien se dio cuenta de la utilidad de coordenadas para representar puntos en el plano y del uso de expresiones algebraicas para representar figuras geométricas ya existían algunos signos, lo cual indica que los antiguos egipcios y griegos usaron ideas vinculadas con las coordenadas, además la aplicación del cálculo a la geometría para el estudio de las propiedades de las figuras y la solución de los problemas que de ellas se derivan.

Arquímedes en cambio hizo uso de razonamientos muy ingeniosos que relacionaban las figuras geométricas con operaciones numéricas, llegando a desarrollar elementos precursores del cálculo minúsculo.

Apolonio por otra parte se interesó mucho en el estudio de “Las cónicas”, realizó ocho libros con todas las propiedades de estas curvas, mediante el uso de coordenadas donde relacionaba las abscisas y las ordenadas; en este sistema de referencia las distancias medidas a lo largo del diámetro de una curva desde el punto de tangencia son las abscisas; y los segmentos paralelos a la tangente e intersecados entre el eje y la curva son las ordenadas.

Oresme, Vieta, y Ferma ttambién contribuyeron en el estudio de la Geometría Analítica, con sus arduas investigaciones. [1]

En fin la Geometría Analítica nace y se desarrolla con el objeto de resolver problemas geométricos mediante el uso de las herramientas del álgebra y del análisis.

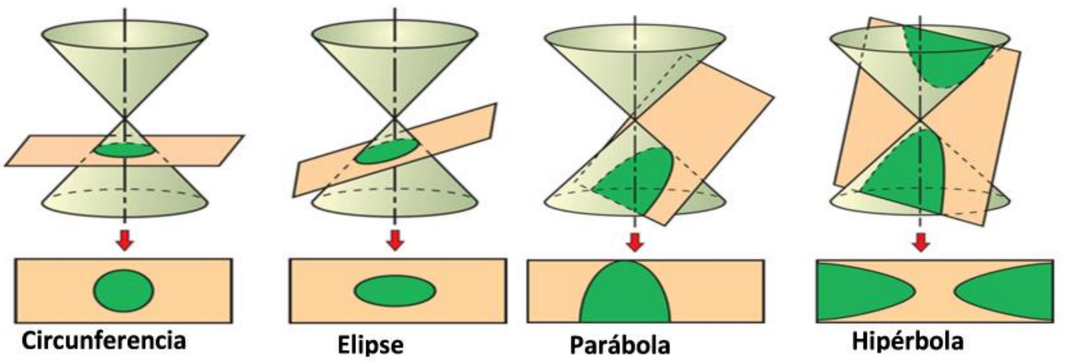
2.1.3 APORTES CIENTÍFICOS DE LAS CÓNICAS

De todas las investigaciones realizadas por algunos matemáticos, en la actualidad se sabe que Apolonio de Perga fue el primero en estudiar detalladamente las curvas cónicas y encontrar la propiedad plana que las definía. Descubriendo en ellas que se podían clasificar en tres tipos a los que dio el nombre de: elipses, hipérbolas y parábolas.

[1] Boyer, Carl B., A History of Mathematics. Segunda Edición. Cap. 9. John Wiley&Sons. USA. 1991

Las “elipses” son las curvas que se obtiene cortando una superficie cónica con un plano que no es paralelo a ninguna de sus generatrices. Las “hipérbolas” son las curvas que se obtiene al cortar una superficie cónica con un plano que es paralelo a dos de sus generatrices (Base y arista).Las “parábolas” son las curvas que se obtienen al cortar una superficie cónica con un plano paralelo a una sola generatriz (Arista).

Figura 1.- Cónicas



Apolonio demostró que las curvas cónicas tienen muchas propiedades interesantes. Algunas de esas propiedades son las que se utilizan actualmente para definirlas.

2.1.4 APLICACIONES DE LAS CÓNICAS

Las propiedades más interesantes y útiles que descubrió Apolonio delas cónicas son las llamadas propiedades de reflexión.

a. Si se construyen espejos con la forma de una curva cónica que gira alrededor de su eje, se obtienen los llamados espejos elípticos, parabólicos o hiperbólicos, según la curva que gira.

b. Si se coloca una fuente de luz en el foco de un espejo elíptico, entonces la luz reflejada en el espejo se concentra en el otro foco.

c. Si se recibe luz de una fuente lejana con un espejo parabólico de manera que los rayos incidentes son paralelos al eje del espejo, entonces la luz reflejada por el espejo se concentra en el foco, la cual permite encender un papel si se coloca en el foco de un espejo parabólico y el eje del espejo se apunta hacia el sol.

Recordemos que el científico ***Arquímedes*** por su parte logró incendiar las naves romanas durante la defensa de Siracusa usando las propiedades de los espejos parabólicos. En la actualidad esta propiedad se utiliza para los radares, las antenas de televisión y espejos solares.

Existe la propiedad análoga, la cual nos dice que un rayo que parte del foco se refleja paralelamente al eje sirve para que los faros de los automóviles concentren el haz en la dirección de la carretera o para estufas.

En el caso de los espejos hiperbólicos, la luz proveniente de uno de los focos se refleja como si viniera del otro foco, esta propiedad se utiliza en los grandes estadios para conseguir una superficie mayor iluminada.

En el siglo XVI el filósofo y matemático ***Renato Descartes*** desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones, el método consiste en que las curvas cónicas se pueden representar por ecuaciones de segundo grado en las variables “X” y“Y”. [2]

[2] Enzo De Bernardini · Astronomía Sur · http://astrosurf.com/astronosur

Sin embargo las cónicas son las curvas más importantes que la geometría ofrece a la física. Donde las propiedades de reflexión han sido de gran utilidad en la óptica, lo que las hace más importantes en la física es el hecho de que las órbitas de los planetas alrededor del sol sean elipses y que, más aún, la trayectoria de cualquier cuerpo sometido a una fuerza gravitatoria es una curva cónica.

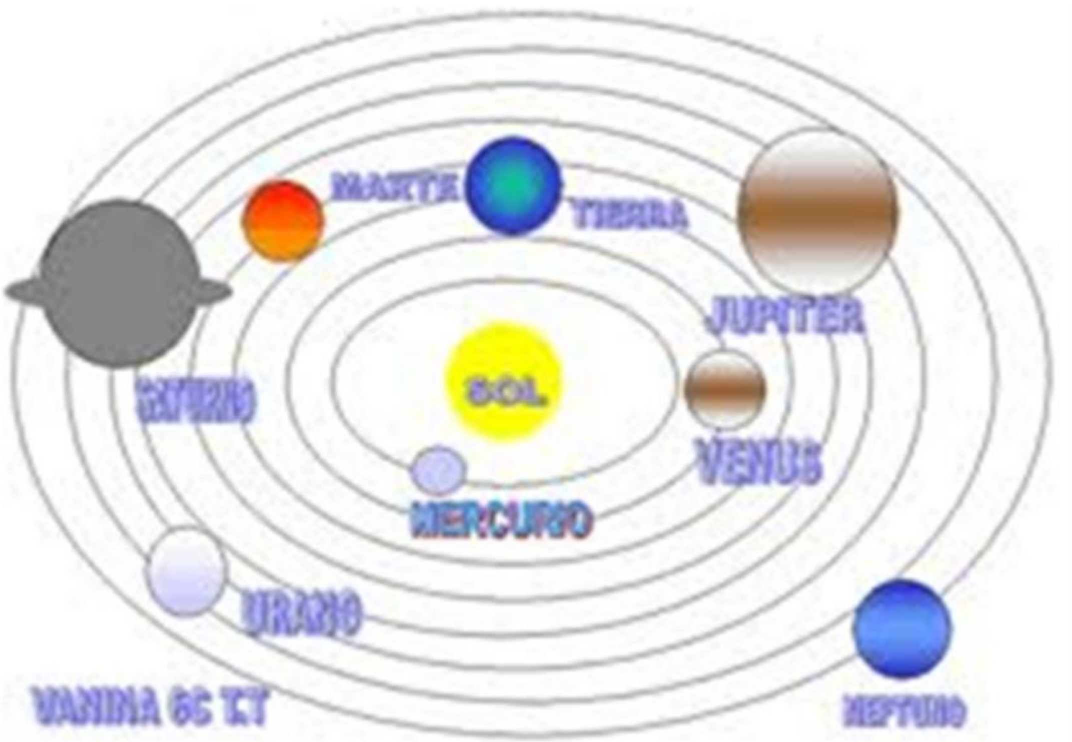
Sin embargo el astrónomo alemán ***Johannes Kepler*** formuló las tres famosas leyes que llevan su nombre, después de analizar un gran número de observaciones realizadas por Tycho Brahe de los movimientos de los planetas, sobre todo de Marte, hizo cálculos sumamente largos encontrando que había discrepancias entre la trayectoria calculada para Marte y las observaciones de Tycho, diferencias que alcanzaban en ocasiones los 8 minutos de arco (las observaciones de Tycho poseían una exactitud de alrededor de 2 minutos de arco), estas diferencias lo llevaron a descubrir cuál era la verdadera órbita de Marte y los demás planetas del Sistema Solar.

Primera ley “Órbitas elípticas” Las órbitas de los planetas son elipses que se forman de manera que el astro (Sol) se sitúa en uno de los focos de la elipse y los planetas girando a su alrededor, por tal motivo el sistema solar tiene órbitas elípticas. Fundamentalmente, las elipses son descritas por la longitud de sus dos ejes, un círculo tiene el mismo diámetro si se le mide el ancho hacia arriba y hacia abajo, en cambio una elipse tiene diámetros de diversas longitudes (el más largo se llama el eje mayor y el más corto es el eje menor) y el radio de estas dos longitudes determina la excentricidad (e) de la elipses siendo esta mayor a cero y menor o igual a 1. [2]

[2] Enzo De Bernardini · Astronomía Sur · http://astrosurf.com/astronosur

Datos obtenidos de investigaciones realizadas presentan que en el caso de la Tierra el valor de la excentricidad es de 0.017, el planeta de mayor excentricidad es Plutón con 0.248, y le sigue de cerca Mercurio con 0.206.[2]

Figura 2.- Sistema galáctico



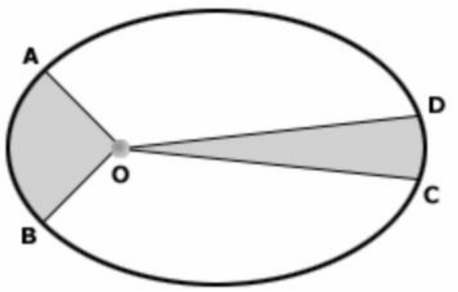
[2] Enzo De Bernardini · Astronomía Sur · http://astrosurf.com/astronosur

Segunda ley "Ley de las áreas" Las áreas barridas por el radio vector que une a los planetas al centro del Sol son iguales a tiempos iguales.

La velocidad orbital de un planeta (velocidad a la que se desplaza por su órbita) es variable, de forma inversa a la distancia al Sol: a mayor distancia la velocidad orbital será menor, a distancias menores la velocidad orbital será mayor. La velocidad es máxima en el punto más cercano al Sol (perihelio) y mínima en su punto más lejano (afelio).

El radio vector de un planeta es la línea que une los centros del planeta y el Solen un instante dado. El área que describen en cierto intervalo de tiempo formado entre un primer radio vector y un segundo radio vector mientras el planeta se desplaza por su órbita es igual al área formada por otro par de radios vectores en igual intervalo de tiempo orbital.

Figura 3



El tiempo que le toma al planeta recorrer del punto A al punto B de su órbita es igual al tiempo que le toma para ir del punto C al D, por tanto, las áreas marcadas OAB y OCD son iguales. Para que esto suceda, el planeta debe desplazarse más rápidamente en las cercanías del Sol (en el foco dela elipse, punto O del gráfico). [2]

[2] Enzo De Bernardini · Astronomía Sur · http://astrosurf.com/astronosur

Tercera ley "Ley armónica" Los cuadrados de los períodos orbitales sidéreos de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al Sol.

El período sidéreo se mide desde el planeta y respecto de las estrellas: está referido al tiempo transcurrido entre dos pasajes sucesivos del Sol por el meridiano de una estrella.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{d_1^3}{d_2^3}$$

Donde T_1 y T_2 son los períodos orbitales y d_1 y d_2 las distancias a las cuales orbitan del cuerpo central. La fórmula es válida mientras las masas de los objetos sean despreciables en comparación con la del cuerpo central al cual orbitan.

Para dos cuerpos con masas m_1 y m_2 y una masa central M puede usarse la siguiente fórmula:

$$\frac{T_1^2 \cdot (M + m_1)}{T_2^2 \cdot (M + m_2)} = \frac{d_1^3}{d_2^3}$$

Esta ley fue publicada en 1614 en la más importante obra de Kepler, "Harmonici Mundi", solucionando el problema de la determinación de las distancias de los planetas al Sol. Posteriormente Newton explicaría, con su ley de gravitación universal, las causas de esta relación entre el período y la distancia.[2]

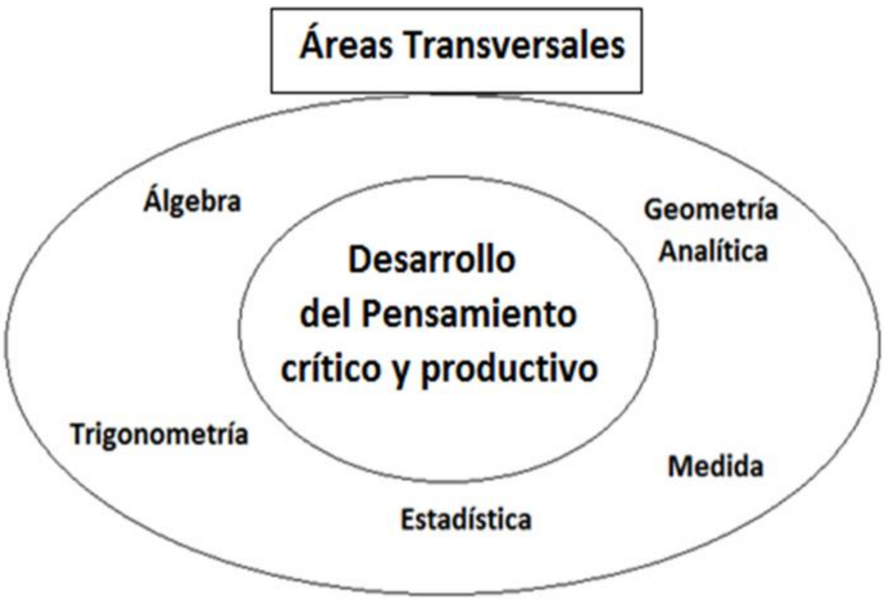
[2] Enzo De Bernardini · Astronomía Sur · http://astrosurf.com/astronosur

2.1.5 ENFOQUE DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

La enseñanza de la Matemática no sólo son procesos numéricos, se puede encontrar problemas relacionados con álgebra, geometría analítica, trigonometría, medida y estadística; desde la escuela se viene aprendiendo todos estos bloques conjuntamente. Además es una ciencia que siempre está presente en el proceso educativo la cual juega un papel formativo porque contribuye al desarrollo del pensamiento lógico – deductivo; permitiendo formar sujetos capaces de observar, analizar y razonar; enfrentándose a los retos del siglo XXI (época de ciencia y la tecnología).

De lo dicho anteriormente, la enseñanza de la Matemática sustenta el eje integrador del área.

***Figura 4*.**



Es importante que todo estudiante al asistir a un aula de clase vaya con entusiasmo para aprender, el éxito depende en gran medida de la motivación que se le brinde por parte del docente, empleando estrategias metodológica durante la enseñanza - aprendizaje.

Actualmente existen aún docentes tradicionales que dictan sus clases, recitan definiciones, explican fórmulas y generalizaciones de las mismas, donde los estudiantes se sienten aburridos de tomar apuntes para luego memorizar y dar respuestas correctas; convirtiéndose este aprendizaje mecánico sin razonamiento alguno. Por tal motivo ven a la matemática como un mal necesario y solo buscan el número suficiente que represente en su calificación la aprobación de dicha materia.

Por lo anterior expresado se puede considerar que las estrategias metodológicas utilizadas por el docente no están encaminadas a conseguir un buen aprendizaje significativo en el estudiante; dado que su mayor preocupación es completar los contenidos del programa que exige el Ministerio de Educación.

Es por esto que el docente debe conocer estrategias metodológicas para que sean desarrolladas en el aula, indicándole al estudiante que el estudio de la Matemática ayuda a afrontar y resolver problemas no solo en la clase, sino a desarrollarse como ciudadanos. Para esto el docente debe considerar algunos aspectos importantes como:

a. Conocer los problemas, dificultades y obstáculos que originaron la construcción de los conocimientos en el estudiante.

b. Conocer las orientaciones metodológicas empleadas en la construcción de los conocimientos, es decir, la forma en que los científicos abordan los problemas, las características más notables de su actividad, los criterios de validación y aceptación de las teorías científicas.

c. Conocer las interacciones Ciencia/Técnica/Sociedad asociadas a dicha construcción del conocimiento.

d. Seleccionar contenidos adecuados y de interés para los estudiantes.

e. Estar preparados para profundizar los conocimientos y adquirir otros nuevos.

2.1.6 USO DE ESTRATEGIAS PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE MATEMÁTICA.

¿QUÉ ES ESTRATEGIA?

Algunos definen a la estrategia como el conjunto de actividades, técnicas y medios que se planifican de acuerdo con las necesidades para lograr un determinado fin.

En fin la estrategia se refiere al **“arte”** de **“proyectar y dirigir”**; el estratega proyecta, ordena, dirige las operaciones para lograr objetivos propuestos, por tal motivo las **“estrategias de aprendizajes”** son una serie de operaciones cognoscitivas y afectivas que el estudiante lleva a cabo para aprender, con las cuales puede planificar y organizar sus actividades de aprendizaje.

Por otro lado las **“estrategias de enseñanza”** en cambio se refieren a las utilizadas por el docente para mediar, facilitar, promover, organizar aprendizajes, esto es en el proceso de enseñanza.

Al momento de enseñar Matemática el docente debe indicar a los estudiantes mediante estrategias a construir definiciones para luego ponerlas en práctica a través de planteamiento de problemas. Al ser utilizadas permiten en ellos identificarlas dificultades y errores que cometen cuando resuelven los problemas y así buscar una solución para obtener a futuro un aprendizaje significativo.

A continuación se describen estrategias de enseñanza aprendizaje que pueden ser utilizadas o elaboradas por los docentes.

a) ESTRATEGIAS PARA CONSTRUIR EL CONOCIMIENTO

Estas sirven para activarlos conocimientos previos antes de emplear la información por aprender, las cuales permiten al docente identificar los conceptos centrales de la información y así tener presente que es lo que esperará que los estudiantes aprendan. Entre ellas encontramos las siguientes formas para construir el conocimiento en los chicos:

- **Actitud focal introductoria.-** Consiste en presentar situaciones sorprendentes buscando atraer la atención de los estudiantes y así activar conocimientos previos.

- **Discusión guiada.-** Con la participación interactiva a través de un tema en discusión entre el estudiante y el docente se activan los conocimientos previos, es muy importante, que el docente tenga claro los objetivos de discusión para así promover a los estudiantes a que formulen preguntas.

- **Interacción con la realidad.-** Se pretende que mediante simulaciones se interactúe con aquellos elementos (objetos, personas, organizaciones u otros) relacionando las características con el contenido a tratar.

- **Utilización de recursos:** Hojas, pizarrón, software estructurado, herramientas de internet u otros sirven de apoyo para la lluvia de ideas y así activar el conocimiento.

- **Ilustración construccional.-** Esta estrategia consiste en elaborar planos o maquetas que muestren elementos estructurales de objetos o un esquema de los mismos, del tema que esté trabajando el docente.

b) ESTRATEGIASPARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para esto se debe plantear situaciones problemáticas, en el contexto real, que requieren solución o vías de soluciones. Entre ellas encontramos las siguientes formas:

- **Planteo de situaciones y problemas.-** A través de esta forma se pretende que el estudiante participe detectando las soluciones y así también un número determinado de problemas que se observen a futuro.

- **Análisis de medios y razonamiento analógico.-** Consiste en dividir el problema en subtemas que faciliten la solución del problema total. También se alienta a los estudiantes a ver el problema desde otro punto de vista.

- **Búsqueda de soluciones.-** Se proponen soluciones al problema mediante aproximaciones a través de lluvias de ideas o también manipulando objetos o simulando la posibilidad de la solución.

- **Comunicación de la solución de problemas.-** Se exponen las soluciones posibles, se resuelve el problema seleccionando la que tiene mayor probabilidad.

c) ESTRATEGIAS PARA MEJORAR LA CODIFICACIÓN DE LA INFORMACIÓN

El uso de estas estrategias facilitará al estudiante a que de alguna manera obtenga un aprendizaje significativo de lo realizado por el maestro o visto en un video, texto u otros. Tenemos algunas formas por ejemplo:

- **Ilustración descriptiva.-** Esta estrategia es muy importante ya que el estudiante identifica visualmente a través de fotografías, videos u otros las características centrales del objeto o situación problemática que plantea el docente, porque muestra en sí como es un objeto físicamente y a su vez dan una impresión holística del mismo.

- **Ilustración expresiva.-** Al momento de dibujar le damos la oportunidad a que el estudiante exprese sus propias ideas las cuales van a ser plasmadas en una hoja de papel. Lo esencial de esta estrategia es que logrará un impacto en todos los estudiantes porque se interesaran por debatir cada uno de los aspectos actitudinales y emotivos.

- **Ilustración algorítmica.-** Sirve para describir procedimientos, incluye diagramas donde se plantean posibilidades de acción, rutas críticas, pasos de una actividad, demostración de reglas, etc. La intensión de al utilizar esta estrategia es que los estudiantes aprendan a abstraer procedimientos para aplicarlos en la solución de problemas.

- **Preguntas intercaladas.-** Se la aplica con la finalidad de captar la atención y descodificación literal del contenido, construir conexiones internas y externas, solicitar información, repasar y general la actividad mental.

Existen algunas estrategias de enseñanza – aprendizaje de las cuales pueden ser adaptadas a la Matemática.[3] Veamos a continuación en el ***Cuadro 1.***

ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA/ APRENDIZAJE	DESCRIPCIÓN
Clarificación/ verificación	Las usa el estudiante para confirmar su comprensión de los temas.
Predicción/ inferencia inductiva	Se hace uso de los conocimientos previos, por ejemplo, conceptos, símbolos, lenguajes matemáticos, las representaciones gráficas. Se habla para inferir significados en gráficos, ecuaciones, problemas, etc. Se revisan aspectos como ¿qué significado tiene?, ¿Dónde lo usé antes?, ¿cómo se escribe, o se simboliza?, ¿con qué se relaciona?
Razonamiento Deductivo	Esta es una estrategia de solución de problemas. El estudiante busca y usa reglas generales, patrones y organización para construir, entender, resolver. Como: analogías, síntesis, generalizaciones, procedimientos, etc.
Práctica y memorización	Contribuyen al almacenamiento y retención de los conceptos tratados. El foco de atención es la exactitud en el uso de las ecuaciones, gráficos, algoritmos, procesos de resolución. Se usa: repetición, ensayo y error, experimentación e imitación.
Monitoreo	El propio estudiante revisa que su aprendizaje se esté llevando a cabo eficaz y eficientemente.
Cooperación	Trabajar con uno o más compañeros para obtener retroalimentación.
Agrupamiento	Clasificar u ordenar material para aprender en base a sus atributos en común.

Organizadores previos	Hacer una revisión anticipada del material por aprender en preparación de una actividad de aprendizaje.
Atención dirigida	Decidir por adelantado atender una tarea de aprendizaje en general e ignorar detalles.
Atención selectiva	Decidir por adelantado atender detalles específicos que nos permitan retener el objetivo de la tarea.
Autoadministración	Detectar las condiciones que nos ayudan a aprender y procurar su presencia.
Autoevaluación	Verificar el éxito de nuestro aprendizaje según nuestros propios parámetros de acuerdo a nuestro nivel.

2.1.7 MODELO CONSTRUCTIVISTA EN LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA.

2.1.7.1 ¿QUÉ ES EL MODELO CONSTRUCTIVISTA?

El modelo constructivista concibe la enseñanza como una actividad crítica y al docente como un profesional autónomo que investiga reflexionando sobre su práctica. Varias investigaciones realizadas por los señores Jean Piaget, Lev Vigotsky, David Ausubel u otros en sus diferentes teorías planteadas y en la actualidad ven a este modelo como una estrategia metodológica que ayuda al estudiante a desarrollar habilidades, destrezas y ser críticos, por tal motivo hoy en día juega un papel integrador en la enseñanza – aprendizaje de la matemática y cualquier otra asignatura.

Entonces se puede concluir diciendo que el modelo constructivista es aquel que nos obliga al cambio ya que concibe a la enseñanza como una “actividad crítica” y a su vez percibe al “error” como un indicador y analizador de los procesos intelectuales, para el constructivismo aprender es arriesgarse a errar (ir de un lado a otro), muchos de los errores cometidos en situaciones didácticas deben considerarse como momentos creativos.[3]

[3] Monereo Font, Carles. “Estrategias de aprendizaje y enseñanza”

Se puede considerar los siguientes aspectos en el modelo constructivista:

a) El docente es un mediador.
b) Los estudiantes tienen un conocimiento previo el cual es flexible o modificable.
c) Estudiantes activos constructor de su propio aprendizaje.

2.1.7.2 PRECURSORES DEL MODELO CONSTRUCTIVISTA

Jean Piaget.- Sus investigaciones se refieren a cómo evolucionan los esquemas del sujeto y sus conocimientos a lo largo de las distintas edades de acuerdo a la medida que interactúa con la realidad. Por lo tanto es un proceso de interacción sujeto – objeto (por medio de una acción transformadora, el sujeto reestructura sus esquemas cognitivos, pasando de un estado de menor conocimiento a uno de mayor conocimiento; y cuando un objeto conoce se adapta a la situación utilizando mecanismos de asimilación y acomodación).

En la asimilación el individuo incorpora la nueva información haciéndola parte de su conocimiento, en la acomodación transforma la información que ya poseía en función de lo nuevo; la relación que hay entre la asimilación y la acomodación es interactiva. En conclusión para Piaget el aprendizaje depende fundamentalmente del nivel del desarrollo cognitivo del sujeto.

Lev Vigotsky.- Sostiene que el aprendizaje es un proceso constructivo interno (aprendizaje es un motor del desarrollo cognitivo), donde la zona de desarrollo próximo (ZDP) es la distancia entre el nivel del desarrollo nivel del niño (resolución independiente de problemas) y el nivel más elevado de desarrollo potencial (resolución de problemas con la guía del adulto o en colaboración con sus compañeros más capacitados). [4]

[4] www.cursoabierto.blogsport.com

Además considera que “Hay una influencia permanente entre el aprendizaje y el desarrollo cognitivo” porque si un alumno tiene más oportunidades de aprender que otro, no sólo adquiere más información, sino que logrará un mejor desarrollo.

David Ausubel.- Considera que la organización y la secuencia de los contenidos deben tener en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes. Además indica que la transmisión de conocimientos por parte del docente también es una manera adecuada y eficaz de producir aprendizaje si se tiene en cuenta los conocimientos previos del estudiante y su capacidad de comprensión. En fin para Ausubel “Aprender” es sinónimo de comprender (lo que se comprende es lo que se aprende y se podrá recordar mejor).

2.1.7.3 TIPOS DE CONSTRUCTIVISMO

Como sucede con cualquier doctrina o teoría, el Constructivismo alberga en su interior una variedad de escuelas y orientaciones que mantienen ciertas diferencias de enfoque y contenido.

EL CONSTRUCTIVISMO PIAGETIANO.-Es el que sigue más de cerca las aportaciones de Jean Piaget, particularmente aquellas que tienen relación con la Epistemología Genética, es decir, el conocimiento sobre la forma de construir el pensamiento de acuerdo con las etapas psicoevolutivas de los niños, tuvo su momento particularmente influyente durante las décadas de 1960 y 1970, impulsando numerosos proyectos de investigación e innovación educativa. [5]

---

[5] http://es.scribd.com/doc/22331757/EL-MODELO-CONTRUCTIVISTA-EN-LA-ENSEÑANZA-DE-LA-MATEMATICA

Para Piaget, la idea de la asimilación es clave, donde la nueva información que llega a una persona es "asimilada" en función de lo que previamente hubiera adquirido. Muchas veces se necesita luego una acomodación de lo aprendido, por lo que debe haber una transformación de los esquemas del pensamiento en función de las nuevas circunstancias.

EL CONSTRUCTIVISMO HUMANO.- Surge de las aportaciones de Ausubel sobre el aprendizaje significativo, a los que se añaden las posteriores contribuciones neurobiológicas de Novak, dando así origen a un "constructivismo social" que se fundamenta en la importancia de las ideas alternativas y del cambio conceptual según Kelly, además de las teorías sobre el procesamiento de la información.

Para esta versión del constructivismo son de gran importancia las interacciones sociales entre los que aprenden.

Como consecuencia de esta concepción del aprendizaje, el "constructivismo humano" ha aportado metodologías didácticas propias como los mapas y esquemas conceptuales, la idea de actividades didácticas como base de la experiencia educativa, ciertos procedimientos de identificación de ideas previas, la integración de la evaluación en el propio proceso de aprendizaje, los programas entendidos como guías de la enseñanza y de aprendizaje.[6]

[6] www.cursoabierto.blogsport.com

EL CONSTRUCTIVISMO RADICAL.-Según Glaserfeld es una corriente que rechaza la idea según la cual lo que se construye en la mente del que aprende es un reflejo de algo existente fuera de su pensamiento. En realidad, se trata de una concepción que niega la posibilidad de una transmisión de conocimientos del profesor al alumno, ya que ambos construyen estrictamente sus significados. Los constructivistas radicales entienden la construcción de saberes desde una vertiente darwinista y adaptativa, es decir, el proceso cognitivo tiene su razón de ser en la adaptación al medio y no en el descubrimiento de una realidad objetiva. A diferencia de los otros "constructivismos", en general calificables como "realistas", el constructivismo radical es idealista porque concibe el mundo como una construcción del pensamiento y, por tanto, depende de él.

2.1.8 EL TALLER COMO UNA ESTRATEGIA METODOLÓGICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO.

El modelo constructivista enfatiza que los aprendíces deben estar involucrados activamente, por tal motivo un **"taller",** el cual contenga actividades didácticas, es una vía idónea para formar, desarrollar, perfeccionar hábitos, habilidades y capacidades en el estudiante; ya que a través de la participación activa del estudiante se busca el "aprender a ser", el "aprender a aprender" y el "aprender a hacer" al ir descubriendo los problemas que en él se encuentran.[7]

¿QUÉ ES UN TALLER?

Un taller es una forma integradora (armando grupos o equipos) no numerosos de estudiantes, con la finalidad de que trabajen cooperativamente para que a través de una interacción (haciendo juntos con otros) tengan un aprendizaje significativo (desarrollando habilidades y el pensamiento) bajo la supervisión y orientación del docente de la asignatura.

---

[7] www.cursoabierto.blogspot.com

En si se puede decir que un taller tiene como finalidad:

a) Incentivar a los estudiantes para que sean creadores de su propio proceso de aprendizaje.
b) Cambiar las relaciones competitivas por la producción conjunta (grupal).
c) Desarrollar actitudes críticas y autocríticas en el estudiante.

2.2 TEORÍA CONCEPTUAL

A continuación se mencionarán conceptos relacionados al presente trabajo, que han sido tomados del libro “Fundamentos de Matemáticas” de la ESPOL edicción 2006.

MATEMÁTICA.- Es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos. De ella se derivan algunas ramas: Aritmética, Geometría, Geometría Analítica, Algebra, Trigonometría y Cálculo.

a. Geometría.- Es una rama de la matemática,se encarga del estudio de las propiedades y figuras geométricas en el plano o el espacio.

b. Geometría Analítica.- Es una rama de la matemática estudia las figuras geométricas mediante técnicas básicas del análisis matemático y del álgebra en un determinado sistema de coordenadas. Dentro de esta rama encontramos las “Cónicas”.

b.1. Cónicas.- Son curvas planas obtenidas mediante la intersección de un cono circular recto con un plano. La parábola, la elipse y la hipérbola se denominan secciones cónicas o simplemente cónicas.[8]

[8]Matemáticabásica de la Espol, 2006

b.1.1 Parábola.- Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y de una recta fija llamada directriz. Los elementos de la parábola son: directriz, foco, vértice, y lado recto.

b.1.1.1Directriz.- Es la recta perpendicular al eje de simetría su distancia hasta un punto cualquiera de la parábola es igual a la distancia de este mismo punto al Foco.

b.1.1.2 Foco.- Es un punto fijo situado en el interior de la parábola.

b.1.1.3 Vértice.- Es el punto en el cual la parábola cambia su monotonía.

b.1.1.4 Lado recto.- Es un segmento paralelo a la directriz, que pasa por el foco y es perpendicular al eje focal y sus extremos son puntos de la parábola.

b.1.2 Elipse.- Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano, tales que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos llamados focos es constante. Los elementos de la elipse son: Centro, vértice 1, vértice 2, foco 1, foco 2, eje mayor, eje menor, lado recto y excentricidad.

b.1.2.1 Centro.- Es aquel que está situado en el interior de la elipse se lo considera el punto medio entre los vértices y los focos.

b.1.2.2 Vértices.- Son aquellos que se encuentran en los extremos de la elipse los cuales forman el diámetro de la misma.[8]

---

[8]Matemáticabásica de la Espol, 2006

b.1.2.3Focos.- Son puntos fijos que se encuentran equidistantes alos vértices y al centro.

b.1.2.4 Eje mayor.-Es el mayor diámetro formado por sus vértices.

b.1.2.5 Eje menor.- Es el menor diámetro formado por sus vértices.

b.1.2.6 Lado recto.- Es el segmento de recta perpendicular al eje mayor y que pasa por los focos.

b.1.2.7 Excentricidad.- Es un parámetro que determina el grado de desviación de una sección cónica con respecto a una circunferencia

b.1.3 Hipérbola: Es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es igual a la distancia entre los vértices, la cual es una constante positiva. Los elementos de la elipse son: Centro, vértice 1, vértice 2, foco 1, foco 2, asíntotas, eje transverso, eje conjugado, lado recto y excentricidad.

b.1.3.1 Centro.- Es el punto medio entre los vértices y los focos.

b.1.3.2 Vértices.- Son los puntos en los cuales las parábolas cambian su monotonía.

b.1.3.3 Focos.- Sonlos puntosfijos situados en el interior de las parábolas.

b.1.3.4 Asíntotas.- Son líneas oblicuas que pasan por el centro.[8]

---

[8]Matemáticabásica de la Espol, 2006

b.1.3.5 Eje transverso.- Es la distancia que existe de un vértice a otro.

b.1.3.6 Eje conjugado.- Es aquel que es perpendicular al eje transverso.

b.1.3.7 Lado recto.- Es el segmento perpendicular al eje transverso que pasa por los focos.

b.1.3.8 Excentricidad.- Es la que mide la abertura mayor o menor de las ramas de la hipérbola.

b.1.4 Circunferencia.- Es un lugar geométrico formado por el conjunto de todos los puntos de un plano equidistantes a un punto C (h, k) con coordenada h y k llamado centro de la circunferencia.

b.1.4.1 Centro.- Es el punto medio del diámetro.

b.1.4.2Radio.- Es un segmento que une el centro de la circunferencia y un punto cualquiera de ella.

b.2 Plano.- Es una superficie lisa sin grosor que solo posee dos dimensiones, y contiene infinitos puntos y rectas.

b.3 Lugar geométrico.- Es un conjunto de puntos del plano o del espacio que cumplen determinadas propiedades.[8]

---

[8]Matemáticabásica de la Espol, 2006

Además se mencionarán conceptos pedagógicos que han sido tomados de páginas de internet.

DIDÁCTICA.- Es una disciplina pedagógica centrada en el estudio de los procesos de enseñanza aprendizaje, que pretende la formación y el desarrollo instructivo - formativo de los estudiantes.

a) **Enseñanza**.- Es la acción y efecto de enseñar (instruir, adoctrinar y amaestrar con reglas o preceptos).

a.1 Estrategia.- Es un conjunto de acciones planificadas sistemáticamente en el tiempo que se llevan a cabo para lograr un determinado fin.

a.2 Técnica.- Es un procedimiento o conjunto de reglas, normas o protocolos, que tienen como objetivo obtener un resultado determinado, ya sea en el campo de la ciencia, de la tecnología, del arte, del deporte, de la educación o en cualquier otra actividad.

a.3 Procedimientos.- Serie ordenada de acciones que se orienta al logro de un fin o meta determinada. Es un contenido del Currículo y engloba a las destrezas, las técnicas y las estrategias.

b) **Aprendizaje.-** Es el proceso a través del cual se adquieren o modifican habilidades, destrezas, conocimientos, conductas o valores como resultado del estudio, la experiencia, la instrucción, el razonamiento y la observación.[9]

[9] www.wikipedia.com

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA
Y
DISEÑO DEL CUESTIONARIO

La investigación se lo ejecutó en los colegios fiscales "Dr. Eduardo Granja Garcés" y "Aguirre Abad", ubicados en los cantones Pedro Carbo y Guayaquil pertenecientes a la provincia del Guayas el 25 de Junio del 2012.

Es de tipo cualitativa, porque no se probará la hipótesis debido a que la estadística utilizada es de carácter descriptivo, las preguntas son subjetivas (personales) aplicadas a los estudiantes de los terceros de bachillerato especialización contabilidad e informática.

El licenciado Segundo Camatón como parte del personal docente de dicha institución y por la experiencia en la enseñanza del tema "Cónicas", considera que sus estudiantes tienen problemas en el aprendizaje de las mismas.

De allí la necesidad de elaborar un taller (estrategia metodológica amena y motivante) para mejorar el aprendizaje de las "Cónicas" basado en problemas por niveles**,** el cual será implementado en el aula (siguiendo el paradigma constructivista), porque le permite al estudiante ser partícipe de su propio aprendizaje.

3.1 METODOLOGÍA

Es necesario saber que la investigación cualitativa es:

- Subjetiva (los datos son filtrados por el criterio del investigador).
- Holística (abarca el fenómeno en su totalidad).
- Recursiva (es elaborado a medida que avanza, siguiendo paradigmas constructivistas). Y que el análisis estadístico que emplea no es riguroso (ya que a lo mucho solo llega a hacer recuentos de frecuencias y categorizaciones).
- Las conclusiones y recomendaciones son en base a la información recolectada en los instrumentos elaborados por el investigador.

TIPO DE INVESTIGACIÓN

Por el objetivo(Aplicada): La estrategia metodológica a utilizarse se llevará a cabo mediante un taller basado por niveles, según la cónica, enfocado a problemas donde los estudiantes se sientan motivados y partícipes para así ir mejorando sus capacidades.

Por el lugar (De Campo): El taller se lo realiza en las aulas de los colegios fiscales “Dr. Eduardo Granja Garcés” y “Aguirre Abad”, observándose la participación directa de cada uno de los estudiantes, individual o grupal.

Por su naturaleza (De Acción): La resolución del taller le dará a la investigación el carácter activo y participativo, a través del planteamiento de problemas por niveles se motivará a los estudiantes para que busquen posibles soluciones con el fin de construir el conocimiento.

Por factibilidad (De aplicación factible): Se ejecutará la estrategia metodológica propuesta mediante un taller a los estudiantes del segundo y tercero de bachillerato de las especializaciones Contabilidad y Fima de los colegios fiscales "Dr. Eduardo Granja Garcés" y "Aguirre Abad". Luego se aplicará una encuesta tanto a los estudiantes, quienes van a dar sus opiniones para saber si es factible o no la estrategia utilizada para lograr el aprendizaje significativo de las cónicas.

POBLACIÓN

En el siguiente cuadro observamos la población con la que se trabajará para el presente proyecto:

Cuadro No. 2
"Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles"
2012 – 2013

POBLACIÓN	CANTIDAD DE ESTUDIANTES
Colegio "Aguirre Abad" 2^{do} de bachillerato especialización "Fima – Sección 1"	**35**
Colegio "Eduardo Granja Garcés" 3^{ero} de bachillerato especialización "Contabilidad –Sección A "	**44**
TOTAL	**79**

Autores: Segundo Camatón - Mercedes Pérez

Para nuestra investigación se realizará un censo.

Se debe considerar además que el Lic. Segundo Camatón es docente sólo de los estudiantes del tercero bachillerato especialización "Contabilidad".

RECOLECCIÓN DE DATOS

El instrumento para la recolección de la información es un cuestionario, en el cual en una parte de él se desea conocer acerca de las características del docente que dicta la asignatura de matemática y en la otra parte acerca de la aplicación del taller pedagógico, los entes a investigar, todos los estudiantes del tercero de bachillerato especialización “Contabilidad e Informática” que forman la población objetivo indicada anteriormente.

3.2 DISEÑO DEL CUESTIONARIO

A continuación se presentará la descripción de las variables de estudio que contiene cuestionario, se ha dividido en tres secciones.

- Sección I: Información de los estudiantes.
- Sección II: Características generales del docente.
- Sección III: Información acerca de la estrategia utilizada.

DESCRIPCIÓN DE LAS VARIABLES DE ESTUDIO.

<u>Sección I:</u> Información de los estudiantes.
En esta sección encontraremos las variables género, edad y la especialización del estudiante.

<u>Sección II:</u> Características generales del docente.
En esta sección se recolecta todos los datos generales acerca del trabajo que realiza el docente que dicta la asignatura “Matemática”.

Para las variables de estudio se ha utilizado escala de medición, con este procedimiento se pretende medir la calidad del servicio que brinda el docente en la institución, es valorada de la siguiente manera:

- Siempre (4)
- Casi siempre (3)
- A veces (2)
- Nunca (1)

Las variables medidas bajo esta escala son:

X_1: Se preocupa por el aprendizaje de los estudiantes.

X_2: Motiva a los estudiantes en el tema a tratar.

X_3: Tiene actitud positiva hacia los estudiantes.

X_4: Estimula la participación activa de los estudiantes.

X_5: Es respetuoso al responder las preguntas.

X_6: Es capaz de transmitir claramente sus conocimientos.

X_7: Utiliza ayuda audiovisual (proyector) para el contenido de un tema a tratar.

X_8: Es dinámico y presenta variedad de actividades con respecto al tema a tratar.

X_9: Desarrolla el contenido del tema de una manera ordenada.

X_{10}: Prepara recursos didácticos u otros para facilitar el aprendizaje en los estudiantes.

Sección III: Aplicación de la estrategia metodológica utilizada.

En esta sección a través de las variables se recolectó información de sumo interés para nuestro estudio acerca de la estrategia metodológica utilizada por el docente, la cual podremos analizar si es motivante para los estudiantes el enseñar “Cónicas” con este método y a su vez concluir si les permite mejorar el aprendizaje de las mismas.

Aquí también se utilizó en las variables de estudio una escala de medición valorada de la siguiente manera:

- Excelente (5)
- Muy Bueno (4)
- Bueno (3)
- Regular (2)
- Malo (1)

Las variables medidas bajo esta escala son:

X_1: La estrategia metodológica utilizada por el docente para la enseñanza aprendizaje de las Cónicas le pareció.

X_2: Estudiar las Cónicas como se presentan en el taller.

X_3: El nivel y las secuencias en la enseñanza de las Cónicas.

X_4: La organización en torno a problemas para profundizar y construir el conocimiento.

X_5: Los recursos didácticos e informáticos utilizados para la enseñanza aprendizaje de las cónicas.

CAPÍTULO IV

PROPUESTA

En este capítulo se muestra la estructura de la estrategia metodológica tipo taller para la enseñanza aprendizaje de las “Cónicas” de una manera secuencial por niveles para que pueda ser utilizado en el aula por los docentes de matemática que estén cursando este tema.

Por ello en cada nivel se va desarrollando de manera explícita y sus aplicaciones en problemas, con el propósito de obtener logros en los estudiantes.

Además después de haber aplicado el taller se recogió la información mediante un cuestionario aplicado a los estudiantes, para efecto fue analizada de tal forma que se presentaran las conclusiones necesarias junto a las recomendaciones.

ESTRATEGIA METODOLÓGICA
PARA LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA "PARÁBOLA"

MATERIALES A UTILIZAR PARA LA REALIZACIÓN DEL TALLER

EL ESTUDIANTE.- Todos los estudiantes necesita los siguientes materiales:

- 1 Lápiz de carbón.
- 1 Borrador.
- 1 compás.
- 1 regla.
- 1 formato A4 de madera.
- Hojas de papel bond tamaño A4.

EL DOCENTE.- A través del uso de tecnología informática (TICs) explicará a sus estudiantes lo trabajado con el material concreto, para lo cual necesita:

- 1 computadora con el programa matemático GEOGEBRA instalado.
- 1 retroproyector.

Es importante que el docente como orientador y supervisor haya planificado:

- ✓ La exposición de las actividades que contiene el taller.
- ✓ Las preguntas a plantear sobre el tema que se va a trabajar, primero debe indagar en los conocimientos previos al tema, de esta manera asegura los "cimientos" sobre los que se va a construir el nuevo conocimiento.
- ✓ Dar a conocer a los estudiantes ¿qué van a hacer? ¿cómo lo van a hacer? y ¿para qué lo harán? con el material concreto.
- ✓ Por último debe informar lo que aprendió con el uso de esta estrategia metodológica y su importancia.

TALLER

1. Formar equipos de trabajo, c/equipo integrado por 5 estudiantes.
2. Todos los integrantes de cada equipo deben tener sus materiales de trabajo para realizar el taller y así hacer las respectivas comparaciones (críticas del tema).
3. Un informe final de lo trabajado por cada equipo tomado al azar de todos sus integrantes para debatir con los demás equipos.
4. Tiempo de duración del taller 2 horas clases.

NIVEL1

CONSTRUCCIÓN DE LA "PARABOLA" Y SUS ELEMENTOS

1. Formados los equipos de trabajo, el docente dará la definición:

> ***Parábola.-*** *Es el conjunto de todos los puntos P(x, y) en el plano que equidistan de un punto fijo F llamado "foco" y de una recta fija L llamada "directriz de la parábola". Donde la distancia del punto al foco es la misma distancia del punto a la directriz.*

2. Partiendo de esta definición tomamos una hoja de papel colocándola sobre el pedazo de madera y la dividimos a la mitad con líneas rectas (una horizontal y la otra vertical) que se cortan en un punto formando ángulo recto, marcamos el centro de la hoja y luego con la regla

procedemos a dividir el eje horizontal (desde el centro hacia la derecha) distancias de ½ centímetros, obsérvese en la figura.

Figura 4

3. Luego procedemos hacer las circunferencias considerando el centro, teniendo en cuenta que se debe ir abriendo el compás de acuerdo a las distancias marcadas.

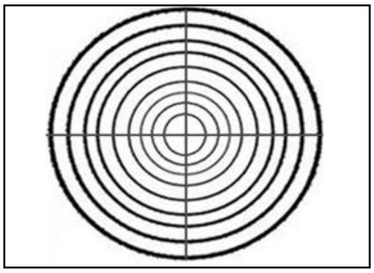


Figura 5

4. Consideraremos el centro como punto de origen, luego ubicaremos el foco y la directriz teniendo muy en cuenta la definición donde la distancia del punto al foco es la misma distancia del punto a la directriz. Además ubicaremos varios puntos que cumplan la definición.

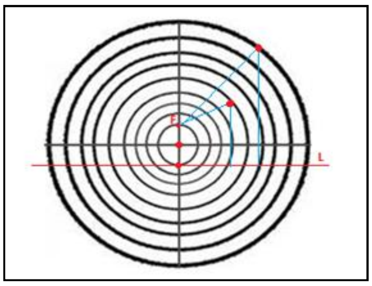


Figura 6

5. Luego aplicaremos la simetría de los puntos con respecto al eje trabajado.

6. Finalmente uniremos todos los puntos obteniéndose así la gráfica de la parábola, de la cual sus elementos serán: **el foco**, **la directriz**, **el vértice** (punto donde cambia la monotonía), **el lado recto** (segmento que pasa por el foco y a su vez es paralelo a la directriz), **el eje de simetría.**

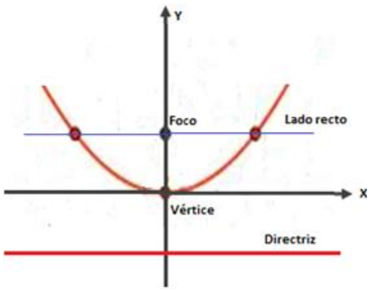


Figura 7

7. Indicar a los estudiantes que la parábola puede abrirse hacia la derecha, hacia la izquierda, hacia abajo y hacia arriba.

NIVEL 2

DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA “PARABOLA”

Tomando como referencia la definición de la parábola sea para cualquiera de los casos.

Siempre se cumplirá: 1. d (P,F) = d (P,L)

2. d (V,F) = d (V,L)

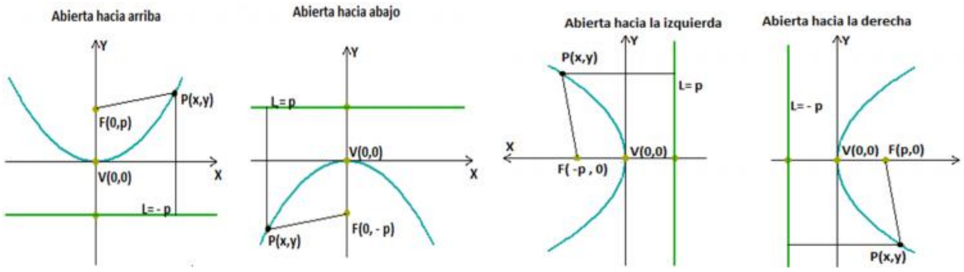


Figura 8

a) Deducción de la parábola en el eje horizontal abierta hacia la derecha.

Partiremos de la definición: cualquier punto (x,y) de la parábola que se tome al foco va a ser la misma distancia del punto a la directriz. Además la distancia del vértice al foco es la distancia focal (p), por lo tanto las coordenadas del foco y el valor de la directriz la podemos observar en la figura.

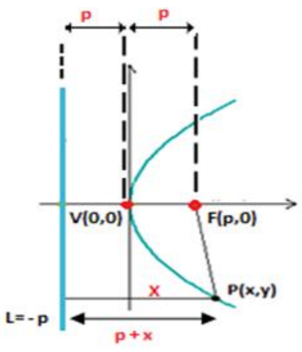


Figura 9

Utilizando la definición: **d (P, F) = d (P, L)**

Reemplazaremos:

$$\sqrt{(p-x)^2+(0-y)^2}=(p+x)$$

$$\left(\sqrt{(p-x)^2+y^2}\right)^2=(p+x)^2$$

$$p^2-2px+x^2+y^2=p^2+2px+x^2$$

Obteniéndose así la ecuación de la parábola en el origen: $y^2=4px$

- Donde | 4p | es el lado recto que pasa por el foco.
- Si la distancia focal (p) es negativo tendríamos la ecuación $y^2=-4px$ de la parábola abierta hacia la izquierda situada en el origen.

Además se debe considerar:

i. A medida que el foco y la directriz están más separados entre ellos, la parábola se cerrará.

ii. A medida que el foco y la directriz están más cercanos entre ellos la parábola se abrirá.

b) Deducción de la parábola en el eje vertical abierta hacia arriba.

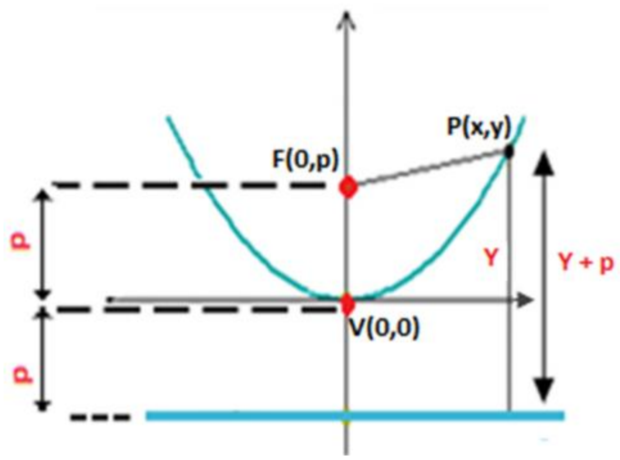


Figura 10

Utilizando la definición: **d (P, F) = d (P, L)**

Reemplazaremos:

$$\sqrt{(0-x)^2+(p-y)^2} = (p+y)$$

$$\left(\sqrt{x^2+(p-y)^2}\right)^2 = (p+y)^2$$

$$x^2 + p^2 - 2py + y^2 = p^2 + 2py + y^2$$

Obteniéndose así la ecuación de la parábola en el origen: $x^2 = 4py$

Si la distancia focal (p) es negativo tendríamos la ecuación $x^2 = -4py$ de la parábola abierta hacia abajo situada en el origen.

NIVEL 3

TRASLACIÓN DE LA “PARÁBOLA”

En este nivel consideraremos las coordenadas del vértice (h, k) lo que indica que la parábola está fuera del origen.

a) **EN EL EJE HORIZONTAL**

El punto medio entre el foco y la directriz es el vértice. En las siguientes gráficas observaremos las respectivas coordenadas de los elementos y las ecuaciones canónicas de las parábolas situadas fuera del origen y simétricas al eje x.

Parábola abierta hacia la izquierda

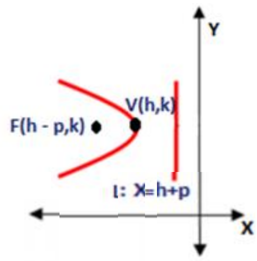


Figura 11

La ecuación canónica es: $(y-k)^2 = -4p\,(x-h)$

Parábola abierta hacia la derecha

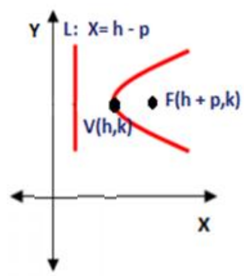


Figura 12

La ecuación canónica es: $(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$

b) EN EL EJE VERTICAL

<u>Parábola abierta hacia arriba</u>

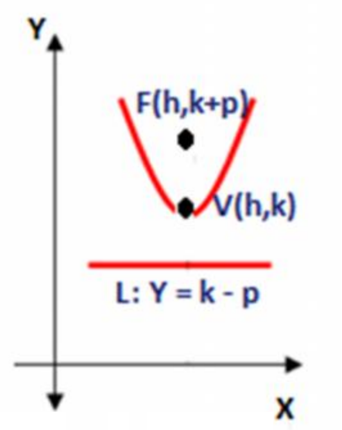


Figura 13

La ecuación canónica es: $(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$

<u>Parábola abierta hacia abajo</u>

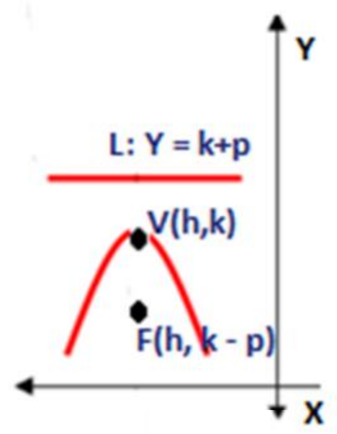


Figura 14

La ecuación canónica es: $(x-h)^2 = -4p\,(y-k)$

NIVEL 4.-

APLICACIÓN DE LA “PARABOLA” EN PROBLEMAS

1. Observe la siguiente antena satelital.

Figura 15

2. La antena satelital hacia donde emite la señal.

3. ¿Cuál es el eje de simetría de la antena satelital?

4. ¿A qué distancia se encuentra el foco del vértice?

5. Encuentre la directriz de la parábola.

ESTRATEGIA METODOLÓGICA
PARA LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA "ELIPSE"

Este capítulo tiene la finalidad de presentar actividades creativas e innovadoras las cuales van a ser realizadas como talleres en clases, enfocadas al estudio de la elipse. Además de utilizar material concreto necesitaremos de un programa matemático llamado GEOGEBRA como tecnología informática para observar en él todo lo que se ha construido con el material antes mencionado.

Todas estas actividades están dirigidas a los estudiantes del tercero de bachillerato especialización "Contabilidad" del Colegio Fiscal "Dr. Eduardo Granja Garcés", del cantón Pedro Carbo, perteneciente a la provincia del Guayas las cuales van a ser también aplicadas en el aula de clases y así dar nuestro aporte con los resultados obtenidos de nuestro estudio validando si esta estrategia utilizada mejora el aprendizaje de la elipse en los estudiantes.

MATERIALES A UTILIZAR PARA LA REALIZACIÓN DEL TALLER

EL ESTUDIANTE.- Todos los estudiantes necesita los siguientes materiales:

- 1 Lápiz de carbón.
- 1 Borrador.
- 1 Regla de 30 centímetros.
- 2 Tachuelas.
- 1 formato A4 de madera.
- 1 hoja de papel bond.
- 1 metro de piola.

EL DOCENTE.- A través del uso de tecnología informática (TICs) explicará a sus estudiantes lo trabajado con el material concreto, para lo cual necesita:

- 1 computadora con el programa matemático GEOGEBRA instalado.
- 1 retroproyector.

Es importante que el docente como orientador y supervisor haya planificado:

- ✓ La exposición de las actividades que contiene el taller.
- ✓ Las preguntas a plantear sobre el tema que se va a trabajar, primero debe indagar en los conocimientos previos al tema, de esta manera asegura los "cimientos" sobre los que se va a construir el nuevo conocimiento.
- ✓ Dar a conocer a los estudiantes ¿qué van a hacer? ¿cómo lo van a hacer? y ¿para qué lo harán? con el material concreto.
- ✓ Por último debe informar lo que aprendió con el uso de esta estrategia metodológica y su importancia.

ESTRUCTURA DEL TALLER

PASOS A SEGUIR

Antes de realizar el taller el docente dará las debidas indicaciones para trabajar conjuntamente.

1. Formar equipos de trabajo, c/equipo integrado por 5 estudiantes.
2. Todos los integrantes de cada equipo deben tener sus materiales de trabajo para realizar el taller y así hacer las respectivas críticas del tema.
3. Un informe final de lo trabajado por cada equipo tomado al azar de todos sus integrantes para debatir con los demás equipos.
4. Tiempo de duración del taller 2 horas clases.

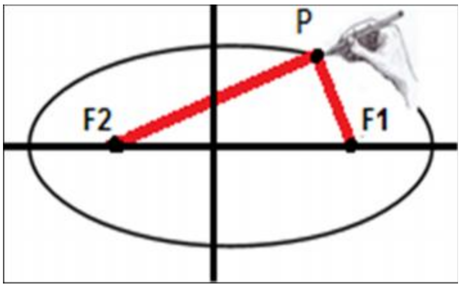
NIVEL1

CONSTRUCCIÓNDE LA “ELIPSE” Y SUS ELEMENTOS

Una vez formado los equipos de trabajo el docente dará las siguientes indicaciones:

1. Tomamos una hoja de papel colocándola sobre el pedazo de madera y la dividimos a la mitad con líneas rectas (una horizontal y la otra vertical) que se cortan en un punto formando ángulo recto.
2. Marcamos dos puntos que estén a la misma distancia (equidistantes) del punto donde intersecan las rectas.
3. Tomamos la piola cuya longitud sea mayor a la distancia de los puntos marcados para luego fijar la piola con las tachuelas sobre ellos y con un lápiz templar la piola formando el contorno partiendo de un punto (P), obteniéndose así una elipse.

Figura 16



4. Antes de marcar los elementos de la elipse retiraremos las tachuelas y esos puntos fijos serán los **“focos de la elipse**”, el punto donde interceptan las rectas es el **“centro de la elipse**”, los puntos más lejanos van a ser los **“vértices de la elipse”**, el eje horizontal que va desde un vértice al otro que pasa por el centro de la elipse se lo denomina **“eje mayor”** y del eje vertical que va desde un vértice al otro

se lo denomina **“eje menor”.** Además del foco1 al foco 2 se la denomina “**distancia focal”.**

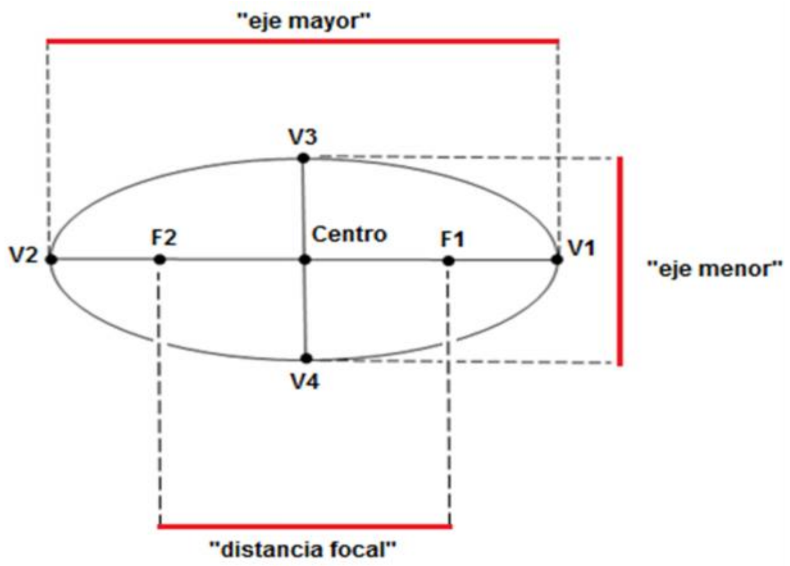


Figura 17

Por lo tanto definimos a la elipse como***:***

“Un lugar geométrico de un punto que se mueve, tal que la suma de las distancias a dos puntos fijos (llamados focos) situados en el mismo plano es una cantidad constante (2a)”.

NIVEL 2

DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA "ELIPSE"

1. Tomando como referencia la definición de la elipse, marcaremos con el lápiz dos puntos cualesquiera "Q" y "R" y formando el contorno desde los puntos marcados podemos observar que sea de cualquier punto que se tome como partida obtendremos la misma elipse. Además si situamos los extremos de la piola en los vértices que están en el eje mayor la longitud de la piola es la misma.

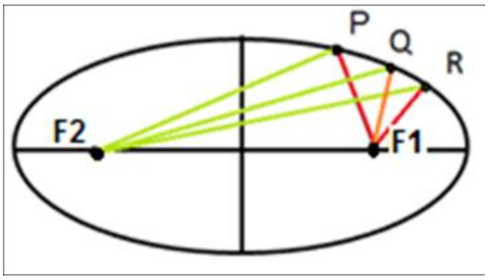
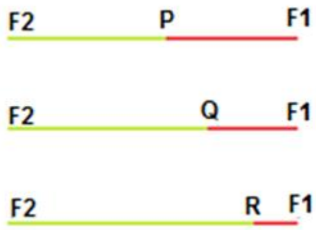


Figura 18



Por lo tanto se puede concluir que:

$$d(V_1,V_2) = d(F_2,P) + d(P,F_1) = d(F_2,Q) + d(Q,F_1) = d(F_2,R) + d(R,F_1)$$

2. Obsérvese en la figura la elipse centrada en el origen y con el eje mayor horizontal en la que designaremos valores a las distancias; del punto de origen al foco **"c"**, del punto de origen al vértice **"a"** y del punto de

origen al punto R **"b"**; con estos valores asignado podemos tener las respectivas coordenadas de los focos y vértices para poder así deducir la ecuación de la elipse.

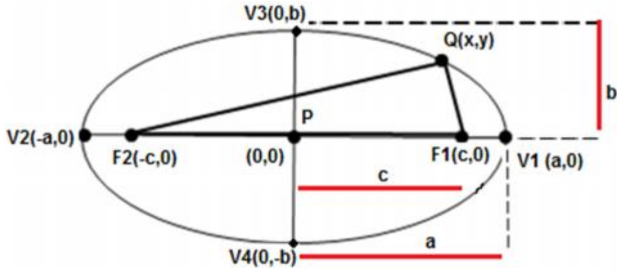


Figura 19

Podemos deducir que:

$d(P,F_1) = c$ entonces la **$d(F_2,P) = c$**

por lo tanto la **$d(F_2,P) + d(P,F_1) = 2c = d(F_2,F_1)$.**

Además si:

$d(P,V_1) = a$ entonces la **$d(V_2,P) = a$**

por lo tanto la **$d(V_2,P) + d(P,V_1) = 2a = d(V_2,V_1)$.**

a) Deducción de la ecuación de la <u>elipse horizontal</u> en el origen

Partiremos del triángulo rectángulo que se forma desde el tercer vértice al punto de origen y al foco 1.

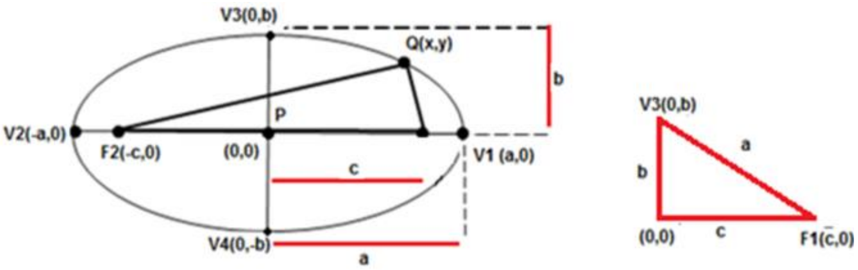


Figura 20

Por definición sabemos:

$a^2 = b^2 + c^2$entonces **$c^2 = a^2 - b^2$**

$d(F_2,Q) + d(Q,F_1) = 2a$

Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos tenemos:

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}+\sqrt{(c-x)^2+(0-y)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(c-x)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(c-x)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(c-x)^2+y^2}+(c-x)^2+y^2$$

$$(x+c)^2+y^2-4a^2-(c-x)^2-y^2=-4a\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

$$x^2+2cx+c^2-4a^2-c^2+2cx-x^2=-4a\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

$$4cx-4a^2=-4a\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

$$cx-a^2=-a\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

$$(cx-a^2)^2=\left(-a\sqrt{(c-x)^2+y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2-2cxa^2+a^4=a^2((c-x)^2+y^2)$$

$$c^2x^2-2cxa^2+a^4=a^2(c^2-2cx+x^2+y^2)$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2c^2-2a^2cx+a^2x^2+a^2y^2$$

$$c^2x^2+a^4=a^2c^2+a^2x^2+a^2y^2$$

Reemplazamos el valor de c^2 del triángulo rectángulo

$$(a^2-b^2)x^2+a^4=a^2(a^2-b^2)+a^2x^2+a^2y^2$$

$$a^2x^2-b^2x^2+a^4=a^4-a^2b^2+a^2x^2+a^2y^2$$

$$-b^2x^2=-a^2b^2+a^2y^2$$

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ todos los términos los dividimos para a^2b^2

Por lo tanto obtenemos la ecuación canónica de la elipse en el origen:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Siempre que a > b

Además un parámetro que determina el grado de desviación de una sección cónica con respecto a una circunferencia es la excentricidad su fórmula es:

$e=\frac{c}{a}$ Este valor siempre debe ser < 1

b) Deducción de la ecuación de la elipse vertical en el origen

Partiremos del triángulo rectángulo que se forma desde el segundo vértice al punto de origen y al cuarto vértice.

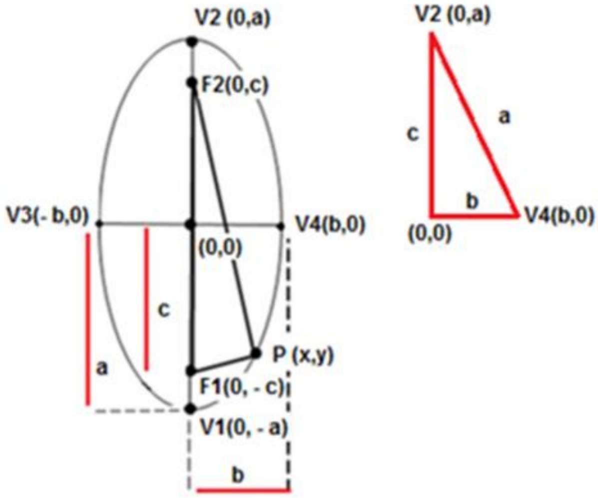


Figura 21

Por definición sabemos:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$d(F_2,P) + d(P,F_1) = 2a$$

Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos tenemos:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}+\sqrt{(0-x)^2+(-c-y)^2}=2a$$

$$\sqrt{x^2+(y-c)^2}+\sqrt{x^2+(-c-y)^2}=2a$$

$$\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2a-\sqrt{x^2+(-c-y)^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2+(y-c)^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{x^2+(-c-y)^2}\right)^2$$

$$x^2+(y-c)^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+(-c-y)^2}+x^2+(-c-y)^2$$

$$x^2+(y-c)^2-4a^2-x^2-(-c-y)^2=-4a\sqrt{x^2+(-c-y)^2}$$

$$y^2-2cy+c^2-4a^2-c^2-2cy-y^2=-4a\sqrt{x^2+(-c-y)^2}$$

$$-4cy-4a^2=-4a\sqrt{x^2+(-c-y)^2}$$

$$-cy-a^2=-a\sqrt{x^2+(-c-y)^2}$$

$$cy+a^2=a\sqrt{x^2+(-c-y)^2}$$

$$(cy + a^2)^2 = \left(a\sqrt{x^2 + (-c - y)^2}\right)^2$$

$$c^2y^2 + 2cya^2 + a^4 = a^2\left((-c - y)^2 + x^2\right)$$

$$c^2y^2 + 2cya^2 + a^4 = a^2(c^2 + 2cy + y^2 + x^2)$$

$$c^2y^2 + 2a^2cy + a^4 = a^2c^2 + 2a^2cy + a^2y^2 + a^2x^2$$

$$c^2y^2 + a^4 = a^2c^2 + a^2y^2 + a^2x^2$$

Reemplazamos el valor de c^2 del triángulo rectángulo

$$(a^2 - b^2)y^2 + a^4 = a^2(a^2 - b^2) + a^2y^2 + a^2x^2$$

$$a^2y^2 - b^2y^2 + a^4 = a^4 - a^2b^2 + a^2y^2 + a^2x^2$$

$$-b^2y^2 = -a^2b^2 + a^2x^2$$

$$-a^2x^2 - b^2y^2 = -a^2b^2$$

$$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$$

$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ todos los términos los dividimos para a^2b^2

Por lo tanto obtenemos la ecuación canónica de la elipse en el origen:

$\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ siempre que a>b

Además un parámetro que determina el grado de desviación de una sección cónica con respecto a una circunferencia es la excentricidad su fórmula es:

$e = \dfrac{c}{a}$ Este valor siempre debe ser < 1

NIVEL 3

TRASLACIÓN DE LA "ELIPSE"

En este nivel consideraremos las coordenadas del centro (h, k) de la elipse lo que indica que está fuera del origen, obsérvese en las siguientes gráficas.

a) EN EL EJE MAYOR HORIZONTAL

El punto medio del segmento F_1F_2 paralelo al eje X se denomina centro de la elipse. En la siguiente gráfica podemos observar las respectivas coordenadas de los elementos y la ecuación canónica de la elipse en el eje mayor horizontal.

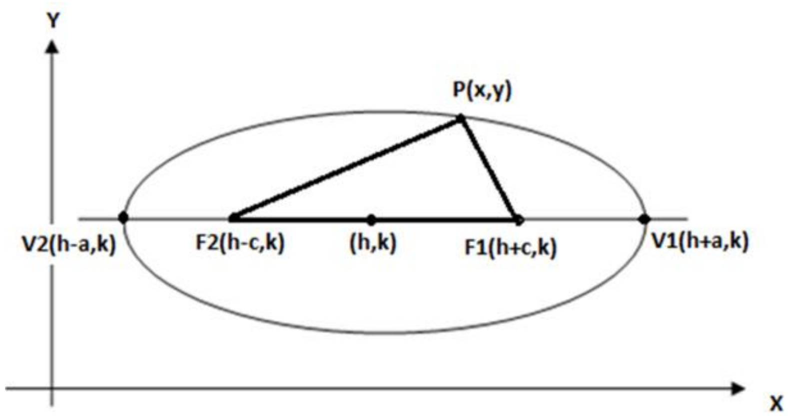


Figura 22

Ecuación canónica: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Siempre que a>b

b) EN EL EJE MAYOR VERTICAL

De igual manera el punto medio del segmento F_1F_2 paralelo al eje Y se denomina centro de la elipse. En la siguiente gráfica podemos observar las respectivas coordenadas de los elementos y la ecuación canónica de la elipse en el eje mayor vertical.

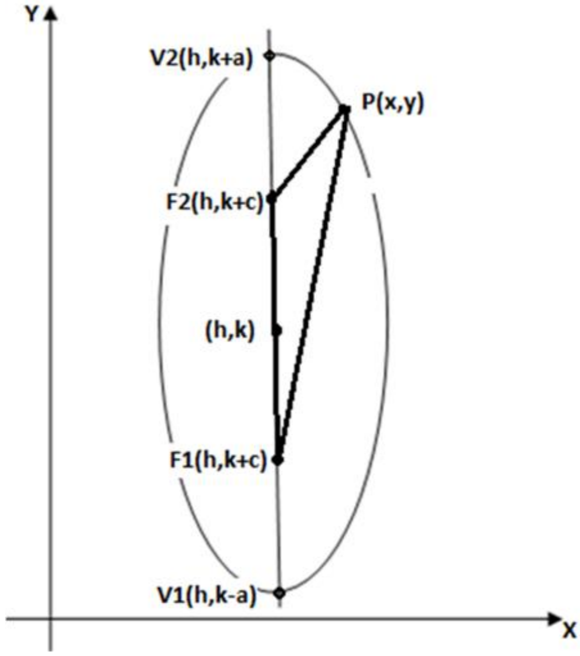


Figura 23

Ecuación canónica: $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

Siempre que a>b

NIVEL 4

APLICACIÓN DE LA "ELIPSE" EN PROBLEMAS

En este nivel se propone algunos problemas de elipse. Se estudia un arco semi elíptico de un puente por debajo de él pasan autos y una trayectoria elíptica que forma la Tierra con respecto al Sol. El estudiante debe aplicar, reconocer y resolver empleando los conocimientos relacionados a una elipse y manejo de ecuaciones cuadráticas

Problema 1:

1. Observe muy detenidamente la figura donde el túnel semi elíptico tiene una altura 3 metros y el ancho de la carretera es de 16 metros por el cual transitan vehículos en doble sentido.

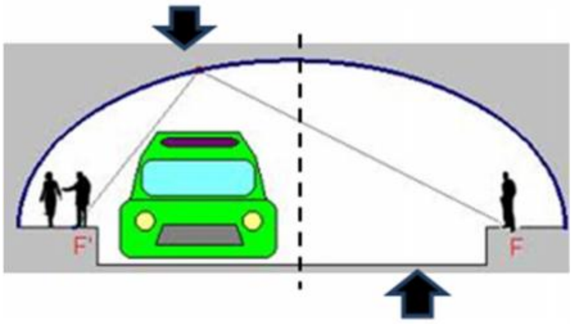


Figura 24

2. Si trazamos al túnel semi elíptico un sistema de coordenadas rectangulares con centro en el origen, con el eje mayor horizontal.

a) **¿Cuál será el ancho del túnel?**

b) **¿Podrá pasar un camión de 400 cm de altura por debajo del túnel?**

c) **¿Cuáles son las coordenadas de los Vértices?**

d) **¿Cuál será la ecuación canónica del túnel semi elíptico?**

Problema 2:

Si la Tierra describe una trayectoria elíptica alrededor del Sol que se encuentra en uno de los focos. Sabiendo que el semi eje mayor horizontal de la elipse es 150 millones de kilómetros y que la excentricidad vale 0,017.

a) ¿Qué distante está Tierra al Sol?

Figura 25

b) ¿Cuál es la distancia del eje mayor de la trayectoria elíptica formada por la Tierra?

c) ¿Cuál es la distancia del eje menor de la trayectoria elíptica formada por la Tierra?

ESTRATEGIA METODOLÓGICA
PARA LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA “HIPÉRBOLA”

MATERIALES A UTILIZAR PARA LA REALIZACIÓN DEL TALLER

EL ESTUDIANTE.- Todos los estudiantes necesita los siguientes materiales:

- 1 Lápiz de carbón.
- 1 Borrador.
- 1 regla.
- 1 formato A4 de madera.
- Hojas de papel bond tamaño A4.

EL DOCENTE.- A través del uso de tecnología informática (TICs) explicará a sus estudiantes lo trabajado con el material concreto, para lo cual necesita:

- 1 computadora con el programa matemático GEOGEBRA instalado.
- 1 retroproyector.

Es importante que el docente como orientador y supervisor haya planificado:

- ✓ La exposición de las actividades que contiene el taller.
- ✓ Las preguntas a plantear sobre el tema que se va a trabajar, primero debe indagar en los conocimientos previos al tema, de esta manera asegura los “cimientos” sobre los que se va a construir el nuevo conocimiento.
- ✓ Dar a conocer a los estudiantes ¿qué van a hacer? ¿cómo lo van a hacer? y ¿para qué lo harán? con el material concreto.
- ✓ Por último debe informar lo que aprendió con el uso de esta estrategia metodológica y su importancia.

TALLER

1. Formar equipos de trabajo, c/equipo integrado por 5 estudiantes.
2. Todos los integrantes de cada equipo deben tener sus materiales de trabajo para realizar el taller y así hacer las respectivas comparaciones (críticas del tema).
3. Un informe final de lo trabajado por cada equipo tomado al azar de todos sus integrantes para debatir con los demás equipos.
4. Tiempo de duración del taller 2 horas clases.

NIVEL1

CONSTRUCCIÓN DE LA "HIPÉRBOLA" Y SUS ELEMENTOS

1. Formados los equipos de trabajo el docente dará la definición:

> ***Hipérbola.-*** ***Es el conjunto de todos los puntos P(x, y) en el plano cartesiano, tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos denominados focos (F_1 y F_2) es una constante.***

2. Cogeremos una hoja de papel y la colocaremos sobre el pedazo de madera, dividiremos la hoja a la mitad con líneas rectas (una horizontal y la otra vertical) que se cortan en un punto formando ángulo recto con el lápiz y la regla.

3. Marcaremos los puntos fijos sobre el eje horizontal siendo equidistantes del punto de origen.

4. Después comenzaremos a determinar puntos aplicando la definición | d (F2, P) – d (P,F1)| = constante, siempre que la diferencia entre las distancias sea la misma. Además se aplicará de igual manera en los otros cuadrantes del plano cartesiano para así determinar la hipérbola.

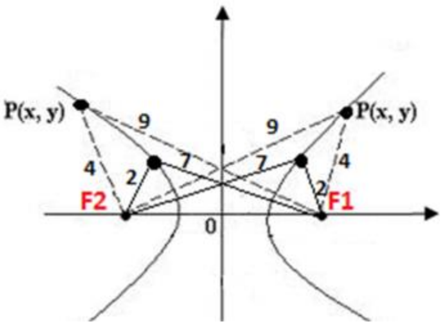


Figura 26

5. El punto de origen será el **“centro de la hipérbola”,** los puntos donde las parábolas cambian la monotonía son **“los vértices”.** Luego trazaremos un triángulo rectángulo conformado por: el <u>segmento a</u> (distancia del centro al primer vértice), el <u>segmento b</u> (del vértice a un punto cualquiera que se encuentre en el eje y) por último el <u>segmento c</u> (del punto cualquiera al centro). Por el punto cualquiera pasará una recta paralela al eje x la cual se llamará **“eje transverso”** y la recta paralela al eje y que pasa por uno de sus vértices se la denomina **“eje conjugado”,** estos ejes forman un rectángulo y de éste se considerará sus diagonales que pasan por el centro de la hipérbola obteniéndose así las **“asíntotas oblicuas” y el eje focal** el que pasa por el foco.

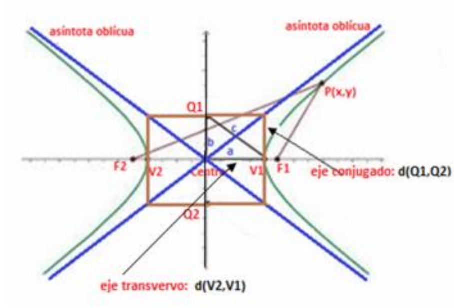


Figura 27

NIVEL 2

DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA “HIPÉRBOLA”

a) **Deducción de la ecuación de la hipérbola horizontal con centro en el origen.**

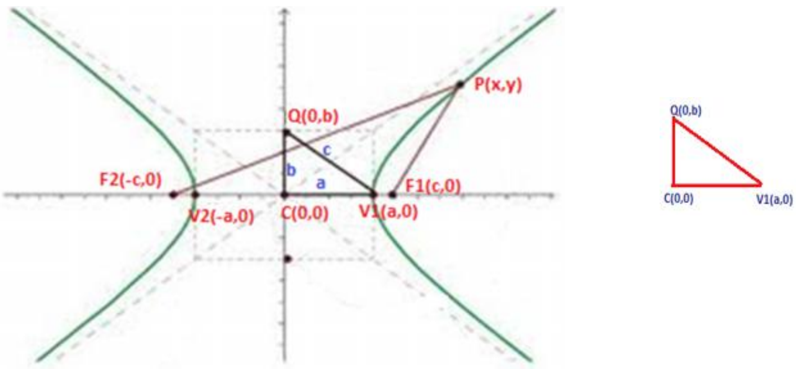


Figura 28

Por definición sabemos:

$$c^2 = b^2 + a^2$$

$$|d(F_2,P) - d(P,F_1)| = 2a$$

Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos tenemos:

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2} - \sqrt{(c-x)^2+(0-y)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(c-x)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(c-x)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(c-x)^2+y^2} + (c-x)^2 + y^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 - 4a^2 - (c-x)^2 - y^2 = +4a\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

$$x^2 + 2cx + c^2 - 4a^2 - c^2 + 2cx - x^2 = +4a\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

$$4cx - 4a^2 = +4a\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}$$

$$(cx - a^2)^2 = \left(a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2((c-x)^2 + y^2)$$

$$c^2x^2 - 2cxc^2 + a^4 = a^2(c^2 - 2cx + x^2 + y^2)$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2c^2 - 2a^2cx + a^2x^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 + a^4 = a^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2$$

Reemplazamos el valor de c^2 del triángulo rectángulo

$$(a^2 + b^2)x^2 + a^4 = a^2(a^2 + b^2) + a^2x^2 + a^2y^2$$

$$a^2x^2 + b^2x^2 + a^4 = a^4 + a^2b^2 + a^2x^2 + a^2y^2$$

$$b^2x^2 = a^2b^2 + a^2y^2$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ todos los términos los dividimos para a^2b^2

Obteniéndose así la ecuación canónica de la hipérbola en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ Siempre que a > b

- Donde sus asíntotas oblicuas serán:

$$y = \frac{b}{a}x \qquad y = -\frac{b}{a}x$$

Además se debe considerar:

i. Las dimensiones del rectángulo auxiliar son 2a y 2b.

ii. Si el rectángulo auxiliar es un cuadrado entonces a = b.

b) Deducción de la ecuación de la <u>hipérbola vertical</u> con centro en el origen.

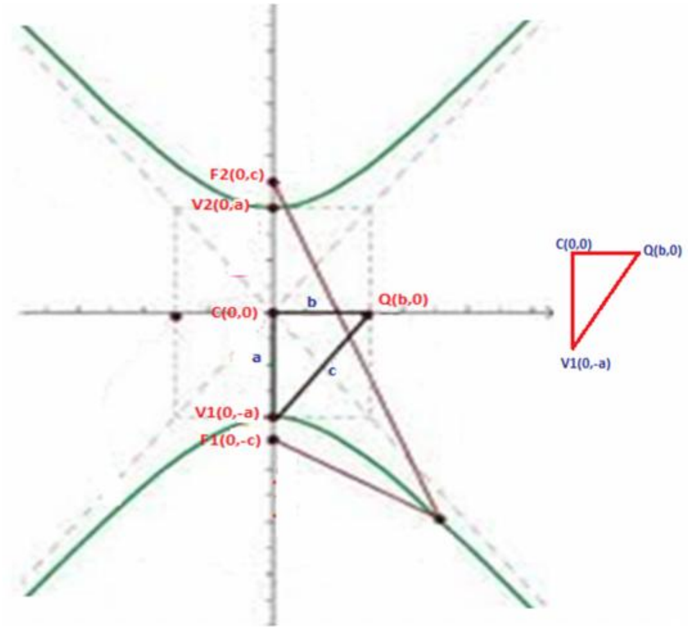


Figura 29

Por definición sabemos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$|d(F_1, P) - d(P, F_2)| = 2a$$

Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos tenemos:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} - \sqrt{(0-x)^2 + (c-y)^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} - \sqrt{x^2 + (c-y)^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a + \sqrt{x^2 + (c-y)^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + (y+c)^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{x^2 + (c-y)^2}\right)^2$$

$$x^2 + (y+c)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + (c-y)^2} + x^2 + (c-y)^2$$

$$x^2 + (y+c)^2 - 4a^2 - x^2 - (c-y)^2 = 4a\sqrt{x^2 + (c-y)^2}$$

$$y^2 + 2cy + c^2 - 4a^2 - c^2 + 2cy - y^2 = 4a\sqrt{x^2 + (c-y)^2}$$

$$4cy - 4a^2 = 4a\sqrt{x^2 + (c-y)^2}$$

$$cy - a^2 = a\sqrt{x^2 + (c - y)^2}$$

$$cy - a^2 = a\sqrt{x^2 - (c - y)^2}$$

$$(cy - a^2)^2 = \left(a\sqrt{x^2 + (c - y)^2}\right)^2$$

$$c^2y^2 - 2cya^2 + a^4 = a^2\left((c - y)^2 + x^2\right)$$

$$c^2y^2 - 2cya^2 + a^4 = a^2(c^2 - 2cy + y^2 + x^2)$$

$$c^2y^2 - 2a^2cy + a^4 = a^2c^2 - 2a^2cy + a^2y^2 + a^2x^2$$

$$c^2y^2 + a^4 = a^2c^2 + a^2y^2 + a^2x^2$$

Reemplazamos el valor de c^2 del triángulo rectángulo

$$(a^2 + b^2)y^2 + a^4 = a^2(a^2 + b^2) + a^2y^2 + a^2x^2$$

$$a^2y^2 + b^2y^2 + a^4 = a^4 + a^2b^2 + a^2y^2 + a^2x^2$$

$$b^2y^2 = a^2b^2 + a^2x^2$$

$$b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$$

$b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$ todos los términos los dividimos para a^2b^2

Por lo tanto obtenemos la ecuación canónica de la hipérbola en el origen:

$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ Siempre que a>b

- Donde sus asíntotas oblicuas serán:

$y = \frac{a}{b}\,x \qquad y = -\frac{a}{b}\,x$

NIVEL 3

TRASLACIÓN DE LA “HIPÉRBOLA”

En este nivel consideraremos las coordenadas del vértice (h, k) lo que indica que la parábola está fuera del origen.

a) EJE TRANSVERSO HORIZONTAL

El punto medio entre los focos es el centro de la hipérbola. En la siguiente gráfica observaremos las respectivas coordenadas de los elementos y la ecuación canónica de la hipérbola situada fuera del origen.

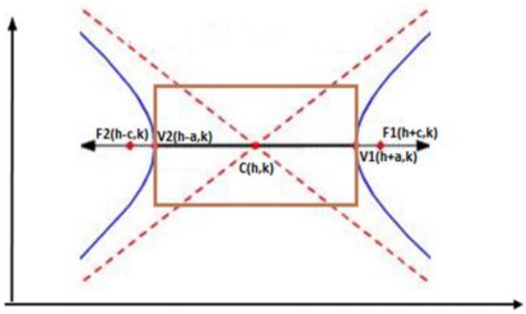


Figura 30

La ecuación canónica de la hipérbola es: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Las ecuaciones canónicas de las asíntotas son:

$$(y-k) = \frac{b}{a}(x-h)$$

$$(y-k) = -\frac{b}{a}(x-h)$$

b) EJE TRANSVERSO HORIZONTAL

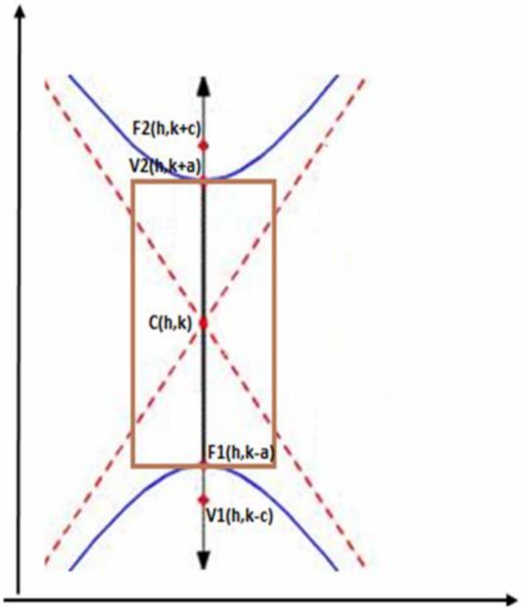


Figura 31

La ecuación canónica de la hipérbola es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Las ecuaciones canónicas de las asíntotas son:

$$(y-k) = \frac{a}{b}\,(x-h)$$

$$(y-k) = -\frac{a}{b}\,(x-h)$$

NIVEL 4

APLICACIÓN DE LA "HIPÉRBOLA" EN PROBLEMAS

En este nivel se propone un problema con la finalidad de que el estudiante empleando los conocimientos de la hipérbola reconozca y resuelva manejando adecuadamente las ecuaciones.

Problema: Dos estaciones de radio (una principal y la otra secundaria) emiten señales que pueden ser recibidas por un barco en el mar, el barco se encuentra más cerca de una de las dos estaciones y, por lo tanto, hay cierta diferencia en las distancias que recorren las dos señales, lo cual se traduce en una pequeña diferencia de tiempo entre las señales registradas. Mientras la diferencia de tiempo permanezca constante, la diferencia de las dos distancias también será constante. Si el barco sigue una ruta que mantenga fija la diferencia de tiempo, seguirá la trayectoria de una hipérbola cuyos focos están localizados en las posiciones de las dos estaciones de radio.

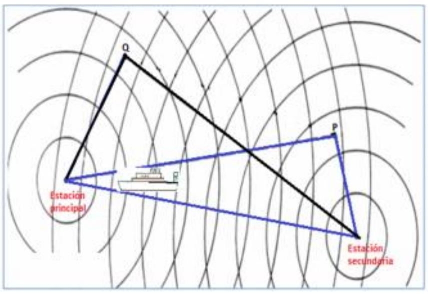


Figura 32

Las cartas de navegación muestran las diferentes rutas hiperbólicas. Estas dos estaciones están separadas 250 millas marítimas lo largo de una costa recta. Además se debe considerar que la diferencia de tiempo es 0.00086 segundos entre las señales emitidas por las estaciones y una velocidad de cada señal de radio es de 186.000 millas/seg. ¿Cuál es la ubicación exacta del barco?

TRANSFORMACIONES CUADRÁTICAS

SECCIONES CÓNICAS

En esta sección se utiliza todo lo estudiado en las secciones cónicas (parábola, elipse e hipérbola) y las formas cuadráticas usadas en cada una de ellas.

El objetivo de las transformaciones cuadráticas es pasar de una ecuación polinómica de segundo grado en dos variables es de la forma: $a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$, a una ecuación cuadrática en dos variables **sin término xy** es de la forma: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$.

Para llevar una ecuación polinómica de segundo grado en dos variables a una ecuación cuadrática sin términos mixtos (reducida) se realiza el siguiente proceso:

1. Sea el vector $\mathbf{x} = (x,y) \in R^2$ que satisface una ecuación general de segundo grado $f(x,y) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$; donde los coeficientes $(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0)$ son distintos de cero, se puede escribir en notación vectorial de la forma:

   $$f(x,y) = [x \quad y]A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} + 2[a_1 \quad a_2]\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} + a_0 = 0 \quad \text{siendo } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{bmatrix}$$

   La matriz A es simétrica

2. Identificar las cónicas mediante el discriminante de la forma:

   i. $a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} = 0$ (Parábola)

   ii. $a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} < 0$ (Elipse)

   iii. $a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} > 0$ (Hipérbola)

3. Determinar la dirección de los ejes de la cónica a través de la matríz Q diagonalizada ortogonalmente, para esto se debe seguir los siguientes pasos:

a) Obtener los valores característicos, mediante del det (A - λ I) = 0.

Dada la matriz A_{2x2}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{22} \end{bmatrix}$$

La matriz identidad I_{2x2}

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} - \lambda & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\det\,(\mathbf{a}_{11} - \lambda)(\mathbf{a}_{22} - \lambda) - (\mathbf{a}_{12})(\mathbf{a}_{12}) = 0$$

b) Una vez obtenidos los valores característicos luego se procede a calcular los vectores característicos, reemplazando cada unos de ellos en (A - λ I) y después multiplicarlo por un vector en R^2 igualado a un vector 0, para esto se utiliza el método de Gauss Jordan.

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] * [x \quad y] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} - \lambda & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{22} - \lambda \end{pmatrix} [x \quad y] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{a}_{11} - \lambda)\,x + \mathbf{a}_{12}\,y = 0$$

$$\mathbf{a}_{12}\,x + (\mathbf{a}_{22} - \lambda)\,y = 0$$

c) Después de haber obtenido los vectores característicos, se procede a ortonormalizar los vectores, para así determinar la matriz formada por los vectores ortonormalizados.

Fórmulas:

$$\mu_1 = \frac{\vec{v_1}}{\|v_1\|}, \quad \mu_2 = \frac{\vec{v_2}}{\|v_2\|}, \ldots\ldots, \quad \mu_n = \frac{\vec{v_n}}{\|v_n\|}$$

$$\mathbb{U} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \cdots u_{n-1} \quad u_n]$$

d) Una vez obtenida la matriz $\mathbb{U}$, obtenemos la transpuesta para ser multiplicada por la matriz A y también por la misma para así encontrar la matríz $\mathbb{Q}$ diagonalizada ortogonalmente, donde su triangular superior e inferior deben ser ceros y su diagonal principal con valores.

$$\mathbb{Q} = \mathbb{U}^t A \mathbb{U}$$

$$\mathbb{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

e) Finalmente con los valores de la diagonal principal obtenemos la ecuación cuadrática sin términos lineales ya que son aquellos coeficientes de la ecuación.

4. El ángulo de rotación del eje de simetría se lo calcula a través de la matriz de rotación $\mathbb{R} = \begin{pmatrix} Cos\theta & -Sen\theta \\ Sen\theta & Cos\theta \end{pmatrix}$ donde se iguala a los valores obtenidos de los vectores ortonormalizados de la matriz $\mathbb{U}$.

EJERCICIO DE APLICACIÓN

Dada la siguiente ecuación $X^2 + y^2 + 2xy + x - y = 0$ determine la ecuación cuadrática en dos variables sin términos lineales.

Primero ordenamos la ecuación de la forma $X^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$ para con los coeficientes encontrar el determinante y saber el tipo de cónica.

$$(2)^2 - 4\,(1)(1) = 0$$

$0 = 0$ Por tanto es una Parábola

Calculamos también la matriz A, para así obtener los valores característicos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2/2 \\ 2/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0$$

$$1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda\,(\lambda - 2) = 0$$

$\boxed{\lambda = 0}$ $\boxed{\lambda = 2}$ Valores característicos

Luego con los valores característicos y el vector $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ definido en R^2, procedemos a determinar los vectores característicos de la forma:

$$(A - \lambda I)\,\mathbb{X} = 0$$

Si $\lambda = 0$ $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \approx \quad X_1 + X_2 = 0$$

$$X_1 = -X_2$$

Reemplazamos en el vector $x = \begin{pmatrix}-x_2\\ x_2\end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ por tanto $V_1 = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$

Si $\lambda = 2$ $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{array}\right) \approx \quad X_1 - X_2 = 0$$

$$X_1 = X_2$$

Reemplazamos en el vector $x = \begin{pmatrix}x_2\\ x_2\end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ por tanto $V_2 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

Con estos vectores calculamos la matriz ortonormalizada:

$$\mu_1 = \frac{\vec{v_1}}{\|v_1\|} = \frac{(-1,1)}{\sqrt{(-1)^2+(1)^2}} = \frac{(-1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\mu_2 = \frac{\vec{v_2}}{\|v_2\|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Matriz ortonormalizada $U = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

Matriz transpuesta $U^t = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

Por último calculamos la matriz Q diagonalmente orotnormalizadas.

$$\mathbb{Q} = \mathbb{U}^t A\, \mathbb{U} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{Q} = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{Q} = 1/2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{Q} = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

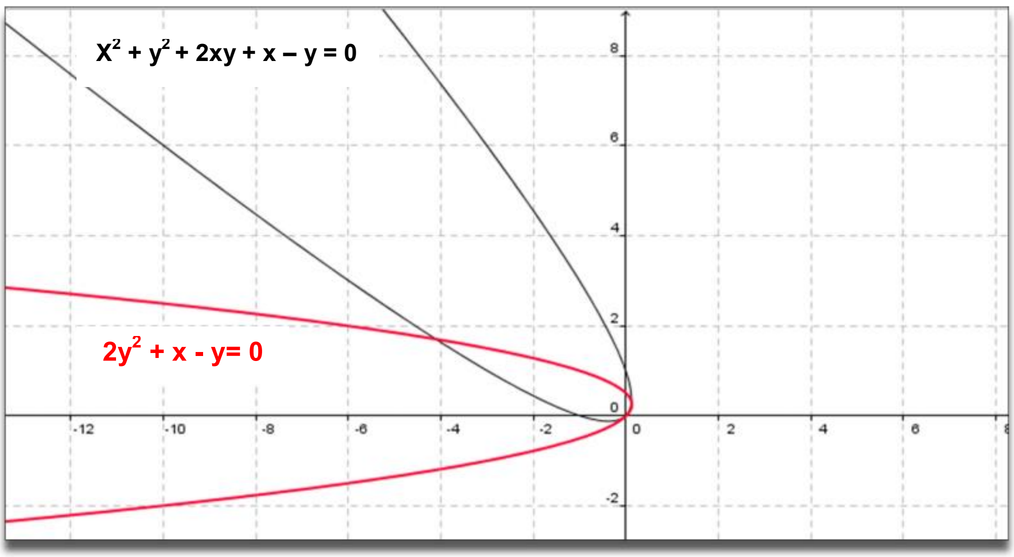
Por lo tanto la ecuación cuadrática sin término xy es:

$$0(x')^2 + 2(y')^2 + x - y = 0$$

$$2(y')^2 + x - y = 0$$

El ángulo de rotación del eje de simetría es 135° al igualar la matriz de rotación $\mathbb{U} =$

Vista de las gráficas en el programa Geogebra.



EJERCICIO DE APLICACIÓN

Dada la siguiente ecuación $5X^2 + 5y^2 - 2xy = 4$ determine la ecuación cuadrática en dos variables sin términos lineales.

Ordenamos la ecuación de la forma $5X^2 - 2xy + 5y^2 = 4$ para con los coeficientes encontrar el determinante y saber el tipo de cónica.

$$(-2)^2 - 4\,(5)(5) = 0$$

$$-96 < 0 \quad \text{Por tanto es una Elipse}$$

Calculamos también la matriz A, para así obtener los valores característicos.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2/2 \\ -2/2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)(5-\lambda) - (-1)(-1) = 0$$

$$25 - 10\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0$$

$$(\lambda - 6)\,(\lambda - 4) = 0$$

$\boxed{\lambda = 6}$ $\boxed{\lambda = 4}$ Valores característicos

Luego con los valores característicos y el vector $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ definido en R^2, procedemos a determinar los vectores característicos de la forma:

$$(A - \lambda I)\, x = 0$$

Si $\lambda = 6$ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-X_1 - X_2 = 0$

$X_1 = -X_2$

Reemplazamos en el vector $x = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ por tanto $V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si $\lambda = 4$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X_1 - X_2 = 0$

$X_1 = X_2$

Reemplazamos en el vector $x = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ por tanto $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Con estos vectores calculamos la matriz ortonormalizada:

$$\mu_1 = \frac{\vec{v_1}}{\|v_1\|} = \frac{(-1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\mu_2 = \frac{\vec{v_2}}{\|v_2\|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Matriz ortonormalizada $\mathbb{U} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Matriz transpuesta $\mathbb{U}^t = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Por último calculamos la matriz Q diagonalmente orotnormalizadas.

$$Q = U^t A U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$Q = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = 1/2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Q = 1/2 \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

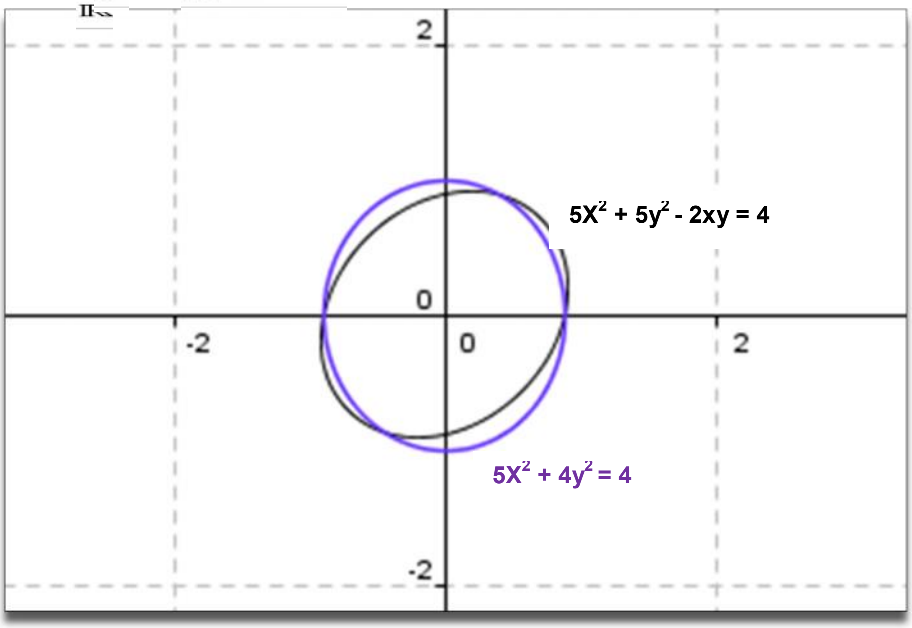
$$Q = \begin{pmatrix} 10/2 & 0 \\ 0 & 8/2 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

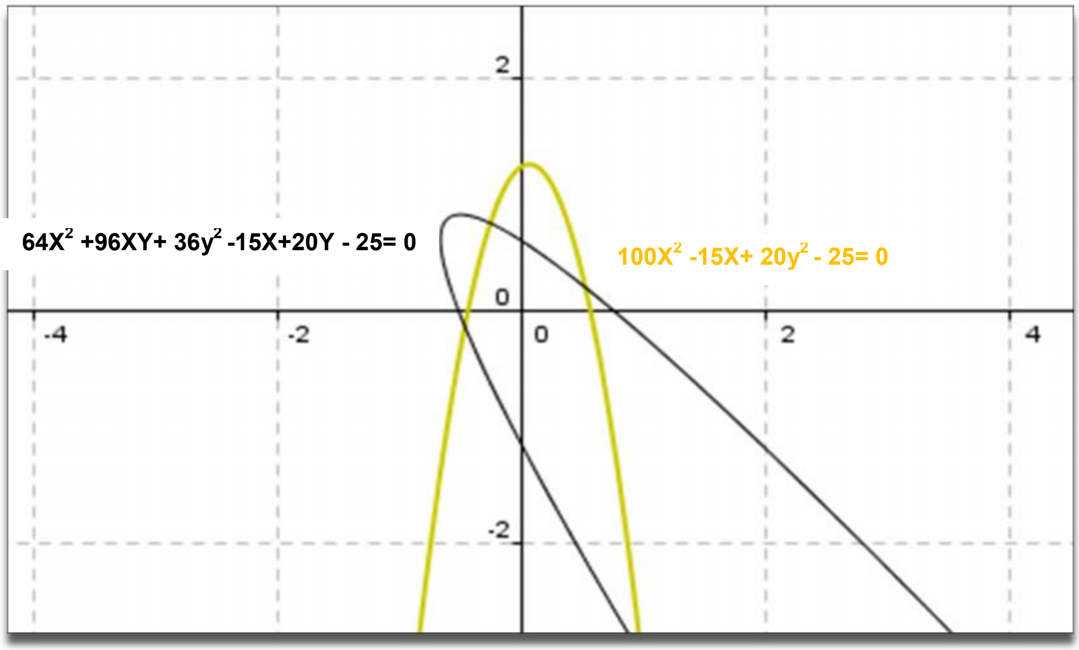
Por lo tanto la ecuación cuadrática sin término xy es:

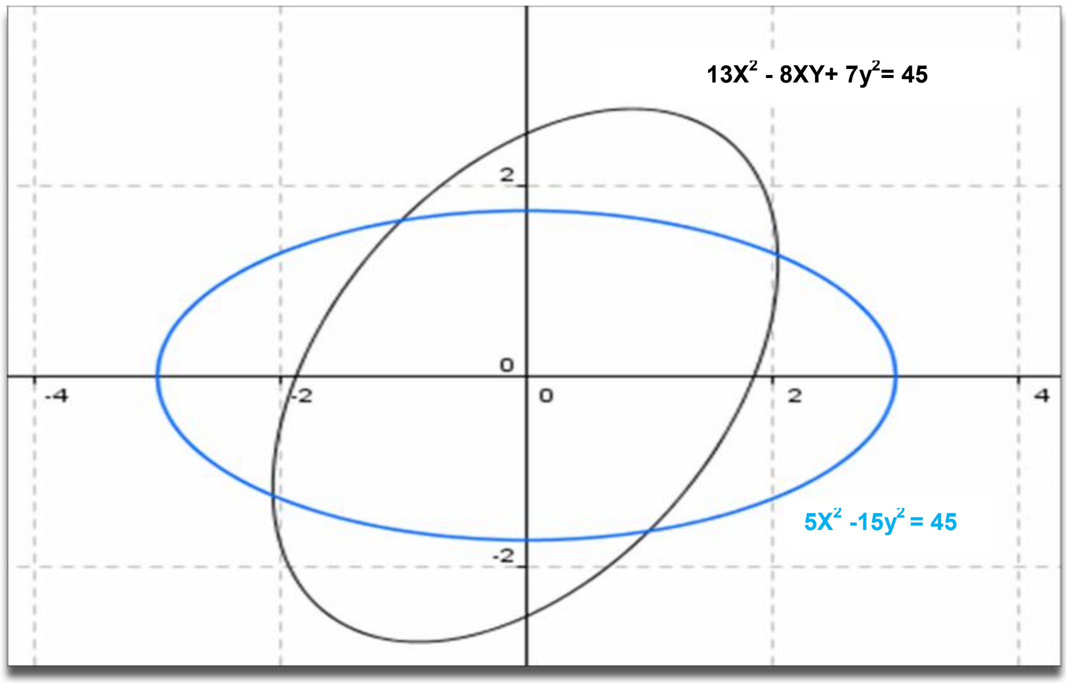
$$5(x')^2 + 4(y')^2 = 4$$

El ángulo de rotación del eje de simetría es 45° al igualar la matriz de rotación



GRÁFICAS DE TRANSFORMACIONES CUADRÁTICAS DE CÓNICAS EN EL PROGRAMA GEOGEBRA





CAPÍTULO V

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

En este capítulo se efectúa el Análisis Estadístico de las opiniones difundidas por los estudiantes del segundo y tercero bachillerato de las especializaciones "Contabilidad y Fima", recolectadas en el cuestionario acerca de: las características generales del docente que dicta la asignatura de matemática y la aplicación de la estrategia metodológica propuesta (taller) utilizada para la enseñanza aprendizaje de las cónicas junto con la información del estudiante.

Para la efectividad de la estrategia planteada se aplicó una evaluación al final del taller con problemas prácticos.

Para facilitar el análisis estadístico, se utiliza el software Microsoft Excel.

5.1 INFORMACIÓN DE LOS ESTUDIANTES

Variable: ESPECIALIZACIÓN

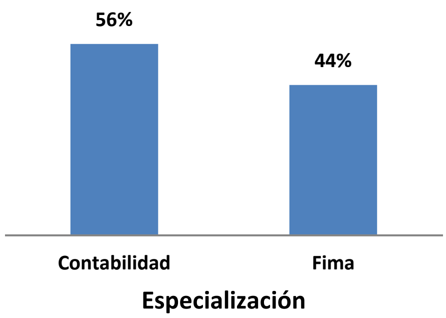
En el cuadro N° 3 se puede observar que en su mayoría de los estudiantes entrevistados son de especialización Contabilidad mientras que en su minoría son de Fima.

Cuadro No. 3
"Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles"

INFORMACIÓN DEL ESTUDIANTE
Tabla de Frecuencias

Especialización	Cantidad de estudiantes	Porcentaje
Contabilidad	44	56%
Fima	35	44%
Total	79	100%

Histograma



Variable: EDAD

La información que se presenta en el cuadro N° 4 es la edad de los estudiantes entrevistados, para efecto se observa que la mayoría están entre 16 y 17 años, mientras que en su minoría tienen 15, 18 y 19 años. Para fines del proyecto están en una edad donde se distraen fácilmente debido a que sienten atracción por el género opuesto y están expuestos a la innovación tecnológica, por tal motivo es importante interiorizar en ellos temas nuevos a través de estrategias metodológicas que permitan llamar la atención de ellos y construir su conocimiento para la enseñanza aprendizaje.

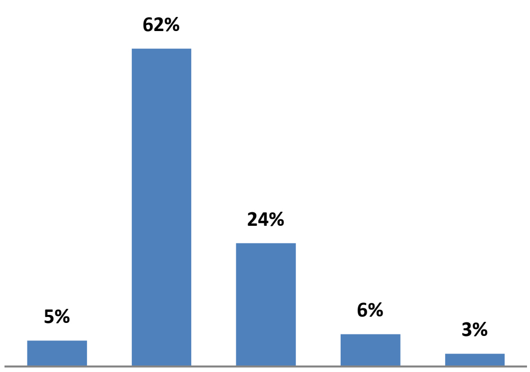
Cuadro No. 4
“Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles”

INFORMACIÓN DEL ESTUDIANTE

Tabla de Frecuencias

Edad	Cantidad de estudiantes	Porcentaje
15 años	4	5%
16 años	49	62%
17 años	19	24%
18 años	5	6%
19 años	2	3%
Total	79	100%

Histograma



Variable: GÉNERO

En el cuadro N°5 podemos observar que la mayoría de estudiantes entrevistados son de género masculino debido a que el segundo de bachillerato del colegio "Aguirre Abad" es sólo de hombres aunque haya habido una cantidad mayor de mujeres en el colegio "Dr. Eduardo Granja Garcés" siendo un 61% del total.

Cuadro No. 5

"Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles"

INFORMACIÓN DEL ESTUDIANTE

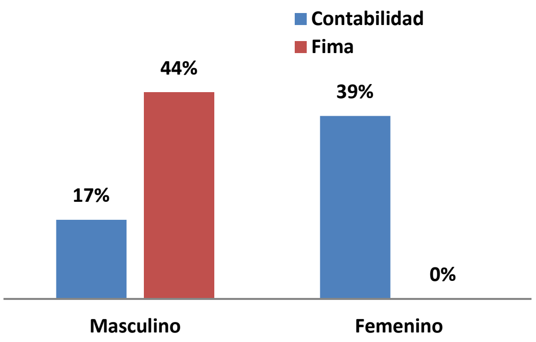
Tabla de Frecuencia

Especialización	Género		Total/especialización
	Masculino	Femenino	
Contabilidad	13	31	44
Fima	35	0	35
Total/Género	48	31	79

Tabla de Porcentaje

Especialización	Género		Total/especialización
	Masculino	Femenino	
Contabilidad	17%	39%	56%
Fima	44%	0%	44%
Total/Género	61%	39%	101%

Histograma



5.2 CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL DOCENTE

Variable X1: “Se preocupa por el aprendizaje de los estudiantes”

Debido a que el docente de matemática no es el mismo, podemos observar en el cuadro N° 6 que la mayoría de los estudiantes tanto de la especializaciones “Contabilidad y Fima” de tercero y segundo bachillerato respectivamente manifiestan que sus docentes siempre se preocupan por el aprendizaje de ellos, por lo contrario en su minoría dicen que nunca sus docentes se preocupan por su aprendizaje.

Cuadro No. 6
“Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles”

CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL DOCENTE
Variable X_1: “Se preocupa por el aprendizaje de los estudiantes”

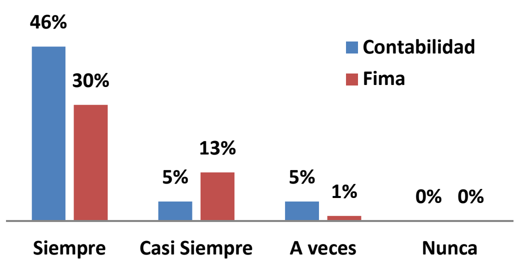
Tabla de Frecuencia Absoluta

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/Especialización
Contabilidad	36	4	4	0	44
Fima	24	10	1	0	35
Total/Categorías	60	14	5	0	79

Tabla de Porcentaje

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/Especialización
Contabilidad	46%	5%	5%	0%	56%
Fima	30%	13%	1%	0%	44%
Total/Categorías	76%	18%	6%	0%	100%

Histograma



Variable X2: “Motiva a los estudiantes en el tema a tratar”

El cuadro N° 7 nos indica que en su mayoría los estudiantes del 2do bachillerato especialización Fima manifiestan que el docente siempre motiva a los estudiantes en el tema que vaya tratar ese día, mientras que en su minoría manifiestan que a veces lo hace. Por el contrario un 14% de los estudiantes 3ero bachillerato especialización Contabilidad indican que casi siempre el docente motiva a los estudiantes en el tema que vaya a tratar, además en su mayoría dicen que lo hace siempre.

Cuadro No. 7
“Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles”

CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL DOCENTE
Variable X_2: “Motiva a los estudiantes en el tema a tratar”

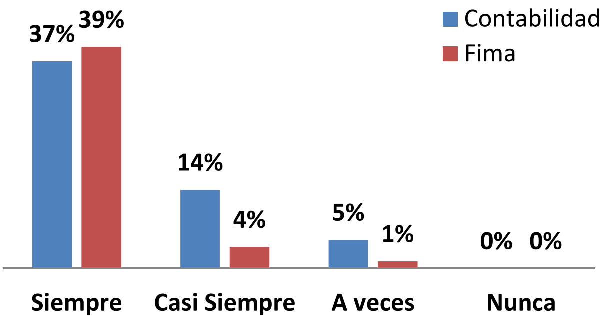
Tabla de Frecuencia Absoluta

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/Especialización
Contabilidad	29	11	4	0	44
Fima	31	3	1	0	35
Total/Categorías	60	14	5	0	79

Tabla de Porcentaje

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/ Especialización
Contabilidad	37%	14%	5%	0%	56%
Fima	39%	4%	1%	0%	44%
Total/ Categorías	76%	18%	6%	0%	100%

Histograma



Variable X3: "Tiene actitud positiva hacia los estudiantes"

En el cuadro N° 8 se puede observar que del total de estudiantes entrevistados en los distintos cursos y especializaciones la mayoría de ellos manifiesta que los docentes de la asignatura de matemática sí tienen actitud positiva hacia ellos al momento de impartir sus clases, mientras que sólo el 5% de 3^{ero} bachillerato especialización Contabilidad dicen que "A veces" muestra actitud positiva.

Cuadro No. 8
"Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles"

CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL DOCENTE
Variable X_3: "Tiene actitud positiva hacia los estudiantes"

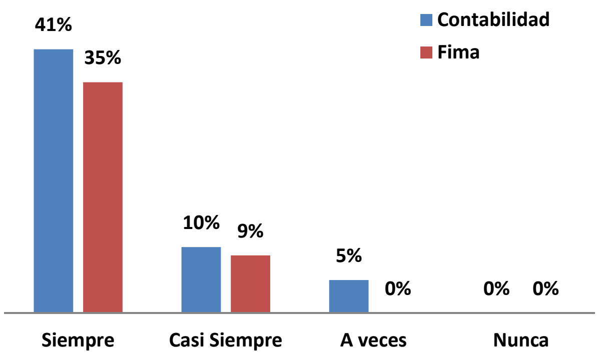
Tabla de Frecuencia

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/ Especialización
Contabilidad	32	8	4	0	44
Fima	28	7	0	0	35
Total/ Categorías	60	15	4	0	79

Tabla de Porcentaje

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/ Especialización
Contabilidad	41%	10%	5%	0%	56%
Fima	35%	9%	0%	0%	44%
Total/ Categorías	76%	19%	5%	0%	100%

Histograma



Variable X4: "Estimula la participación activa de los estudiantes"

Del total de estudiantes entrevistados se puede observar en el cuadro N° 9 que los estudiantes de 3^{ero} bachillerato especialización Contabilidad respondieron que el profesor de matemática siempre estimula la participación activa de los estudiantes al momento de impartir sus clases, mientras que el 15% también de los estudiantes de 2do bachillerato especialización Fima dicen que su profesor en cambio lo hace casi siempre.

Cuadro No. 9
"Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles"

CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL DOCENTE
Variable X_4: "Estimula la participación activa de los estudiantes"

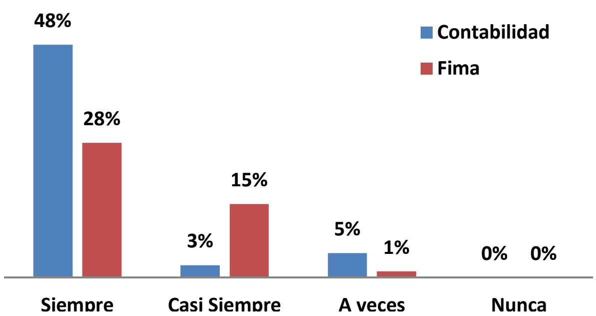
Tabla de Frecuencia

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/ Especialización
Contabilidad	38	2	4	0	44
Fima	22	12	1	0	35
Total/ Categorías	60	14	5	0	79

Tabla de Porcentaje

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/ Especialización
Contabilidad	48%	3%	5%	0%	56%
Fima	28%	15%	1%	0%	44%
Total/ Categorías	76%	18%	6%	0%	100%

Histograma



Variable X5: "Es respetuoso al responder las preguntas"

Se puede observar en el cuadro N°10 que del total de estudiantes entrevistados de cada una de las especializaciones la mayoría de ellos manifiestan que el docente de matemática siempre es respetuoso para responder las preguntas realizadas por ellos en una hora clase, mientras que son pocos los estudiantes de 3^{ero} bachillerato Contabilidad que por el contrario dicen que nunca responde las preguntas con respeto el docente de matemática.

Cuadro No. 10
"Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles"

CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL DOCENTE
Variable X_5: "Es respetuoso al responder las preguntas"

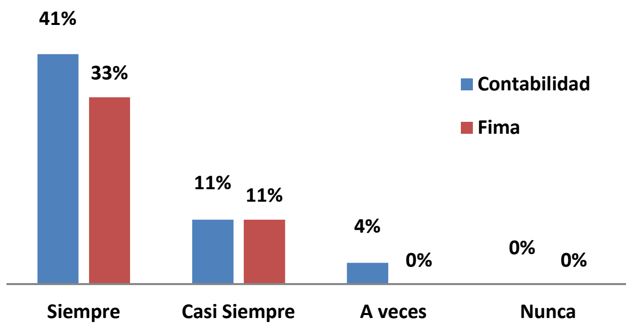
Tabla de Frecuencia

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/ Especialización
Contabilidad	32	9	3	0	44
Fima	26	9	0	0	35
Total/ Categorías	58	18	3	0	79

Tabla de Porcentaje

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/ Especialización
Contabilidad	41%	11%	4%	0%	56%
Fima	33%	11%	0%	0%	44%
Total/ Categorías	74%	22%	4%	0%	100%

Histograma



Variable X6: “Es capaz de transmitir claramente sus conocimientos”

Del total de estudiantes entrevistados en cada una de las especializaciones la mayoría de ellos manifiestan que los docentes de matemática “Siempre” transmiten claramente sus conocimientos de un tema a tratar, mientras que por lo contrario son pocos los que no están de acuerdo diciendo que “Nunca” transmiten claramente la signatura que dicta. Obsérvese cuadro N° 11.

Cuadro No. 11

“Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles”

CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL DOCENTE

Variable X_6: “Es capaz de transmitir claramente sus conocimientos”

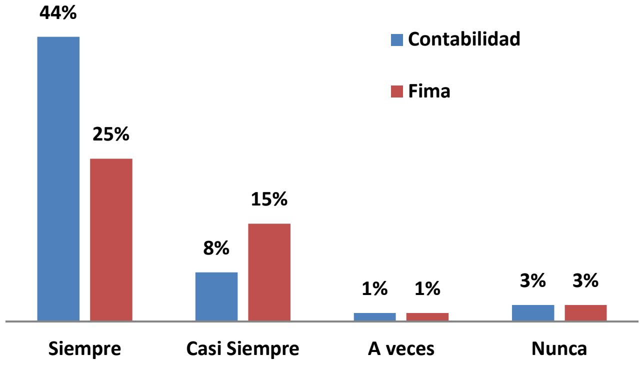
Tabla de Frecuencia

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/ Especialización
Contabilidad	35	6	1	2	44
Fima	20	12	1	2	35
Total/ Categorías	55	18	2	4	79

Tabla de Porcentaje

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/ Especialización
Contabilidad	44%	8%	1%	3%	56%
Fima	25%	15%	1%	3%	44%
Total/ Categorías	69%	23%	2%	6%	100%

Histograma



Variable X7: “Utiliza ayuda audiovisual (proyector) para el contenido de un tema a tratar”

Obsérvese en el cuadro N°12 que los estudiantes de 3^{ero} bachillerato especialización Contabilidad opinan en su mayoría que el docente utiliza “siempre” ayuda audiovisual para el contenido de un tema a tratar, por el contrario dicen que nunca utiliza ayuda audiovisual siendo su minoría. Mientras que los estudiantes de 2do bachillerato especialización Fima indican que en su mayoría el docente “nunca” utiliza ayuda audio audiovisual para el contenido de un tema a tratar y en su minoría manifestaron que siempre proyecta sus clases con la ayuda de un proyector.

Cuadro No. 12
“Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles”

CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL DOCENTE
Variable X_7: “Utiliza ayuda audiovisual (proyector) para el contenido de un tema a tratar”

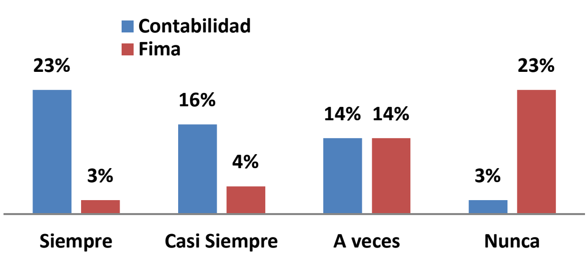
Tabla de Frecuencia

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/ Especialización
Contabilidad	18	13	11	2	44
Fima	2	4	11	18	35
Total/ Categorías	20	17	22	20	79

Tabla de Porcentaje

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/ Especialización
Contabilidad	23%	16%	14%	3%	56%
Fima	3%	4%	14%	23%	44%
Total/ Categorías	26%	20%	28%	26%	100%

Histograma



Variable X8: "Es dinámico y presenta variedad de actividades con respecto al tema a tratar"

Del total de estudiantes entrevistados en cada una de las especializaciones la mayoría de ellos manifiestan que los docentes de matemática "Siempre" son dinámicos presentando variedades de actividades con respecto a un tema a tratar, mientras que por lo contrario son pocos los que indican que "Nunca" son dinámicos al momento de impartir sus cátedras. Obsérvese cuadro N° 13.

Cuadro No. 13

"Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles"

CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL DOCENTE

Variable X_8: "Es dinámico y presenta variedad de actividades con respecto al tema a tratar"

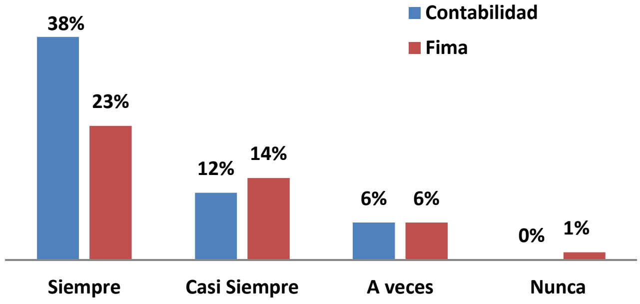
Tabla de Frecuencia

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/ Especialización
Contabilidad	30	9	5	0	44
Fima	18	11	5	1	35
Total/ Categorías	48	20	10	1	79

Tabla de Porcentaje

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/ Especialización
Contabilidad	38%	12%	6%	0%	56%
Fima	23%	14%	6%	1%	44%
Total/ Categorías	61%	26%	12%	1%	100%

Histograma



Variable X9: “Desarrolla el contenido del tema de una manera ordenada”

En el cuadro N° 14 se puede observar que del total de estudiantes entrevistados de ambas especializaciones respondieron en su mayoría que sus docentes de matemática siempre desarrollan el contenido del tema de una manera ordenada, por el contrario en cambio manifiestan en un mínimo porcentaje que a veces los docentes no son ordenados al dar el contenido de un tema en la pizarra.

Cuadro No. 14
“Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles”

CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL DOCENTE
Variable X_9: “Desarrolla el contenido del tema de una manera ordenada”

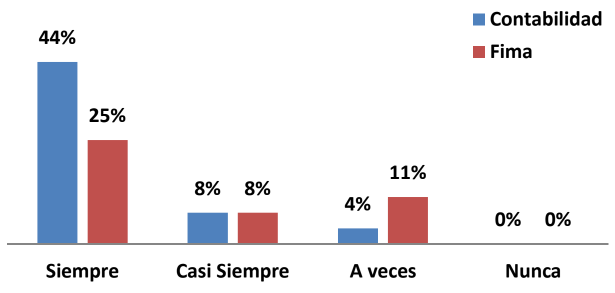
Tabla de Frecuencia

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/ Especialización
Contabilidad	35	6	3	0	44
Fima	20	6	9	0	35
Total/ Categorías	55	12	12	0	79

Tabla de Porcentaje

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/ Especialización
Contabilidad	44%	8%	4%	0%	56%
Fima	25%	8%	11%	0%	44%
Total/ Categorías	69%	16%	15%	0%	100%

Histograma



Variable X10: "Prepara recursos didácticos u otros para facilitar el aprendizaje en los estudiantes"

Se puede observar en el cuadro N°15 que un mayor porcentaje de estudiantes de 3^{ero} bachillerato especialización Contabilidad opinan que el docente siempre prepara recursos didácticos, mientras que los estudiantes de 2do bachillerato especialización Fima el porcentaje de "siempre" y "casi siempre" es menor que el "siempre" de Contabilidad. Por lo que se puede concluir que los estudiantes de Contabilidad tienen afinidad con el docente de matemática por ser uno de los integrantes del proyecto aplicado en el salón.

Cuadro No.15
"Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles"

CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL DOCENTE

Variable X_{10}: "Prepara recursos didácticos u otros para facilitar el aprendizaje en los estudiantes"

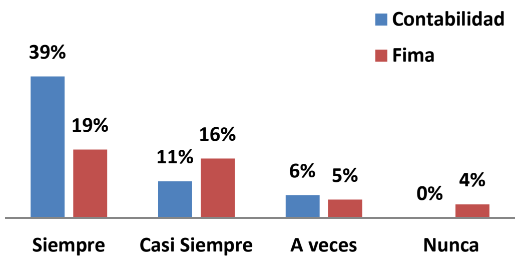
Tabla de Frecuencia

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/ Especialización
Contabilidad	31	8	5	0	44
Fima	15	13	4	3	35
Total/ Categorías	46	21	9	3	79

Tabla de Porcentaje

Especialización	Categorías				
	Siempre	Casi Siempre	A veces	Nunca	Total/ Especialización
Contabilidad	39%	11%	6%	0%	56%
Fima	19%	16%	5%	4%	44%
Total/ Categorías	58%	27%	11%	4%	100%

Histograma



5.3 APLICACIÓN DEL TALLER

Variable X1: "La estrategia metodológica utilizada por el docente para la enseñanza aprendizaje de las cónicas le pareció"

Obsérvese cuadro N° 16 que a la mayoría de estudiantes de 3ero bachillerato especialización Contabilidad le pareció excelente la estrategia metodológica utilizada por el docente de matemática para la enseñanza aprendizaje de las cónicas siendo un 44%, mientras que a los estudiantes de 2do bachillerato especialización Fima hubo un 41% entre excelente y muy buena la estrategia utilizada.

Cuadro No. 16
"Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles"

APLICACIÓN DEL TALLER

Variable X_1: "La estrategia metodológica utilizada por el docente para la enseñanza aprendizaje de las cónicas le pareció"

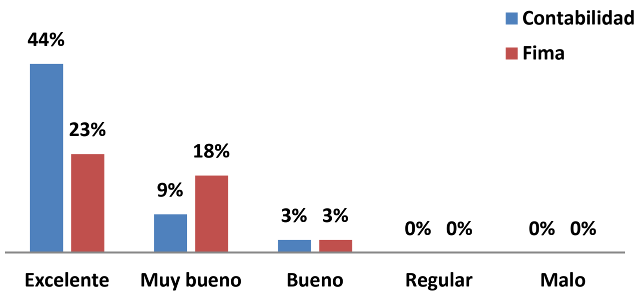
Tabla de Frecuencia

Especialización	Categorías					
	Excelente	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo	Total/ Especialización
Contabilidad	35	7	2	0	0	44
Fima	18	15	2	0	0	35
Total/ Categorías	53	22	4	0	0	79

Tabla de Porcentaje

Especialización	Categorías					
	Excelente	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo	Total/ Especialización
Contabilidad	44%	9%	3%	0%	0%	56%
Fima	23%	18%	3%	0%	0%	44%
Total/ Categorías	67%	27%	6%	0%	0%	100%

Histograma



Variable X2: “Estudiar las cónicas como se presentan en el taller”

Del total de estudiantes entrevistados podemos observar en el cuadro N° 17 que el 33% de estudiantes de 3ero bachillerato especialización Contabilidad opinan que sería excelente estudiar las cónicas como se presenta en el taller, mientras que el 24% de los estudiantes de 2do bachillerato especialización Fima manifiestan que les parece muy buena la idea de estudiar a través de un taller así como se presenta a las cónicas. Además no hubo estudiantes que manifestaran que fue malo el taller.

Cuadro No. 17
“Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles”

APLICACIÓN DEL TALLER

Variable X_2: “Estudiar las cónicas como se presentan en el taller”

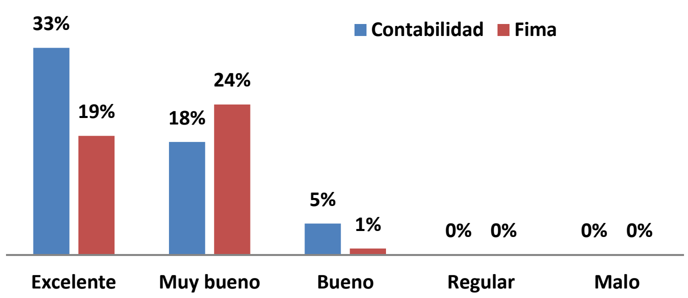
Tabla de Frecuencia

Especialización	Categorías					
	Excelente	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo	Total/ Especialización
Contabilidad	26	14	4	0	0	44
Fima	15	19	1	0	0	35
Total/ Categorías	41	33	5	0	0	79

Tabla de Porcentaje

Especialización	Categorías					
	Excelente	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo	Total/ Especialización
Contabilidad	33%	18%	5%	0%	0%	56%
Fima	19%	24%	1%	0%	0%	44%
Total/ Categorías	52%	42%	6%	0%	0%	100%

Histograma



Variable X3: "El nivel y las secuencias en la enseñanza de las cónicas"

La información acerca de la secuencia del estudio de las cónicas según el nivel se puede evidenciar en el cuadro N° 18 en su mayoría del total de entrevistados de 3ero bachillerato especialización Contabilidad manifiestan que es "Excelente" la secuencia que se sigue, en cambio el 1% de la especialización Fima opinan que es regular.

Cuadro No. 18

"Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles"

APLICACIÓN DEL TALLER

Variable X_3: "El nivel y las secuencias en la enseñanza de las cónicas"

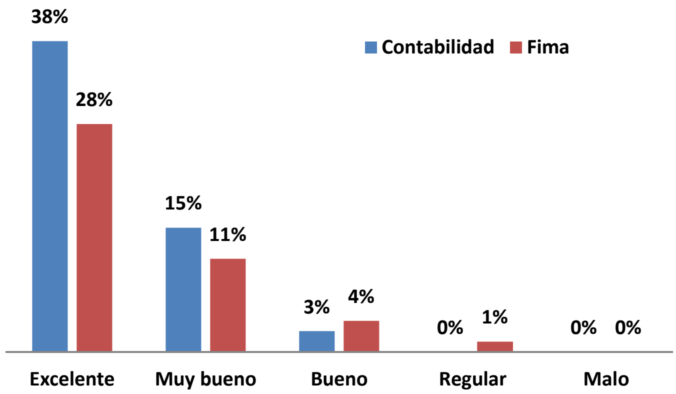
Tabla de Frecuencia

Especialización	Categorías					
	Excelente	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo	Total/ Especialización
Contabilidad	30	12	2	0	0	44
Fima	22	9	3	1	0	35
Total/ Categorías	52	21	5	1	0	79

Tabla de Porcentaje

Especialización	Categorías					
	Excelente	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo	Total/ Especialización
Contabilidad	38%	15%	3%	0%	0%	56%
Fima	28%	11%	4%	1%	0%	44%
Total/ Categorías	66%	26%	7%	1%	0%	100%

Histograma



Variable X4: “La organización entorno a problemas para profundizar y construir el conocimiento”

Obsérvese en el cuadro N° 19 que en su mayoría los estudiantes de las dos especializaciones opinan que la organización en torno a problemas para construir el conocimiento como se presentaron en el taller les pareció “Excelente” en un 71%, mientras que en su minoría el 2% del total de entrevistados de las dos especializaciones contestaron que les pareció “Bueno”.

Cuadro No. 19

“Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles”

APLICACIÓN DEL TALLER

Variable X_4: “La organización entorno a problemas para profundizar y construir el conocimiento”

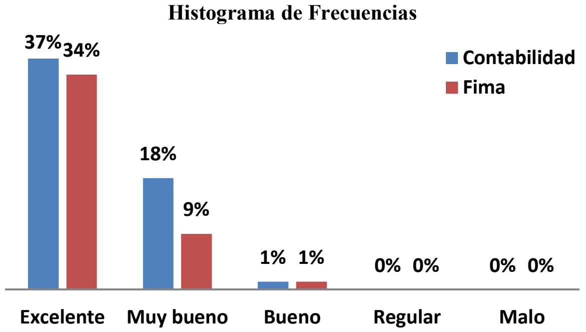
Tabla de Frecuencia

Especialización	Categorías					
	Excelente	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo	Total/ Especialización
Contabilidad	29	14	1	0	0	44
Fima	27	7	1	0	0	35
Total/ Categorías	56	21	2	0	0	79

Tabla de Porcentaje

Especialización	Categorías					
	Excelente	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo	Total/ Especialización
Contabilidad	37%	18%	1%	0%	0%	56%
Fima	34%	9%	1%	0%	0%	44%
Total/ Categorías	71%	27%	2%	0%	0%	100%

Histograma de Frecuencias



Variable X5: "Los recursos didácticos e informáticos utilizados para la enseñanza aprendizaje de las cónicas"

Se puede evidenciar en el cuadro N°20 que en su mayoría a los estudiantes de 3^{ero} bachillerato Contabilidad le pareció "Excelente" los recursos didácticos e informáticos utilizados para el estudio de las "Cónicas", mientras que en un 3% de los estudiantes de 2do bachillerato Fima indican que es "regular" los recursos didácticos e informáticos utilizados para el estudio de las "Cónicas"

Cuadro No. 20
"Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles"

APLICACIÓN DEL TALLER

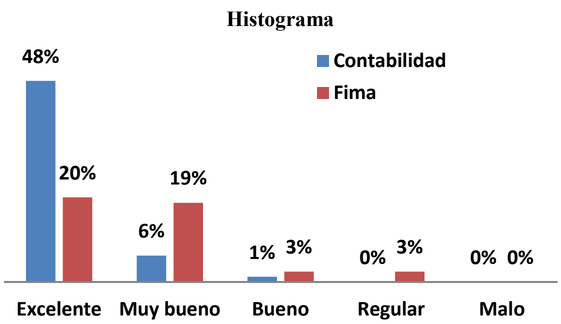
Variable X_5: "Los recursos didácticos e informáticos utilizados para la enseñanza aprendizaje de las cónicas"

Tabla de Frecuencia

Especialización	Categorías					
	Excelente	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo	Total/ Especialización
Contabilidad	38	5	1	0	0	44
Fima	16	15	2	2	0	35
Total/ Categorías	54	20	3	2	0	79

Tabla de Porcentaje

Especialización	Categorías					
	Excelente	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo	Total/ Especialización
Contabilidad	48%	6%	1%	0%	0%	56%
Fima	20%	19%	3%	3%	0%	44%
Total/ Categorías	68%	25%	4%	3%	0%	100%



5.4 APLICACIÓN DE LA EVALUACIÓN

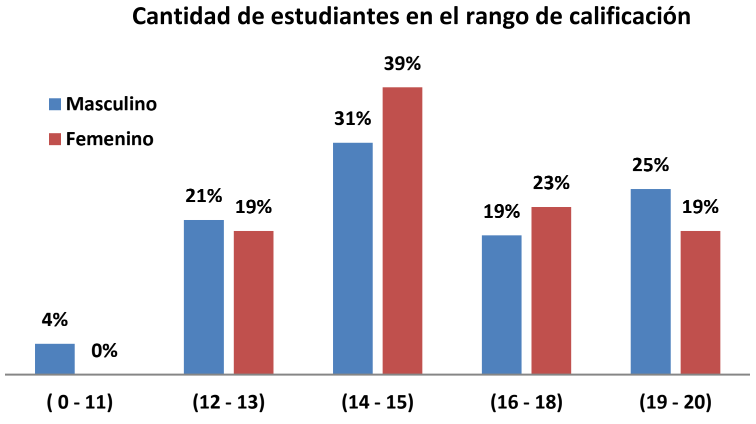
En el cuadro N°21 se puede apreciar que el 75% de estudiantes de género masculino de las dos especializaciones obtuvieron calificaciones mayores a 14 puntos en la evaluación mientras que las féminas el 81%. Para efecto del estudio se puede concluir que la estrategia utilizada impactó mucho a las estudiantes, todas de la especialización contabilidad, ya que categorizaron al taller como "excelente y muy bueno" por consiguiente se puede decir que si sirvió de mucha ayuda para el estudio de las cónicas la estrategia implementada.

Cuadro No. 21
"Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles"

APLICACIÓN DE LA EVALUACIÓN
Tabla de Frecuencias

Calificaciones	Masculino		Femenino	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
(0 - 11)	2	4%	0	0%
(12 - 13)	10	21%	6	19%
(14 - 15)	15	31%	12	39%
(16 - 18)	9	19%	7	23%
(19 - 20)	12	25%	6	19%
Total	48	100%	31	100%

Histograma de Frecuencias



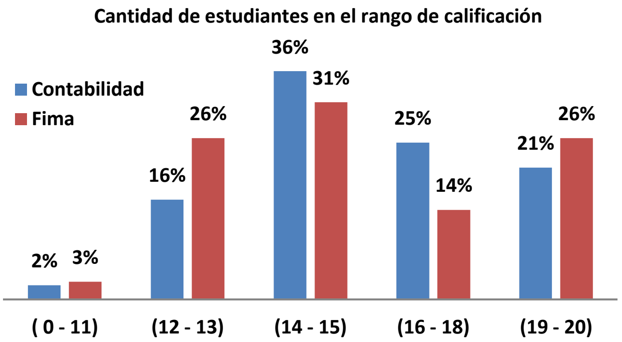
En el cuadro N°22 podemos observar las calificaciones obtenidas de los estudiantes de 2do y 3ero bachillerato especialización Contabilidad y Fima, además la gráfica muestra que el 26% de los estudiantes de Fima obtuvieron calificaciones en el rango de 19 y 20 siendo excelentes, aunque hayan manifestado que la estrategia metodológica (taller) utilizada no es excelente, por lo que se puede concluir que son más técnicos y prácticos. Por el contrario los estudiantes de 3ero bachillerato Contabilidad han obtenido calificaciones buenas y a ellos si les pareció el taller excelente.

Cuadro No. 22
"Elaboración e Implementación de una Estrategia Metodológica para mejorar el aprendizaje de las Cónicas basada en problemas por niveles"

APLICACIÓN DE LA EVALUACIÓN

Tabla de Frecuencias y Porcentaje

Calificaciones	Contabilidad		Fima	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
(0 - 11)	1	2%	1	3%
(12 - 13)	7	16%	9	26%
(14 - 15)	16	36%	11	31%
(16 - 18)	11	25%	5	14%
(19 - 20)	9	21%	9	26%
Total	44	100%	35	100%



CONCLUSIÓN

El aprendizaje de las “Cónicas” debe hacerse en forma dinámica, es decir, los estudiantes deben manipular material de concreto para que descubran por sí solos y a través de las experiencias ser crítico de su propio conocimiento. Y a su vez gradual, partiendo de lo más simple a lo complejo (por niveles) para que los estudiantes aprendan con facilidad y puedan así resolver problemas más complejos. Además junto con las TIC’s la asignatura no se tornará tan abstracta porque a través de su utilización nos permite observar las maravillas que se pueden hacer como: desplazamientos, estiramientos, rotaciones u otros; ayudando a motivarlos al momento de tratar el tema y poder así obtener excelentes calificaciones.

RECOMENDACIONES

- ✓ Los docentes deben interiorizar en los estudiantes que las “Cónicas” tienen muchas aplicaciones en la vida cotidiana utilizando las TIC´s.

- ✓ Este proyecto de investigación servirá de apoyo a los docentes que enseñan el tema “Cónica” por tal motivo se pide lleve la secuencia planteada.

- ✓ Se recomienda que los docentes se interesen por capacitarse continuamente en la asignatura que estén impartiendo.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Fundamentos de Matemáticas para bachillerato, ESPOL, segunda edición.

[2] Algebra Lineal, Stanley I. Grossman, sexta edición.

[3] Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica, Arthur Goodman/Lewis Hirsch, primera edición.

[4] Geometría Analítica, Schaum, segunda edición.

[5] www.youtube.com/watch?v=9gau55nHaPM Asesoría de Matemática, Mc. José Alejandro Andalón.

[6] www.youtube.com/watch?v=YBTdSYYUHOW&feature=related

[7] www.math2me.com

ANEXOS

*****Estimados estudiantes la información que se desea recolectar es de suma importancia. Por tal motivo le pedimos lea muy detenidamente y conteste con sinceridad*****

Sección I

Curso:	3ero Bachillerato	**Especialización:**	Contabilidad
Género:	M ☐ F ☐	**Edad:**	________

Sección II

Opinión acerca del Docente	**Siempre**	**Casi siempre**	**A veces**	**Nunca**
1.1 Se preocupa por el aprendizaje de los estudiantes.				
1.2 Motiva a los estudiantes en el tema a tratar.				
1.3 Tiene actitud positiva hacia los estudiantes.				
1.4 Estimula la participación activa de los estudiantes.				
1.5 Es respetuoso al responder las preguntas.				
1.6 Es capaz de transmitir claramente sus conocimientos.				
1.7 Utiliza ayuda audiovisual (proyector) para el contenido de un tema a tratar.				
1.8 Es dinámico y presenta variedad de actividades con respecto al tema a tratar.				
1.9 Desarrolla el contenido del tema de una manera ordenada.				
1.10 Prepara recursos didácticos u otros para facilitar el aprendizaje en los estudiantes.				

Sección III

Opinión acerca del taller utilizado como estrategia	**Excelente**	**Muy Bueno**	**Bueno**	**Regular**	**Malo**
1.1 La estrategia metodológica utilizada por el docente para la enseñanza aprendizaje de las Cónicas le pareció.					
1.2 Estudiar las Cónicas como se presentan en el taller.					
1.3 El nivel y las secuencias en la enseñanza de las Cónicas.					
1.4 La organización en torno a problemas para profundizar y construir el conocimiento.					
1.5 Los recursos didácticos e informáticos utilizados para la enseñanza aprendizaje de las cónicas.					

APLICACIÓN DE LOS TALLERES

TALLER DE ELIPSE

TALLER DE LA PARÁBOLA

TALLER DE LA HIPÉRBOLA

APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO PARA LA RECOLECCIÓN DE LOS DATOS

EVALUACIÓN – SECCIONES CÓNICAS

NOMBRE DEL ESTUDIANTE: ______________________________

- **Lea detenidamente y luego conteste correctamente.**
- **Valor de cada literal 2.5 puntos.**

<u>Problema 1:</u>

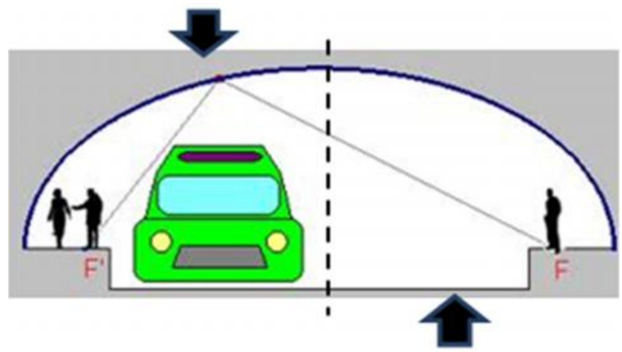
Observe la siguiente antena satelital.

<u>Conteste:</u>

a. La antena satelital hacia donde emite la señal.
b. ¿Cuál es el eje de simetría de la antena satelital?
c. ¿A qué distancia se encuentra el foco del vértice?
d. Encuentre la directriz de la parábola.

Problema 2:

Observe muy detenidamente la figura donde el túnel semi elíptico tiene una altura 3 metros y el ancho de la carretera es de 16 metros por el cual transitan vehículos en doble sentido.



Si trazamos al túnel semi elíptico un sistema de coordenadas rectangulares con centro en el origen, con el eje mayor horizontal.

- **a)** ¿Cuál será el ancho del túnel?
- **b)** ¿Podrá pasar un camión de 400 cm de altura por debajo del túnel?
- **c)** ¿Cuáles son las coordenadas de los Vértices?
- **d)** ¿Cuál será la ecuación canónica del túnel semi elíptico?