“USO DE TECNICAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL EN ESTIMACIONES ESTADISTICAS”

Fernando Sandoya[1], Rinna López Aguirre[2]

[1] Matemático, Escuela Politécnica Nacional 1994, M.Sc. en Investigación de Operaciones y Logística 2003, email fsandoya@espol.edu.ec

[2]Ing. En Estadística e Informática 2004; email rinna_lopez@hotmail.com

SUMMARY

This investigation has as purpose to demonstrate that the Optimization Techniques such as: linear programming constitutes an alternative method to find linear estimators, similar to ordinary least squares method. For prove the results was used the PIB data and exportations data from 1990s first trimester until 2000s fourth trimester, in this study is used the Lindo program. Along this work a brief presentation of the Optimization Techniques is given, it is also shown information of topics related with linear regression and the limitations that it is necessary to consider for its use.

RESUMEN

El propósito de esta investigación es demostrar que las técnicas de optimización como la programación lineal constituyen un método alternativo para encontrar estimadores lineales, similares al método de mínimos cuadrados ordinarios. Para probar los resultados se utilizó los datos del pib y las exportaciones del primer trimestre de 1990 hasta el cuarto trimestre del 2000, y se hizo uso del software Lindo. A lo largo de este trabajo se hace una presentación de lo que son las técnicas de optimización, además se muestra información de de temas relacionados con la regresión lineal y las limitaciones que hay que considerar para su uso.

1. INTRODUCCIÓN

La programación lineal puede ser aplicada como un procedimiento para resolver problemas de regresión lineal en los mismos casos en los que se usa el método de los mínimos cuadrados. La estimación clásica de mínimos cuadrados encuentra la fórmula de predicción que minimiza la suma cuadrática entre la observación y la predicción. De esta manera se pueden encontrar varios “modelos de regresión lineal”, la programación lineal es aplicable porque además de minimizar la suma cuadrática del error se realiza lo siguiente:

- ❖ La Minimización de la suma de los errores absolutos,
- ❖ La Minimización del máximo error absoluto o
- ❖ La Minimización del error en la predicción al ordenar los datos. Llamado también Regresión Ordinal.

La Programación lineal es una técnica de modelado matemático, diseñada para optimizar el uso de recursos limitados, trata acerca de la planeación de las actividades para obtener un resultado óptimo; esto es el resultado que mejor alcance la meta especificada entre todas las alternativas de solución. El método simplex se utiliza para resolver estos problemas.

Los elementos básicos para construir un modelo de programación lineal son: variables de decisión, función objetivo y restricciones

2. FORMA ESTÁNDAR DEL MODELO LINEAL.

El modelo consiste en elegir valores de x_1, x_2, ... x_n para maximizar Z(x) sujeta a ciertas restricciones $Ax \leq b$ donde $Z : \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}$ es la función objetivo, A es una matriz de dimensión mxn de los coeficientes del sistema, b es un vector $\in \boldsymbol{R}^n$ de las restricciones.

$Z(x) = c_1x_1 + c_2\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_nx_n$

Sujeta a las restricciones:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\; a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\; a_{2n}x_n \leq b_2$

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\; a_{3n}x_n \leq b_3$

.

.

a_{m1} ...... $a_{12}x_n \leq b_m$

$x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\; x_n \geq 0$

Tabla 1
Datos necesarios para un modelo de programación lineal de asignación de recursos a actividades

Recursos	Consumo de recursos por unidad de actividad — Actividad					Cantidad de recursos disponibles
	1	2	3 ….	J….	n	
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}…	a_{1j}…	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}…	a_{2j}…	a_{2n}	b_2
.	.	.	…	…	.	.
.	.	.	…	…	.	.
.	.	.	…	…	.	.
M	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}…	a_{mj}…	a_{mn}	b_m
Contribución a Z por unidad De actividad	c_1	c_2	c_3	c_j	c_n	

3. ANÁLISIS DE DUALIDAD

Las variables y las restricciones del problema dual se pueden construir simétricamente a partir del problema primal. Hay que tener las siguientes consideraciones:

1.- Una variable dual se define para cada una de las m ecuaciones de la restricción primal.

2.- Una restricción dual se define para cada primal de las n variables primales.

3.- Los coeficientes del lado izquierdo de la restricción dual, son iguales a los coeficientes de la restricción (columna) de la variable primal asociada. Su lado derecho es igual al coeficiente del objetivo de la misma variable primal.

4.- Los coeficientes de la función objetivo de la dual son iguales al lado derecho de las ecuaciones de la restricción primal.

Tabla 2
Descripción de la construcción Del modelo Dual a partir del primal

Variables Duales	Variables Primales					
	X_1	x_2	x_3….	a_{1j}….	x_n	
	C_1	c_2	c_3….	c_j…..	c_n	
Y_1	A_{11}	a_{12}	a_{13}...	a_{1j}….	A_{1n}	b_1
Y_2	A_{21}	a_{22}	a_{23}...	a_{2j}….	A_{2n}	b_2
	.	.	. ...	. ...	.	.
.	.	.	. ...	. ...	.	.
.	.	.	. ...	. ...	.	.
y_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}...	a_{mj}….	a_{mn}	b_m
				Restricción Dual a la j		Objetivo Dual

La tabla 2 representa gráficamente esta información donde y_1, y_2 ....y_m representan las variables duales.

Dada la siguiente función objetivo con sus respectivas restricciones

Maximizar:
$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_nx_n$

Sujeta a las restricciones:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; a_{1n}x_n = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; a_{2n}x_n = b_2$
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; a_{3n}x_n = b_3$

.

.

.

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\; a_{mn}x_n = b_m$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n \geq 0$$

Aplicando el método dual se obtiene lo siguiente:

Minimizar
$w = b_1y_1 + b_2y_2 + ... b_my_m$
Sujeta a:
$a_{11}y_1 + a_{21}x_2 + ... a_{m1}y_m \geq c_1$
$a_{12}y_1 + a_{22}x_2 + ... a_{m2}y_m \geq c_2$
$a_{13}y_1 + a_{23}x_2 + ... a_{m3}y_m \geq c_3$
.
.
.
.
$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n$

4. REGRESIÓN LINEAL

El análisis de regresión, es una técnica estadística para modelar e investigar la relación entre dos o más variables. Puede usarse un análisis de regresión, para construir un modelo que sea óptimo y permita hacer predicciones.

El científico inglés Sir Francis Galton (1822-1911), fue quien desarrolló el análisis de regresión, sus primeros experimentos con regresión comenzaron con un intento de analizar los patrones de crecimiento hereditarios de los guisantes. Animado por los resultados Sir Francis Galton extendió para incluir los patrones hereditarios de la estatura de las personas adultas. Descubrió que los niños que tienen padres altos o bajos tendían a regresar a la estatura promedio de la población adulta.

En la regresión lineal simple se establece que Y es una función de solo una variable independiente, con frecuencia se denomina regresión bivariada porque solo hay dos variables una dependiente y una independiente.

$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$, es conocido como modelo de regresión lineal simple, porque solo tiene una variable independiente, regresor o predictor x, y una variable dependiente o variable respuesta Y.

Las estimaciones de β_0 y β_1 deberán dar como resultado una recta que es "el mejor ajuste" para los datos. El científico alemán Karl Gauss propuso estimar los parámetros β_0 y β_1 a fin de minimizar la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales, utilizando el método de mínimos cuadrados, como se observa en el gráfico 1.

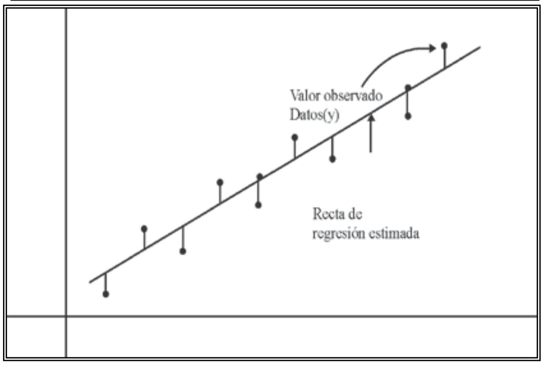

Gráfico 1
Desviaciones de los datos del modelo de Regresión estimado

5. DETERMINACIÓN DEL MODELO DE REGRESIÓN LINEAL SIMPLE

Dadas n observaciones de la muestra, se pueden expresar como:

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1,2,3...n$$

Por lo tanto si tenemos que la ecuación $Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ predice el i-ésimo valor de y (Cuando $x=x_i$), la desviación del valor observado de Y a partir de la recta $\hat{Y}$, conocido también como error es $(y_i - \hat{y}_i)$, la suma de los cuadrados de las desviaciones que deben minimizar es la siguiente:

$$SCE = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i))^2$$

donde SCE también es llamado la suma de los cuadrados de los errores. Por tanto, $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ son los valores que minimizan SCE, así, se debe resolver el problema de programación no lineal sin restricciones.

Para resolver esto se deriva parcialmente y luego se iguala a cero.

$$\frac{\partial SCE}{\partial \beta_0} = \frac{\partial \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \right) \right]^2 \right\}}{\partial \hat{\beta}_0}$$

$$\frac{\partial SCE}{\partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{n} 2 \{ y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) \}$$

$$\frac{\partial SCE}{\partial \beta_0} = -2 \left(\sum_{i=1}^{n} 2 y_i - n \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

Igualando a cero obtenemos el siguiente resultado.

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Realizamos el mismo procedimiento para encontrar el valor de β_1

$$\frac{\partial SCE}{\partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{n} 2 \left[y_i - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \right) \right] x_i$$

$$\frac{\partial SCE}{\partial \beta_0} = -2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)$$

Igualando a cero esta ecuación obtenemos el siguiente resultado de β_0.

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$

6. LIMITACIONES DEL ANÁLISIS DE REGRESIÓN

Se debe poner atención en la selección de las variables, así como en la determinación de la forma del modelo, es posible desarrollar relaciones estadísticas entre variables que no tienen ninguna relación en un sentido práctico, es posible que se observe una fuerte asociación entre variables, eso no implica que exista una relación causal entre las mismas.

Las relaciones de regresión, son válidas para los valores de las variables de regresión que se encuentran en el rango de los datos originales, es decir cuando se usan valores de X fuera de ese rango, disminuye la certeza acerca de la validez del modelo supuesto.

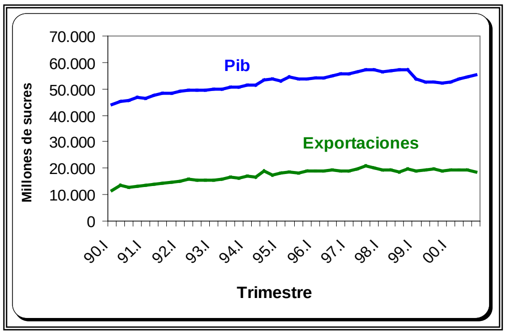

Gráfico 2
Serie temporal del pib y eportaciones del primer trimestre de 1990 hasta el cuarto trimestre del 2000

En el gráfico 2 podemos observar que en la serie del pib el máximo valor se presenta en el año 97 en el cuarto trimestre el y el valor mínimo se da en el primer trimestre del año 90. En cambio en las exportaciones el valor máximo ocurre en el año 97 tercer trimestre y el valor mínimo en el año 90 primer trimestre, en la tabla 3 se presentan los valores correspondientes.

Tabla 3
Valor máximo y mínimo de la serie del pib y las exportaciones

	Pib	Exportaciones
Max	57279000	20896000
Min	44153000	11741000

Fuente: Banco Central del Ecuador

El valor máximo de la serie del pib es de cincuenta y siete millones doscientos setenta y nueve mil sucres, mientras que de las exportaciones es veinte millones ochocientos noventa y seis mil sucres. El valor mínimo de la serie del pib es de cuarenta y cuatro millones ciento cincuenta y tres mil sucres y de las exportaciones es once millones setecientos cuarenta y un mil sucres, según tabla 3.

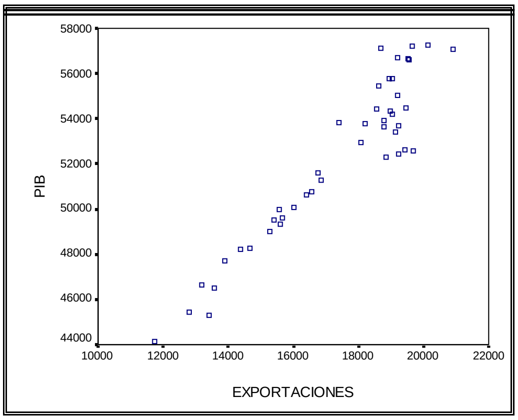

Gráfico 3
Gráfico de dispersión del pib y exportaciones del primer trimestre de 1990 hasta el cuarto trimestre del 2000

El gráfico 3 muestra el diagrama de dispersión, que representan las observaciones por pares de los datos de las exportaciones y del pib, la figura sugiere una relación positiva y lineal, es positiva porque X y Y se mueven en la misma dirección, a medida que X aumenta, Y aumenta y a medida que X disminuye Y disminuye; lineal porque la relación puede identificarse mediante una línea recta.

7. ESTIMACIÓN DE LAS MÍNIMAS DESVIACIONES ABSOLUTAS (LAD)

Consiste en minimizar la suma de los valores absolutos del error, esto es minimizar $|e_1|+|e_2|+............+|e_n|$, al realizar está regresión el modelo se ve menos afectado por los valores extremos, es conveniente utilizarla cuando en un conjunto de observaciones se tiene pocos datos con estas características, la programación lineal puede ser aplicada si se utiliza el supuesto $u_i - v_i = e_i$, lo cual es una restricción de signo, la programación lineal se diseña para variables no negativas, El modelo a utilizar es el siguiente:

Minimizar: $u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + ...u_n + v_n$

Sujeta a: $u_1 - v_1 = \beta_0 - \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij}$

β_j con restricción en signo,

El modelo de optimización a utilizar es el siguiente:

Min
u1+v1+u2+v2+u3+v3+u4+v4+u5+v5+u6+v6+u7+v7+u8+v8+u9+v9+u10+v10+u11+v11+u12+v12+u13+v13+u14+v14+u15+v15+u16+v16+u17+v17+u18+v18+u19+v19+u20+v20+u21+v21+u22+v22+u23+v23+u24+v24+u25+v25+u26+v26+u27+v27+u28+v28+u29+v29+u30+v30+u31+v31+u32+v32+u33+v33+u34+v34+u35+v35+u36+v36+u37+v37+u38+v38+u39+v39+u40+v40+u41+v41+u42+v42+u43+v43+u44+v44

subject to
u1-v1+b0+11741b1=44153
u2-v2+b0+13419b1=45310
u3-v3+b0+12799b1=45446
u4-v4+b0+13200b1=46622
u5-v5+b0+13584b1=46488
u6-v6+b0+13901b1=47688
u7-v7+b0+14388b1=48217
u8-v8+b0+14652b1=48245
u9-v9+b0+15264b1=48989
u10-v10+b0+15663b1=49604
u11-v11+b0+15405b1=49500
u12-v12+b0+15608b1=49343
u13-v13+b0+15559b1=49972
u14-v14+b0+16028b1=50075
u15-v15+b0+16568b1=50762
u16-v16+b0+16397b1=50638
u17-v17+b0+16860b1=51293
u18-v18+b0+16746b1=51612
u19-v19+b0+19122b1=53409
u20-v20+b0+17412b1=53836
u21-v21+b0+18091b1=52945
u22-v22+b0+18560b1=54444
u23-v23+b0+18211b1=53782
u24-v24+b0+18767b1=53903
u25-v25+b0+19030b1=54206
u26-v26+b0+18989b1=54327
u27-v27+b0+19216b1=55011
u28-v28+b0+19055b1=55791
u29-v29+b0+18958b1=55788
u30-v30+b0+19561b1=56597
u31-v31+b0+20896b1=57085

u32-v32+b0+20150b1=57279
u33-v33+b0+19507b1=56653
u34-v34+b0+19194b1=56699
u35-v35+b0+18682b1=57125
u36-v36+b0+19662b1=57201
u37-v37+b0+18777b1=53628
u38-v38+b0+19436b1=52632
u39-v39+b0+19675b1=52590
u40-v40+b0+18841b1=52280
u41-v41+b0+19245b1=52424
u42-v42+b0+19241b1=53704
u43-v43+b0+19465b1=54486
u44-v44+b0+18631b1=55442
END

Utilizando el software Lindo al modelo propuesto la función objetivo obtiene el valor óptimo de treinta y seis mil ochocientos tres con veintisiete centésimas, en sesenta y nueve iteraciones.

La ecuación resultante es:

$$y = 27212.46 + 1.43X_1$$

Es decir que por cada incremento de las exportaciones en una unidad el pib aumentará en uno con cuarenta y tres unidades; el intercepto es veintisiete mil doscientos doce con cuarenta y seis centavos y tiene una pendiente positiva.

Calculando el R^2 obtenemos: $R^2 = 0.71$
Esto significa que el 71% del cambio en el valor del pib se explica mediante un cambio en las exportaciones.

8. REGRESIÓN MÍNIMA DE LA MÁXIMA DESVIACIÓN (LMAX)

La regresión LMAX es lo opuesto del método de regresión LAD, LMAX minimiza el peor error de predicción que se presenta en las observaciones, Aquí, una observación extrema puede tener en este caso un efecto muy grande,

La forma general para un modelo de programación lineal para una regresión LMAX seria la siguiente:

Minimizar: z
Sujeta a:

$$\beta_0 + x_0\beta_1 + ...x_{ik}\beta_k + u_i - v_i = y_i \qquad \boldsymbol{x_j}$$
$$z - u_i - v_i \geq 0$$

restricción de signo
para i=1,2,,,,,,,,n
para k=1,2,,,,,,n

El modelo de optimización a utilizar es el siguiente:
Min z
subject to
b0-y0+11741b1+u1-v1=44153
b0-y0+13419b1+u2-v2=45310
b0-y0+12799b1+u3-v3=45446
b0-y0+13200b1+u4-v4=46622
b0-y0+13584b1+u5-v5=46488
b0-y0+13901b1+u6-v6=47688
b0-y0+14388b1+u7-v7=48217
b0-y0+14652b1+u8-v8=48245
b0-y0+15264b1+u9-v9=48989
b0-y0+15663b1+u10-v10=49604
b0-y0+15405b1+u11-v11=49500
b0-y0+15608b1+u12-v12=49343
b0-y0+15559b1+u13-v13=49972
b0-y0+16028b1+u14-v14=50075
b0-y0+16568b1+u15-v15=50762
b0-y0+16397b1+u16-v16=50638
b0-y0+16860b1+u17-v17=51293
b0-y0+16746b1+u18-v18=51612
b0-y0+19122b1+u19-v19=53409
b0-y0+17412b1+u20-v20=53836
b0-y0+18091b1+u21-v21=52945
b0-y0+18560b1+u22-v22=54444
b0-y0+18211b1+u23-v23=53782
b0-y0+18767b1+u24-v24=53903
b0-y0+19030b1+u25-v25=54206
b0-y0+18989b1+u26-v26=54327
b0-y0+19216b1+u27-v27=55011
b0-y0+19055b1+u28-v28=55791
b0-y0+18958b1+u29-v29=55788
b0-y0+19561b1+u30-v30=56597
b0-y0+20896b1+u31-v31=57085
b0-y0+20150b1+u32-v32=57279
b0-y0+19507b1+u33-v33=56653
b0-y0+19194b1+u34-v34=56699
b0-y0+18682b1+u35-v35=57125
b0-y0+19662b1+u36-v36=57201
b0-y0+18777b1+u37-v37=53628
b0-y0+19436b1+u38-v38=52632
b0-y0+19675b1+u39-v39=52590
b0-y0+18841b1+u40-v40=52280
b0-y0+19245b1+u41-v41=52424
b0-y0+19241b1+u42-v42=53704
b0-y0+19465b1+u43-v43=54486

b0-y0+18631b1+u44-v44=55442
z-u1-v1>=0
z-u2-v2>=0
z-u3-v3>=0
z-u4-v4>=0
z-u5-v5>=0
z-u6-v6>=0
z-u7-v7>=0
z-u8-v8>=0
z-u9-v9>=0
z-u10-v10>=0
z-u11-v11>=0
z-u12-v12>=0
z-u13-v13>=0
z-u14-v14>=0
z-u15-v15>=0
z-u16-v16>=0
z-u17-v17>=0
z-u18-v18>=0
z-u19-v19>=0
z-u20-v20>=0
z-u21-v21>=0
z-u22-v22>=0
z-u23-v23>=0
z-u24-v24>=0
z-u25-v25>=0
z-u26-v26>=0
z-u27-v27>=0
z-u28-v28>=0
z-u29-v29>=0
z-u30-v30>=0
z-u31-v31>=0
z-u32-v32>=0
z-u33-v33>=0
z-u34-v34>=0
z-u35-v35>=0
z-u36-v36>=0
z-u37-v37>=0
z-u38-v38>=0
z-u39-v39>=0
z-u40-v40>=0
z-u41-v41>=0
z-u42-v42>=0
z-u43-v43>=0
z-u44-v44>=0
end

Utilizando el Software Lindo, el valor óptimo es encontrado en ciento treinta y dos iteraciones, z= 2845,269. La ecuación encontrada es la siguiente:

$$y = 32539.8 + 1.16X_{i1}$$

De la ecuación encontrada podemos concluir que por cada incremento de las exportaciones en una unidad el pib aumentará en un entero con dieciséis unidades; tiene una pendiente positiva y el intercepto es treinta y dos mil quinientos treinta y nueve con ocho décimas.

9. MEDIDA DE LA BONDAD DE AJUSTE PARA LMAX

Se define r que es igual al rango de las Y_i es decir max{ Y_i } - min{ Y_i }, R^2 se calcula de la siguiente forma para el LMAX:

$$1 - \frac{\max\{u_i + v_i\}/(n-k-1)}{r/(n-1)}$$

r= Rango(Y_i)

r= 57279 – 44153= 13126

$$R^2 = 0.78$$

Podemos concluir que el 78% del cambio en el valor del pib se explica mediante un cambio en las exportaciones

10. MÉTODO DUAL APLICADO AL LAD

El modelo que ser utiliza para maximizar aplicando el dual es:

Maximizar: $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + ... + \lambda_n Y_n$

Sujeta a:

$$\lambda_1 x_{1j} + \lambda_2 x_{2j} + ... + \lambda_n x_{nj}$$

$$j = 0.......k$$

$$\lambda_i \leq 1$$

$$\lambda_i \geq -1$$

Se define el siguiente artificio:

$L_i = \lambda_i + 1$ o $L_i = \lambda_i - 1$

El modelo a utilizar es el siguiente:

Maximizar

$L_1 Y_i + L_2 Y_2 + ... + L_n Y_n - Y_1 - Y_2 - .... - Y_n$

Sujeta a:

$$L_1 x_{ij} + L_2 x_{2j} + ... + L_n x_{nj}$$

$$= x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{nj}$$

$$j = 0,1......., k$$

$$L_i \leq 2 \quad i = 0,1.........., n$$

Modelo de optimización para utilizar en el software lindo

Max
44153L1+45310L2+45446L3+46622L4+46488L5+47688L6+48217L7+48245L8+48989L9+49604L10+49500L11+49343L12+49972L13+50075L14+50762L15+50638L16+51293L17+51612L18+53409L19+53836L20+52945L21+54444L22+53782L23+53903L24+54206L25+54327L26+55011L27+55791L28+55788L29+56597L30+57085L31+57279L32+56653L33+56699L34+57125L35+57201L36+53628L37+52632L38+52590L39+52280L40+52424L41+53704L42+54486L43+55442L44

SUBJECT TO
L1+L2+L3+L4+L5+L6+L7+L8+L9+L10+L11+L12+L13+L14+L15+L16+L17+L18+L19+L20+L21+L22+L23+L24+L25+L26+L27+L28+L29+L30+L31+L32+L33+L34+L35+L36+L36+L37+L38+L39+L41+L41+L42+L43+L44<=44

11741L1+13419L2+12799L3+13200L4+13584L5+13901L6+14388L7+14652L8+15264L9+15663L10+15405L11+15608L12+15559L13+16028L14+16568L15+16397L16+16860L17+16746L18+19122L19+17412L20+18091L21+18560L22+18211L23+18767L24+19030L25+18989L26+19216L27+19055L28+18958L29+19561L30+20896L31+20150L32+19507L33+19194L34+18682L35+19662L36+18777L37+19436L38+19,675L39+18841L40+19245L41+19241L42+19465L43+18631L44<=764156
L1<=2
L2<=2
L3<=2
L4<=2
L5<=2
L6<=2
L7<=2
L8<=2
L9<=2
L10<=2
L11<=2
L12<=2
L13<=2
L14<=2
L15<=2
L16<=2
L17<=2
L18<=2
L19<=2
L20<=2
L21<=2
L22<=2
L23<=2
L24<=2
L25<=2
L26<=2
L27<=2
L28<=2
L29<=2
L30<=2
L31<=2
L32<=2
L33<=2
L34<=2
L35<=2
L36<=2
L37<=2
L38<=2
L39<=2
L40<=2
L41<=2
L42<=2
L43<=2
L44<=2

Resultados Obtenidos:

Después de cincuenta y tres iteraciones se encuentra el valor óptimo, la función objetivo toma el valor de f(x) = 2431656.

$$y = 27212.46 + 1.43X$$

Del modelo resultante se puede concluir que por cada incremento de las exportaciones en una unidad el pib aumentará en uno con cuarenta y tres unidades; tiene una pendiente positiva y el intercepto es veintisiete mil doscientos doce con cuarenta y seis centésimas.

11. MÉTODO DUAL PARA EL LMAX

El modelo dual que se utiliza para encontrar el LMAX se describe a continuación:

Maximizar: $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_n y_n$

Sujeta a : $\lambda_i x_{ij} = 0 \quad j = 1,2,\ldots\ldots k$

$$\lambda_i - \alpha_i \leq 0 \quad i = 1,2,\ldots\ldots n$$

$$-\lambda_i - \alpha_i \leq 0 \quad i = 1,2,\ldots\ldots n$$

$$\sum \alpha_i \leq 1$$

λ_i tiene restricción de signo

Es conveniente utilizar el siguiente cambio de variable, a través de las nuevas variables:

$$g_i + h_i = \alpha_i$$

$$g_i - h_i = \lambda_i$$

Sustituyendo en el modelo dual planteado obtenemos lo siguiente:

Maximizar: $\sum_{i=1}^{n}(g_i - h_i)y_i$

Sujeta a:

$$\sum_{i=1}^{n}(g_i - h_i)y_{ij} = 0 \quad j = 1,2,.......k$$

$$-2h_i \le 0 \quad 1 = 1,2,.......n$$

$$g_i \ge 0 \quad i = 1,2,.......n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(g_i - h_i) \le 1$$

El modelo de optimización es el siguiente:

Max
44153g1-44153h1+45310g2-5310h2+45446g3-45446h3+46622g4-46622h4+46488g5-46488h5+47688g6-47688h6+48217g7+8217h7+48245g8-48245h8+48989g9-48989h9+49604g10-9604h10+49500g11-9500h11+49343g12-49343h12+49972g13-49972h13+50075g14-50075h14+50762g15-50762h15+50638g16-50638h16+51293g17-51293h17+51612g18-51612h18+53409g19-53409h19+53836g20-53836h20+52945g21-52945h21+54444g22-54444h22+53782g23-53782h23+53903g24-53903h24+54206g25-54206h25+54327g26-54327h26+55011g27-55011h27+55791g28-55791h28+55788g29-55788h29+56597g30-56597h30+57085g31-57085h31+57279g32-57279h32+56653g33-56653h33+56699g34-56699h34+57125g35-57125h35+57201g36-57201h36+53628g37-53628h37+52632g38-52632h38+52590g39-52590h39+52280g40-52280h40+52424g41-52424h41+53704g42-53704h42+54486g43-54486h43+55442g44-55442h44

subject to

g1-h1+g2-h2+g3-h3+g4-h4+g5-h5+g6-h6+g7-h7+g8-h8+g9-h9+g10-10+g11-h11+g12-h12+g13-h13+g14-h14+g15-h15+g16-h16+g17-h17+g18-h18+g19-h19+g20-h20+g21-h21+g22-h22+g23-h23+g24-h24+g25-h25+g26-h26+g27-h27+g28-h28+g29-h29+g30-h30+g31-h31+g32-h32+g33-h33+g34-h34+g35-h35+g36-h36+g37-h37+g38-h38+g39-h39+g40-h40+g41-h41+g42-h42+g43-h43+g44-h44=0

11741g1-11741h1+13419g2-13419h2+12799g3+2799h3+13200g4+13200h4+13584g5-13584h5+13901g6-13901h6+14388g7-14388h7+14652g8-4652h8+15264g9-15264h9+15663g10-15663h10+15405g11-15405h11+15608g12-15608h12+15559g13-15559h13+16028g14-16028h14+16568g15-16568h15+16397g16-16397h16+16860g17-16860h17+16746g18-16746h18+19122g19-19122h19+17412g20-17412h20+18091g21-18091h21+18560g22-18560h22+18211g23-18211h23+18767g24-18767h24+19030g25-19030h25+18989g26-18989h26+19216g27-19216h27+19055g28-19055h28+18958g29-18958h29+19561g30-19561h30+20896g31-20896h31+20150g32-20150h32+19507g33-19507h33+19194g34-19194h34+18682g35-18682h35+19662g36-19662h36+18777g37-18777h37+19436g38-19436h38+19675g39-19675h39+18841g40-18841h40+19245g41-19245h41+19241g42-19241h42+19465g43-19465h43+18631g44-18631h44=0

g1+h1+g2+h2+g3+h3+g4+h4+g5+h5+g6+h6+g7+h7+g8+h8+g9+h9+g10+h10+g11+h11+g12+h12+g13+h13+g14+h14+g15+h15+g16+h16+g17+h17+g18+h18+g19+h19+g20+h20+g21+h21+g22+h22+g23+h23+g24+h24+g25+h25+g26+h26+g27+h27+g28+h28+g29+h29+g30+h30+g31+h31+g32+h32+g33+h33+g34+h34+g35+h35+g36+h36+g37+h37+g38+h38+g39+h39+g40+h40+g41+h41+g42+h42+g43+h43+g44+h44<=1

En cinco iteraciones es encontrado el valor óptimo.

La ecuación encontrada es:

$$y = 32539.8 + 1.16X$$

De la ecuación encontrada podemos concluir que por cada incremento de las exportaciones en una unidad el pib aumentará en uno con dieciséis unidades; tiene una pendiente positiva y el intercepto es treinta y dos mil quinientos treinta y nueve con ocho décimas.

12. CONCLUSIONES

- A lo largo de toda está investigación, se ha podido determinar que existe una gran interrelación entre la estadística (fundamentalmente de tipo inferencial) y la teoría de optimización (lineal y no lineal)

- En los ejercicios prácticos, se ha empleado el SOFTWARE de Optimización LINDO el mismo que ha demostrado su eficiencia en este tipo de análisis, por ser interactivo, de fácil utilización en los datos al ingresar los modelos, obteniendo los resultados en forma rápida, además tiene una gran precisión numérica,

- Se puede usar eficientemente la teoría de la dualidad de la programación lineal en la solución del modelo de Regresión lineal; así al resolver el modelo LAD la solución es encontrada en sesenta y nueve iteraciones, el modelo LMAX en ciento treinta y dos iteraciones se obtiene el valor óptimo; pero aplicando el método dual al LAD la solución es encontrada en cincuenta y tres iteraciones, mientras que LMAX, se encuentra la solución en cinco iteraciones,

- Se ha podido observar que existen métodos alternativos al de mínimos cuadrados que permiten resolver el problema de la regresión lineal mediante técnicas de optimización,

- El avance que ha tenido la informática en los últimos años ha ocasionado que actualmente dispongamos de programas que resuelven muchos problemas matemáticos, en este trabajo se uso en particular el programa LINDO, que es especializado en la resolución de problemas de programación lineal y no lineal, y lo hemos utilizado en la resolución de problemas de Regresión lineal.

13. REFERENCIAS

1. R López, “Uso de Técnicas de Programación Lineal y Entera en Estimaciones Estadísticas”(Tesis, Instituto de Ciencias Matemáticas, Escuela Superior Politecnica del Litoral, 2004)

2. **Mendehall William**, Estadística Matemática con Aplicaciones (Segunda Edición, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1994), pp. 363-397

3. **Linus Schrage**, Optimization Modeling with Lindo (Quinta Edición, International Thomson Editores, California, USA 1997), pp. 352-361.

4. **Allen L. Webster**, Estadística Aplicada a los Negocios y la Economía (Tercera Edición, Mc Graw Hill Interamericana S.A., Colombia, 2003), pp.324-349