

# Optimización de una cartera de inversiones utilizando algoritmos genéticos

María Gracia León, Nelson Ruiz, Ing. Fabricio Echeverría  
Instituto de Ciencias Matemáticas ICM  
Escuela Superior Politécnica del Litoral  
Vía Perimetral Km 30.5, Guayaquil, Ecuador  
[mgleon@espol.edu.ec](mailto:mgleon@espol.edu.ec), [ruiz@espol.edu.ec](mailto:ruiz@espol.edu.ec), [pechever@espol.edu.ec](mailto:pechever@espol.edu.ec)

## Resumen

*En el presente trabajo se muestra la aplicación de los algoritmos genéticos a un problema de optimización de una cartera de acciones. Tanto la naturaleza del problema de optimización como la teoría de los algoritmos genéticos son expuestos brevemente y sirven de base para la resolución de dos problemas específicos, encontrar la mejor asignación al momento de invertir en un grupo de acciones mexicanas y otro grupo de acciones ecuatorianas. La exposición de este interesante tema se apoya en el uso de un software que permite observar paso a paso el proceso de optimización utilizando algoritmos genéticos. Los conceptos expuestos al inicio de este trabajo se ven ejemplificados con el uso del software, el cual incluye tanto resultados gráficos como numéricos. Este software es extensible de tal manera que con ciertas modificaciones puede ser utilizado para trabajar con cualquier grupo de acciones. En general, los lectores interesados en el tema de los algoritmos genéticos podrán encontrar en el presente trabajo una útil introducción para estudios posteriores.*

**Palabras Claves:** Algoritmos genéticos, cartera de acciones, optimización.

## Abstract

*This work shows the application of the theory of genetic algorithms to an optimization problem of a portfolio of shares. Both of the optimization problems and the theory of genetic algorithms are exposed briefly and are useful to solve two specific problems, to find the best assignment when it is necessary to invest in a group of Mexican shares and another group of Ecuadorian shares. The exposition of this interesting topic is helped by software that allows seeing the step-by-step optimization process by using genetic algorithms. The concepts exposed at the beginning of this work can be better learnt with the use of this software that includes both graphical and numerical results. This software can be extended by adding some code so it is possible to use it to work with any group of shares. Generally speaking, readers who are interested in this topic can find that this work can be a useful beginning of other studies.*

## 1. Introducción

El diseño de una cartera de inversiones óptima es un problema que ha sido tratado por más de 50 años. Es claro que la decisión que el inversionista debe tomar al escoger las acciones más prometedoras no puede ser guiada solamente por la intuición. Es necesario que el inversionista apoye su decisión utilizando criterios científicos. En este resumen se resolverá una variación del problema clásico propuesto por Markowitz haciendo uso de la novedosa técnica de los algoritmos genéticos.

## 2. Descripción del problema

Existen dos problemas al momento que el inversionista decide destinar sus recursos limitados en un grupo de acciones, la primera decisión que tiene que enfrentar es escoger las acciones en las cuales va a invertir y el segundo problema tiene que ver con la manera de distribuir el recurso limitado que posee dentro de este grupo de acciones previamente escogidas. Es en este problema en el que el presente trabajo concentrará su atención, es decir, en la selección de los porcentajes a invertir en cada acción. En general, el problema consiste en encontrar la cartera óptima de inversiones de  $n$  acciones considerando el rendimiento esperado de toda la cartera y el riesgo de la misma. Donde el rendimiento total esperado  $R_p$  y el riesgo  $\sigma_p^2$  son:

$$R_p = w_1 R_1 + w_2 R_2 + \dots + w_{n-1} R_{n-1} + w_n R_n$$

$$\sigma_p^2 = V[R_p]$$

Siendo  $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, w_n$  los porcentajes del capital invertido en cada acción y  $V[R_p]$  la varianza del rendimiento esperado. En resumen, el problema aquí tratado consiste en la determinación de los pesos que maximicen el rendimiento esperado, teniendo en consideración el riesgo.

## 3. Modelo del problema

De acuerdo al enfoque de media – varianza de Markowitz [1] el modelo general de la optimización de cartera es el siguiente:

$$\max \sum_{i=1}^n \bar{R}_i w_i$$

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} w_i w_j$$

$$\text{Sujeto a } \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad w_i \geq 0$$

Dónde:

$i, j$  Índices de acciones;  $i, j = 1, 2, \dots, n$

$\bar{R}_i$ : El valor esperado de la acción  $i$ ; para  $i = 1, 2, \dots, n$

$\sigma_{ij}$ : La covarianza entre el rendimiento de la acción  $i$  y la acción  $j$ .

Variables de decisión:

$W_i$ : Peso de la inversión en la acción  $i$

Puesto que no es posible maximizar y minimizar a la vez estas dos metas en conflicto, se propone una función objetivo que relacione tanto el rendimiento como el riesgo de la siguiente manera:

$$f = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{R}_i w_i}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} w_i w_j}$$

Dada la naturaleza de esta nueva función objetivo, es notorio que tanto cualquier incremento en el rendimiento como cualquier disminución en el riesgo aumentarán el valor de la función.

## 4. Teoría de los algoritmos genéticos

En un problema de optimización se trata de escoger los valores de las variables de decisión que optimizarán la función objetivo dentro de un espacio de soluciones.

A diferencia de los métodos clásicos de optimización el algoritmo genético no escoge una solución inicial sino un conjunto de soluciones conocidas como población inicial.

Algunas de las fases de un algoritmo genético son las siguientes:

- Función de Ajuste
- Método de selección
- Operaciones genéticas:
  - Cruzamiento
  - Mutación
- Generación de nueva población

### 4.1 Función de ajuste

Cuando se tiene la población inicial o una generación de  $n$  cromosomas se debe seleccionar a los cromosomas más idóneos para la siguiente etapa. La idoneidad de los cromosomas o individuos que en el caso específico de este problema son las  $n$ -uplas se la determina utilizando lo que se conoce como **función de ajuste**. En el caso específico de esta tesis la función de ajuste es la función objetivo propuesta anteriormente en la descripción del modelo, el valor de esta función depende únicamente de los pesos  $w_i$ :

$$f(w_1, w_2, \dots, w_n) = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{R}_i w_i}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} w_i w_j}$$

### 4.2 Operaciones genéticas

**4.2.1 Cruzamiento.** En esta etapa la aleatoriedad juega un papel preponderante teniendo que tomarse dos decisiones:

- La pareja de cada uno de los individuos para el cruzamiento.
- La posición en la cual debe realizarse el cruce.

**4.2.2 Mutación.** Con este operador producimos cambios aleatorios espontáneos en varios cromosomas con una baja probabilidad. Una simple forma de mutación es alterar uno o más genes.

Existen varios métodos de mutación, el método que se utiliza en este caso es del intercambio. Como su nombre lo indica este método consiste en escoger dos genes aleatoriamente e intercambiarlos.

**4.2.3 Generación de una nueva población.** Luego de la etapa de mutación los cromosomas resultantes pasan a ser parte de la nueva generación que reemplaza a la anterior. Repitiendo este proceso es posible llegar a una solución óptima o subóptima, tal como lo muestra el esquema de la figura 1.

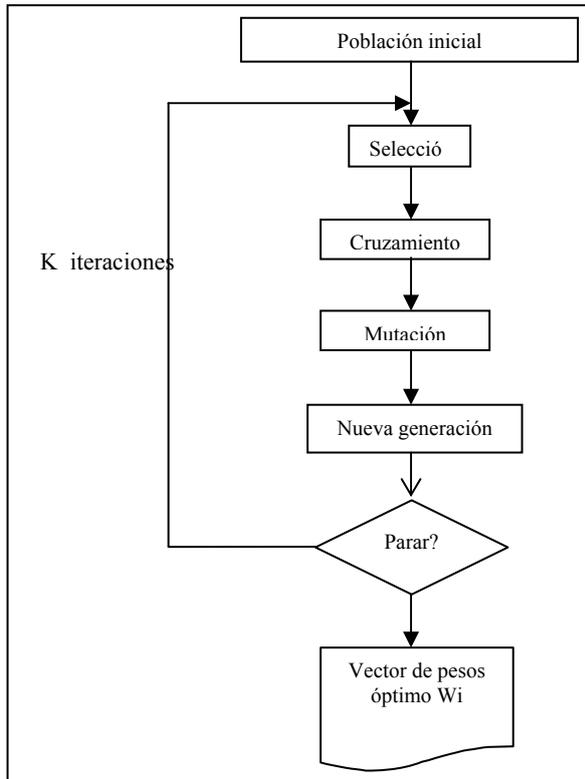


Figura 1. Diagrama de flujo del algoritmo genético

## 5. Herramienta informática aplicada en la solución del problema

Se ha diseñado una aplicación específica en Microsoft Visual Basic 6.0 interrelacionada con Microsoft Access 2007. Este programa permite aplicar el algoritmo genético a cualquier grupo de 8 acciones.

### 5.1 Aplicación del algoritmo genético paso a paso

Esta forma de ejecutar el software permite examinar detalladamente el proceso que sigue el algoritmo genético mediante los pasos mencionados en la figura 1. Tal como se muestra en la figura 2. El

usuario deberá seleccionar la población inicial al presionar el botón correspondiente.

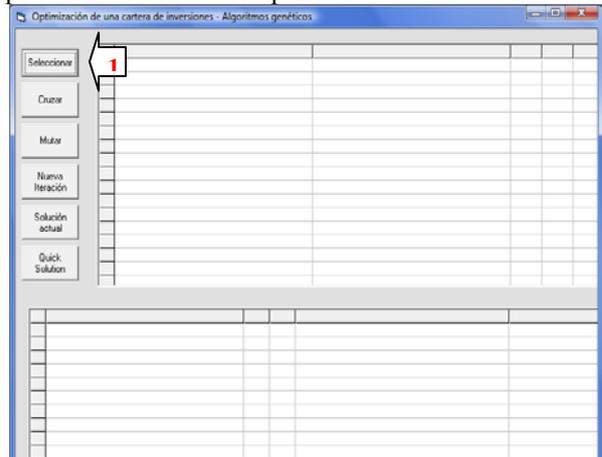


Figura 2. Selección la población inicial por medio del botón seleccionar.

Se observa en la pantalla de la figura 3. La selección de los cromosomas más idóneos y el paso de éstos a la segunda etapa previa al cruce.

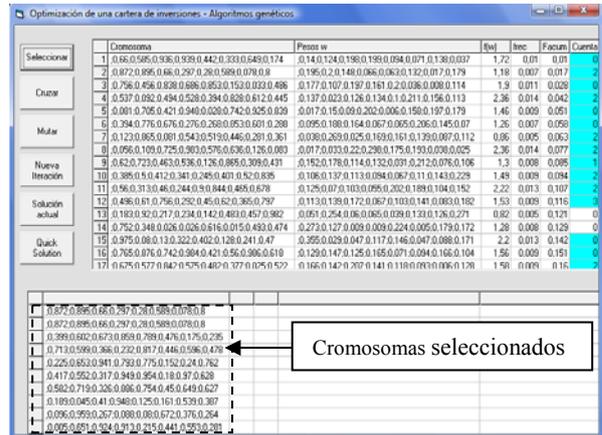


Figura 3. Proceso de selección

En el proceso de cruzamiento que el usuario deberá accionar al dar click en el botón "Cruzar" se encuentran aleatoriamente las parejas de cada cromosoma y se determina la posición de cruce.

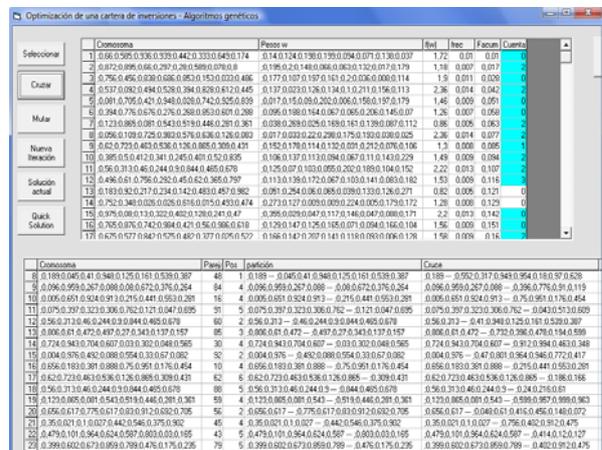


Figura 4. Cruzamiento de cromosomas

Finalmente la última etapa de mutación tiene lugar accionando el botón “mutar”, esto se ve en la figura 5.

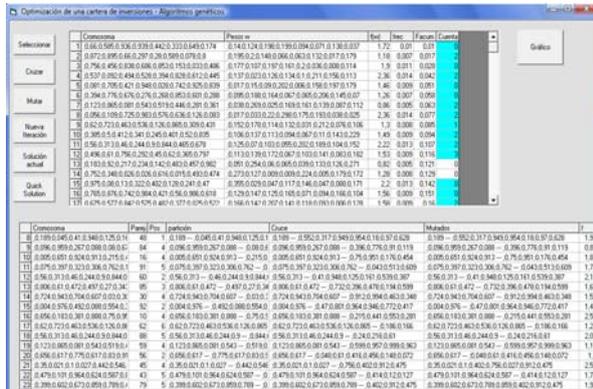


Figura 5. Proceso de mutación

El método paso a paso permite visualizar la solución encontrada en cualquiera de las iteraciones. Al presionar el botón “Solución actual” el software escogerá el mejor cromosoma del grupo de cromosomas mostrados en la columna “Mutados”.

### 5.2 Aplicación del algoritmo genético por el método abreviado

El método abreviado consiste en permitir que el software ejecute en forma automática el número de iteraciones que el usuario decida. Tal como lo muestra la figura 6, el botón denominado “Quick Solution” activa un cuadro de diálogo que solicita al usuario la cantidad de iteraciones que desea ejecutar. Luego de lo cual, se muestra la solución encontrada al final del proceso, tal como lo muestra la figura 7.

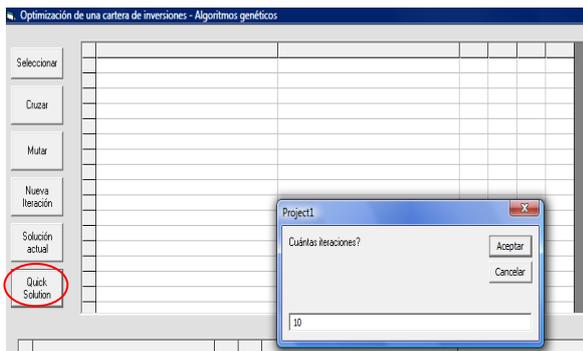


Figura 6. Número de iteraciones a ejecutar

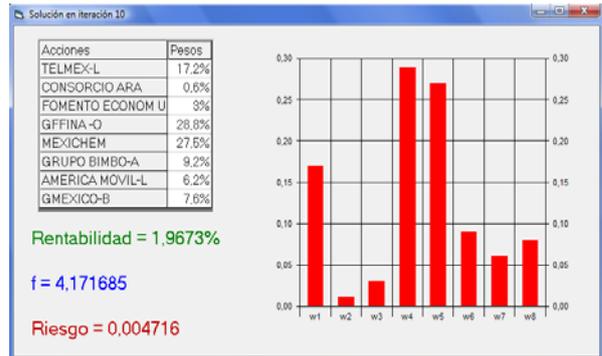


Figura 7. Resultados del número de iteraciones ingresadas

## 6. Resultados e implementación

En esta sección se mostrarán los resultados obtenidos al aplicar el software expuesto en la sección anterior.

### 6.1 Resultados encontrados con los datos de las acciones mexicanas.

Las 8 empresas mexicanas de las cuales se ha tomado el precio de sus acciones en un periodo de enero 2007 a diciembre 2008 se muestran a continuación:

Tabla 1. Acciones mexicanas

TELMEX-L
CONSORCIO ARA
FOMENTO ECONOM UTS
GFFINA –O
MEXICHEM
GRUPO BIMBO-A
AMERICA MOVIL-L
GMEXICO-B

### Ensayo 1

Los resultados que se obtienen al aplicar el software en este primer ensayo con 200 iteraciones se muestran en la figura 8.

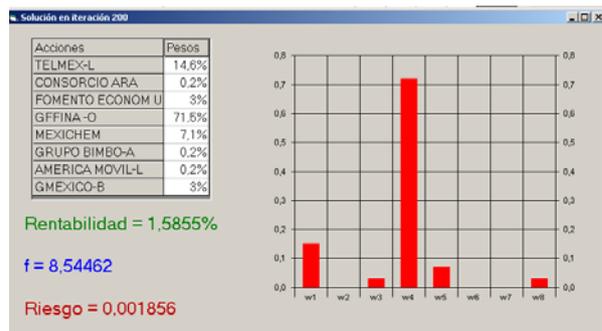


Figura 8. Resultado después de 200 iteraciones

En este ensayo el software permite visualizar la gran diferencia existente entre el porcentaje de inversión recomendado para las acciones de la empresa GFFINA-O y las acciones de las otras empresas.

La figura 9. Demuestra que esta notable diferencia se mantiene cuando el número de iteraciones aumenta a n=400.



Figura 9. Resultado después de 400 iteraciones

Sin embargo, el valor de la función de ajuste aumenta tal como se espera. Esto se indica en la tabla 2.

Tabla 2. Valor de la función de ajuste en iteración 200 y 400

Ensayo 1			
iteraciones	f. ajuste	rendimiento	riesgo
200	8,54	1,58%	0,001856
400	8,82	1,63%	0,001852

Además se observa en la tabla anterior que en este ensayo particular el incremento en el número de iteraciones también incrementa el rendimiento, manteniendo el riesgo casi constante.

La descripción gráfica del comportamiento de este ensayo en lo que se refiere a la función de ajuste se muestra en las figuras 10. y 11. para n=200 iteraciones y n=400 iteraciones respectivamente. Es notorio por estas 2 figuras que en este ensayo el aumento en el número de iteraciones logra que la función de ajuste se estabilice y converja.



Figura 10. Función de ajuste en 200 iteraciones



Figura 11. Función de ajuste en 400 iteraciones

En cuanto al rendimiento y riesgo se refiere por las figuras 12. y 13. se observa que estos se estabilizan cuando se incrementa el número de iteraciones. Como es de esperarse el riesgo decrece en las primeras iteraciones permitiendo así un crecimiento en la función de ajuste.

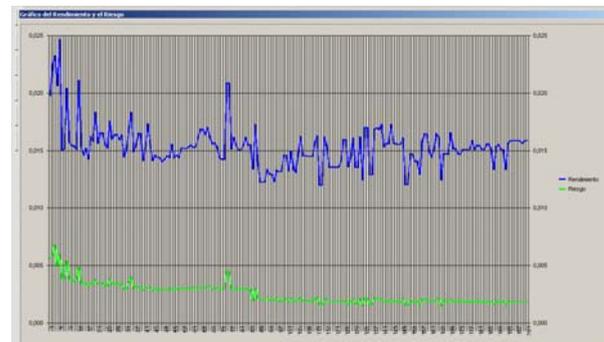


Figura 12. Rendimiento y riesgo en 200 iteraciones

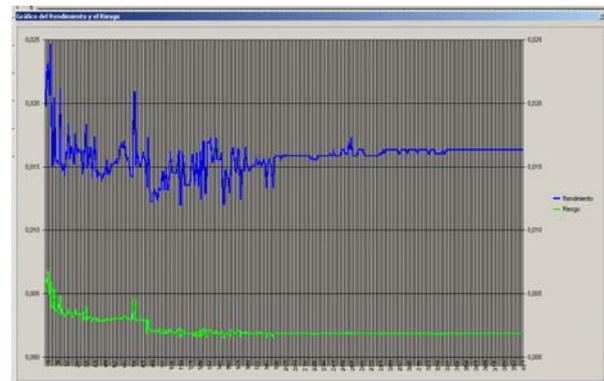


Figura 13. Rendimiento y riesgo en 400 iteraciones

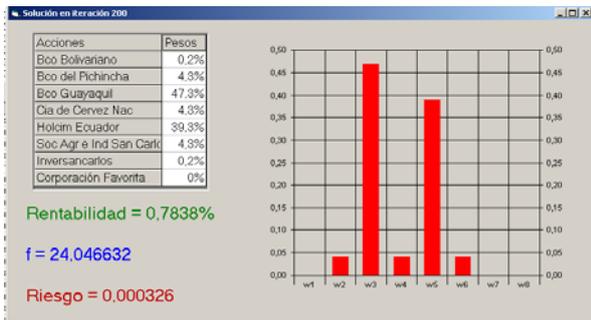
## 6.2 Resultados encontrados con los datos de las acciones ecuatorianas

Las 8 empresas ecuatorianas de las cuales se ha tomado el precio de sus acciones en un periodo de enero 2007 a diciembre 2008 se muestran a continuación:

**Tabla 3. Acciones ecuatorianas**

Bco. Bolivariano
Bco. del Pichincha
Bco. Guayaquil
Cia. de Cervez. Nac.
Holcim Ecuador
Soc. Agr. e Ind. San Carlos
Inversancarlos
Corporación Favorita

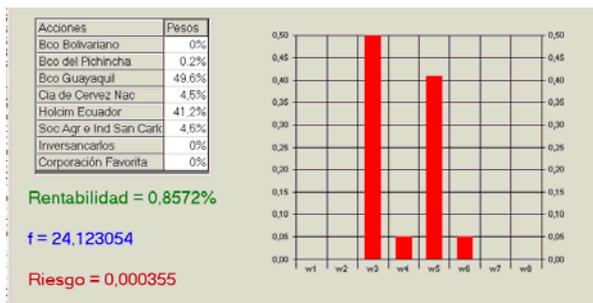
Los resultados que se obtienen al aplicar el software en este primer ensayo con 200 iteraciones se muestran en la figura 14.



**Figura 14. Resultados después de 200 iteraciones**

En este ensayo el software permite visualizar las dos empresas con mayor porcentaje de inversión que corresponden a “Bco. Guayaquil” y “Holcim Ecuador” con pesos de 47.3% y 39.3% respectivamente.

Las figura 15. demuestra que este patrón se mantiene cuando el número de iteraciones aumenta a n=400.



**Figura 15. Resultados después de 400 iteraciones**

Sin embargo, el valor de la función de ajuste aumenta tal como se espera:

**Tabla 4. Valor de la función de ajuste en iteración 200 y 400**

ensayo 1			
iteraciones	f. ajuste	rendimiento	riesgo
200	24.046	0.783%	0,0003
400	24.123	0.857%	0,0003

Además se observa en la tabla anterior que en este ensayo particular el incremento en el número de iteraciones también incrementa el rendimiento, manteniendo el riesgo casi constante.

La descripción gráfica del comportamiento de este ensayo en lo que se refiere a la función de ajuste se muestra en las figuras 16. y 17. para n=200 iteraciones y n=400 iteraciones respectivamente. Es notorio por estas 2 figuras que en este ensayo el aumento en el número de iteraciones logra que la función de ajuste se estabilice y converja.

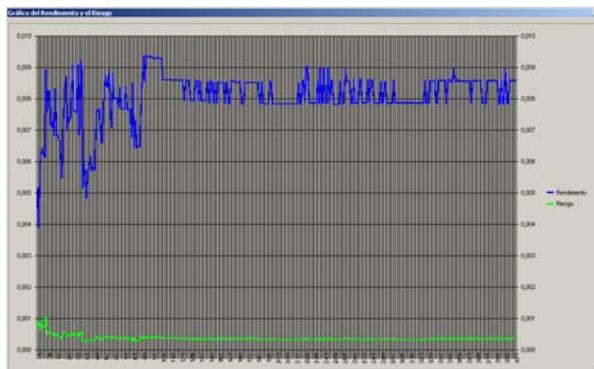


**Figura 16. Función de ajuste luego de 200 iteraciones**

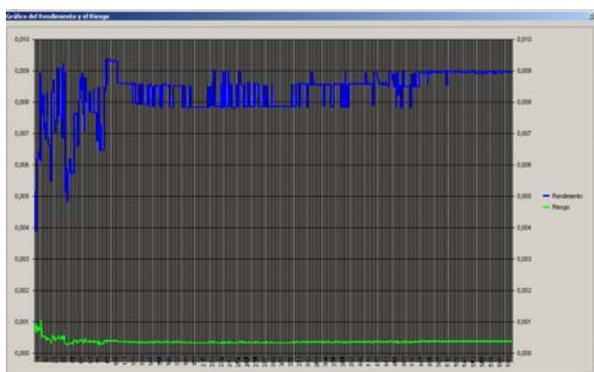


**Figura 17. Función de ajuste luego de 400 iteraciones**

En cuanto al rendimiento y riesgo se refiere por las figuras 18. y 19. se observa que estos se estabilizan cuando se incrementa el número de iteraciones. Como es de esperarse el riesgo decrece en las primeras iteraciones permitiendo así un crecimiento en la función de ajuste.



**Figura 18.** Rendimiento y riesgo en 400 iteraciones (acciones ecuatorianas)



**Figura 19.** Rendimiento y riesgo en 550 iteraciones (acciones ecuatorianas)

Finalmente, se mostrará un experimento de 20 ensayos independientes para cada grupo de acciones con el fin de obtener una idea global del comportamiento del algoritmo.

### 6.3 Acciones mexicanas: Experimento de 20 ensayos

Al realizar los ensayos con 500 iteraciones, se tiene que existe una cierta regularidad puesto que a pesar de los diferentes resultados obtenidos en la función de ajuste y los pesos, el mayor porcentaje en cualquiera de los ensayos es destinado a la cuarta empresa (GFFINA –O), siendo su valor máximo 90.60% y su valor mínimo 63.10%

### 6.4 Acciones ecuatorianas: Experimento de 20 ensayos

Con los 20 ensayos de las acciones ecuatorianas cada uno de 500 iteraciones, se tiene que existe una cierta regularidad puesto que a pesar de los diferentes resultados obtenidos en la función de ajuste y los pesos, el mayor porcentaje en cualquiera de los ensayos es destinado a la tercera empresa (Bco. de Guayaquil), siendo su valor máximo 74.30% y su valor mínimo 44.90%.

Al ordenar la función de ajuste se obtuvo el valor de 28.9549. Con los datos obtenidos se pudo observar

que en 10 de los 20 ensayos la función de ajuste fue mayor que 27.

## 7. Conclusiones y recomendaciones

En un experimento de 20 ensayos utilizando los datos de las acciones mexicanas el valor máximo de la función de ajuste que se obtuvo fue de 8.9628 con un rendimiento de 1.6692% y riesgo de 0.001862. Siendo los pesos obtenidos 9.5%; 0.20%; 2.30%; 78.10%; 9.5%; 0.20%; 0.20% y 0.20%

En el mismo experimento de 20 ensayos para las acciones mexicanas se obtuvo que el 40% de los ensayos obtuvieron funciones de ajuste mayores que 8; el 25% tuvieron funciones de ajuste entre 7 y 8; el 30% entre 6 y 7; y apenas el 5% obtuvo valores menores que 6. Por lo cual podemos concluir que el algoritmo genético pocas veces produce valores indeseables.

En un experimento de 20 ensayos utilizando los datos de las acciones ecuatorianas el valor máximo de la función de ajuste que se obtuvo fue de 28.9549 con un rendimiento de 0.86% y riesgo de 0.000297. Siendo los pesos obtenidos 0.00%; 0.00%; 60.40%; 4.7%; 30.20%; 4.7%; 0.00% y 0.00%.

En el mismo experimento de 20 ensayos para las acciones ecuatorianas se obtuvo que el 30% de los ensayos obtuvieron funciones de ajuste mayores que 28; el 20% tuvieron funciones de ajuste entre 27 y 28; el 5% entre 26 y 27; el 5% entre 25 y 26; el 5% entre 24 y 25; el 5% entre 23 y 24; el 20% entre 22 y 23; y el 10% obtuvo valores entre 21 y 22.

Puesto que el algoritmo genético puede producir valores no óptimos en ciertos ensayos se recomienda ejecutar el software varias veces para escoger la mejor solución.

Aunque el rendimiento correspondiente al ensayo que obtuvo el mayor valor de la función de ajuste para las acciones mexicanas no es el más alto sin embargo su riesgo es menor al obtenido en el ensayo de máximo rendimiento.

## 8. Agradecimientos

Nuestros agradecimientos van dirigidos a las personas que nos ayudaron a lograr este proyecto. Al Ing. Echeverría por dirigir nuestro proyecto, al Ec. Fabricio Arellano miembro de la bolsa de valores de Guayaquil, por creer en nosotros al facilitarnos los datos de las acciones y al Ing. César Noboa por su apoyo incondicional.

## 9. Referencias bibliográficas

- [1] Applied Mathematical Sciences, Vol. 1, 2007, no. 5, 203 – 204
- [2] ALAITZ MENDIZÁBAL ZUBELDIA, LUIS M.<sup>a</sup> MIERA ZABALZA, MARIAN ZUBIA ZUBIAURRE, A LM 2002, El modelo de Markowitz en la gestión de carteras, Obtenido el 26 de Julio de 2009, de <http://www.ehu.es/cuadernosdegestion/documentos/212.pdf>
- [3] Ryan, R 1978, Presentación del problema de optimización de carteras de inversión, Obtenido el 25 de Julio de 2009, de [http://catarina.udlap.mx/u\\_dl\\_a/tales/documentos/lat/mora\\_r\\_tx/capitulo.pdf](http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lat/mora_r_tx/capitulo.pdf)
- [4] Yahoo Finanzas, (n.d.). Precios Históricos del mercado mexicano, Obtenido el 23 de Julio de 2009, de <http://mx.finance.yahoo.com/q/hp?s=AMXL.MX&a=00&b=1&c=2007&d=11&e=1&f=2008&g=m>
- [5] Ec. Fabricio Arellano, Bolsa de valores de Guayaquil, Obtenido el 3 de agosto de 2009 12:58:57 mediante un correo electrónico [Ec. Fabricio Arellano <farellano@bvg.fin.ec>](mailto:farellano@bvg.fin.ec) 