EXAMEN DE CONTROL AUTOMÁTICO
SEGUNDO PARCIAL
ENERO 29 DE 2013

PRIMER TEMA: 25 puntos

Dado el sistema con retardo de tiempo:

$$G(s)=\frac{2.5e^{-sT}}{3s+1} \quad ; \quad T=1$$

a) (10 p) Determine analíticamente el Margen de Fase del sistema sin retardo (MFsr) y compruébelo en forma gráfica.

b) (10 p) Usando la aproximación de Padé de primer orden, determine analíticamente el Margen de Fase del sistema con retardo (MFcr) y compruébelo gráficamente. Marque gráficamente el Margen de Ganancia (MGcr).

c) (5 p) ¿Para qué valores de retardo el sistema es inestable?

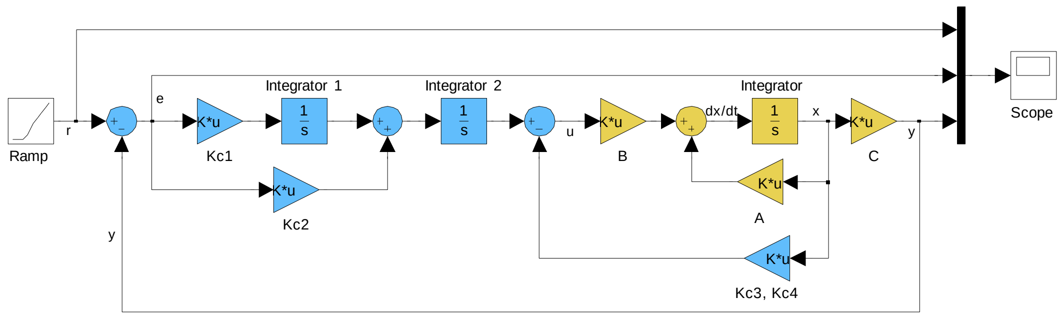
SEGUNDO TEMA: 25 puntos

La dinámica de un misil está representado mediante las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u \quad ; \quad C=\begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad D=\begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad A_{cc}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} K_{c1} & K_{c2} & K_{c3} & K_{c4} \end{vmatrix}$$

Usando el diseño del Modelo Interno se desea que el error de estado estacionario sea cero para una señal de prueba del tipo de rampa unitaria y que las raíces de la Ecuación Característica presenten una dominancia de segundo orden de tal manera que: $s_{12} = -2 \pm 2i$, $s_3 = -20$, $s_4 = -25$

- Encuentre la Matriz de Realimentación de Estados que cumpla con esta condición.



TERCER TEMA: 25 puntos

Se dispone del siguiente sistema de lazo abierto:

$$G(s)=\frac{10K}{s(s+1)(s+10)} \quad ; \quad H(s)=1$$

- (15 p) Primero, compense el sistema para que las raíces dominantes respondan a un Tiempo de Estabilización de 2 seg. y Coeficiente de Amortiguamiento de 0.707 utilizando una red de compensación. En estas condiciones calcule el Error finito de Estado Estacionario.
- (10 p) A continuación, aplicando la compensación adecuada al resultado de la primer parte, logre que el sistema tenga un Error de Estado Estacionario de 5%.

CUARTO TEMA: 25 puntos

Para el sistema realimentado con ganancia de lazo:

$$G(s)=\frac{K}{(s+1)(0.2s+1)(0.1s+1)} \quad ; \quad H(s)=1$$

a) (5 p) Determine el valor de K para que el sistema responda a una entrada escalón unitario con e_{ss} = 20%.

b) (10 p) Con el valor de K obtenido en el literal a), grafique el trazo polar considerando el comportamiento a baja y alta frecuencia, y a las frecuencias ω = 1, 5 y 10 rad/seg.

c) (5 p) Complete el contorno y aplique el criterio de Nyquist para determinar la estabilidad del sistema.

d) (5 p) Determine el Margen de Ganancia y el Margen de Fase para el valor de K en a).

Solución:

PRIMER TEMA:

a) Cuando la magnitud del sistema es uno podemos encontrar la frecuencia ω_{cf} en la cual medimos el margen de fase:

$$|G(s)| = \left|\frac{2.5}{1 + j3\omega_{cf}}\right| = \left|\frac{2.5}{\sqrt{1+9\omega_{cf}^{\ 2}}}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2.5^2 = \left(1+9\omega_{cf}^{\ 2}\right) \quad \Rightarrow$$

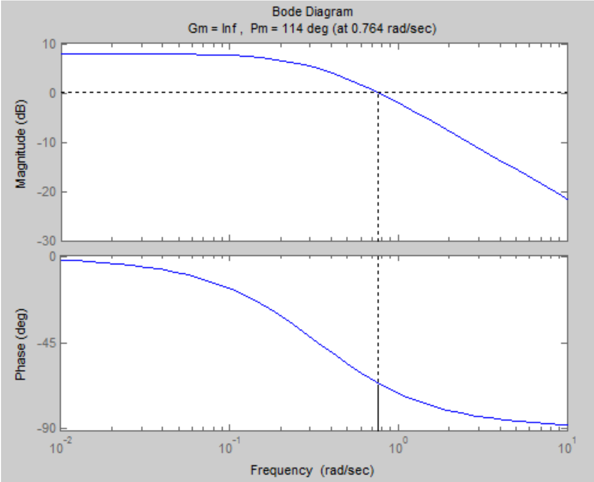
$$6.25 = 1 + 9\omega_{cf}^{\ 2}$$

$$9\omega_{cf}^{\ 2} = 5.25 \quad \Rightarrow \quad \omega_{cf} = \sqrt{\frac{5.25}{9}} \quad \Rightarrow$$

$$\omega_{cf} = 0.76$$

El margen de fase del sistema sin retardo:

$$MFsr = 180^0 - Tan^{-1} 3\omega = 180^0 - 66.3^0 = 113^0$$



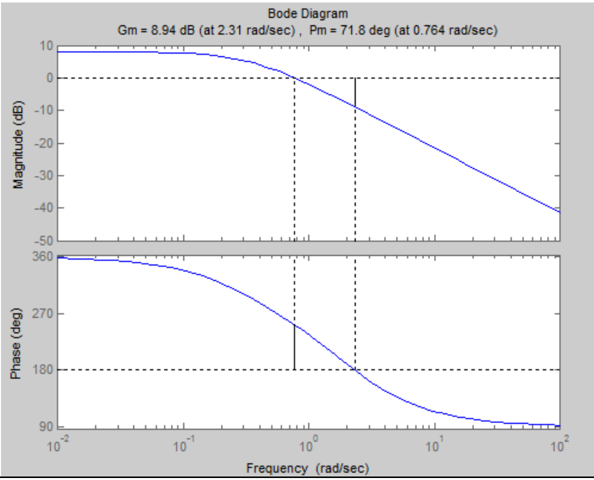
a) Función de transferencia de retardo usando aproximación de Padé de primer orden:

Padé de primer orden = $\dfrac{1 - \dfrac{j\omega T}{2}}{1 + \dfrac{j\omega T}{2}}$; Contribuye en fase mediante: $\phi_p = -2Tan^{-1}\dfrac{\omega T}{2}$

La magnitud permanece inalterada sólo la fase se modifica.

$T = 1$

$$MFcr = 180^0 - Tan^{-1} 3\omega - 2Tan^{-1}\frac{\omega T}{2} = 180^0 - 66.3^0 - 41.8^0 = 71.9^0$$



b) Para llegar al punto crítico el retardo deberá contribuir con un retardo de fase de:

$$-2Tan^{-1}\frac{\omega T}{2} = -133^0$$, de donde $$\Rightarrow \quad 2Tan^{-1}\frac{0.76T}{2} = 133^0 \quad \Rightarrow \quad T = 3.97 seg$$

El sistema será inestable para retardos superiores a: 3.97 segundos.

SEGUNDO TEMA:

$$\begin{vmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1\\x_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}u \quad ; \quad C=\begin{vmatrix}1&0\end{vmatrix} \quad ; \quad D=\begin{vmatrix}0\end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad A_{cc}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0\\0\\0\\1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}K_{c1}&K_{c2}&K_{c3}&K_{c4}\end{vmatrix}$$

$$A_{cc}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-K_{c1}&-K_{c2}&-K_{c3}&-K_{c4}\end{vmatrix}$$

La Ecuación Característica deseada :

$$\det\left|sI-A_{cc}\right|=0 \quad \rightarrow \quad \det\begin{vmatrix}s&-1&0&0\\0&s&-1&0\\0&0&s&-1\\K_{c1}&K_{c2}&K_{c3}&s+K_{c4}\end{vmatrix}=0 \quad ; \quad \left|s\begin{vmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\K_{c2}&K_{c3}&s+K_{c4}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&-1&0\\0&s&-1\\K_{c1}&K_{c3}&s+K_{c4}\end{vmatrix}\right|=0$$

$$s\left|s\begin{vmatrix}s&-1\\K_{c3}&s+K_{c4}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&-1\\K_{c2}&s+K_{c4}\end{vmatrix}\right|+\begin{vmatrix}0&-1\\K_{c1}&s+K_{c4}\end{vmatrix}=0 \quad ; \quad s\left(s\left(s\left(s+K_{c4}\right)+K_{c3}\right)+K_{c2}\right)+K_{c1}=0$$

$$s^4+s^3K_{c4}+s^2K_{c3}+sK_{c2}+K_{c1}=0$$

Por comparación de coeficientes

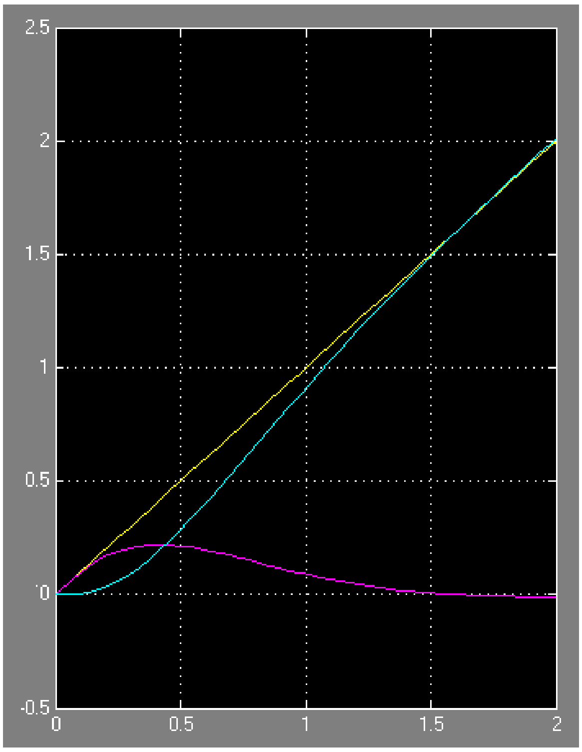
$$(s+25)(s+20)(s^2+4s+8)=0 \quad \rightarrow \quad (s^2+45s+500)(s^2+4s+8)=0$$

$$s^4+49s^3+688s^2+2360s+4000=0$$

$$\begin{cases} s^4+s^3K_{c4}+s^2K_{c3}+sK_{c2}+K_{c1}=0\\ s^4+49s^3+688s^2+2360s+4000=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} K_{c4}=49\\ K_{c3}=688\\ K_{c2}=2360\\ K_{c1}=4000\end{cases}$$

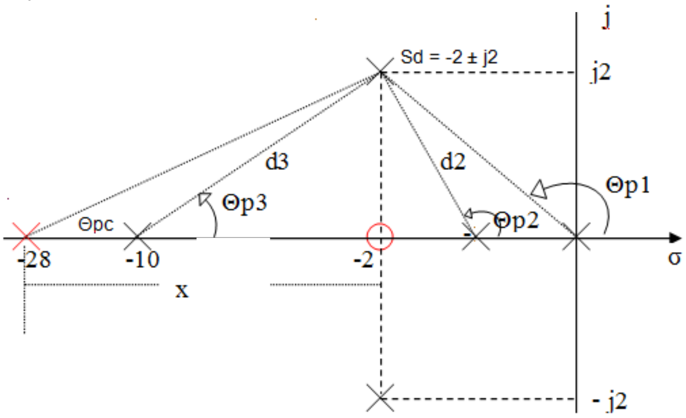
```
clear, clc
%   Matriz de estados
A = [ 0  1
      0  0]
%   Matriz de entrada de referencia
B =  [0; 1]
C =  [1 0]
D =  [0]
%   Matrices aumentadas
[n,n]=size(A); [n,m]=size(B);
Zmm=zeros(m,m); Znm=zeros(n,m);
Aa=[Zmm C;Znm  A]; Ba=[Zmm; B];
a11=Zmm; a12=[1 zeros(m,n)];
a21=zeros(n+1,1);
Ca=[Zmm C]; Da=D;
Aaa=[a11 a12; a21 Aa]
Baa=[Zmm; Zmm; B]
%   Polos reubicados
p1 = -2+2i;
p2 = -2-2i;
p3 = -20;
p4 = -25;
%   Matriz de realimentación de estados
Kc = place(Aaa,Baa,[p1,p2,p3,p4])
Aaa_cc=Aaa-Baa*Kc
Kc1=Kc(1)
Kc2=Kc(2)
for i=1:n
  Kc3(i)=Kc(i+2)
end
%   sistema en lazo cerrado
ExBC290113a
```



TERCER TEMA:

a) Red de compensación en adelanto (transitorio)

Con: ζ = 0.707 y T_s = 2s



Ubico el cero del compensador 1 en la parte real de loa polos deseados

$$\theta_{p1} = 180 - tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = 135 \quad ; \quad \theta_{p2} = 180 - tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = 116.56 \quad ; \quad \theta_{p3} = 180 - tan^{-1}\left(\frac{2}{8}\right) = 14.036$$

Criterio de fase

$$\sum Zi - \sum Pj = -180 \quad ; \quad 90 - (\theta_{p1} + \theta_{p1} + \theta_{p1} + \theta_{pc}) = -180 \quad ; \quad \theta_{pc} = 270 - (135 + 116.56 + 14.36)$$

$$\theta_{pc} = 4.4$$

Calculo la ubicación del polo del compensador 1

$$\tan(\theta_{pc}) = \frac{2}{x} \quad ; \quad x = \frac{2}{\tan(\theta_{pc})} = 26 \quad \rightarrow \quad G_{comp1}(s) = \frac{s+2}{s+28}$$

Calculo la constante que ajusta la trayectoria de las raíces haciéndola pasar por los polos deseados

Por criterio de magnitud :

$$K = \left|\frac{s(s+1)(s+10)(s+28)}{10(s+2)}\right|_{sd} = \frac{\sqrt{2^2+2^2}\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{8^2+2^2}\sqrt{26^2+2^2}}{20} = 68$$

El error de estado estacionario :

$$K_{v\_copm1} = \lim_{s\to 0} s\frac{680(s+2)}{s(s+1)(s+10)(s+28)} = 4.86 \quad \rightarrow \quad e_{ss\_comp1} = \frac{1}{K_{v\_copm1}} = 20.58\%$$

b) Red de compensación en atraso (estacionario): Como el error no se ajusta a los requerimientos, es necesario el diseño de una red de Atraso de Fase

$$e_{ss\_deseado} = 5\% \quad ; \quad K_{v\_copm2} = \frac{1}{e_{ss\_deseado}} = 20 \quad ; \quad \alpha = \frac{K_{v\_copm2}}{K_{v\_copm1}} = 4.12$$

Compensador de Atraso de Fase :

$$C_{\_comp2}(s) = \frac{s+z}{s+p} = \frac{s+\alpha p}{s+p}$$

Selecciono el cero del compensador cercano al eje imaginario :

$$z = 0.02 \quad \rightarrow \quad p = \frac{z}{\alpha} = 0.00485$$

$$C_{\_comp2}(s) = \frac{s+0.02}{s+0.00485}$$

Cuarto Tema:

$$a)\quad G(s)=\frac{K}{(s+1)(0.2s+1)(0.1s+1)}\quad ;\quad H(s)=1\quad ;\quad e_{ss}=20\%$$

$$e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}\quad\rightarrow\quad K_p=\lim_{s\to 0}G(s)=K\quad\rightarrow\quad K=4$$

$$b)\quad G(j\omega)=\frac{4}{(1+j\omega)(1+j\omega/5)(1+j\omega/10)}\quad\rightarrow\quad G=zpk([],[-1-5-10],200)$$

$$G(j\omega)=\frac{4}{(1-0.32\omega^2)+j(1.3\omega-0.02\omega^3)}=\frac{4\left((1-0.32\omega^2)-j(1.3\omega-0.02\omega^3)\right)}{(1-0.32\omega^2)^2+(1.3\omega-0.02\omega^3)^2}=R(\omega)+jI(\omega)$$

$$I(\omega_{cp})=0\quad\rightarrow\quad 1.3\omega_{cp}-0.02\omega_{cp}^3=0\quad\rightarrow\quad \omega_{cp}=8$$

$$R(\omega_{cp})=\frac{4(1-0.32\omega_{cp}^2)}{(1-0.32\omega_{cp}^2)^2}=-0.202$$

$$|G(j\omega)|=\frac{4}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+0.3\omega^2}\sqrt{1+0.01\omega^2}}\quad ;\quad \measuredangle G(j\omega)=-\tan^{-1}(\omega)-\tan^{-1}(0.2\omega)-\tan^{-1}(0.1\omega)$$

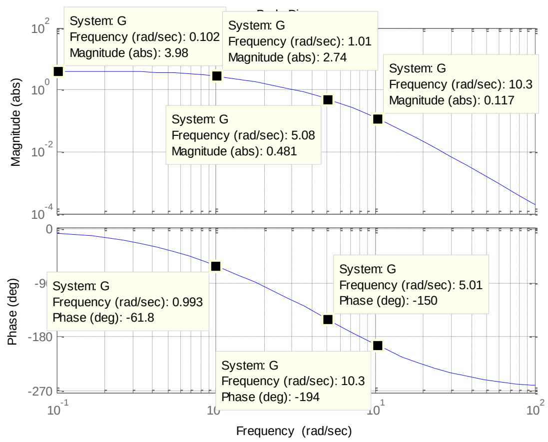
ω	$\lvert G(j\omega)\rvert$	$\measuredangle G(j\omega)$
0	4	0
1	2.76	-62.02
5	0.496	-150.25
8.06	0.202	-180
10	0.126	-192.72
∞	0	-270

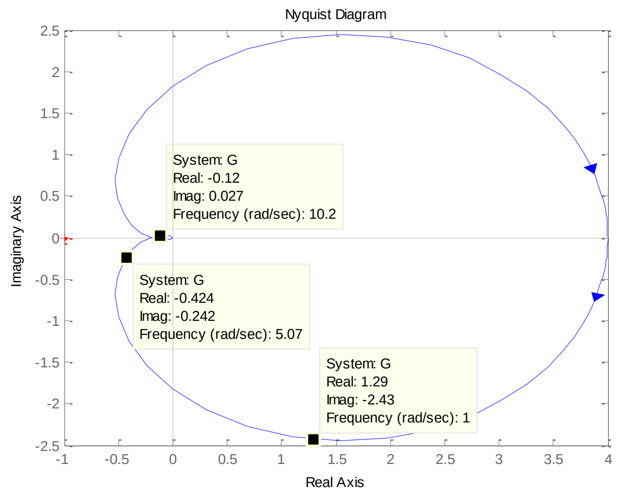
$$d)\quad MG=20\log\frac{1}{|G(j\omega_{cg})|}\quad ;\quad \omega_{cg}=8\quad\rightarrow\quad |G(j\omega_{cg})|=0.202\quad\rightarrow\quad MG=13.89dB$$

$$MF=180+\measuredangle G(j\omega_{cp})\quad ;\quad \omega_{cp}=3\quad\rightarrow\quad \measuredangle G(j\omega_{cp})=-121\quad\rightarrow\quad MF=59$$

b)

Gráfico log-log





c)

Puesto que no hay polos de Lazo Abierto (o polos de la Ecuación Característica) en el semiplano del plano complejo ‘s’ de la derecha:

P=0

En el gráfico de Nyquist se observa que no hay circulamientos del punto (-1 j0):

N=0

Por lo tanto:

Z = N + P =0

El sistema para ese valor de K es estable ya que no hay zeros de la Ecuación Característica (raices de la Ecuación Característica) en el semiplano de la derecha del plano complejo ‘s’.

d)