

SOLUCIÓN

TEMA 1 (8 puntos)

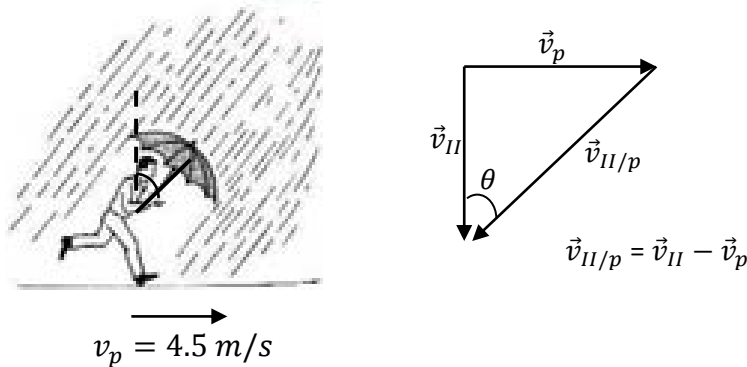
Una persona corre con una rapidez constante de 4.5 m/s sobre una pista horizontal mientras llueve y las gotas de agua caen verticalmente con una rapidez de 6.0 m/s. Ambos valores se miden con respecto al suelo.

- ¿Con qué rapidez ve caer la lluvia dicha persona? (4 puntos)
- ¿Qué ángulo respecto de la vertical deberá inclinar su paraguas para mojarse lo menos posible? (4 puntos)

Para una persona parada (fija en tierra) las gotas de lluvia caen verticalmente a razón de $v_{II} = 6.0$ m/s y por consiguiente ubica su paraguas verticalmente para no mojarse.



Pero, cuando la persona corre hacia la derecha ve caer las gotas de lluvia en otra dirección, la cual determinaremos del siguiente modo.



Del triángulo de velocidades con $\vec{v}_{II}(\downarrow)$ y $\vec{v}_p(\rightarrow)$, deducimos que se ve caer las gotas con la velocidad relativa $\vec{v}_{II/p}(\swarrow)$, cuyo módulo lo determinamos mediante

$$v_{II/p} = \sqrt{v_{II}^2 + v_p^2} = \sqrt{6^2 + 4.5^2}$$

$$\therefore v_{II/p} = 7.5 \text{ m/s}$$

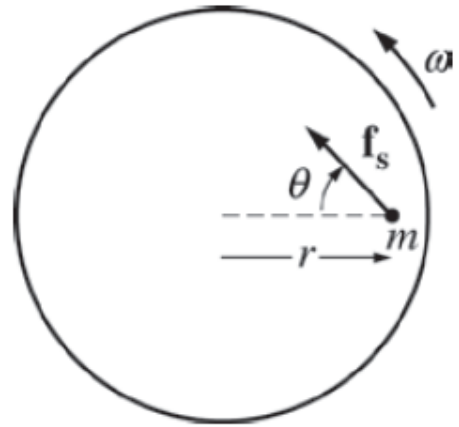
Respecto al ángulo (θ) que debe inclinar el paraguas para mojarse lo menos posible debe inclinarse en la dirección de la velocidad relativa $\vec{v}_{II/p}$. Del gráfico tenemos que

$$\tan\theta = \frac{v_p}{v_{II}} = \frac{4.5}{6} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \theta = 37^\circ$$

TEMA 2 (8 puntos)

Una pequeña partícula de masa m está en reposo sobre una plataforma circular horizontal que es libre de girar alrededor de un eje vertical a través de su centro. La partícula se encuentra en un radio r desde el eje, como se muestra en la figura. La plataforma comienza a girar con aceleración angular constante α . Debido a la fricción entre la partícula y la plataforma, la partícula permanece en reposo con respecto a la plataforma. Cuando la plataforma ha alcanzado una rapidez angular ω , la fuerza de fricción estática \mathbf{f}_s forma un ángulo θ con la dirección radial. Determine, en términos de m , r , α y ω , en ese instante:



a) la aceleración radial de la partícula (2 puntos)

$$a_{rad} = \omega^2 r$$

b) la aceleración tangencial de la partícula (2 puntos)

$$a_{tan} = \alpha r$$

c) el valor de θ (4 puntos)

$$F_{rad} = ma_{rad} \quad \Rightarrow \quad f_s \cos \theta = m\omega^2 r$$

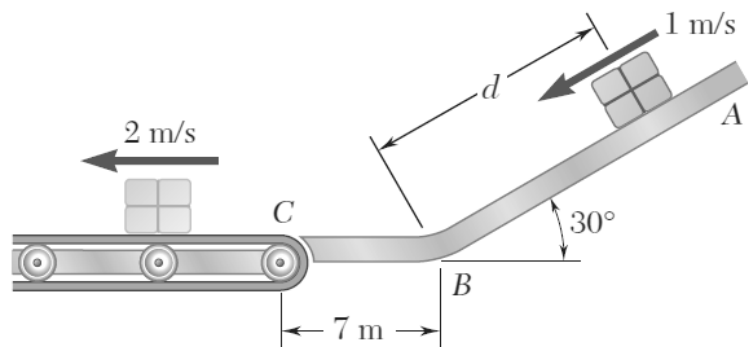
$$F_{tan} = ma_{tan} \quad \Rightarrow \quad f_s \sin \theta = m\alpha r$$

$$\frac{f_s \sin \theta}{f_s \cos \theta} = \frac{m\alpha r}{m\omega^2 r}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\alpha}{\omega^2} \right)$$

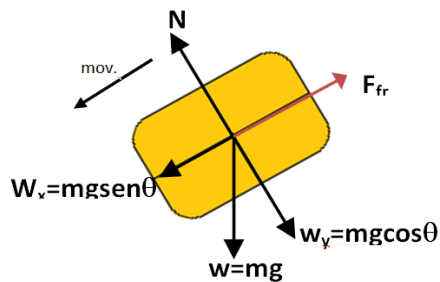
TEMA 3 (12 puntos)

Los paquetes que se muestran en la figura se lanzan hacia abajo sobre un plano inclinado en A con una rapidez de 1 m/s. Los paquetes se deslizan a lo largo de la superficie ABC hacia una banda transportadora que se mueve con una rapidez de 2 m/s. Si se sabe que $\mu_k = 0.25$ entre los paquetes y la superficie desde A hasta C. Los paquetes deben llegar al punto C con una rapidez de 2 m/s.

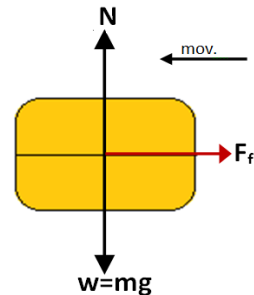


- a) Realice el diagrama de cuerpo libre para el paquete cuando se encuentra en la superficie AB y en la superficie BC (2 puntos)

Quando se encuentra en la superficie AB



Quando se encuentra en la superficie BC



- b) Determine la rapidez de la caja en el punto B (5 puntos)

Durante la trayectoria B-C hay pérdida de energía mecánica debido a la fricción que actúa en sentido contrario al movimiento. Tomando como nivel de referencia

$$\begin{aligned}
 W_{FNC BC} &= \Delta E_{BC} \\
 -\mu N_{BC} d_{BC} &= E_C - E_B \\
 -\mu(mg)d_{BC} &= (K_C + U_C) - (K_B + U_B) \\
 -\mu(mg)d_{BC} &= \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 \\
 -\mu(mg)d_{BC} - \frac{1}{2}mv_C^2 &= -\frac{1}{2}mv_B^2 \\
 v_B &= \sqrt{v_C^2 + 2\mu g d_{BC}}
 \end{aligned}$$

$$v_B = 6.2 \text{ m/s}$$

c) ¿Cuál debe ser la distancia d para que los paquetes lleguen a C con $v = 2 \text{ m/s}$? (5 puntos)

Durante la trayectoria A-B hay pérdida de energía mecánica debido a la fricción que actúa en sentido contrario al movimiento. Tomamos como nivel de referencia el punto B.

$$\begin{aligned}
 W_{FNC\ AB} &= \Delta E_{AB} \\
 -\mu N_{AB} d_{AB} &= E_B - E_A \\
 -\mu(mg \cos 30^\circ) d_{AB} &= (K_B + U_B) - (K_A + U_A) \\
 -\mu(mg \cos 30^\circ) d_{AB} &= \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 - mg d_{AB} \sin 30^\circ
 \end{aligned}$$

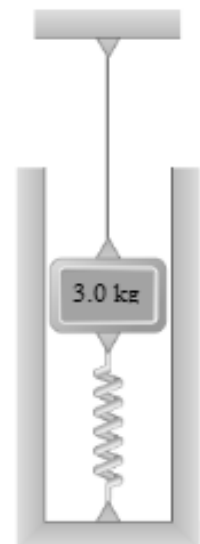
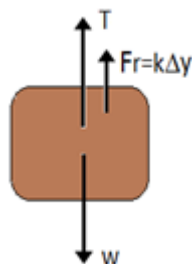
$$d_{AB} = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2g(\sin 30^\circ - \mu \cos 30^\circ)}$$

$$d_{AB} = 6.7 \text{ m}$$

TEMA 4 (12 puntos)

Un bloque de 3.0 kg está unido a un cable y a un resorte como se muestra en la figura. La constante del resorte es $k = 14 \text{ N/m}$ y la tensión en el cable es de 15 N .

a) Realice el diagrama de cuerpo libre del bloque (1 punto)



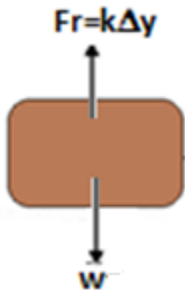
b) ¿Cuál es la deformación del resorte si el bloque se encuentra en equilibrio? (3 puntos)

$$\begin{aligned}
 \sum F_Y &= 0 \\
 w - T - Fr &= 0 \\
 w - T &= k y_A \\
 y_A &= \frac{w - T}{k} \\
 y_A &= 1.03 \text{ m} \downarrow
 \end{aligned}$$

En cierto instante se corta el cable. En estas condiciones, determine:

c) la máxima deformación del resorte (3 puntos)

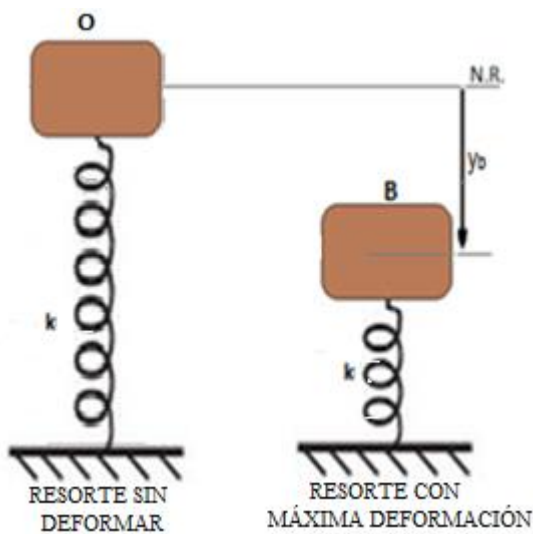
Cuando se corta el cable, el bloque queda sometido a la fuerza de la gravedad y a la fuerza de restauración producida por el resorte.



$$\begin{aligned} \sum F_Y &= 0 \\ w - Fr &= 0 \\ w &= k y_B \\ y_B &= \frac{w}{k} \\ y_B &= 2.10 \text{ m} \downarrow \end{aligned}$$

d) la rapidez máxima del bloque (5 puntos)

Tomando el nivel de referencia desde la posición del resorte cuando no está deformado. Las únicas fuerzas que actúan (peso y fuerza elástica) son conservativas, por lo que la energía mecánica se conserva. El bloque experimenta la máxima velocidad (máxima energía cinética) cuando la energía potencial gravitacional y la energía potencial elástica son cero.



$$\begin{aligned} E_O &= E_B \\ (K_B + U_B + U_{eB}) &= (K_O + U_O + U_{eO}) \\ \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B + \frac{1}{2}ky_B^2 &= \frac{1}{2}mv_O^2 + mgh_O + \frac{1}{2}ky_O^2 \end{aligned}$$

Como la velocidad en el punto B, es cero ($v_B = 0$), entonces la energía cinética es cero. En el punto inicial o nivel de referencia la velocidad es máxima y la energía potencial elástica es cero, de igual forma que la energía potencial gravitacional

$$\begin{aligned} mgy_B + \frac{1}{2}ky_B^2 &= \frac{1}{2}mv_O^2 \\ v_O &= \sqrt{\frac{ky_B^2 + 2mgy_B}{m}} \end{aligned}$$

$$v_O = 7.9 \text{ m/s}$$

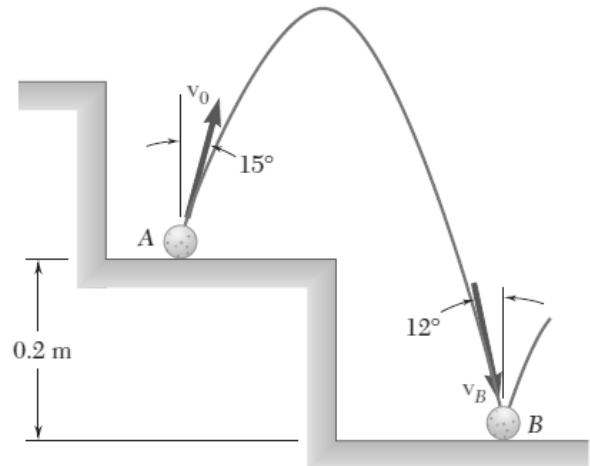
TEMA 5 (10 puntos)

Una pelota se deja caer sobre un escalón en el punto A y rebota con velocidad v_o a un ángulo de 15° con la vertical. Si justo antes de que la pelota rebote en el punto B su velocidad v_B forma un ángulo de 12° con la vertical. Determine:

- a) La razón de las rapidezces $\frac{v_B}{v_o}$ (4 puntos)

La componente horizontal de la velocidad es constante:

$$\begin{aligned}(v_o)_x &= (v_B)_x \\ v_o \cdot \text{sen } 15^\circ &= v_B \cdot \text{sen } 12^\circ \\ \frac{v_B}{v_o} &= \frac{\text{sen } 15^\circ}{\text{sen } 12^\circ} \\ \frac{v_B}{v_o} &= 1.24\end{aligned}$$



- b) El valor de v_o (6 puntos)

Analizando la componente vertical de la velocidad, donde actúa la aceleración de la gravedad:

$$\begin{aligned}(v_B)_y^2 &= (v_o)_y^2 - 2g\Delta Y \\ (-v_B \cdot \cos 12^\circ)^2 &= (+v_o \cdot \cos 15^\circ)^2 - 2g(-20.32 \times 10^{-2})\end{aligned}$$

Esta última expresión combinada con el resultado obtenido en el literal anterior:

$$(-1.24 \cdot v_o \cdot \cos 12^\circ)^2 = (+v_o \cdot \cos 15^\circ)^2 - 2g(-20.32 \times 10^{-2})$$

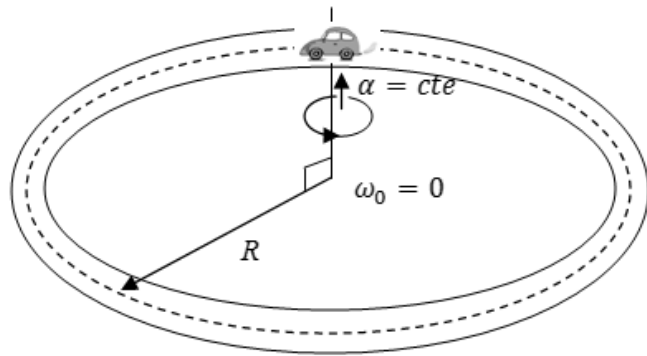
De donde despejando y evaluando para v_o :

$$\begin{aligned}v_o &= \sqrt{\frac{2(9.8)(20.32 \times 10^{-2})}{(1.24 \cdot \cos 12^\circ)^2 - \cos^2 15^\circ}} \\ v_o &= 2.72 \text{ m/s}\end{aligned}$$

TEMA 6 (9 puntos)

Un piloto sale a probar su automóvil en una pista circular y se observa que, partiendo desde el reposo, recorre la pista con aceleración angular constante y la primera vuelta la realiza en 10 min.

a) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración angular? (3 puntos)



Por condición del problema se sabe que cuando el automóvil da una vuelta transcurren

$$t = 10 \text{ min} = 600 \text{ s}$$

Donde el radio de giro R barre un ángulo $\theta = 2\pi \text{ rad}$; entonces el módulo de la aceleración angular α se puede calcular con

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \Rightarrow 2\pi &= \frac{1}{2} \alpha (600)^2 \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{4\pi}{(600)^2} \text{ rad/s}^2 \\ \Rightarrow \alpha &= 3.45 \times 10^{-5} \text{ rad/s}^2\end{aligned}$$

b) Determine el tiempo que tarda en recorrer la tercera vuelta (6 puntos)

Sean t_2 y t_3 el tiempo que transcurre desde el instante que el automóvil inicia su movimiento hasta que termina la segunda y tercera vuelta respectivamente t_x el tiempo que tarda el automóvil en dar la tercera vuelta. Se deduce que

$$t_x = t_3 - t_2$$

Como cuando transcurre t_2 el radio de giro R barre un ángulo $\theta_2 = 2(2\pi) = 4\pi \text{ rad}$, entonces

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \omega_0 t_2 + \frac{1}{2} \alpha t_2^2 \\ \Rightarrow 4\pi &= \frac{1}{2} \alpha t_2^2\end{aligned}$$

Despejando t_2

$$t_2 = \sqrt{\frac{8\pi}{\alpha}} = 600\sqrt{2} \text{ s}$$

Asimismo cuando ha transcurrido t_3 el radio de giro barre un ángulo de

$$\theta_3 = 3(2\pi) = 6\pi \text{ rad}$$

De esta manera

$$\theta_3 = \omega_0 t_3 + \frac{1}{2} a t_3^2$$

$$\Rightarrow 6\pi = \frac{1}{2} a t_3^2$$

Despejando t_3

$$t_3 = \sqrt{\frac{12\pi}{a}} = 600\sqrt{3} \text{ s}$$

Finalmente:

$$t_x = 600(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \text{ s}$$

$$t_x = 10(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \text{ min} \approx 3.2 \text{ min}$$

TEMA 7 (11 puntos)

Cuando un tren está viajando a lo largo de una línea recta a razón de 2.0 m/s, éste comienza a acelerar

con $a = kv^{-4} \text{ (m/s}^2\text{)}$, donde v está en m/s y $k = 60$.

a) ¿Cuáles son las unidades de k ? (1 punto)



$$k = a/v^{-4} = av^4$$

$$[k] = (\text{m/s}^2)(\text{m/s})^4$$

$$[k] = \text{m}^5/\text{s}^6$$

b) Determinar la rapidez del tren 3.0 s después de acelerar (5 puntos)

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$dt = \frac{dv}{a}$$

$$\int_0^3 dt = \int_2^v \frac{dv}{60v^{-4}}$$

$$3 - 0 = \frac{1}{300}(v^5 - 32)$$

$$v = 3.9 \text{ m/s}$$

c) Determinar la posición del tren 3.0 s después de acelerar (5 puntos)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx}$$

$$a dx = v dv$$

$$dx = \frac{v dv}{a}$$

$$dx = \frac{1}{60} v^5 dv$$

$$\int_0^x ds = \frac{1}{60} \int_2^{3.9} v^5 dv$$

$$x = \left. \frac{1}{60} \frac{v^6}{6} \right|_2^{3.9}$$

$$x = 9.6 \text{ m}$$