



# **ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL**

**Instituto de Ciencias Matemáticas**

**Ingeniería en Estadística Informática**

**“Equidistribución en Caminatas Aleatorias:  
Resultados Teóricos y Validación Experimental del  
Modelo Estocástico utilizando Simulación”**

**TESIS DE GRADO**

Previa a la obtención del título de:

**INGENIERA EN ESTADÍSTICA INFORMÁTICA**

Presentada por:

**Mónica Tamara Bravo Valarezo**

**GUAYAQUIL - ECUADOR**

**AÑO**

**2004**

## AGRADECIMIENTO

A todas las personas que de una u otra manera colaboraron en la realización de la presente investigación y en especial a la gran ayuda de mi Director el Mat. John Ramírez Figueroa.

# DEDICATORIA

A Dios  
A mis padres  
A mis hermanas  
Y a todos mis familiares

## **TRIBUNAL DE GRADUACIÓN**

---

**ING. LUIS RODRÍGUEZ**  
**SUB-DIRECTOR DEL ICM**

---

**MAT. JOHN RAMÍREZ**  
**DIRECTOR DE TESIS**

---

**MAT. CÉSAR GUERRERO**  
**VOCAL**

---

**ING. WASHINGTON ARMAS**  
**VOCAL**

## **DECLARACIÓN EXPRESA**

**“La responsabilidad del contenido de esta tesis de grado, me corresponde exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma a la ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL”**

(Reglamento de graduación de la ESPOL)

---

Mónica Tamara Bravo Valarezo

## **RESUMEN**

El presente trabajo tiene un enfoque pragmático sobre uno de los temas más importantes en Estadística: las Caminatas Aleatorias. El objetivo es validar experimentalmente los principales resultados teóricos sobre caminatas aleatorias binomiales mediante simulación numérica. Para esto, el estudio se ha desarrollado de la siguiente manera:

En el capítulo 1, se define de manera general el soporte teórico referente a Procesos Estocásticos.

En el capítulo 2, se describe las principales definiciones y teoremas de caminatas aleatorias que toman valores binomiales.

En el capítulo 3, se desarrolla el análisis comparativo entre el sustento teórico descrito en el capítulo 2 y los resultados obtenidos en la simulación de caminatas aleatorias.

En el capítulo 4 se presentan las más importantes conclusiones y recomendaciones obtenidas de la presente investigación.

# INDICE GENERAL

	<b>Pág.</b>
RESUMEN.....	II
ÍNDICE GENERAL.....	III
ABREVIATURAS.....	VI
SIMBOLOGÍA.....	VII
ÍNDICE DE GRÁFICOS.....	VIII
ÍNDICE DE TABLAS.....	X
INTRODUCCIÓN.....	1

## **Capítulo 1. PROCESOS ESTOCÁSTICOS**

1.1. Introducción.....	2
1.2. Definiciones Generales.....	3
1.2.1. Probabilidad.....	3
1.2.2. Variable Aleatoria .....	5
1.2.3. Proceso Estocástico.....	9
1.3. Funciones Generadoras.....	12
1.3.1. Definición.....	13
1.3.2. Convolución.....	15
1.3.3. Distribuciones Compuestas.....	18
1.3.4. Funciones Generadoras de Momentos y Acumuladas.....	19

1.4. Eventos Recurrentes.....	21
1.4.1. Definición.....	21
1.4.2. Teoremas Básicos.....	23
1.5. Modelos de Caminatas Aleatorias.....	24
1.6. Cadenas de Markov.....	25
1.6.1. Definición.....	25
1.6.2 Clasificación de Estados.....	28
1.6.3 Clasificación de Cadenas.....	30

## **Capítulo 2. CAMINATAS ALEATORIAS**

2.1. Introducción.....	32
2.2. Definiciones Básicas.....	33
2.3. Resultados Importantes.....	46
2.4. Dualidad y Equidistribución.....	54

## **Capítulo 3. SIMULACIÓN ESTOCÁSTICA**

3.1. Introducción.....	61
3.2. Definición de Simulación.....	62
3.2.1 Metodología para Realizar una Simulación.....	62
3.3 Métodos de Generación de Números Pseudoaleatorios.....	65
3.3.1 Generadores Congruenciales.....	66
3.4 Métodos de Generación de Variables Aleatorias.....	69
3.4.1 Método de la Transformada Inversa.....	69
3.4.2 Método de Aceptación y Rechazo.....	72

3.4.3 Método de Composición.....	73
3.4.4 Generación de una Variable Aleatoria Bernoulli.....	75
3.4.5 Generación de una Variable Aleatoria Binomial.....	76
3.4.6 Generación de una Variable Aleatoria Normal.....	80
3.5 Simulador de Caminatas Aleatorias.....	85
3.5.1 Características del Experimento.....	94
3.6 Resultados Obtenidos.....	95
3.6.1 Aplicación del Teorema de Equidistribución.....	146
3.6.2 Análisis Comparativo	148

#### **Capítulo 4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

4.1. Conclusiones.....	153
4.2 Recomendaciones.....	158

ANEXOS

BIBLIOGRAFÍA

## ABREVIATURAS

E	Evento
log	Logaritmo en base 10
Var.	Varianza
C. A.	Caminatas Aleatorias

## SIMBOLOGÍA

$\Omega$	Espacio Muestral
$X$	Variable Aleatoria
$\Sigma$	Sumatoria
$\mu$	Media Poblacional
$\sigma^2$	Varianza Poblacional
$\sigma$	Desviación estándar de la población
$\alpha_3$	Coficiente de asimetría de la población
$\alpha_4$	Coficiente de kurtosis de la población
$\pi$	Pi
$E(x)$	Valor esperado de x
$f(x)$	Función de distribución de probabilidad
$Var(x)$	Varianza de x
$M(\theta)$	Función Generadora de Momentos
$\phi(x)$	Función Característica

## INDICE DE GRÁFICOS

	<b>Pág.</b>
Gráfico 1.1 Función de distribución de x	6
Gráfico 1.2 Función de distribución de x	8
Gráfico 2.1 Trayectorias	34
Gráfico 2.2 Principio de Reflexión	38
Gráfico 2.3 Trayectorias Positivas	39
Gráfico 2.4 Trayectoria que pasa por el punto (2,2)	40
Gráfico 2.5 $f(x)$	48
Gráfico 2.6 Caminata aleatoria original	55
Gráfico 2.7 Nueva caminata aleatoria	56
Gráfico 3.1 Función de Distribución de Probabilidad de la Variable Aleatoria X	71
Gráfico 3.2 Distribución de probabilidad original en sub-áreas	73
Gráfico 3.3 Distribución Acumulada en la áreas	74
Gráfico 3.4 Función de probabilidad de la distribución Binomial( $x: 10 ; 0.5$ )	77
Gráfico 3.5 Función de densidad de probabilidad de la distribución Normal( $0 , 1$ )	80
Gráfico 3.6 Pantalla de inicio de la simulación	87
Gráfico 3.7 Pantalla de búsqueda del 1 <sup>er</sup> retorno al origen en la n-ésima posición	88
Gráfico 3.8 Pantalla de búsqueda del n-ésimo retorno al origen	89
Gráfico 3.9 Pantalla de búsqueda de retornos en la n-ésima posición	90

Gráfico 3.10	Pantalla de búsqueda de la última visita en la n-ésima posición	91
Gráfico 3.11	Pantalla de análisis para tiempos de permanencia	92
Gráfico 3.12	Pantalla de ploteo de caminatas aleatorias	93
Gráfico 3.13	Pantalla de resultados generales	94
Gráfico 3.14	Valores estimados para $u_{2v}$ . Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000	97
Gráfico 3.15	Valores estimados para $f_{2n}$ . Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000	100
Gráfico 3.16	Valores estimados para $u_{2v}$ . Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000	106
Gráfico 3.17	Valores estimados para $f_{2n}$ . Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000	108
Gráfico 3.18	Valores estimados para $u_{2v}$ . Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000	114
Gráfico 3.19	Valores estimados para $f_{2n}$ . Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000	115
Gráfico 3.20	Valores estimados para $u_{2v}$ . Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000	120
Gráfico 3.21	Valores estimados para $f_{2n}$ . Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000	122
Gráfico 3.22	Valores estimados para $u_{2v}$ . Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000	127
Gráfico 3.23	Valores estimados para $f_{2n}$ . Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000	129
Gráfico 3.24	Valores estimados para $u_{2v}$ . Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000	134
Gráfico 3.25	Valores estimados para $f_{2n}$ . Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000	136
Gráfico 3.26	Valores estimados para $u_{2v}$ . Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000	141
Gráfico 3.27	Valores estimados para $f_{2n}$ . Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000	143
Gráfico 3.28	Gráfico comparativo de los errores $ u_{2v} - \hat{u}_{2v} $ para todas las simulaciones	150
Gráfico 3.29	Gráfico comparativo de los errores $ f_{2n} - \hat{f}_{2n} $ para todas las simulaciones	152

## INDICE DE TABLAS

		<b>Pág.</b>
Tabla I	Espacio muestral de un experimento de lanzar dos dados	4
Tabla II	Distribución continua del arco seno $A(x)=2/\pi \arcsin(x)^{1/2}$	48
Tabla III	Características de la Distribución Binomial	78
Tabla IV	Características de la Distribución Normal	81
Tabla V	Principales enunciados a comprobar mediante simulación	95
Tabla VI	Posición de los retornos. Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000	96
Tabla VII	Número de caminatas que tuvieron un retorno al origen en la posición $2v$ . Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000	97
Tabla VIII	Errores para $u_{2v}$ . Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000	98
Tabla IX	Número de caminatas que tuvieron el primer retorno al origen en la posición $2n$ . Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000	99
Tabla X	Errores para $f_{2n}$ . Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000	99
Tabla XI	Número de caminatas aleatorias que tuvieron su última visita en el tiempo $2k$ . Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000	101
Tabla XII	Errores para $\alpha_{2k, 2n}$ . Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000	101
Tabla XIII	Número de caminatas que estuvieron $2k$ unidades de tiempo en el lado positivo. Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000	102
Tabla XIV	Errores para $\alpha_{2k, 2n}$ . Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000	103
Tabla XV	Posición de los retornos. Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000	104

Tabla XVI	Número de caminatas que tuvieron un retorno al origen en la posición $2v$ . Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000	105
Tabla XVII	Errores para $u_{2v}$ . Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000	105
Tabla XVIII	Número de caminatas que tuvieron el primer retorno al origen en la posición $2n$ . Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000	107
Tabla XIX	Errores para $f_{2n}$ . Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000	107
Tabla XX	Número de caminatas aleatorias que tuvieron su última visita en el tiempo $2k$ . Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000	109
Tabla XXI	Errores para $\alpha_{2k, 2n}$ . Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000	109
Tabla XXII	Número de caminatas que estuvieron $2k$ unidades de tiempo en el lado positivo. Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000	110
Tabla XXIII	Errores para $\alpha_{2k, 2n}$ . Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000	111
Tabla XXIV	Posición de los retornos. Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000	112
Tabla XXV	Número de caminatas que tuvieron un retorno al origen en la posición $2v$ . Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000	112
Tabla XXVI	Errores para $u_{2v}$ . Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000	113
Tabla XXVII	Número de caminatas que tuvieron el primer retorno al origen en la posición $2n$ . Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000	114
Tabla XXVIII	Errores para $f_{2n}$ . Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000	114
Tabla XXIX	Número de caminatas aleatorias que tuvieron su última visita en el tiempo $2k$ . Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000	116
Tabla XXX	Errores para $\alpha_{2k, 2n}$ . Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000	116
Tabla XXXI	Número de caminatas que estuvieron $2k$ unidades de tiempo en el lado positivo. Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000	117
Tabla XXXII	Errores para $\alpha_{2k, 2n}$ . Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000	118

Tabla XXXIII	Posición de los retornos. Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000	119
Tabla XXXIV	Número de caminatas que tuvieron un retorno al origen en la posición $2v$ . Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000	119
Tabla XXXV	Errores para $u_{2v}$ . Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000	120
Tabla XXXVI	Número de caminatas que tuvieron el primer retorno al origen en la posición $2n$ . Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000	121
Tabla XXXVII	Errores para $f_{2n}$ . Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000	122
Tabla XXXVIII	Número de caminatas aleatorias que tuvieron su última visita en el tiempo $2k$ . Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000	123
Tabla XXXIX		123
Tabla XL	Número de caminatas que estuvieron $2k$ unidades de tiempo en el lado positivo. Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000	124
Tabla XLI	Errores para $\alpha_{2k, 2n}$ . Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000	125
Tabla XLII	Posición de los retornos. Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000	126
Tabla XLIII	Número de caminatas que tuvieron un retorno al origen en la posición $2v$ . Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000	126
Tabla XLIV		127
Tabla XLV	Número de caminatas que tuvieron el primer retorno al origen en la posición $2n$ . Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000	128
Tabla XLVI		128
Tabla XLVII	Número de caminatas aleatorias que tuvieron su última visita en el tiempo $2k$ . Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000	129
Tabla XLVIII		130
Tabla XLIX	Número de caminatas que estuvieron $2k$ unidades de tiempo en el lado positivo. Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000	131

Tabla L	Errores para $\alpha_{2k, 2n}$ . Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000	132
Tabla LI	Posición de los retornos. Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000	133
Tabla LII	Número de caminatas que tuvieron un retorno al origen en la posición $2v$ . Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000	133
Tabla LIII	Errores para $u_{2v}$ . Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000	134
Tabla LIV	Número de caminatas que tuvieron el primer retorno al origen en la posición $2n$ . Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000	135
Tabla LV		135
Tabla LVI	Número de caminatas aleatorias que tuvieron su última visita en el tiempo $2k$ . Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000	137
Tabla LVII	Errores para $\alpha_{2k, 2n}$ . Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000	137
Tabla LVIII	Número de caminatas que estuvieron $2k$ unidades de tiempo en el lado positivo. Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000	138
Tabla LIX	Errores para $\alpha_{2k, 2n}$ . Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000	139
Tabla LX	Posición de los retornos. Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000	140
Tabla LXI	Número de caminatas que tuvieron un retorno al origen en la posición $2v$ . Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000	140
Tabla LXII		141
Tabla LXIII	Número de caminatas que tuvieron el primer retorno al origen en la posición $2n$ . Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000	142
Tabla LXIV		142
Tabla LXV	Número de caminatas aleatorias que tuvieron su última visita en el tiempo $2k$ . Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000	144
Tabla LXVI		144

Tabla LXVII	Número de caminatas que estuvieron $2k$ unidades de tiempo en el lado positivo. Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000	145
Tabla LXVIII	Errores para $\alpha_{2k, 2n}$ . Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000	146
Tabla LXIX	Valores Estimados del número de trayectorias de longitud $2n$ . Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000	147
Tabla LXX	Tabla Comparativa entre los valores teóricos y los valores estimados de $u_{2v}$	148
Tabla LXXI	Tabla Comparativa de los errores $ u_{2v} - \hat{u}_{2v} $ para todas las simulaciones	149
Tabla LXXII	Tabla Comparativa entre los valores teóricos y los valores estimados de $f_{2v}$	150
Tabla LXXIII	Tabla Comparativa de los errores $ f_{2n} - \hat{f}_{2n} $ para todas las simulaciones	151

## INTRODUCCIÓN

Las caminatas aleatorias son uno de los procesos estocásticos más importantes, el cual es analizado en términos del movimiento de una partícula que se desplaza en saltos discretos con una cierta probabilidad de punto a punto. Este estudio se enfoca a caminatas aleatorias binomiales, es decir que toma únicamente dos valores posibles.

Entre los principales resultados teóricos sobre caminatas aleatorias binomiales se tiene, la probabilidad de retornar al origen en el tiempo  $2v$ , donde un retorno al origen representa el momento en el cual la suma de los valores obtenidos es igual a cero ( $S_{2v}=0$ ). También se tiene la probabilidad de que el primer retorno al origen ocurra en el tiempo  $2n$ , la ley del arco seno de las últimas visitas, la ley discreta del arco del arco seno para tiempos de permanencia, el teorema de equidistribución y demás, lo cual nos da una orientación acerca de este tipo de fenómeno de fluctuación. Es por ello que recurriremos por medio de simulaciones numéricas a la comparación entre los resultados teóricos y los estimados, a fin de validar por medio de los valores obtenidos las principales conclusiones teóricas que nos muestran el comportamiento de caminatas aleatorias binomiales.

# CAPÍTULO 1

## 1. PROCESOS ESTOCÁSTICOS

### 1.1. Introducción

En el presente capítulo se describe las definiciones generales relacionadas con los Procesos Estocásticos las cuales serán parte fundamental teórica para la presente investigación. En este capítulo se describen, en la sección 1.2 los conceptos relacionados con las funciones generadoras, convolución, distribuciones compuestas, funciones generadoras de momentos y acumuladas.

En la sección 1.3 los conceptos referentes a Eventos Recurrentes y los teoremas básicos que los rigen. La sección 1.4 contiene de manera general la teoría concerniente a los modelos de caminatas aleatorias. La sección 1.5 comprende los conceptos relacionados a Cadenas de Markov para Procesos Discretos, donde se incluye su definición, notación, clasificación de estados, clasificación de cadenas, y evaluación de  $P^n$ . La notación descrita en este capítulo hace referencia al texto "*The Elements of Stochastic Processes*" (Bailey N. T. J.).

## 1.2. Definiciones Generales

### 1.2.1. Probabilidad

Sea  $\Omega$  el espacio muestral,  $\mathcal{P}(\Omega)$  el conjunto de las partes de  $\Omega$ , o el conjunto de eventos. Se define probabilidad, o función de probabilidad, a cualquier función  $p: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathcal{R}$  que cumpla los siguientes axiomas:

$$\text{I) } 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$\text{II) } P(\Omega) = 1$$

$$\text{III) } P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad A \text{ y } B \text{ mutuamente excluyentes.}$$

A la estructura  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$  se le denomina espacio de probabilidad.

Por ejemplo si se tiene el experimento aleatorio de tirar un dado, el espacio muestral está dado por:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

En este espacio el conjunto de eventos es  $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{1,2\}, \{1,3\}, \dots, \{1,2,3,4,5,6\}\}$ . Sin embargo si se ha asignado a los

sucesos elementales  $p(\{1\})= p(\{2\})= \dots= p(\{6\})= 1/6$ , por la propiedad II), la probabilidad del suceso  $\{1,3\}$  es :

$$p(\{1,3\})= p(\{1\})+ p(\{3\})=2/6$$

Siendo el evento  $\{1\}$   $E_1=$  "el resultado de tirar el dado es la cara 1", el evento  $\{1, 3\}$   $E_2=$  "el resultado de tirar el dado es la cara 1, o la 3", el evento  $\{1, 3, 5\}$   $E_3=$  "el resultado de tirar el dado es una cara impar".

Ahora si consideramos el experimento de lanzar dos dados. El espacio muestral que resulta de este experimento contiene 36 resultados distintos:

**Tabla I**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Espacio muestral de un experimento de lanzar dos dados**

Dados: A B	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Elaboración: M. Bravo

Si asumimos que los dados se encuentran equilibrados, la probabilidad de observar cualquiera de estos 36 resultados es

1/36. Así  $P(3, 1) = 1/36$ . Si encontramos la probabilidad de que se observe el 3 en el dado  $A$  y como éste es uno de seis posibles resultados y cada uno de ellos tiene la misma posibilidad de ser observado, la probabilidad deseada es  $1/6$ .

### 1.2.2.Variable Aleatoria

Una variable aleatoria es una función que asigna un número real a cada uno de los puntos de un espacio muestral  $\Omega$ .

$$X : \Omega \rightarrow R$$

Por ejemplo, en el juego de lanzar monedas, los posibles resultados son {cara, sello}, y sus probabilidades son  $\{1/2, 1/2\}$ .

#### Lanzamiento de 2 monedas

$X(\Omega)$  = Número de CARAS

$\Omega$		$X(\Omega)$
CC	→	2
CS	→	1
SC	→	1
SS	→	0

Sea  $\{ x_1 , x_2 , \dots , x_n \}$  los valores que puede tomar la variable aleatoria  $X$ . Se denomina distribución de probabilidad de la variable aleatoria a  $P(X = x_i)$  que cumple:

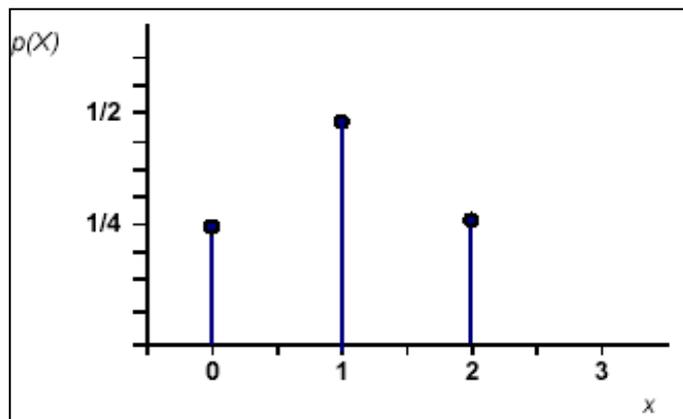
$$P(X = x_i) \geq 0$$

$$\sum_{i=1} P(X = x_i) = 1$$

Por ejemplo se tiene:

$$P(X = x) \begin{cases} 0 \rightarrow 1/4 \\ 1 \rightarrow 1/2 \\ 2 \rightarrow 1/4 \end{cases}$$

**Gráfico 1.1**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Función de distribución de  $x$**



Una variable aleatoria  $X$  se llama discreta cuando toma valores finitos o infinitos numerables y:

$$P(X = x) = \sum_x p(x)$$

Donde para cualquier número real  $x$ ,  $p(x) = P(X = x)$

Una variable aleatoria  $X$  se llama continua si existe una función llamada función de densidad de la probabilidad  $X$  ( $f(x)$ ) donde:

$$P(X = x) = \int_x f(x) dx$$

El valor esperado o esperanza matemática de una variable aleatoria discreta  $X$ , siendo  $f(x)$  el valor de su distribución de probabilidad en  $x$  se tiene que:

$$E[x] = \sum_x xf(x)$$

Si  $X$  es una variable aleatoria continua y  $f(x)$  es el valor de su densidad de probabilidad en  $x$ , el valor esperado de esta variable aleatoria está dado por:

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

En las definiciones antes mencionadas se asume la existencia de la suma o integral.

La varianza de una variable aleatoria  $X$  está definida como:

$$\text{Var}[x] = E[x^2] - E^2[x]$$

Para ilustrar las definiciones antes mencionadas, se define la siguiente población:

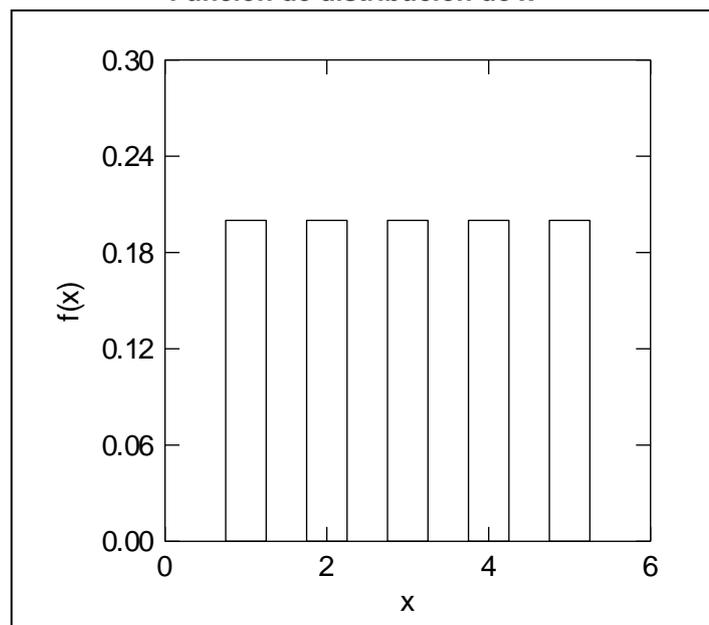
$$X = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_N\}$$

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad ; \quad N = 5$$

donde se tiene:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & , x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & , \text{resto de } x \end{cases}$$

**Gráfico 1.2**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Función de distribución de  $x$**



Calculando la media y varianza poblacionales se obtiene:

$$\mu = E[x] = \sum_{i=1}^n x_i P(X_i = x_i) = 1\left(\frac{1}{5}\right) + 2\left(\frac{1}{5}\right) + 3\left(\frac{1}{5}\right) + 4\left(\frac{1}{5}\right) + 5\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{15}{5} = 3$$

$$\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2 = \sum_{i=1}^n \left( (x_i)^2 P(X_i = x_i) \right) - \mu^2 = \sum_{i=1}^5 \left( (x_i)^2 P(X_i = x_i) \right) - 9$$

$$1\left(\frac{1}{5}\right) + 4\left(\frac{1}{5}\right) + 9\left(\frac{1}{5}\right) + 16\left(\frac{1}{5}\right) + 25\left(\frac{1}{5}\right) - 9 = \left(\frac{55}{5}\right) - 9 = 2$$

### 1.2.3. Proceso Estocástico

Un proceso estocástico  $\underline{X} = \{X(t), t \in T\}$  es una familia de variables aleatorias, es decir que para cada  $t$  en el grupo de índices  $T$ ,  $X(t)$  es una variable aleatoria. Se puede interpretar  $t$  como el tiempo y  $X(t)$  como el estado del proceso en el tiempo  $t$ . Si  $T$  es contable, entonces  $\underline{X}$  es un proceso estocástico de tiempo discreto, y si  $T$  es continuo  $\underline{X}$  es un proceso estocástico de tiempo continuo.

Cualquier realización de  $\underline{X}$  es denominado camino muestral. Por ejemplo si se tiene eventos que están ocurriendo aleatoriamente en el tiempo y  $X(t)$  representa el número de eventos que ocurren en el intervalo de  $[0, t]$ , se puede obtener un camino muestral de  $\underline{X}$  el cual corresponde al evento inicial ocurrido en el tiempo 1, el

siguiente evento en el tiempo 2 y el tercer evento en el tiempo 3, y ningún evento en cualquier otra parte.

En un proceso estocástico continuo  $\{X(t), t \in T\}$  se dice que tiene incrementos independientes si para todo  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , las variables aleatorias:

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$
 son independientes.

Esto nos dice que posee incrementos estacionarios si  $X(t + s) - X(t)$  tiene la misma distribución para todo  $t$ . Es decir, que posee incrementos independientes si los cambios en los valores del proceso sobre el no sobrepuesto tiempo de intervalos son independientes, y esto posee incrementos estacionarios si la distribución del cambio en el valor entre dos puntos sólo dependen de la distancia entre esos puntos.

**Definición:** Un proceso estocástico o familia de variables aleatorias  $\{N(t), t \geq 0\}$  es un proceso contable si  $N(t)$  representa el número total de eventos que han ocurrido hasta el tiempo  $t$ . El cual debe satisfacer las siguientes condiciones:

1.  $N(t) \geq 0$ .
2.  $N(t)$  es un valor entero.
3. Si  $s < t$ , entonces  $N(s) \leq N(t)$ .
4. Para  $s < t$ ,  $N(t) - N(s)$  es igual al número de eventos que han ocurrido en el intervalo  $(s, t]$ .

Un proceso contable se dice que tiene incrementos independientes si el número de eventos que ocurren en desunir intervalos de tiempo son independientes. Esto significa que el número de eventos que han ocurrido para el tiempo  $t$  deber ser independiente de el número de eventos ocurridos entre el tiempo  $t$  y  $t + s$ , es decir,  $N(t + s) - N(t)$ .

Además se tiene que un proceso contable posee incrementos estacionarios si la distribución de el número de eventos que ocurren al cualquier intervalo de tiempo depende solamente de la longitud de el intervalo de tiempo, es decir que el proceso tiene incrementos estacionarios si el número de eventos en el intervalo  $(t_1 + s, t_2 + s]$  tiene la misma distribución que el número de eventos en el intervalo  $(t_1, t_2]$  para todo  $t_1 < t_2$ , y  $s > 0$ . Dentro de los

procesos contables uno de los más importantes es el proceso de Poisson, el cual se lo define de la siguiente manera:

**Definición:** El proceso contable  $\{N(t), t \geq 0\}$  es un proceso de Poisson con índice  $\lambda$  donde  $\lambda > 0$ , si:

1.  $N(0) = 0$
2. El proceso tiene incrementos independientes.
3. El número de eventos en cualquier intervalo de longitud  $t$  es una distribución de Poisson con media  $\lambda t$ , para todo  $s, t \geq 0$ .

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Se tiene que un proceso de Poisson posee incrementos estacionarios y además que:

$$E[N(t)] = \lambda t,$$

en el cual  $\lambda$  es llamado el índice del proceso.

Para determinar que un proceso es un proceso de Poisson, éste debe satisfacer las condiciones antes mencionadas.

### 1.3. Funciones Generadoras

Las funciones generadoras en los procesos estocásticos involucran valores integrales de variables aleatorias no solamente en aplicaciones

teóricas sino también en aplicaciones prácticas. Donde una variable aleatoria  $X$  es una función de valor real definida sobre los elementos de  $S$ , siendo  $S$  un espacio muestral con una medida de probabilidad.

### 1.3.1. Definición

Sea  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  una sucesión de números reales, entonces introduciendo la variable aleatoria  $x$ , se define la siguiente función:

$$A(x) \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$
$$A(x) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

Si la serie converge en algún intervalo real  $-x_0 < x < x_0$ , la función  $A(x)$  es llamada función generadora de la sucesión  $\{a_j\}$ .

Si la sucesión  $\{a_j\}$  es acotada, entonces una comparación con las series geométricas muestra que  $A(x)$  converge para  $|x| < 1$ . Siendo el caso de interés que  $a_j$  sean probabilidades, introduciremos la siguiente restricción.

$$a_j \geq 0 \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j = 1$$

La correspondiente función  $A(x)$  es entonces una función generadora de probabilidades, donde consideraremos que la distribución de probabilidad esta dada por  $P(X=j) = p_j$ , donde  $X$  es una variable aleatoria con valores  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$  y siendo  $P(X > j) = q_j$ , la función de distribución está dada por  $P(X \leq j) = 1 - q_j$ . Ahora se tiene que  $E[x_j]$  representa la esperanza y  $Q(x)$  la función generadora de las probabilidades, lo cual hay que diferenciar con función generadora de probabilidades, ya que aunque sus coeficientes son probabilidades,  $Q(x)$  no constituye una distribución de probabilidades.

$$E(x_j) = \sum_{j=0} p_j x^j \qquad Q(x) = \sum_{j=0} q_j x^j$$

Además se tiene que  $P(x)$  es absolutamente convergente para  $|x| \leq 1$ , mientras que debido a que los coeficientes de  $Q(x)$  son menores que la unidad,  $Q(x)$  es absolutamente convergente para valores del intervalo abierto  $|x| < 1$ , por lo que un resultado que conecta a  $P(x)$  y  $Q(x)$  es:

$$(1 - x) Q(x) = 1 - P(x)$$

Cuando se hace referencia a que  $P(x)$  o  $Q(x)$  son absolutamente convergente, es cuando la serie formada por los valores absolutos de sus términos es convergente, es decir que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ absolutamente convergente} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ convergente}$$

Considerando el resultado que conecta a  $P(x)$  y  $Q(x)$ , se tienen entonces las fórmulas para la media y la varianza de la distribución de probabilidades  $p_j$  en términos de valores particulares de las funciones generadoras y sus derivadas. Para la media se tiene:

$$m \equiv E(x) = \sum_{j=0} p_j x^j = P'(1)$$

$$E(x) = \sum_{j=0} q_j = Q(1)$$

De la misma forma para la varianza se tiene que:

$$\sigma^2 \equiv Var(x) = P''(1) + P'(1) - \{P'(1)\}^2$$

$$\sigma^2 \equiv Var(x) = 2Q'(1) + Q(1) - \{Q(1)\}^2$$

### 1.3.2. Convolución

Sean dos variables aleatorias independientes no negativas  $X$  y  $Y$  con distribuciones de probabilidad:

$$P(X = j) = a_j \quad P(Y = k) = b_k$$

La probabilidad de el evento  $(X = j, Y = k)$  es por consiguiente  $a_j b_k$ . Por lo que ahora la forma de la nueva variable aleatoria  $X+Y$  está representada por  $S = X + Y$ . Entonces el evento  $(S = r)$  comprende a los eventos mutuamente excluyentes:  $(X = 0, Y = r), (X = 1, Y = r - 1), \dots, (X = r, Y = 0)$ .

Si la distribución de  $S$  está dada por:  $P(S = r) = c_r$ , entonces significa que  $c_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + a_2 b_{r-2} + \dots + a_r b_0$ .

Este método de componer dos sucesiones de números, los cuales no necesariamente tienen que ser probabilidades es llamado convolución. Para ello se utiliza la siguiente notación:

$$\{c_j\} = \{a_j\} * \{b_j\} .$$

Si se definen las siguientes funciones:

$$A(x) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

$$B(x) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$$

$$C(x) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$$

Puede apreciarse inmediatamente que  $C(x) = A(x) B(x)$ , donde multiplicando las dos series  $A(x)$  y  $B(x)$  y utilizando la fórmula de  $c_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + a_2 b_{r-2} + \dots + a_r b_0$  se obtiene el coeficiente  $x^r$  como de  $c_r$ .

En el caso especial de distribuciones de probabilidad, la función generadora de probabilidades de la suma  $S$  de dos variables aleatorias independientes no negativas  $X$  y  $Y$  es simplemente el producto de las funciones generadoras de probabilidades. Además si nosotros consideramos la convolución de sucesiones, la función generadora de la convolución es simplemente el producto de las funciones generadoras individuales, entonces la función generadora de  $\{a_j\} * \{b_j\} * \{c_j\} * \dots$  es  $A(x) B(x) C(x) \dots$ .

Si en particular tenemos que la suma de variables aleatorias independientes de un tipo previo es  $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ , donde  $X_k$  tiene una común distribución de probabilidad dada por  $p_j$  con función generadora de probabilidad  $P(x)$ , entonces la función generadora de probabilidad de  $S_n$  es  $\{P(x)\}^n$ . La distribución de  $S_n$  está dada por una sucesión de probabilidades, las cuales son la  $n$ -ésima convolución sobre si misma. Esto está representado de la siguiente manera:

$$\underbrace{\{p_j\} * \{p_j\} * \{p_j\} * \{p_j\} * \dots * \{p_j\}}_{n \text{ factores}} = \{p_j\}^n$$

### 1.3.3. Distribuciones Compuestas

Sea  $S_N = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N$ , donde  $P(X_k = j) = f_j$ ,  $P(N = n) = g_n$ ,  $P(S_N = l) = h_l$  y sus correspondientes funciones generadoras de probabilidades están dadas por:

$$F(x) \equiv \sum f_j x^j$$

$$G(x) \equiv \sum g_n x^n$$

$$H(x) \equiv \sum h_l x^l$$

Se tiene que la distribución de probabilidad de  $S_N$  puede ser escrita como:

$$h_l = P\{S_N = l\}$$

$$h_l = \sum_{n=0} P\{N = n\} P\{S_n = l | N = n\}$$

$$h_l = \sum_{n=0} g_n P\{S_n = l | N = n\}$$

Para un valor fijo de  $n$ , la distribución de  $S_n$  es la  $n$ -ésima doble convolución de  $\{f_j\}^n$ . De esta forma:

$$\sum P\{S_n = l | N = n\} x^l = \{F(x)\}^n$$

La función generadora de probabilidad  $H(x)$  puede ser expresada como:

$$\begin{aligned}
H(x) &= \sum h_j x^j \\
H(x) &= \sum x^j \sum g_n p\{S_n = j | N = n\} \\
H(x) &= \sum g_n \sum p\{S_n = j | N = n\} x^j \\
H(x) &= \sum g_n \{F(x)\}^n \\
H(x) &= G(f(x))
\end{aligned}$$

Se obtiene entonces una forma funcional simple de la función generadora de probabilidad de la distribución compuesta  $\{h_j\}$  de la suma  $S_N$ .

#### 1.3.4. Funciones generadoras de momentos y acumuladas

Existe un cierto número de funciones que generan momentos y acumuladas que se aplican tanto a variables aleatorias continuas como discretas. Se define la función generadora de momentos  $M(\theta)$  de una variable aleatoria  $X$  como:

$$M(\theta) = E(e^{\theta X})$$

Si  $X$  es discreta y toma el valor  $j$  con probabilidad  $p_j$ :

$$M(\theta) = \sum_j e^{\theta j} p_j \equiv P(e^{\theta})$$

Si  $X$  es continua con una distribución de probabilidad  $f(x)$ :

$$M(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta \mu} f(\mu) d\mu$$

donde  $f(u)$  es la función de densidad.

Las funciones generadoras de momentos no existen en algunos casos, por ello a menudo se prefiere trabajar con la función característica definida por:

$$\phi(\theta) = E(e^{i\theta X})$$

La función característica siempre existe. Realizando expansión de Taylor sobre dicha función se tiene que para las distribuciones continuas:

$$\phi(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta\mu} f(\mu) d\mu$$

Aplicando la transformada de Fourier para hallar la función inversa se tiene que:

$$f(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta\mu} \phi(\theta) d\theta$$

La función generadora acumulada es el logaritmo natural de la función generadora de momentos o de una función característica, la que sea más conveniente. De cualquier forma tenemos la función acumulada  $K(\theta)$  está dada por:

$$K(\theta) = \log M(\theta)$$

$$K(\theta) \equiv \sum_{r=1}^{\infty} k_r \frac{\theta^r}{r!}$$

donde  $k_r$  es la  $r$ -ésima acumulada.

## 1.4. Eventos Recurrentes

### 1.4.1. Definición

Suponga que existe una sucesión de eventos, no necesariamente independientes, para cada uno de los cuales existe un número posible de resultados  $E_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ). Considérese un evento específico  $E$  que puede ser uno de los resultados o un patrón de los resultados de los eventos, el cual puede o no puede ocurrir en cada sucesión de instantes  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Con estas definiciones se especifica la probabilidad de que  $E$  ocurra en el  $n$ -ésimo intento (no necesariamente la primera vez) como  $\mu_n$  y la probabilidad de que  $E$  ocurra por primera vez en  $n$ -ésimo intento como  $f_n$ . Por conveniencia se define:

$$\mu_0 \equiv 1, \quad f_0 \equiv 0$$

y las siguientes funciones generadoras:

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n x^n$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

La sucesión  $\{\mu_n\}$  no es una distribución de probabilidad, debido a que las probabilidades se refieren a eventos que no son mutuamente excluyentes. Y en muchos casos importantes se observa que  $\sum \mu_n = \infty$ . De cualquier manera los eventos  $E$  que ocurren por primera vez en el  $n$ -ésimo intento son mutuamente excluyentes, por ello:

$$f = \sum f_n \equiv F(1) \leq 1$$

El valor  $1-f$  puede ser claramente interpretado como la probabilidad de que  $E$  no ocurra en ningún momento en una indefinida serie de intentos.

Si  $f$  es igual 1,  $f_n$  constituye una serie de probabilidades y se puede

hablar de su media:  $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n$ . En efecto aún cuando  $f < 1$  puede

suponerse que  $f_n$  provee una distribución de probabilidad si

formalmente se le asigna el valor de infinito a la posibilidad de no

ocurrencia,  $1-f$ . En este caso se tiene que  $\mu = \infty$ . La distribución de

probabilidad  $f_n$  se refiere entonces al tiempo de espera para  $E$ , es

decir, el número de intentos (incluyendo la primera ocurrencia de  $E$ ) entre ocurrencias sucesivas de  $E$ .

Se dice que  $E$  es un evento recurrente persistente si  $f=1$ , y transiente si  $f<1$ . Se dice también que  $E$  es un evento recurrente periódico con período  $t$ , si existe un entero  $t>1$  tal que  $E$  ocurra únicamente en los intentos numerados  $t, 2t, 3t, \dots$

#### 1.4.2. Teoremas Básicos

Una condición necesaria y suficiente para que el evento  $E$  sea persistente es que  $\sum \mu_j$  diverja.

**Teorema:** Si  $E$  es persistente no periódico y recurrente con tiempo de recurrencia medio  $\mu = \sum n f_n = F'(1)$ , entonces:

$$\mu_n \rightarrow \mu^{-1} \quad \text{a medida que } n \rightarrow \infty$$

En particular  $\mu_n \rightarrow 0$  si  $\mu = \infty$ .

Si  $E$  es persistente con período  $t$  entonces:

$$\mu_{nt} \rightarrow t\mu^{-1} \quad \text{a medida que } n \rightarrow \infty$$

y  $\mu_k = 0$  para cada  $k$  no divisible para  $t$ .

### 1.5. Modelos de Caminatas Aleatorias

Uno de los modelos más básicos en la investigación de procesos estocásticos es formular el modelo en términos del movimiento de una partícula que se desplaza en saltos discretos con una cierta probabilidad de punto a punto. Suponga que la partícula comienza su movimiento en  $x = k$  en el eje  $x$  en el momento en el tiempo  $t = 0$  y que en cada momento subsiguiente  $t = 1, 2, 3, \dots$  se mueve una unidad hacia la derecha o izquierda con probabilidades  $p$  o  $q = p - 1$ , respectivamente. Un modelo de este tipo utilizado en física es el movimiento browniano. Si las probabilidades de transición a la izquierda o derecha son iguales, se dice, que la caminata es simétrica, sino se dice que es sesgada a la derecha o a la izquierda si  $p > \frac{1}{2}$  o si  $p < \frac{1}{2}$  respectivamente.

Si en la aplicación no existen límites entre los cuales la partícula pueda desplazarse se dice que la caminata es irrestricta. Si en cambio la partícula puede desplazarse hasta que alcance una posición  $x = k$ , se dice entonces que la caminata es restringida y que  $x = k$  es una barrera absorbente. Al extenderse estas ideas puede tomarse en cuenta la posibilidad de que la partícula permanezca siempre donde está.

Una modificación adicional es la probabilidad de que una partícula se mueva de la posición  $x = 1$  hacia la posición  $x = 2$  con probabilidad  $p$  o que permanezca en  $x = 1$  con probabilidad  $q$ , suponiendo que el movimiento se originó en  $x = 0$ . Entonces  $x = 1$  se denomina una barrera reflectiva.

Si una barrera reflectiva tiene probabilidades de absorber o reflejar a la partícula se dice que la barrera es reflectiva.

## 1.6. Cadenas de Markov

### 1.6.1. Definición

Sea una secuencia de eventos consecutivos numerados  $n=0,1,2,3,\dots$  el resultado de el n-ésimo evento es representado por la variable aleatoria  $X_n$  que asumiremos discreta y que toma uno de los siguientes valores  $j = 1,2,3,\dots$  el grupo actual de resultados para cualquier evento es un sistema de eventos  $E_i, i=1,2,3,\dots$  que son mutuamente excluyentes y exhaustivos. Este sistema se denomina *estados* del sistema y pueden ser de número finito o infinito. Considere las probabilidades de varios eventos. La probabilidad absoluta del resultado  $E_j$  en el n-ésimo intento es:

$$P(X_n = j) = p_j^{(n)}, \text{ donde la distribución inicial está dada por } p_j^{(0)}$$

Si se tiene que  $X_{n-1} = i$  y  $X_n = j$  se dice que el sistema ha hecho una transición de tipo  $E_i \rightarrow E_j$  en el n-ésimo intento. De esta forma se desearía conocer la probabilidad de que varias transiciones ocurran. Si los eventos no son independientes esto significa que se debe especificar:

$$P(X_n = j / X_{n-1} = i, X_{n-2} = h \dots, X_0 = a)$$

La propiedad de Markov indica que el comportamiento futuro de una secuencia de eventos es decidido únicamente por el conocimiento del *estado* presente, en tal caso las probabilidades de transición dependen únicamente de  $X_{n-1}$  y no de las variables aleatorias previas. De allí que se define a una cadena de Markov como una secuencia de intentos consecutivos tal que:

$$P(X_n = j / X_{n-1} = i, X_{n-2} = h \dots, X_0 = a) = P(X_n = j / X_{n-1})$$

Si las transiciones de probabilidades son independientes del valor de  $n$  se tiene entonces una cadena de Markov homogénea de tal forma que:

$$P(X_n = j / X_{n-1}) = p_{ij}$$

Donde  $p_{ij}$  corresponde a la dirección de la transición, de hecho para cualquier valor fijo  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ),  $p_{ij}$  formará una distribución de probabilidad.

Las probabilidades de transición se maneja de forma más conveniente en forma de matrices. Sea la matriz  $P$  tal que:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} & \dots \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} & \dots \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Siendo esta la matriz de transición, puede ser de orden finito o infinito dependiendo de el número de *estados* considerados. Los elementos de la matriz  $P$  son no negativos. Si además las columnas suman la unidad se dice que la matriz tiene una propiedad a menudo conocida como matriz estocástica.

Para determinar las probabilidades absolutas en cada *estado* se necesita la idea de transición de probabilidades en  $n$  pasos, donde  $n$  puede ser más grande que la unidad. Sea entonces:

$$P(X_{n+m} = j \mid X_m = i) = p_{ij}^{(n)}$$

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$$

Esta transición de probabilidad es independiente de  $m$ , lo que es cierto para las cadenas homogéneas. Suponga que las probabilidades absolutas  $p_j^{(n)}$  en el  $n$ -ésimo *estado* como el vector columna  $p^{(n)}$ . Sea la distribución inicial  $p^{(0)}$ . La distribución en el primer *estado* está dada por:

$$p_j^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} p_i^{(0)}$$

Ya que la probabilidad de que el sistema esté en el estado  $i$  es inicialmente  $p_i^{(0)}$  y la probabilidad de transición de  $i$  a  $j$  es  $p_{ij}$ , entonces debemos sumar todas las transiciones que nos lleven al estado  $j$ . En términos matriciales:

$$p^{(1)} = Pp^{(0)}$$

De forma similar:

$$p^{(2)} = Pp^{(1)} = P^2p^{(0)}$$

Generalizando:

$$p^{(n)} = P^n p^{(0)}$$

$$p^{(n+m)} = P^{n+m} p^{(0)}$$

$$p^{(n+m)} = P^n (P^m p^{(0)})$$

$$p^{(n+m)} = P^n p^{(m)}$$

La matriz  $P^n$  es la que proporciona las probabilidades de transición en el  $n$ -ésimo paso, para cadena homogéneas, es decir independientes de  $m$ .

### 1.6.2. Clasificación de Estados

Las cadenas de Markov pueden clasificarse de acuerdo a las propiedades básicas del sistema. Una descripción breve de dicha clasificación se detalla a continuación.

Si el estado  $E_j$  puede ser alcanzado en un número finito de pasos con probabilidad diferente de cero, se dice que dicho evento es alcanzable. De la misma forma en una caminata aleatoria irrestricta cualquier punto puede ser alcanzado desde otro, pero si es una barrera absorbente ningún punto puede ser alcanzado desde este.

Si cada estado de la cadena de Markov puede ser alcanzado desde cualquier otro estado se dice que la cadena es irreducible. Alternativamente si se tiene un grupo de estados  $C$  que no pueden ser alcanzados por ningún estado fuera de  $C$  en transiciones de un paso se dice que los estados pertenecientes a dicho grupo son absorbentes.

En una cadena de Markov irreducible todos los estados constituyen un estado cerrado y ningún otro grupo puede ser cerrado. Esto es básico al estudiar las propiedades de las subcadena de Markov.

### 1.6.3. Clasificación de Cadenas

Se tiene en una cadena de Markov irreducible todos los estado pertenecen a una misma clase, es decir todos son trasientes: persistentes o nulos o todos poseen el mismo período.

Se dice que una cadena es ergódica si la distribución de probabilidad absoluta  $p^{(n)}$  converge a una distribución limitante independiente de la distribución inicial  $p^{(0)}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)} = p$$

Puede probarse que todos los estado de una cadena son ergódicos si son persistentes, no nulos y aperiódicos.

La distribución limitante actual, si existe, puede de hecho ser determinada fácilmente como el límite de la n-ésima transición  $p_{jk}^{(n)}$  conocida.

Al referirnos a la ecuación fundamental matricial se tiene que:

$$P = Pp_i$$

donde  $p_i$  sigue una distribución estacionaria en el sentido de que si se escoge una distribución inicial, todas las subsecuentes distribuciones serán idénticas a ella. De hecho si la cadena de

Markov es ergódica la distribución limitante también es estacionaria.

Todos los estados de una cadena de Markov irreducible, finita y aperiódica son ergódicos y la cadena misma es ergódica.

Una cadena de Markov irreducible y aperiódica es ergódica si puede encontrarse una solución no trivial para:

$$x = Px$$

Donde la suma de todos los  $x$  es finita.

# CAPÍTULO 2

## 2. CAMINATAS ALEATORIAS

### 2.1. Introducción

En el presente capítulo se describe de manera detallada las caminatas aleatorias o random walk, la cual es parte esencial en el desarrollo de la presente investigación. En este capítulo se describen, en la sección 2.2 las definiciones básicas de las caminatas al azar como el principio de reflexión, sus notaciones y demás.

En la sección 2.3 se describen los resultados más importantes, lo cual comprende la descripción de los lideratos largos, leyes del arco seno y los cambios de signo. La sección 2.4 contiene la definición de dualidad y el teorema de equidistribución el cual también es un punto clave en el desarrollo de nuestro estudio. El texto base utilizado en este capítulo es *“Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones” (Féller W.)*.

## 2.2. Definiciones Básicas

El modelo de caminata aleatoria es uno de los modelos básicos en la investigación de procesos estocásticos, ya que este modelo es formulado en términos del movimiento de una partícula que se desplaza en saltos discretos con una cierta probabilidad de punto a punto. Para nuestro estudio en el modelo de caminata aleatoria nos centraremos en el juego de lanzar monedas, por lo cual nos interesan los arreglos de un número finito de los valores más uno (+1) y menos uno (-1). Para este juego la función de distribución de probabilidades está representada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & x = \pm 1 \\ 0 & \text{otro } x \end{cases}$$

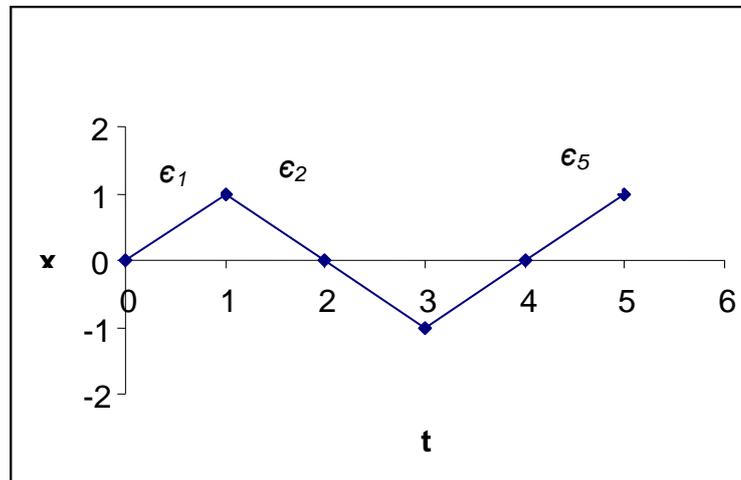
donde  $x = 1$  si sale cara y  $x = -1$  si sale sello.

Si se considera  $n = p+q$  símbolos  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ , donde cada uno de éstos representa +1 ó -1, y además se asume que existen  $p$  valores (+1) y  $q$  (-1). La suma parcial  $s_k = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_k$  representa la diferencia entre el número de los que tienen signo positivo y los de signo negativo ocurridos en los primeros  $k$  lanzamientos, de donde se tiene que:

$$s_k - s_{k-1} = \epsilon_k = \pm 1 \quad s_0 = 0 \quad s_n = p - q \quad \text{donde } k = 1, 2, \dots, n.$$

Vamos a utilizar un sistema de coordenadas rectangulares  $(t, x)$ , siendo  $t$  el eje horizontal, el cual se puede interpretar como el tiempo, y  $x$  el vertical, el cual representa el valor de  $S_n$ . El arreglo  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  quedará representado por una línea poligonal cuyo  $k$ -ésimo lado tiene pendiente  $\epsilon_k$  y su  $k$ -ésimo vértice tiene ordenadas  $s_k$ . Estas poligonales se denominarán trayectorias.

**Gráfico 2.1**  
Caminatas Aleatorias  
Trayectorias



Elaboración: M. Bravo

Siendo  $n$  y  $x$  números enteros, donde  $n > 0$ . Una trayectoria  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  del origen al punto  $(n, x)$  es una línea poligonal cuyos vértices tienen abscisas  $0, 1, \dots, n$  y ordenadas  $s_0, s_1, \dots, s_n$ , y que satisfacen  $s_k - s_{k-1} = \epsilon_k = \pm 1$ , con  $s_n = x$ .

Si se considera que  $n$  es la longitud de las trayectorias, existen  $2^n$  trayectorias de longitud  $n$ . Por ejemplo si se tiene un juego de lanzamiento de monedas que toma dos valores posibles cara o sello, los

resultados posibles o trayectorias al efectuarse un lanzamiento es  $\{(c, s); (s, c)\}$ . Los resultados posibles si se efectúan 2 lanzamientos son  $\{(c, s); (s, c); (c, c); (s, s)\}$ . Si se realizan 3 lanzamientos se tiene:  $\{(c, c, s); (c, s, c); (s, c, c); (s, s, s); (c, c, c); (s, s, c); (s, c, s); (c, s, s)\}$ . Con 4 lanzamientos los posibles resultados son:  $\{(c, c, c, c); (c, c, c, s); (c, c, s, c); (c, s, c, c); (s, c, c, c); (c, c, s, s); (c, s, s, c); (s, c, c, s); (s, s, c, c); (c, s, c, s); (s, c, s, c); (c, s, s, s); (s, s, s, c); (s, s, c, s); (s, c, s, s); (s, s, s, s)\}$ , y así sucesivamente.

Por lo que se tiene:

$$1 \text{ lanzamiento} = 2 \text{ resultados} = 2^1$$

$$2 \text{ lanzamientos} = 4 \text{ resultados} = 2^2$$

$$3 \text{ lanzamientos} = 8 \text{ resultados} = 2^3$$

$$4 \text{ lanzamientos} = 16 \text{ resultados} = 2^4$$

:  
:  
:

$$n \text{ lanzamientos} = m \text{ resultados} = 2^n$$

Con lo cual se puede comprobar que en un trayectoria de longitud  $n$  existen  $2^n$  trayectorias de la misma longitud. Además si  $p$  de las  $\epsilon_k$  son positivas y  $q$  son negativas, se tiene que:

$$n = p + q$$

$$x = p - q$$

Además, una trayectoria del origen a un punto arbitrario  $(n, x)$  existe solamente si  $n$  y  $x$  son de la forma  $n = p + q$ ,  $x = p - q$ , debido a que  $s_n = x = p - q$ , donde además  $p$  de las  $\epsilon_k$  son positivas y  $q$  son negativas.

Para este caso en particular se pueden seleccionar  $p$  lugares para las  $\epsilon_k$  positivas de los  $n = p + q$  lugares disponibles de  $N_{n,x} = \binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}$  maneras diferentes.

Si consideramos el número de sucesiones de longitud  $p + q$  que consisten en  $p$  valores  $(+1)$  y  $q$   $(-1)$  y si se enumeran los  $+1$  de 1 a  $p$  y los  $-1$  de  $p + 1$  a  $p + q$ , se obtiene una sucesión de  $p + q$  elementos diferentes, por lo que existirían  $(p + q)!$  de esas sucesiones, y corresponden  $p! q!$  de ellas al mismo orden de  $+1$  y  $-1$ , por lo que los  $p$  valores  $(+1)$  y  $q$   $(-1)$  se ordenan de maneras diferentes de la siguiente forma:

$$\frac{(p+q)!}{p! q!} = \binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}$$

Por conveniencia se define  $N_{n,x} = 0$  cuando  $n$  y  $x$  no sean de la forma  $n=p + q$ ,  $x=p - q$ , donde con esto existen exactamente  $N_{n,x}$  trayectorias diferentes del origen a un punto arbitrario  $(n, x)$ .

Una aplicación de este modelo es el teorema de la votación, donde si suponemos que en una votación el candidato  $P$  lleva a su favor  $p$  votos y el candidato  $Q$  tiene  $q$  votos, siendo  $p > q$ . la probabilidad de que en

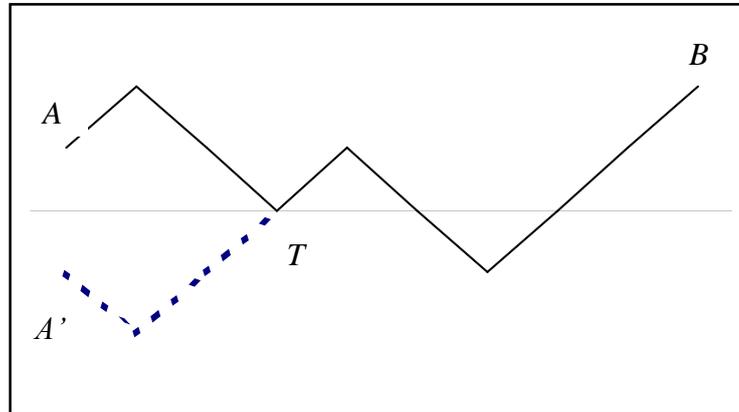
cualquier momento del conteo haya más votos para  $P$  que para  $Q$  es igual a:

$$\frac{(p - q)}{(p + q)}$$

El teorema de la votación supone que todas las trayectorias aceptables son igualmente probables. El registro completo de la votación se puede representar por una trayectoria de longitud  $p + q$ , en la cual  $\varepsilon_k = +1$  si el  $k$ -ésimo voto es para  $P$ , por lo cual cada trayectoria del origen al punto  $(p+q, p-q)$  se puede interpretar como el registro de una votación dados los totales  $p$  y  $q$ . Además se tiene que  $S_k$  es el número de votos por los que  $P$  gana o pierde después de contar el  $k$ -ésimo voto. Se tiene que el candidato  $P$  se encontrará en ventaja durante toda la votación si y sólo si  $s_1 > 0, \dots, s_n > 0$ , es decir si todos los vértices quedan precisamente encima del eje  $t$ .

Continuando con la descripción de caminatas aleatorias es necesario considerar uno de sus principios más importantes que es el principio de reflexión, el cual nos expresa que el número de trayectorias de  $A$  a  $B$  que tocan o cruzan el eje  $t$  es igual al número de todas las trayectorias de  $A'$  a  $B$ .

**Gráfico 2.2**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Principio de Reflexión**



Elaboración: M. Bravo

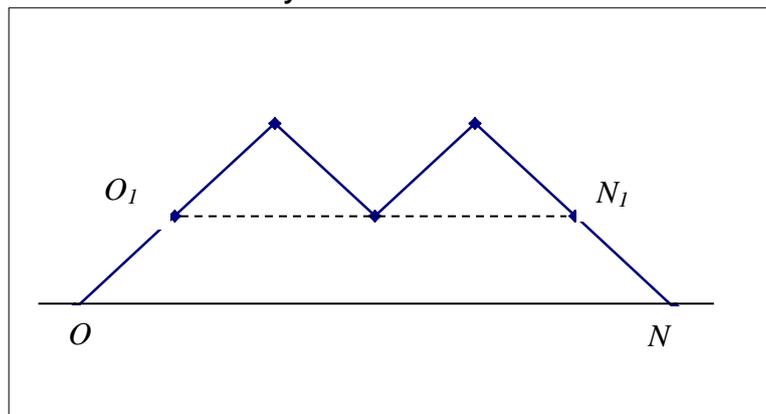
Si se considera una trayectoria  $(s_a = \alpha, s_{a+1}, \dots, s_b = \beta)$  de  $A$  a  $B$  que tenga uno o más vértices en el  $t$ , siendo éste la abscisa del primer vértice como se aprecia en el Gráfico 2.2, se escoge  $t$  tal que  $s_a > 0, \dots, s_{t-1} > 0, s_t = 0$ . Entonces  $(-s_a, -s_{a+1}, \dots, -s_{t-1}, s_t = 0, s_{t+1}, s_{t+2}, \dots, s_b)$  es una trayectoria que va de  $A'$  a  $B$  y tiene a  $T = (t, 0)$  como primer vértice en el eje  $t$ , por lo que siendo  $AT$  y  $A'T'$  reflexiones una de la otra, existe una correspondencia uno a uno entre todas las trayectorias de  $A'$  a  $B$  y de  $A$  a  $B$  que tiene un vértice en el eje  $t$ .

Explicando un poco más el juego de lanzar de monedas, consideremos una trayectoria  $(s_1, \dots, s_\rho)$  como registro de  $\rho$  lanzamientos sucesivos de una moneda, las sumas parciales  $s_1, \dots, s_\rho$  representan las ganancias sucesivas acumuladas. Al describir la parte geométrica se considerarán

las sumas parciales sucesivas  $s_1, \dots, s_n$  como puntos en el eje vertical, los cuales indicarán las posiciones de una partícula que realiza una caminata al azar, es decir, pasos unitarios hacia arriba o hacia abajo en una recta, donde este registro de movimientos representa una trayectoria.

En el Gráfico 2.3 se puede observar una trayectoria que va de  $0$  a  $N$ , la cual representa una caminata aleatoria de seis pasos que termina con retorno al origen.

**Gráfico 2.3**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Trayectorias Positivas**

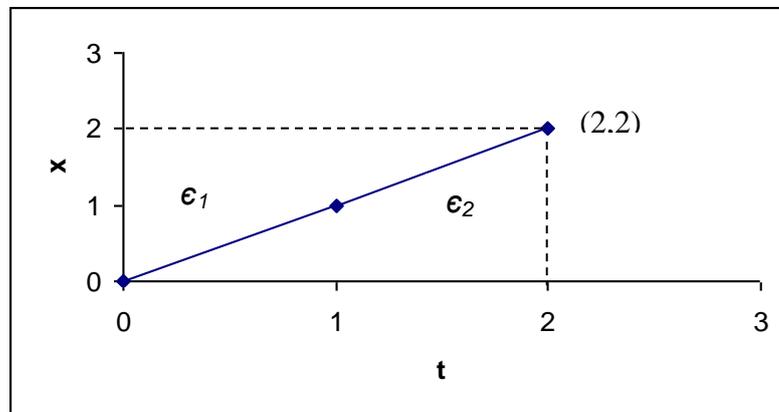


Elaboración: M. Bravo

Cada trayectoria de longitud  $p$  se puede interpretar como resultado de un experimento de caminatas aleatorias, donde existen  $2^p$  trayectorias de esas con una probabilidad de  $2^{-p}$  cada una.

Además se analizará la dependencia del número  $\rho$ , el cual es no especificado. Por ejemplo consideremos el evento de que la trayectoria pase por el punto (2,2), donde los dos primeros pasos deben ser positivos y existen  $2^{\rho-2}$  trayectorias en esta propiedad.

**Gráfico 2.4**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Trayectoria que pasa por el punto (2,2)**



Elaboración: M. Bravo

La probabilidad para este evento es igual a  $\frac{1}{4}$ , sin tomar en cuenta el valor de  $\rho$ . Además se puede generalizar que para cualquier  $k \leq \rho$ , es posible prescribir arbitrariamente los primeros  $k$  pasos, existiendo exactamente  $2^{\rho-k}$  trayectorias que satisfacen las  $k$  condiciones, es por ello que un evento determinado por los primeros  $k \leq \rho$  pasos tiene probabilidad independiente de  $\rho$ . Entonces se puede considerar cualquier trayectoria de longitud  $n$  como la sección inicial de una trayectoria muy larga y sin ser necesario especificar la longitud final.

Sin considerar  $p$ , se denota de manera general los pasos individuales por  $X_1, X_2, \dots$ , y las posiciones de la partícula por  $S_1, S_2, \dots$ . Por lo tanto se tiene que:

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \qquad S_0 = 0$$

Así, el evento “en la época  $n$  la partícula está en el punto  $r$ ” se lo denota por  $\{S_n = r\}$ , entendiéndose por época los puntos en el eje tiempo. Además al tener que el número de  $N_{n,r}$  de trayectorias del origen al punto  $(n, r)$  está dado por  $N_{n,x} = \binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}$ , se tiene que la probabilidad del evento está dada por:

$$p_{n,r} = P\{S_n = r\} = \binom{n}{\frac{n+r}{2}} 2^{-n}$$

Donde se interpreta el coeficiente binomial como cero, a menos que  $(n+r)/2$  sea un entero entre  $0$  y  $n$ .

Un retorno al origen ocurre en la época  $k$  si  $S_k = 0$ , donde  $k$  debe ser necesariamente par, y para  $k = 2\nu$  la probabilidad de un retorno al origen es igual a  $p_{2\nu,0}$ . Esta probabilidad, se la denotará por:

$$u_{2\nu} = \binom{2\nu}{\nu} 2^{-2\nu}$$

es decir la probabilidad de retornar al origen en el tiempo  $2\nu$ .

Cuando se expresan el coeficiente binomial en términos de factoriales se utilizará la aproximación de Stirling:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \quad \text{para } n \text{ muy grande}$$

Esta fórmula muestra que:

$$u_{2\nu} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}$$

donde el signo  $\sim$  indica que la razón de los dos miembros tiende a 1 cuando  $\nu \rightarrow \infty$ .

Además al considerar los retornos al origen se tiene que el primer retorno al origen ocurre en la época  $2\nu$  si:

$$S_1 \neq 0, \dots, S_{2\nu-1} \neq 0, \text{ pero } S_{2\nu} = 0$$

La probabilidad de que ocurra este evento se lo denotará por  $f_{2\nu}$ , donde por definición  $f_0 = 0$ . Además si ocurre una visita al origen en la época  $2n$  puede que éste sea el primer el retorno, donde si no lo es éste indica que el primer retorno ocurrirá en una época  $2k < 2n$ , el cual será seguido

por otro retorno  $2n-2k$  unidades de tiempo después. La probabilidad de este último es  $f_{2k}u_{2n-2k}$  porque hay  $2^{2k}f_{2k}$  trayectorias de longitud  $2k$  que terminan en un primer retorno, y  $2^{2n-2k}u_{2n-2k}$  trayectorias del punto  $(2k, 0)$  al  $(2n, 0)$ . Por lo tanto se tiene que las probabilidades  $\{u_{2n}\}$  y  $\{f_{2n}\}$  están dadas por la ecuación:

$$u_{2n} = f_2u_{2n-2} + f_4u_{2n-4} + \dots + f_{2n}u_0 \quad n \geq 1$$

Por otra parte es importante acotar que la probabilidad de que ocurra un retorno al origen en la época  $2v$ , es la misma probabilidad de que no ocurra ningún retorno al origen hasta la época  $2v$ , lo cual es un punto clave en las definiciones de caminatas aleatorias.

$$P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = P(S_{2n} = 0) = u_{2n}$$

Es decir, como  $n > 0$ , cuando ocurre el evento de la derecha, entonces las  $S_j$  son todas positivas o todas negativas, por lo que siendo dos eventos igualmente probables, se tiene:

$$P(S_1 > 0, \dots, S_{2n} > 0) = \frac{1}{2} u_{2n}$$

Y considerando todos los valores posibles de  $S_{2n}$ , se tiene:

$$P(S_1 > 0, \dots, S_{2n} > 0) = \sum_{r=1}^{\infty} P(S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r)$$

donde el miembro derecho es igual a  $N_{2n-1,2r-1} - N_{2n-1,2r+1}$ , obteniendo así que el  $r$ -ésimo término de la suma es igual a:

$$\frac{1}{2} (p_{2n-1,2r-1} - p_{2n-1,2r+1})$$

La parte negativa del  $r$ -ésimo término se cancela con la parte positiva del término  $(r+1)$ -ésimo, por lo que la suma antes expuesta se reduce a  $\frac{1}{2} p_{2n-1,1}$ , siendo  $p_{2n-1,1} = u_{2n}$ . Por lo tanto la probabilidad de que ocurra un retorno al origen en la época  $2\nu$ , es la misma probabilidad de que no ocurra ningún retorno al origen hasta la época  $2\nu$ .

Ahora si se quiere obtener la probabilidad de retornar al origen en el tiempo  $2\nu$  cuando  $\nu \geq 1$ , primero se definirán las funciones generadoras:

$$U(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_{2\nu} x^{\nu}$$

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{2\nu} x^{\nu}$$

de donde basándonos en la ecuación de  $u_{2n} = f_2 u_{2n-2} + f_4 u_{2n-4} + \dots + f_{2n} u_0$  para  $n \geq 1$  se tiene que:

$$U(x) = 1 + U(x)F(x)$$

La presencia del 1 se debe a que  $u_0=1$ , ya que se está considerando para  $v \geq 1$ . Se puede notar que las funciones generadoras convergen al intervalo entre (-1, 1), entonces si se despeja  $F(x)$  se tiene:

$$F(x) = \frac{U(x) - 1}{U(x)}$$

Ahora si se reemplaza  $u_{2v}$  en  $U(x)$  se obtiene:

$$U(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{2v}{v} 2^{-2v} x^v$$

de donde la serie<sup>(1)</sup>:

$$\sum_{v=0}^{\infty} \binom{2v}{v} x^v = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

si se reemplaza  $x$  por  $x/4$  se puede observar que:

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

por lo tanto al reemplazar en  $F(x)$ :

---

<sup>(1)</sup> 1H. S. Wilf, *Generating functionology*, (Boston: Academic Press, 1990), p. 50.

$$F(x) = \frac{(1-x)^{-1/2} - 1}{(1-x)^{-1/2}}$$

$$F(x) = 1 - (1-x)^{-1/2}$$

Es fácil notar que  $F(x)'=U(x)/2$ , y los coeficientes  $f_{2\nu}$  pueden ser encontrados integrando las series para  $U(x)$ , donde para  $\nu \geq 1$  se obtiene que:

$$f_{2\nu} = \frac{u_{2\nu}}{2\nu - 1} = \frac{\binom{2\nu}{\nu}}{(2\nu - 1)2^{2\nu}}$$

### 2.3. Resultados Importantes

La llamada Ley de los Grandes Números establece que, en un juego largo de lanzamientos de moneda, cada jugador esté ganando aproximadamente la mitad del tiempo y que el liderato pase frecuentemente de un jugador a otro. Si se tiene una muestra enorme de registros de juegos ideales de lanzamiento de monedas, tales que cada uno consiste en  $2n$  ensayos. Se escoge uno al azar y se observa la época en que ocurrió el último empate, es decir, el número del último ensayo en el cual los números acumulados de caras y sellos fueron iguales. Este número es par y se lo denota por  $2k$  (de modo que  $0 \leq k \leq n$ ).

El siguiente teorema muestra que la distribución de  $k$  es simétrica, en el sentido de que cualquier valor de  $k$  tiene exactamente la misma probabilidad que  $n-k$ . En particular esta simetría implica que las

desigualdades  $k > n/2$  y  $k < n/2$  son igualmente probables. Además las probabilidades cercanas a los puntos finales son los mayores, donde los valores más probables de  $k$  son los extremos  $0$  y  $n$ .

**Teorema 1. Ley del Arco Seno de las Últimas Visitas.**-La probabilidad de que hasta la época  $2n$  inclusive, la última vista al origen ocurra en la época  $2k$ , está dada por:

$$\alpha_{2k,2n} = u_{2k}u_{2n-2k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Ahora se puede mostrar que a  $\alpha_{2k,2n}$  se lo puede aproximar haciendo uso de la fórmula de Stirling, de donde se tiene que:

$$u_{2v} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi v}}$$

Entonces si  $k$  y  $n$  tienden al infinito:

$$\alpha_{2k,2n} \sim \frac{1}{\pi \sqrt{k(n-k)}}$$

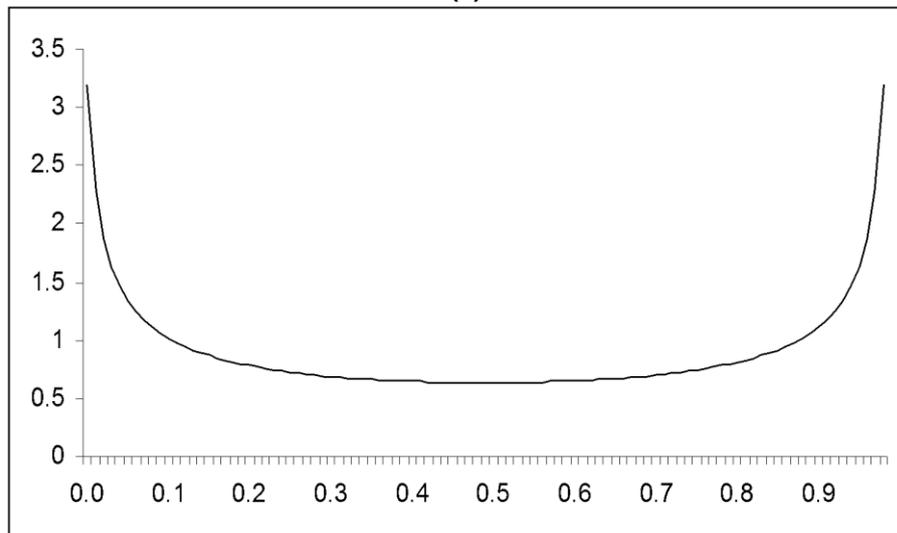
esta expresión puede ser escrita como:

$$\frac{1}{\pi n \sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)\left(1 - \frac{k}{n}\right)}}$$

Entonces, si se define:

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} \quad 0 < x < 1$$

**Gráfico 2.5**  
*Caminatas Aleatorias*  
**f(x)**



Elaboración: M. Bravo

Se tiene:

$$\alpha_{2k,2n} \approx \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

La razón de el signo  $\approx$  es porque no se requiere que la longitud de  $k$  sea larga. Esto permite el reemplazo de la distribución discreta  $\alpha_{2k,2n}$  por la función de densidad  $f(x)$  en el intervalo  $[0, 1]$  y así obtener una aproximación. Si  $x$  es un número real entre 0 y 1, se tiene<sup>(2)</sup>:

---

<sup>(2)</sup> Laurie Snell (Random Walks – Arc Sine Laws). Archivo pdf., p. 493

$$\sum_{k < xn} \alpha_{2k,2n} \approx \int_0^x f(t) dt$$

Utilizando la antiderivada para  $f(x)$ , puede ser escrita como:

$$\sum_{k < xn} \alpha_{2k,2n} \approx \frac{2}{\pi} \arcsen \sqrt{x}$$

**Tabla II**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Distribución continua del arco seno  $A(x)=2/\pi \arcsen(x)^{1/2}$**

<b>x</b>	<b>A(x)</b>	<b>x</b>	<b>A(x)</b>
0.00	0.000	0.26	0.341
0.01	0.064	0.27	0.348
0.02	0.090	0.28	0.355
0.03	0.111	0.29	0.362
0.04	0.128	0.30	0.369
0.05	0.144	0.31	0.376
0.06	0.158	0.32	0.383
0.07	0.171	0.33	0.390
0.08	0.183	0.34	0.396
0.09	0.194	0.35	0.403
0.10	0.205	0.36	0.410
0.11	0.215	0.37	0.416
0.12	0.225	0.38	0.423
0.13	0.235	0.39	0.429
0.14	0.244	0.40	0.436
0.15	0.253	0.41	0.442
0.16	0.262	0.42	0.449
0.17	0.271	0.43	0.455
0.18	0.279	0.44	0.462
0.19	0.287	0.45	0.468
0.20	0.295	0.46	0.474
0.21	0.303	0.47	0.481
0.22	0.311	0.48	0.487
0.23	0.318	0.49	0.494
0.24	0.326	0.50	0.500
0.25	0.333		
Para $x > 1/2$ utilice $A(1 - x) = A(x)$			

Elaboración: M. Bravo

Al obtener esto se puede apreciar que es muy probable de que en un juego de lanzamiento de monedas, uno de los jugadores esté todo el tiempo como ganador, mientras que el otro como perdedor. Intuitivamente lo más probable es que un jugador esté en el lado ganador o perdedor donde su probabilidad sería igual a  $\frac{1}{2}$ , sin embargo, los posibles valores que se aproximan a  $\frac{1}{2}$  son los menos probables, siendo los extremos  $k=0$  y  $k=n$  los más probables.

**Teorema 2. Ley discreta del Arco Seno para tiempos permanentes.-**

La probabilidad de que en el intervalo de tiempo de 0 a  $2n$  la partícula permanezca  $2k$  unidades de tiempo en el lado positivo y  $2n - 2k$  unidades de tiempo en el lado negativo es igual a  $\alpha_{2k,2n}$ .

Es decir que si Juan y Jéssica juegan al lanzamiento de monedas en el intervalo de tiempo de 0 a  $2n$ , la probabilidad de que Jéssica esté al mando del juego exactamente en el tiempo  $2k$  será igual a  $\alpha_{2k,2n}$ .

Para comprobar este teorema, necesitamos demostrar que  $b_{2k,2v} = \alpha_{2k,2v}$  con trayectorias de longitud fija  $2n$  como la probabilidad de que exactamente  $2k$  lados queden por encima del eje  $t$ . La probabilidad  $b_{2k,2v}$  es frecuentemente interpretada en términos de un juego de dos jugadores. El jugador A dice que va a estar en el mando en el tiempo  $n$  si

la caminata aleatoria está encima del eje  $t$  en ese tiempo, o si la caminata aleatoria está sobre el eje  $t$  en el tiempo  $n$  pero encima del eje  $t$  en el tiempo  $n - 1$ .

Si se tiene que  $b_{2k,2v} = u_{2v}$  y por simetría que  $b_{0,2v} = u_{2v}$ , para demostrar  $\alpha_{2k,2v}$  es solamente necesario comprobar que  $b_{2k,2v} = \alpha_{2k,2v}$  cumple para  $1 \leq k \leq v - 1$ . Si se asume que exactamente  $2k$  de  $2n$  unidades de tiempo transcurren en el lado positivo y que además  $1 \leq k \leq v - 1$ , entonces un primer retorno al origen en alguna época  $2r > 2n$  debería suceder, con dos posibilidades. Si las  $2r$  unidades de tiempo pasan hasta que sucede el primer retorno, éstas transcurrirán en el lado positivo, por lo cual se tendrá  $2k - 2r$  lados por encima del eje con  $r \leq k \leq n - 1$  y la sección de la trayectoria más distante del vértice  $(2r, 0)$ . En cambio si las  $2r$  unidades de tiempo anteriores al primer retorno transcurren en el lado negativo, la sección posterior al vértice  $(2r, 0)$  tendrá  $2k$  lados por encima del eje, de donde  $n - r \geq k$ .

Entonces cuando  $1 \leq k \leq n - 1$ , se tiene:

$$b_{2k,2n} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k f_{2r} b_{2k-2r,2n-2r} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} b_{2k,2n-2r}$$

Si se asume que  $b_{2k,2v} = \alpha_{2k,2v}$  es válida para  $v \leq n - 1$ , entonces se tiene:

$$b_{2k,2n} = \frac{1}{2} u_{2n-2k} \sum_{r=1}^k f_{2r} u_{2k-2r} + \frac{1}{2} u_{2k} \sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} u_{2n-2k-2r}$$

$$b_{2k,2n} = \frac{1}{2} u_{2n-2k} u_{2k} + \frac{1}{2} u_{2k} u_{2n-2k}$$

$$b_{2k,2n} = \alpha_{2k,2n}$$

Con esto queda demostrado que  $b_{2k,2v} = \alpha_{2k,2v}$ .

Continuando con el análisis del liderato en un juego, se esperaría por ejemplo que el número de cambios de liderato se incremente proporcionalmente respecto a la duración del juego. Sin embargo el número de cambios de liderato a  $n$  ensayos aumentará únicamente en proporción a raíz de  $n$ . Por ejemplo si se realizan  $25n$  ensayos, deberían esperarse 5 veces más cambios de liderato que en  $n$  ensayos, lo cual muestra que los tiempos de espera entre igualaciones sucesivas pueden resultar extremadamente largas.

Si se define  $\xi_{r,2n+1}$  como la probabilidad de que hasta la época  $2n + 1$  sucedan exactamente  $r$  cambios de signo, esto será igual a  $2p_{2n+1}$ . Por lo tanto:

$$\xi_{r,2n+1} = 2P(S_{2n+1} = 2r + 1) \quad r = 0, 1, \dots$$

Si se considera un sistema de coordenadas con el origen en el punto  $(1, 1)$ , el cruce en el eje horizontal en el sistema original equivale a cruzar la recta que está debajo del nuevo eje, es decir, cruzar en el nivel  $-1$  ( $S_1 = -1$ ) y la probabilidad de que hasta la época  $2n$ , el nivel  $-1$  se cruce exactamente  $r$  veces es igual a  $2p_{2n+1,2r+1}$ . Cuando no se ha cruzado el nivel  $-1$   $S_{2n}$  es un entero no negativo, ya que no se ha cruzado el nivel  $-2$ . La probabilidad de alcanzar el punto  $(2n, 2k)$  sin tocar el nivel  $-2$  será igual a  $p_{2n,2k} - p_{2n,2k+4}$ , ya que el número de trayectorias de  $(0, 0)$  a  $(2n, 2k)$  que cruzan el nivel  $-2$  es igual al número de trayectorias de  $(0, 0)$  a  $(2n, 2k+4)$ . Entonces cuando  $r = 0$  se tiene que:

$$p_{2n+1,1} = \frac{1}{2}(p_{2n,0} + p_{2n,2})$$

ya que cualquier trayectoria de pasa por  $(2n + 1, 1)$  también pasa por  $(2n, 0)$  o  $(2n, 2)$ .

Ahora si se considera  $r = 1$ . Una trayectoria que cruza el nivel  $-1$  en la época  $2v - 1$  se puede descomponer de  $(0, 0)$  a  $(2v, -2)$  y la trayectoria de

longitud  $2n - 2v$  que empieza en  $(2v, -2)$ . Con esto se puede concluir que el número de trayectorias de longitud  $2n - 2v$  que empieza en  $(2v, -2)$  y que no cruzan el nivel  $-1$  es igual al número de trayectorias de  $(2v, -2)$  a  $(2n + 1, -3)$ , es decir,  $2^{2n+1} p_{2n+1,3}$ .

Como consecuencia se tiene que la probabilidad  $\xi_{r,n}$  de  $r$  cambios de signo en  $n$  ensayos decrece con  $r$ :

$$\xi_{0,n} \geq \xi_{1,n} > \xi_{2,n} > \dots$$

Esto indica que sin considerar el número de lanzamientos, el evento de no haya cambio de liderato, es más probable que cualquier número predeterminado de cambios.

#### 2.4. Dualidad y Equidistribución

Cuando se hace referencia a dualidad en caminatas al azar, es cuando en cada trayectoria de una sucesión finita de valores  $+1$  y  $-1$  y al invertir el orden de los términos nos da como resultado una nueva trayectoria. Geométricamente esta nueva trayectoria se obtiene cuando la trayectoria dada gira  $180$  grados alrededor de su extremo derecho y se toma éste último como origen de un nuevo sistema de coordenadas. Es por ello que a cada clase de trayectorias le corresponde una nueva clase

de la misma cardinalidad. Si se definen los pasos de la caminata aleatoria original como:

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

entonces, los pasos de la nueva caminata aleatoria o caminata dual serán:

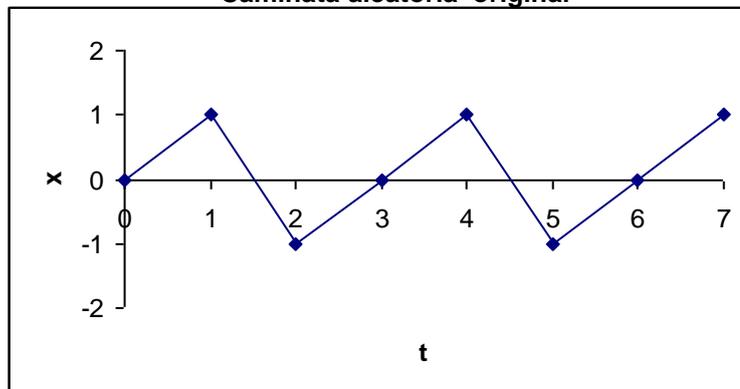
$$X_1^* = X_n, \dots, X_n^* = X_1$$

y los vértices de la nueva caminata aleatoria estarán determinadas por las sumas parciales:

$$S_k^* = X_1^* + \dots + X_k^* = S_n^* - S_{n-k}$$

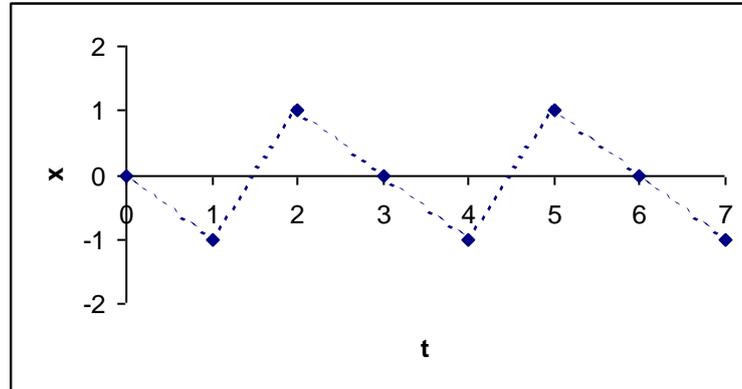
en donde  $S_0^* = 0$  y  $S_n^* = S_n$ . A esto de lo denominará caminata aleatoria dual.

**Gráfico 2.6**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Caminata aleatoria original**



Elaboración: M. Bravo

**Gráfico 2.7**  
*Caminatas Aleatorias*  
 Nueva caminata aleatoria



Elaboración: M. Bravo

Por lo tanto se tiene que a todo evento definido por la caminata aleatoria original le corresponde un evento de igual probabilidad en la caminata aleatoria dual, por lo cual casi toda relación de probabilidad tiene su dual.

Para una mejor comprensión se describirán algunos eventos duales conocidos, donde  $n$  es conocido y el punto final  $(n, S_n)$ .

- Tiempos del primer paso.

Sea:

$$S_j^* > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

y

$$S_n > S_j \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

duales uno del otro. Se tiene que  $S_n > S_j$ , lo que significa que el punto final no ha sido visitado antes de la época  $n$ . Por lo tanto la

probabilidad de que el primer paso por un punto positivo tenga lugar en la época  $n$  es igual a  $\frac{1}{2} u_{2v}$  donde  $v = \frac{1}{2} n$  o  $v = \frac{1}{2}(n - 1)$ .

- El evento de que hayan tenido  $k$  retornos al origen, es el dual del evento de que hayan ocurrido  $k$  visitas al punto final antes de la época  $n$ .
  
- Ley del arco seno de la primera visita al punto final: si se considera una trayectoria de longitud  $n = 2v$  elegida al azar y si la probabilidad de que  $S_{2v}$  sea negativo o positivo es  $\frac{1}{2} u_{2v}$ , entonces la probabilidad de no llegar al valor  $S_{2v}$  antes de la época  $2v$  es igual a  $u_{2v}$ . Ahora si se considera el evento de que la primera visita al punto terminal tenga lugar en la época  $2k$ , el dual del evento es que la última visita al origen haya ocurrido en la época  $2k$ , donde todas estas visitas están regidas por la distribución discreta del arco seno. Por lo tanto la primera visita al punto final  $S_{2v}$  habrá ocurrido en la época  $2k$  con probabilidad  $\alpha_{2k,2v} = u_{2k}u_{2v-2k}$  y las épocas  $2k$  y  $2v - 2k$  tienen igual probabilidad.
  
- Ley del arco seno de la posición de los máximos: el valor máximo en una caminata aleatoria se puede obtener repetidamente, por lo cual es necesario distinguir entre el primero y el último máximo.

Sea  $n = 2v$  par, el primer máximo ocurre en la época  $k$  si:

$$S_0, \dots, S_{k-1} < S_k$$

$$S_{k+1} \leq S_k, \dots, S_{2v} \leq S_k$$

Si  $k = 2\rho$  o  $k = 2\rho+1$ , su probabilidad será igual a  $\frac{1}{2} u_{2\rho}$ , excepto cuando  $\rho = 0$ . En cambio la probabilidad de  $S_{k+1} \leq S_k, \dots, S_{2v} \leq S_k$  será igual a la probabilidad de que en una trayectoria de longitud  $2v - k$ , todos los vértices queden por debajo o en el eje  $t$ . Por lo tanto si  $0 < k < 2v$ , la probabilidad de que en la sucesión  $S_0, \dots, S_{2v}$ , el primer máximo ocurra en las épocas  $k = 2\rho$  o  $k = 2\rho+1$ , está dada por  $\frac{1}{2} u_{2\rho} u_{2v-2\rho}$ , y para  $k = 0$  y  $k = 2v$  las probabilidades son  $u_{2v}$  y  $\frac{1}{2} u_{2v}$ , respectivamente.

**Teorema de Equidistribución.-** El número de trayectorias de longitud  $2n$  tales que  $S_{2n} = 0$  y que tiene exactamente  $2k$  de sus lados por encima del eje, es independiente de  $k$  e igual a:

$$\frac{2^{2n} u_{2n}}{(n+1)} = 2^{2n+1} f_{2n+2} \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Si se considera  $k = 0$  y  $k = n$ , el número de trayectorias al punto  $(2n, 0)$  con todos los lados por encima del eje  $t$  es igual al número de trayectorias del punto  $(1, 1)$  al  $(2n, 0)$  que no tocan la recta directamente bajo el eje  $t$ . Si este número es igual a:

$$\binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Para el caso de  $n = 1$  es fácil su verificación, por lo cual se asumirá que es válido para todas las trayectorias menores que  $2n$ . Si la sección de la trayectoria hasta la época  $2r$  está en el lado positivo, se debe tener  $1 \leq r \leq k$ , mientras que la otra sección tendrá exactamente  $2k - 2r$  lados por encima del eje. La trayectoria que satisface estas condiciones de maneras diferentes y cuando  $r$  es fija es:

$$2^{2r-1} f^{2r} \frac{2^{2n-2r}}{n-r+1} u_{2n-2r} = \frac{2^{2n-2}}{r(n-r+1)} u_{2r-2} u_{2n-2r}$$

Además si la sección hasta el primer retorno al origen está en el lado negativo, la sección terminal de longitud  $2n-2r$  contiene exactamente  $2k$  lados positivos, por lo que se tiene  $n - r \geq k$ . Es por ello que los números de trayectorias de los dos tipos se obtienen al sumar

$$2^{2r-1} f^{2r} \frac{2^{2n-2r}}{n-r+1} u_{2n-2r} = \frac{2^{2n-2}}{r(n-r+1)} u_{2r-2} u_{2n-2r} \quad \text{sobre } 1 \leq r \leq k \text{ y } 1 \leq r \leq n-k,$$

respectivamente. Se puede apreciar que en la segunda sumatoria cambia el índice  $r$  por  $\rho = n + 1 - r$ , por lo que se tiene que  $\rho$  va de  $k + 1$  a  $n$ . Por lo tanto el número total de trayectorias, que es  $2^{2n} u_{2n}$ , determina el número de trayectorias de cada categoría.

# CAPÍTULO 3

## 3. SIMULACIÓN ESTOCÁSTICA

### 3.1. Introducción

En el presente capítulo se define lo que es simulación y las diferentes etapas que realizan en una simulación, siendo ésta la técnica fundamental a implementar en la presente investigación.

En la sección 3.3 se detallaran los diferentes métodos de generación de números pseudoaleatorios, como son el método congruencial multiplicativo y el método congruencial mixto.

En la sección 3.4 se describen los métodos de generación de variables aleatorias: transformada inversa, aceptación y rechazo y composición. Además se exponen los pasos a seguir en la generación de variables aleatorias Bernoulli, Binomiales y Normales.

En la sección 3.5 se describe de manera general el desarrollo del simulador de caminatas aleatorias, así también se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas, donde se efectúan

comparaciones entre los valores teóricos y los estimados para el primer retorno al origen, última visita al origen, tiempos de permanencia, aplicación del teorema de equidistribución y demás.

### **3.2. Definición de Simulación**

Simulación es una técnica numérica para realizar experimentos en una computadora. Estos experimentos involucran ciertos tipos de modelos matemáticos y lógicos que describen el comportamiento y estructura de sistemas complejos del mundo real a través de largos períodos de tiempo (Thomas H. Naylor).

#### **3.2.1. Metodología para Realizar una Simulación**

##### **1. Definición del Sistema**

Cada estudio debe de comenzar con una descripción del problema o del sistema. Debe determinarse los límites o fronteras, restricciones, y medidas de efectividad que se usarán. Para nuestro caso en particular la simulación a realizarse no es la de un sistema como tal, sino la aplicación de definiciones y teoremas teóricos relacionados con caminatas aleatorias.

##### **2. Formulación del Modelo**

Se realiza la reducción o abstracción del sistema real a un diagrama de flujo lógico que describa de forma completa el modelo.

### **3. Preparación de Datos**

Identificación de los datos que el modelo requiere y reducción de estos a una forma adecuada. Para nuestra simulación estocástica se generaron caminatas aleatorias con valores +1 y -1 que siguen una distribución de Bernoulli.

### **4. Selección del Lenguaje**

De la selección del lenguaje dependerá el tiempo de desarrollo del modelo de simulación, es importante utilizar el lenguaje que mejor se adapte a las necesidades de simulación que se requieran. La selección puede ser desde usar un lenguaje general como lo es VISUAL BASIC, PASCAL o FORTRAN hasta hacer uso de un paquete específicamente para simular sistemas de manufactura como el SIMFACTORY o el PROMODEL, o lenguajes de simulación como: GPSS, SLAM, SIMAN, SIMSCRIPT, etc. El simulador desarrollado para nuestro estudio se lo ha realizado mediante el lenguaje de programación Microsoft Visual Basic 6.0.

### **5. Transcripción del Modelo**

Consiste en generar las instrucciones o código computacional necesario para lograr que el modelo pueda ser ejecutado en la computadora.

## **6. Validación del Modelo**

Es el proceso que tiene como objetivo determinar la habilidad que tiene un modelo para representar la realidad. La validación se lleva a cabo mediante la comparación estadística de los resultados del modelo y los resultados reales, donde para nuestro caso se verifica la adecuación de los datos simulados al modelo teórico definido en este estudio.

## **7. Experimentación**

Consiste en el corrida de la simulación para generar los datos deseados y efectuar el análisis de sensibilidad. En este estudio se han realizado simulaciones de caminatas aleatorias, para las cuales con los resultados obtenidos se ha realizado el análisis respectivo en base al modelo teórico planteado en el capítulo 3.

## **8. Interpretación**

Se realiza la obtención de inferencias con base a los datos generados por la simulación y en base a esto se toma una decisión. En esta investigación no se tomarán decisiones ya que no es la simulación de un sistema. Se ha interpretado los resultados de la simulación en base al modelo estocástico de caminatas aleatorias.

## **9. Implantación**

Una vez seleccionada la mejor alternativa es importante llevarla a la práctica, en muchas ocasiones este último caso es el más difícil ya que se tiene que convencer a la alta dirección y al personal de las ventajas de esta puesta en marcha. Al implantar hay que tener cuidado con las diferencias que pueda haber con respecto a los resultados simulados, ya que estos últimos se obtienen, si bien de un modelo representativo, a partir de una suposiciones. Sin embargo es necesario especificar que para nuestro estudio no se aplica este paso.

## **10. Monitoreo y Control**

No hay que olvidar que los sistemas son dinámicos y con el transcurso del tiempo es necesario modificar el modelo de simulación, ante los nuevos cambios del sistema real, con el fin de llevar a cabo actualizaciones periódicas que permitan que el modelo siga siendo una representación del sistema, lo que no se aplica en esta investigación.

### **3.3 Métodos de Generación de Números Pseudoaleatorios**

Consiste en utilizar una computadora para generar de manera sucesiva números pseudoaleatorios. Estos números constituyen una sucesión de valores, que aunque son producidos de manera determinista, tiene toda

la apariencia de ser variables aleatorias uniformes e independientes en  $(0, 1)$ .

### 3.3.1. Generadores Congruenciales

$$X_{n+1} = (a X_n + b) \text{ mod } m$$

Los parámetros del algoritmo se llaman

$a$  multiplicador  $a > 0$

$b$  sesgo  $b > 0$

$m$  módulo  $m > X_0; m > a; m > b$

$X_0$  semilla (valor inicial)  $X_0 > 0$

Cuando  $b=0$  el generador se denomina Congruencial Multiplicativo.

Cuando  $b \neq 0$  el generador se denomina Congruencial Mixto, porque tiene un término aditivo y uno multiplicativo.

A pesar de la simplicidad una adecuada elección de los parámetros de “ $a$ ,  $b$  y  $m$ ”, permite obtener de manera eficiente una larga e impredecible sucesión de números como para considerarse “aleatoria”.

Se tiene algunas observaciones de los resultados de los generadores congruenciales:

- i) Un generador congruencial tiene ciclos
- ii) La longitud del ciclo depende de la selección de los parámetros

iii) Dentro de selecciones de parámetros que conducen a la misma longitud, algunas salidas parecen más aleatorias que otras.

Para una adecuada elección de los parámetros se debe tener en cuenta lo siguiente:

**Proposición 2.1**

Un generador congruencial tiene su período máximo si y sólo si<sup>(1)</sup>:

- i)  $m.c.d(b, m) = 1$  (primos relativos)
- ii)  $a \equiv 1 \pmod{p}$  ; para cada factor primo  $p$  de  $m$ .
- iii)  $a \equiv 1 \pmod{4}$  ; si 4 divide a  $m$ .

Lo anterior sugiere elegir “ $m$ ” lo más grande posible, para asegurarnos un período largo (posibles elecciones de  $m$  son;  $m=2^{31}-1$ ,  $m=2^{16}+1$ ).

Sea  $p$  el período de la secuencia de números aleatorios, si  $p=m$  el generador se llama de período completo.

Si  $m$  es un número primo entonces el máximo período se obtiene si  $a=1$ .

**Proposición 2.2** Sea un generador multiplicativo ( $b=0$ ) [ $X_{n+1} = aX_n \pmod{m}$ ] tiene período  $p=(m-1)$ , sólo si “ $p$ ” es primo. El periodo divide a  $(m-1)$  y es  $(m-1)$  si y sólo si “ $a$ ” es una raíz primitiva de  $m$ -

---

<sup>(1)</sup> Héctor Allende (Números Aleatorios – Generadores Congruenciales). Archivo ppt.

1, es decir  $a^{(m-1)/p} \neq 1 \pmod m$ , para todos los factores primos  $p$  de  $(m-1)$ .

### **Proposición 2.3**

Si  $a$  es una raíz primitiva de  $m$ ,  $a^k \pmod m$ , lo es siempre que  $k$  y  $m-1$  sean primos relativos.

### **Equivalentemente**

Si  $a$  es una raíz primitiva de  $m$ ,  $a^k \pmod m$  lo es siempre que ;  
 $\text{mcd}(k, m-1)=1$

En general los generadores congruenciales son de la forma:

$$X_{n+1} = g(X_n, X_{n-1}, \dots, X_{n-k}, \dots) \pmod m$$

$$g(\underline{x}) = a X_n \qquad g(\underline{x}) = a X_n + b$$

$$g(\underline{x}) = a X_n^2 + b X_n + c$$

Una buena elección de “ $m$ ”, permite obtener un generador eficiente (ciclo máximo). Pero aún se debe estudiar con más detalle la elección de  $a$  y  $b$ , pues se tienen muchos grados de libertad.

Un buen generador congruencial debe ser:

- i) De máximo período
- ii) Su salida debe parecer aleatoria
- iii) Poder implementar de forma eficiente en aritmética de 32 bits.

### 3.4 Métodos de Generación de Variables Aleatorias

#### 3.4.1. Método de la Transformada Inversa

Sea  $f(x)$  el valor de la densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $X$  y sea  $F(x)$  la función de distribución acumulada, el método de la transformada inversa utiliza la distribución acumulada  $F(x)$  de la distribución que se va a simular, donde  $F(x)$  está distribuido uniformemente en el intervalo  $(0,1)$ . Para esto, se genera un número aleatorio uniforme  $U$  y se trata de determinar el valor de la variable aleatoria para la cual su distribución acumulada es igual a  $U$ .

$$F(x) = U \quad x = F^{-1}(U)$$

Entonces se tiene:

$$X = \begin{cases} x_0 & \text{si } U < p_0 \\ x_1 & \text{si } p_0 \leq U < p_0 + p_1 \\ \vdots & \\ x_j & \text{si } \sum_{i=1}^{j-1} p_i \leq U < \sum_{i=1}^j p_i \\ \vdots & \end{cases}$$

Como  $P(a \leq U < b) = b - a$  para  $0 < a < b < 1$ , se tiene que:

$$P\{X = x_j\} = P\left\{\sum_{i=1}^{j-1} p_i \leq U < \sum_{i=1}^j p_i\right\} = p_j$$

Y entonces  $X$  tiene la distribución deseada.

Además lo expresado anteriormente se lo puede escribir de forma algorítmica de la siguiente manera:

Generar un número aleatorio  $U$

Si  $U < p_0$  hacer  $X = x_0$  y terminar

Si  $p_0 \leq U < p_0 + p_1$  hacer  $X = x_1$  y terminar

Si  $p_0 + p_1 \leq U < p_0 + p_1 + p_2$  hacer  $X = x_2$  y terminar

y así sucesivamente...

Si los  $x_i$ ,  $i \geq 0$ , están ordenados de modo que  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$  y si  $F$  representa la función de distribución de  $X$ , entonces  $F(x_k) = \sum_{i=0}^k p_i$  y:

$X$  será igual a  $x_j$  si  $F(x_{j-1}) \leq U < F(x_j)$

Es decir, luego de generar un número aleatorio  $U$  se determina el valor de  $X$  hallando el intervalo  $(F(x_{j-1}), F(x_j))$  en el que está  $U$ .

Por ejemplo, si generamos valores de una variable aleatoria discreta  $X$  con función de probabilidad:

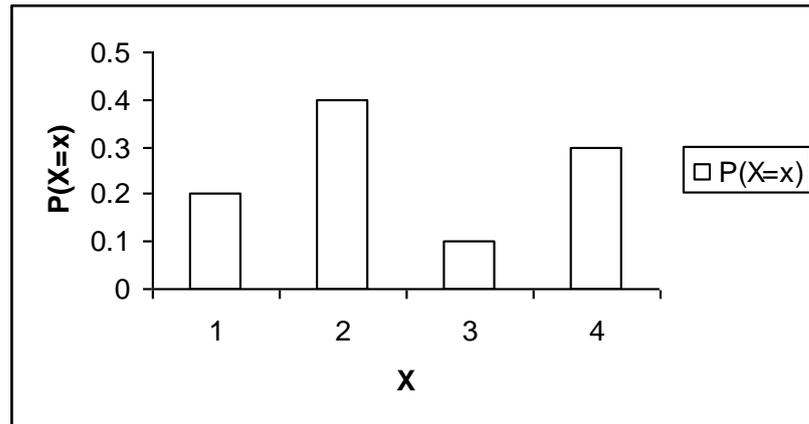
$$P(x=1) = p(1) = 0.2$$

$$P(x=2) = p(2) = 0.4$$

$$P(x=3) = p(3) = 0.1$$

$$P(x=4) = p(4) = 0.3$$

**Gráfico 3.1**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Función de Distribución de Probabilidad de la Variable Aleatoria X**



Elaboración: M. Bravo

Se tiene que:

Si  $U < 0.2$  entonces  $x = 1$

Si  $0.2 \leq U < 0.6$  entonces  $x = 2$

Si  $0.6 \leq U < 0.7$  entonces  $x = 3$

Si  $0.7 \leq U < 1$  entonces  $x = 4$

Al generar 3 valores de  $U$  se obtuvo:

$U_1 = 0.7$  entonces  $x = 4$

$U_2 = 0.151$  entonces  $x = 1$

$U_3 = 0.433$  entonces  $x = 2$

### 3.4.2. Método de Aceptación y Rechazo

El Método de Aceptación y Rechazo reparte puntos de manera uniforme y aleatoria bajo la curva de una función de probabilidad  $f(x)$ .

1. Se elige una función de probabilidad  $q_j$  de la cual sea fácil tomar una muestra aleatoria.
2. Encontrar una constante  $c$  tal que:

$$\frac{p_y}{cq_y} < 1$$

3. Generar un valor de la variable aleatoria  $Y$  con densidad  $q_i$ .
4. Generar un valor de una variable aleatoria uniforme  $U(0,1)$ .
5. Si

$$U \leq \frac{p_y}{cq_y} \quad \Rightarrow \quad x = y$$

caso contrario ir al paso 3.

**Teorema:** El algoritmo de aceptación y rechazo genera una variable aleatoria  $X$  tal que:

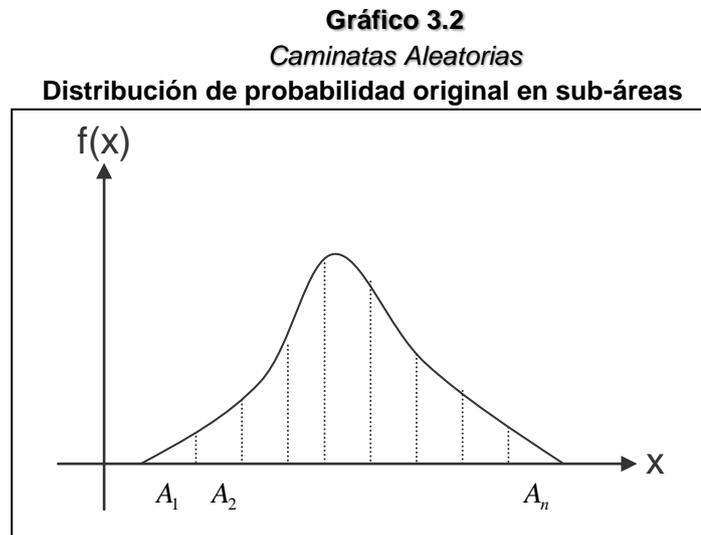
$$P(X = j) = p_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Donde además, el número de iteraciones del algoritmo necesarias para obtener  $X$  es una variable aleatoria geométrica con media  $c$ .

### 3.4.3. Método de Composición

Mediante este método la distribución de probabilidad  $f(x)$  se expresa como una mezcla de varias distribuciones de probabilidad seleccionadas adecuadamente<sup>(2)</sup>.

1. Dividir la distribución de probabilidad original en sub-áreas, tal como se muestra en el gráfico 3.2:



2. Definir una distribución de probabilidad para cada sub-área.
3. Expresar la distribución de probabilidad original en la siguiente forma:

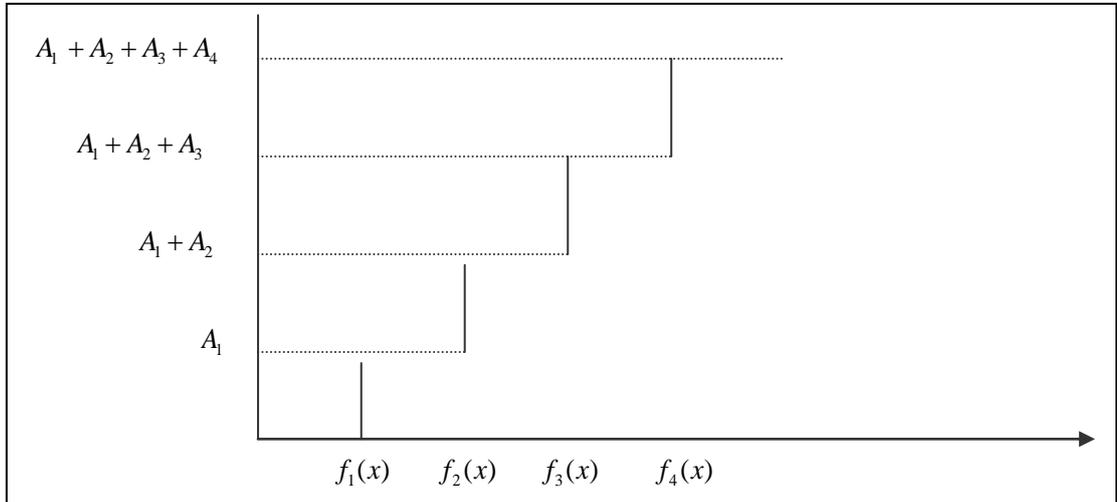
$$f(x) = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \dots + A_n f_n(x) \rightarrow \sum_{i=1}^n A_i = 1$$

4. Obtener la distribución acumulada en las áreas como se observa en el gráfico 3.3:

---

<sup>(2)</sup> Washington Armas (Métodos de Generación de Variables Aleatorias No Uniformes). Archivo ppt.

**Gráfico 3.3**  
*Caminatas Aleatorias*  
 Distribución Acumulada en la áreas



5. Generar dos números uniformes  $R_1, R_2$ .
6. Seleccionar la distribución de probabilidad  $f_i(x)$  con la cual se va a simular el valor de  $x$ . La selección de esta distribución se obtiene al aplicar el método de la transformada inversa, en la cual el eje de las  $y$  está representado por la distribución acumulada de las áreas, y el eje  $x$  por las distribuciones. Para esta selección se utiliza el número uniforme  $R_1$ .
7. Utilizar el número uniforme  $R_2$  para simular por el método de la transformada inversa o algún otro procedimiento especial, números al azar que sigan la distribución de probabilidad seleccionada en el paso anterior.

### 3.4.4. Generación de una Variable Aleatoria Bernoulli

Una variable aleatoria  $x$  tiene una distribución Bernoulli, si y solo si su distribución de probabilidad está dada por:

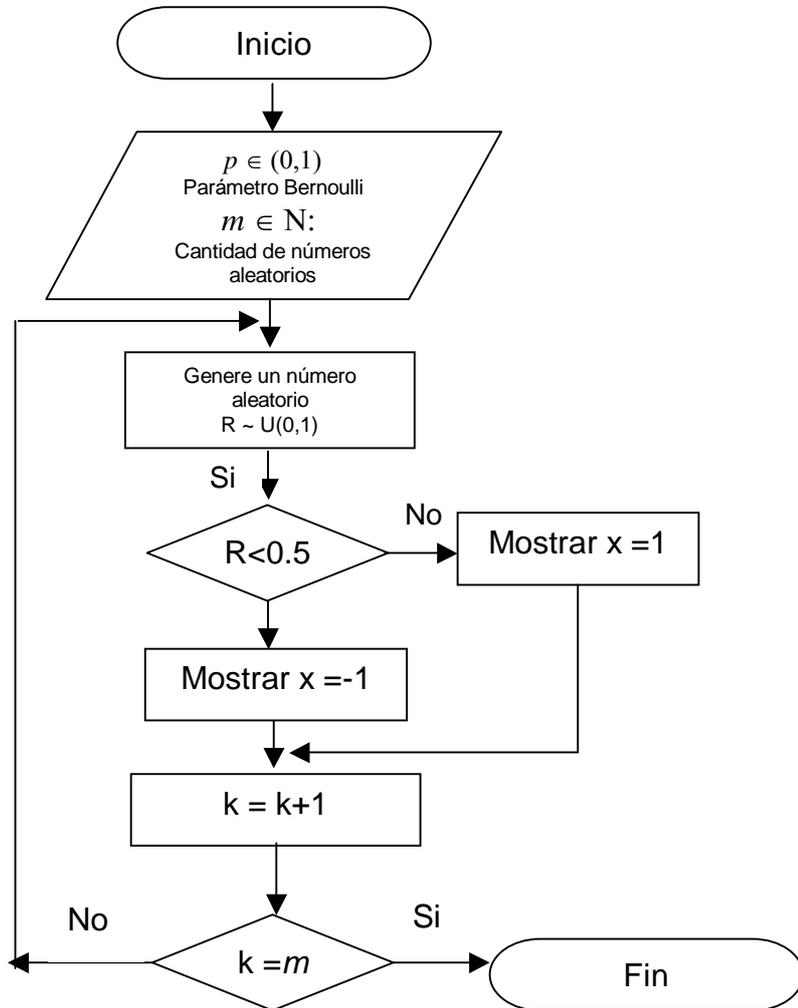
$$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x} \quad x = 0,1$$

Donde  $p$  representa la probabilidad de tener éxito y  $(1-p)$  la probabilidad de un fracaso.

Para simular caminatas aleatorias que toman los valores de  $-1$  y  $1$  con igual probabilidad y que siguen una distribución Bernoulli se utilizará el siguiente algoritmo:

1. Genere un número aleatorio uniforme  $U(0,1)$  denotado por  $R$
2. Si  $U < 0.5$  hacer  $X = -1$  y terminar.
3. Si  $0.5 \leq U < 1$  hacer  $X = 1$  y terminar.

**Diagrama de flujo de la simulación de una muestra de tamaño  $m$  proveniente de una población Bernoulli con parámetro  $p$**



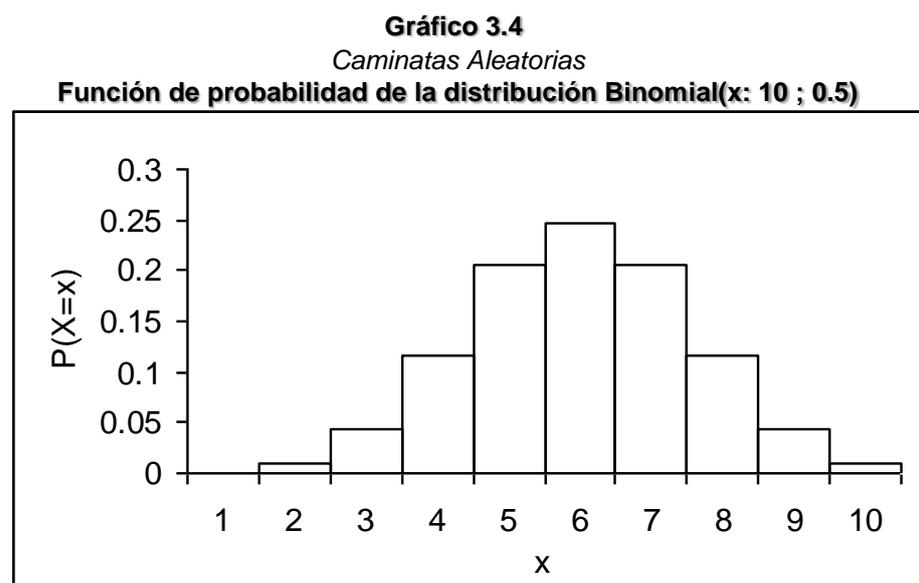
**3.4.5. Generación de una Variable Aleatoria Binomial**

Una variable aleatoria  $x$  tiene una distribución Binomial, si y solo si su distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \begin{array}{l} 0 < p < 1 \\ n = 1, 2, 3, \dots \\ x = 0, 1, 2, \dots, n \end{array}$$

Donde  $n$  representa el número de pruebas idénticas, teniendo cada prueba dos resultados posibles: éxito o fracaso. La probabilidad de tener éxito en una sola prueba es  $p$  y la probabilidad de un fracaso en  $(1-p)$ .

El gráfico 3.4 representa la función de probabilidad de la distribución Binomial con parámetros  $n = 10$  y  $p = 0.2$ ,  $p = 0.5$ ,  $p = 0.8$ , en el que se puede apreciar el efecto del parámetro  $p$ , siendo  $p$  quien determina la simetría en la distribución.



Elaboración: M. Bravo

Dentro de las principales características de la distribución Binomial se tienen las siguientes:

**Tabla III**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Características de la Distribución Binomial**

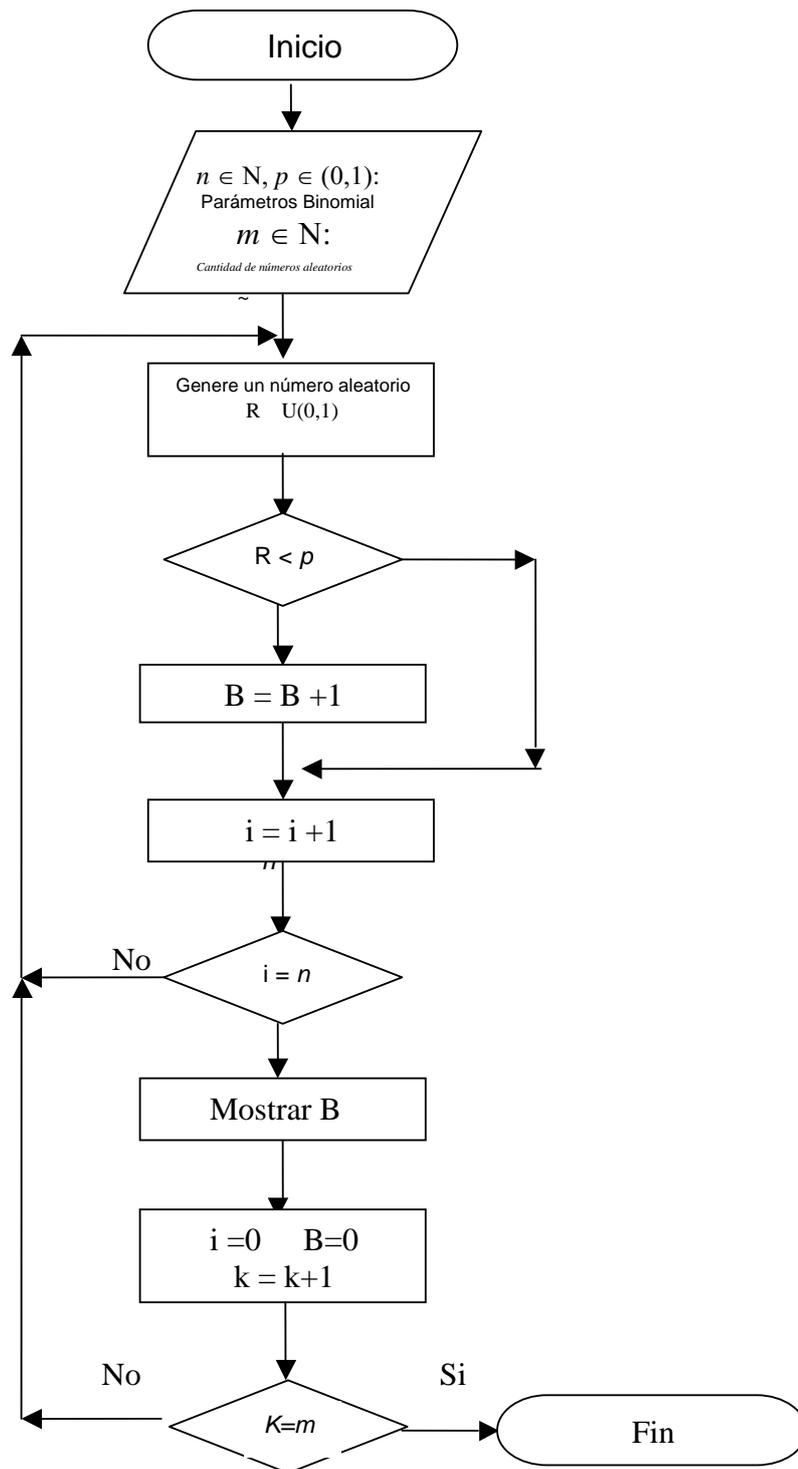
Función generadora de momentos	$(pe^t + q)^n$
Media	$np$
Moda	$p(n+1) - 1 \leq x \leq p(n+1)$
Varianza	$npq$
Sesgo	$\frac{q-p}{(npq)^{\frac{1}{2}}}$
Kurtosis	$3 - \frac{6}{n} + \frac{1}{npq}$

Elaboración: M. Bravo

Para simular números aleatorios que siguen una distribución Binomial se utilizará un algoritmo aplicando el Método de Rechazo.

1. Genere  $n$  números aleatorios uniformes con  $\alpha=0$  y  $\beta=1$  denotados por  $R_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .
2. Sea  $B$  el número de veces que los  $R_i$  son menores que  $p$ .
3.  $B$  es un número aleatorio que sigue una distribución Binomial con parámetros  $n$  y  $p$  respectivamente.

**Diagrama de flujo de la simulación de una muestra de tamaño  $m$  proveniente de una población binomial con parámetros  $n$  y  $p$**



### 3.4.6. Generación de una Variable Aleatoria Normal

Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución normal si y sólo si su función de densidad de probabilidad está dada por:

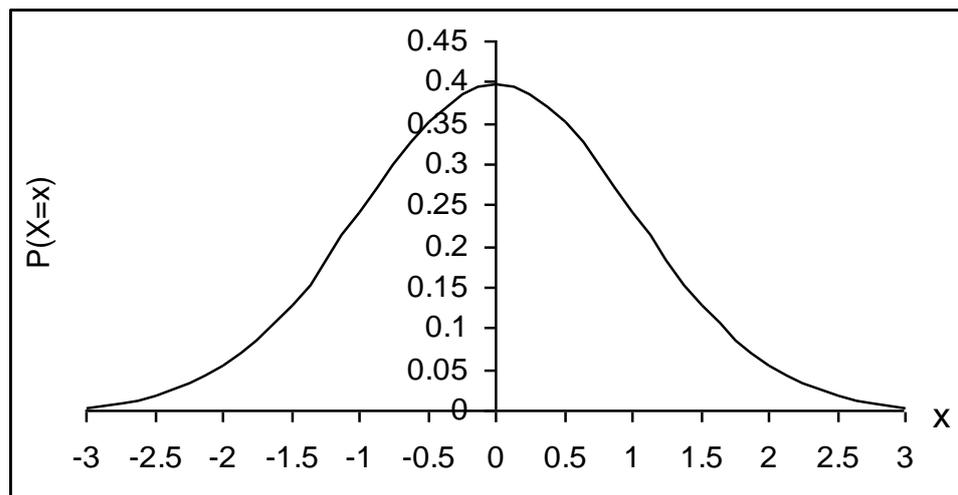
$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad \begin{array}{l} \sigma > 0 \\ -\infty < \mu < \infty \\ -\infty < x < \infty \end{array}$$

Donde  $\mu$  es el parámetro de tendencia central y  $\sigma^2$  es el parámetro de dispersión con respecto a la media de la población. El Gráfico 3.5 representa la función de densidad de probabilidad de la distribución normal con  $\mu=0$  y  $\sigma^2=1$ .

**Gráfico 3.5**

*Caminatas Aleatorias*

**Función de densidad de probabilidad de la distribución Normal(0 , 1)**



Elaboración: M. Bravo

Dentro de las principales características de la distribución Normal se tienen las siguientes:

**Tabla IV**  
*Caminatas Aleatorias*  
Características de la Distribución Normal

Función generadora de momentos	$e^{ut + \frac{1}{2}t\sigma^2}$
Media	$u$
Varianza	$\sigma^2$
Sesgo	0
Kurtosis	3

Elaboración: M. Bravo

Para simular muestras provenientes de una población normal se demostrará que  $F(x) \sim U(0,1)$ . Sea  $F(x)$  la función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria  $X$  y sea  $Y = F(x)$ .

Si se deriva  $Y$  con respecto a  $x$  se tiene que:

$$\frac{dY}{dx} = F'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dY} = \frac{1}{\frac{dY}{dx}} = \frac{1}{f(x)} \quad \forall f(x) > 0$$

Si se considera la técnica de transformación de una variable que enuncia:

Sea  $f(x)$  el valor de la densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $X$ . Si la función dada por  $y = u(x)$  es diferenciable y creciente o decreciente para todos los valores de  $X$  tales que  $f(x)$  sea diferente de 0, entonces para estos valores de  $X$ , la ecuación  $y = u(x)$  puede resolverse de forma única para  $x$  con el fin de producir  $x = w(y)$  y para los valores de  $y$  correspondientes la densidad de probabilidad de  $Y = u(X)$  está dada por:

$$g(y) = f[w(y)] \cdot |w'(y)|$$

Siempre que  $u'(x)$  sea diferente de 0. En otro punto  $g(Y) = 0$ .

Para este caso se tiene:

$$g(y) = f(x) \cdot \left| \frac{1}{f(x)} \right| = 1$$

Donde  $0 < y < 1$ , siendo la densidad de una distribución uniforme con  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$ , quedando realizada la demostración.

Sean las variables aleatorias:

$$R_i \sim U(0,1) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Para la distribución uniforme con parámetros  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$  se conoce que:

$$\mu = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \frac{1}{12}$$

Aplicando el Teorema del Límite Central a los  $R_i$  se tiene que:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^n R_i - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}}$$

Donde  $Z$  es un número aleatorio que sigue una distribución

Normal con parámetros  $\mu=0$  y  $\sigma^2=1$ .

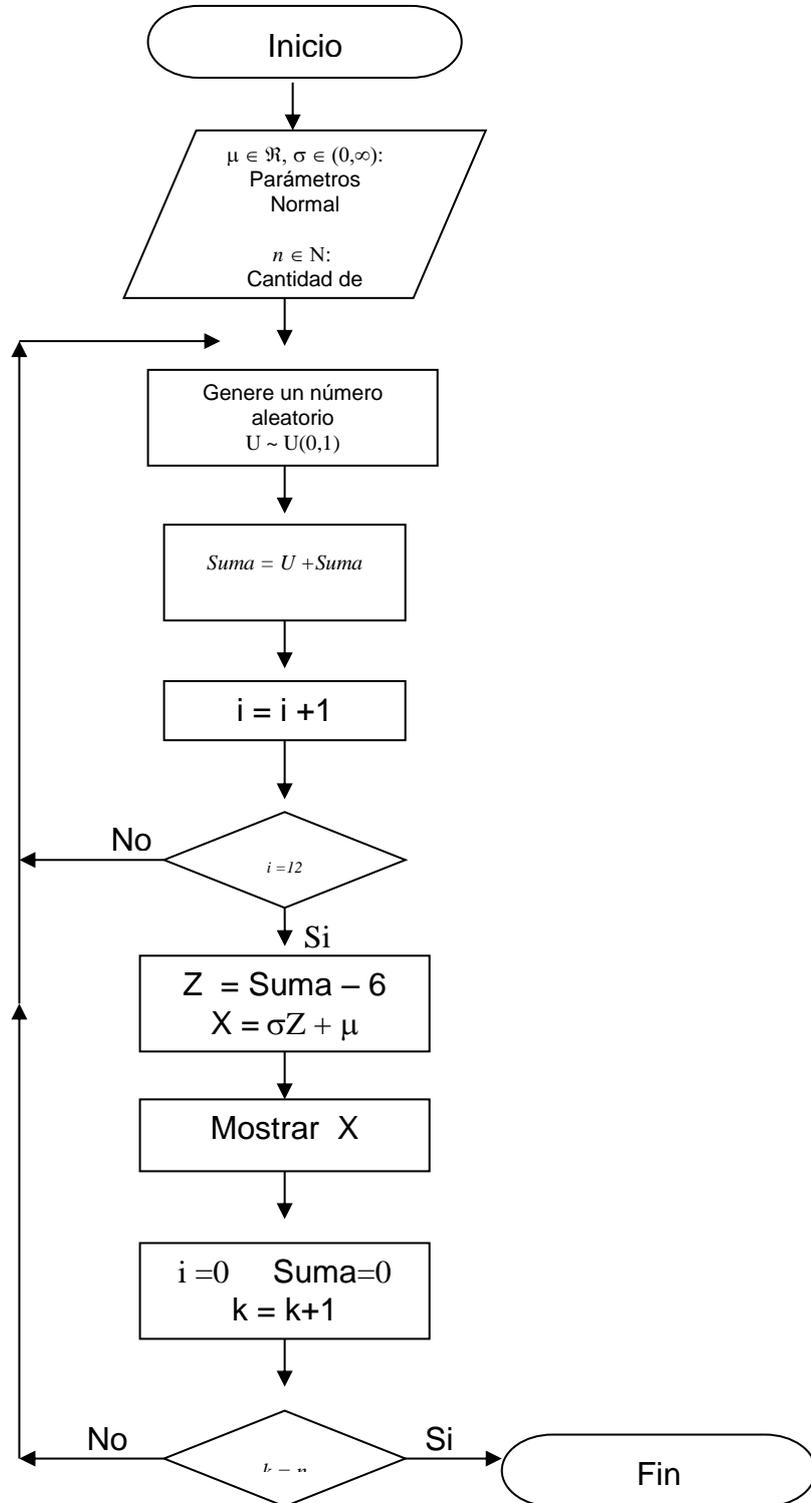
Además se puede demostrar que para  $n = 12$  se obtienen buenas aproximaciones, entonces se tiene que:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{12} R_i - 12\mu}{\sqrt{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}} = \frac{\sum_{i=1}^{12} R_i - 12(1/2)}{\sqrt{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}} = \left( \sum_{i=1}^{12} R_i \right) - 6$$

Si se desea obtener números aleatorios  $X$  que sigan una distribución  $N(\mu, \sigma^2)$  se utiliza la siguiente expresión:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad X = \sigma Z + \mu$$

Diagrama de flujo de la simulación de una muestra de tamaño  $n$  proveniente de una población normal con parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$



### 3.5. Simulador de Caminatas Aleatorias

El software que se utilizó en el desarrollo del simulador de caminatas aleatorias es Microsoft Visual Basic 6.0. A continuación se expone de manera general lo desarrollado en el simulador.

Se creó un módulo en llamado mdlvariables.bas en el cual se declaran todas las variables globales que se utilizan a lo largo del simulador, adicionalmente se declaró y se implementó en este modulo el procedimiento para realizar la simulación, el mismo que será invocado por un formulario posterior.

La declaración de las variables se la realizó de la siguiente manera:

```
Public matriz() As Variant
```

```
Public sumas() As Variant
```

```
Public mayores() As Variant
```

```
Public fil As Double
```

```
Public col As Double
```

Donde matriz es una variable que define la matriz que almacenará nuestros datos simulados, como vemos es una matriz de tipo "variant" es decir que automáticamente Visual Basic definirá el tipo de datos dependiendo de lo que asignemos a esta matriz, asimismo se puede observar que la matriz no tiene dimensiones específicas, pues estas dependerán de las especificaciones del usuario y así con estos datos redimensionar la matriz, teniendo en cuenta que las columnas

representarán la longitud de las caminatas aleatorias ( $n$ ) y las filas la cantidad máxima de caminatas ( $m$ ).

De la misma manera la matriz sumas es la variable tipo variant que almacena la suma acumulada para cada caminata aleatoria.

La variable fil representa el máximo de caminatas a simular, y la variable col es la longitud de cada una de estas caminatas.

El vector mayores contiene el número de veces que en cada caminata la suma fue mayor que cero, el mismo que se utilizará para el análisis de tiempos de permanencia.

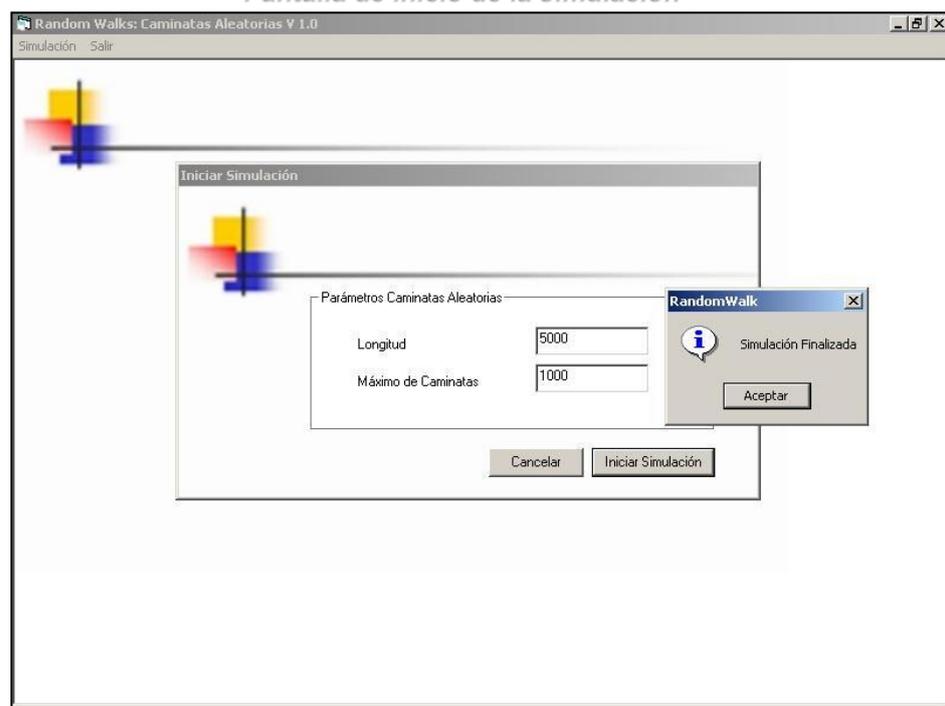
En el siguiente procedimiento se implementa el simulador para las caminatas aleatorias. Los valores generados para cada caminata aleatoria siguen una distribución Bernoulli, donde para nuestro caso se tiene que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = -1,1 \\ 0 & \text{resto de } x \end{cases}$$

siendo el algoritmo utilizado el expuesto en la sección 3.4.1.4. Básicamente lo que realiza es que para cada celda de nuestra matriz,

es decir, para cada punto de la caminata aleatoria se genera un número aleatorio uniforme entre 0 y 1, si este número aleatorio ( $r$ ) es menor que 0.5 entonces se asigna el valor de  $-1$ , en caso contrario se asigna 1, inmediatamente después de haber asignado el valor simulado se procede a sumar el valor acumulado y almacenarlo en la matriz sumas, luego se verifica si esta suma es mayor que 0 y en caso de ser afirmativo se incrementa el contador representado para cada caminata por el vector mayores.

**Gráfico 3.6**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Pantalla de inicio de la simulación**

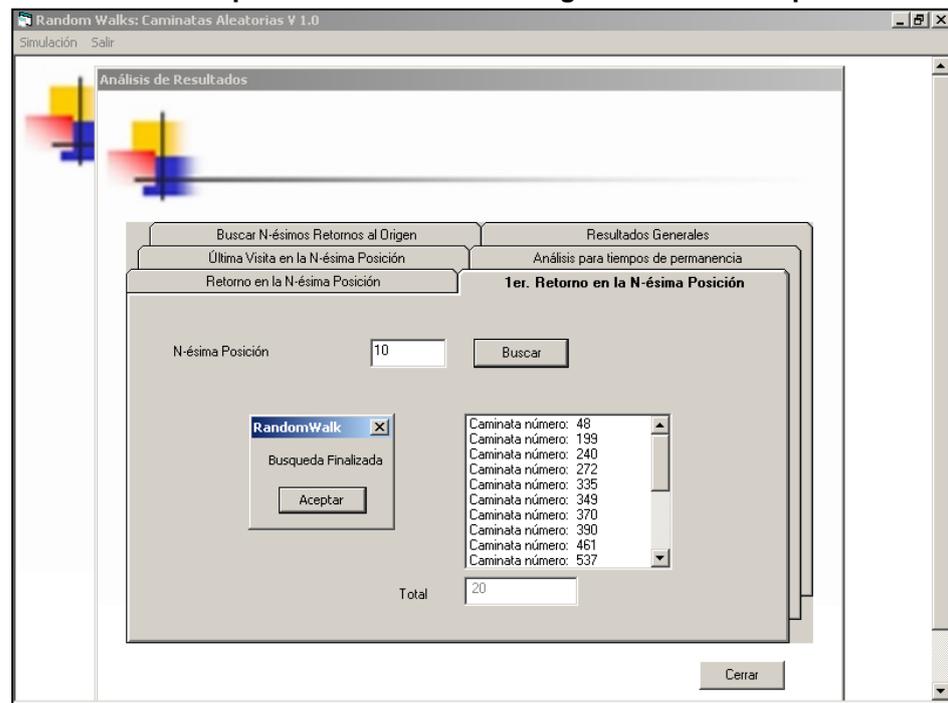


Elaboración: m. Bravo

En el procedimiento de búsqueda del 1<sup>er</sup>. retorno en la  $n$ -ésima posición, se verifica que exista un retorno en la posición indicada por el usuario,

en caso de existir un retorno en este punto, se procede a verificar que sea el primero para esto empieza a recorrer la matriz sumas en la caminata especificada desde el punto 1 hasta el punto especificado por el usuario y cuenta cuantos retornos han existido, si este contador es uno, indica que el único retorno fue el punto que especificamos por tanto sería el primero y la prueba sería exitosa.

**Gráfico 3.7**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Pantalla de búsqueda del 1<sup>er</sup> retorno al origen en la n-ésima posición**

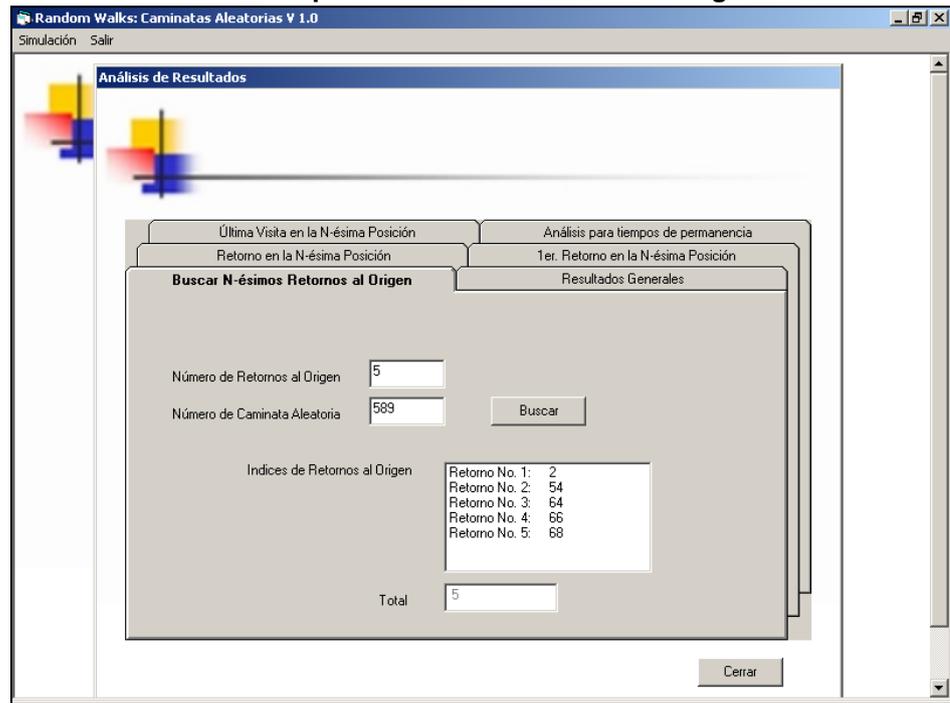


Elaboración: M. Bravo

En el procedimiento de búsqueda de n-ésimos retornos al origen, se comienza a calcular los retornos al origen para la caminata especificada,

es decir cuando  $S_{2v}=0$  y se detiene cuando haya llegado al número de retornos especificados por el usuario.

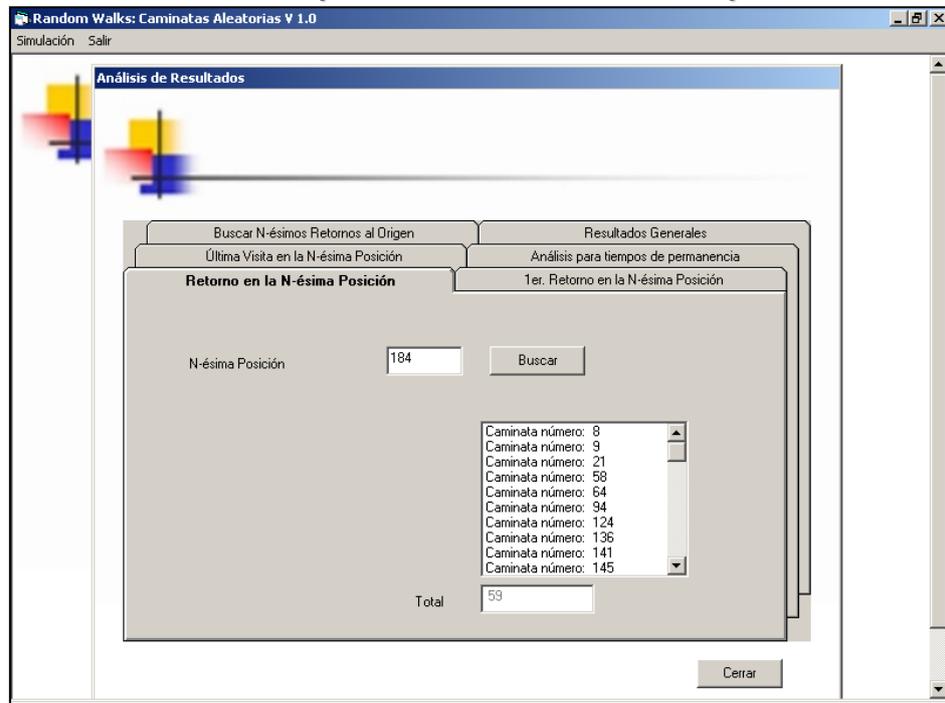
**Gráfico 3.8**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Pantalla de búsqueda del n-ésimo retorno al origen**



Elaboración: M. Bravo

En el procedimiento de búsqueda de retornos en la n-ésima posición se utiliza la matriz sumas y en caso de que la caminata en el punto especificado por el usuario sea cero, entonces se lo cuenta como retorno y se lo almacena en la lista.

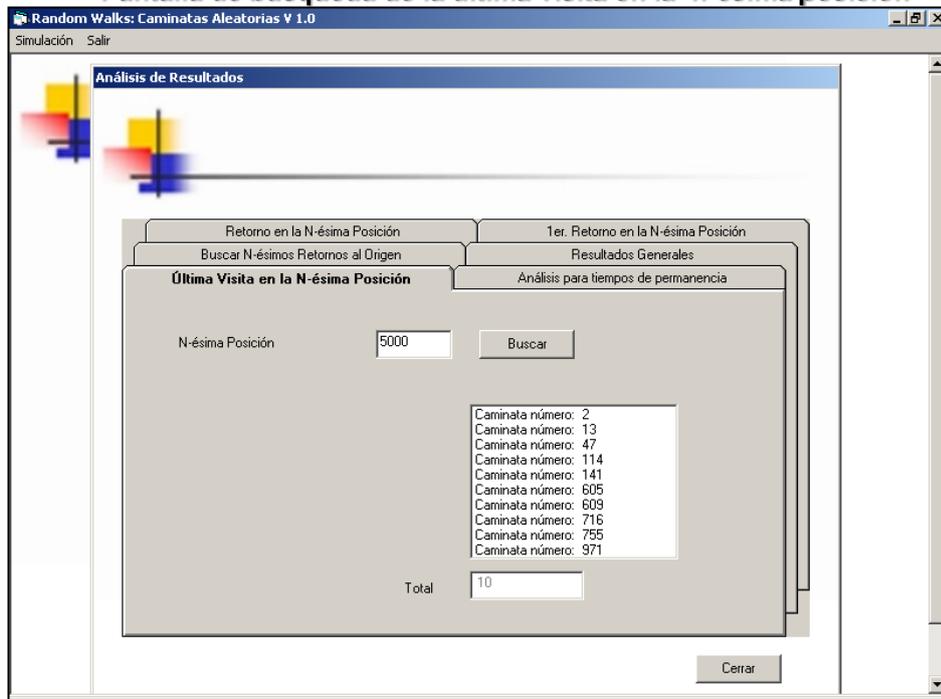
**Gráfico 3.9**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Pantalla de búsqueda de retornos en la n-ésima posición**



Elaboración: M. Bravo

En el procedimiento de búsqueda de la última visita en la n-ésima posición, primero se verifica que en el punto indicado exista un retorno, si existe un retorno lo siguiente a verificar es si este es el último, para esto se utiliza un contador, y se comienza a verificar desde el punto indicado por el usuario, es decir el punto donde se desea verificar si es la última visita hasta la longitud máxima de la caminata aleatoria y se comienza a contar en este rango cuantos retornos al origen existen, para que la verificación sea exitosa este contador debe tener el valor de 1, pues solamente debe contar el retorno del cual partimos.

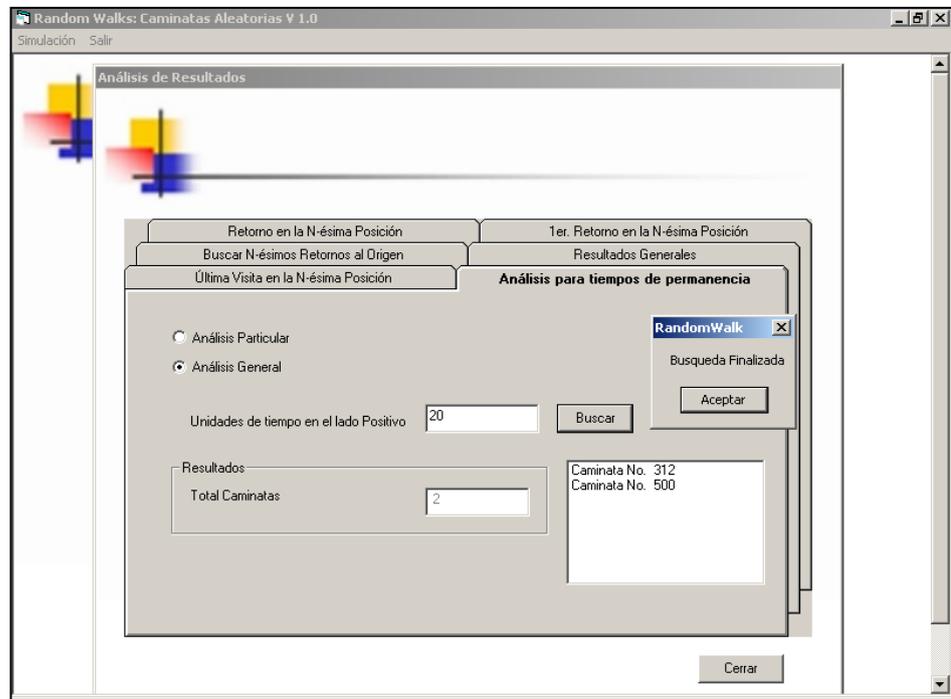
**Gráfico 3.10**  
**Caminatas Aleatorias**  
**Pantalla de búsqueda de la última visita en la n-ésima posición**



Elaboración: M. Bravo

En el procedimiento de análisis para tiempos de permanencia lo que se quiere conocer es el número de unidades de tiempo que la partícula permanece en el lado positivo, para esto se utiliza el vector mayores calculado en el modulo y se pregunta al usuario si desea los datos generales o específicos, en caso de ser específicos simplemente busca en el vector el número de fila que le corresponde a la caminata deseada, en caso de ser un análisis general se muestra el número de caminatas que cumplieron con el número especificado por el usuario de unidades de tiempo en el lado positivo.

**Gráfico 3.11**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Pantalla de análisis para tiempos de permanencia**



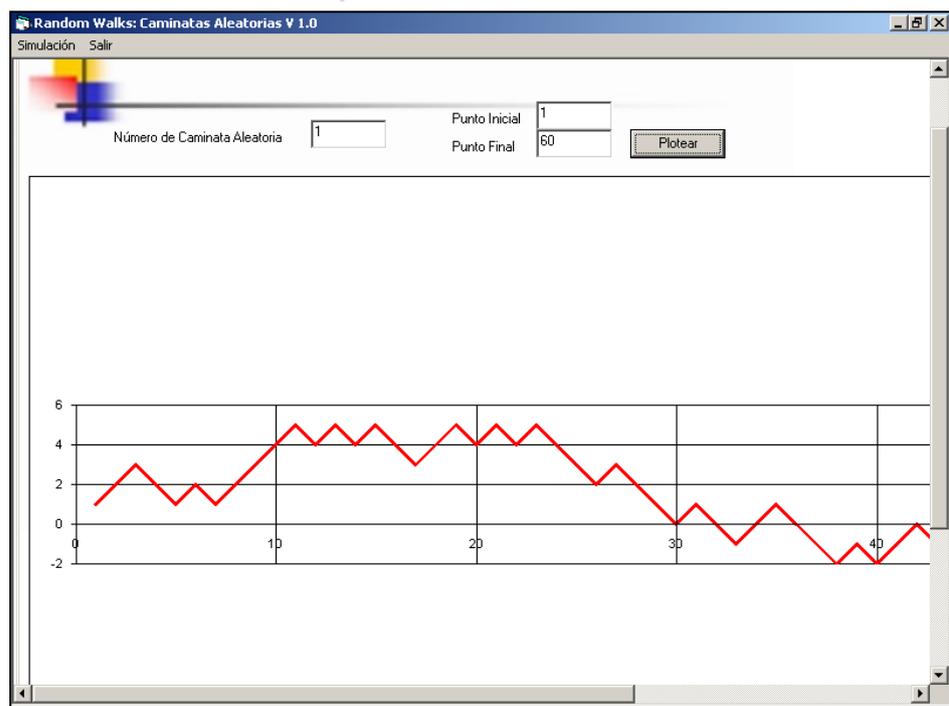
Elaboración: M. Bravo

Para realizar la gráfica de una caminata aleatoria, se desarrolló un formulario en el cual se emplea un control llamado Microsoft Chart Control que plotea la suma acumulada de cada caminata aleatoria, para esto se utiliza la matriz de sumas acumuladas que fue calculada en el procedimiento de simulación. Lo único que debe especificar el usuario es que caminata desea plotear y el punto inicial y final del ploteo, esto se lo realiza debido a que el gráfico se vuelve inapreciable cuando se grafican todos los puntos de una caminata aleatoria con una longitud muy grande. Adicionalmente el formulario envía los datos que se están ploteando a un archivo de texto, para que el mismo pueda ser importado

por alguna aplicación externa como Microsoft Excel y de esta manera poder utilizar los datos simulados para otro tipo de análisis si es necesario.

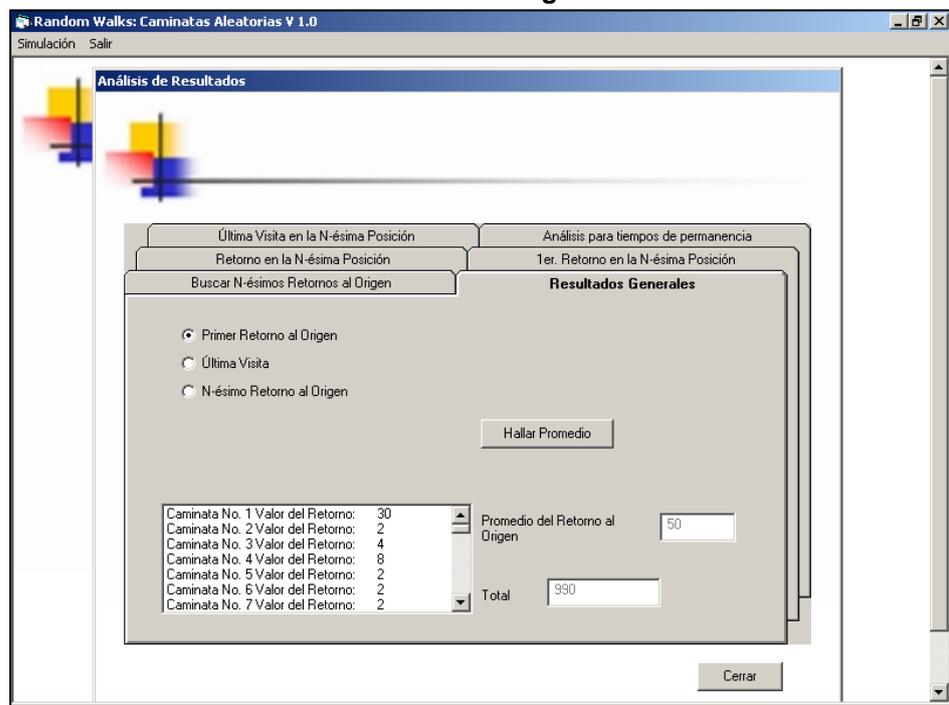
Para realizar ambas operaciones, tanto el ploteo como la escritura en el archivo de texto, se crea un vector temporal de las dimensiones especificadas por los límites del ploteo, el cual va a ser un subconjunto de la matriz sumas, guardando en este vector exclusivamente los puntos que se desea graficar; este vector es el que es asignado como “ChartData” (datos del gráfico) al objeto MsChart, y es el que es enviado al archivo de texto externo.

**Gráfico 3.12**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Pantalla de ploteo de caminatas aleatorias**



En el procedimiento para mostrar resultados generales, se calculan los promedios para la primer retorno, última visita y n-ésimo retorno, los cuales utilizan algoritmos similares a los utilizados en los procedimientos anteriores.

**Gráfico 3.13**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Pantalla de resultados generales**



Elaboración: M. Bravo

### 3.5.1 Características del Experimento

El desarrollo y ejecución del simulador de caminatas aleatorias se lo efectuó en un computador Pentium IV, teniendo como principales características de este computador un disco duro de

120 Gb. y 512 Mb. de memoria Ram. Además es necesario acotar que estas características influyeron en las simulaciones efectuadas en lo que respecta al número y longitud de las caminatas aleatorias, debido a la memoria que el simulador desarrollado.

### 3.6. Resultados Obtenidos

En esta sección se presentan los más importantes resultados obtenidos mediante la simulación. Para nuestro estudio se realizaron simulaciones para  $n=10000$  y  $m=500, 1000, 2000$ ;  $n=5000$  y  $m=1000, 2000, 3000, 4000$ , siendo  $n$  la longitud de la caminata aleatoria y  $m$  el número de caminatas aleatorias. Los valores de los parámetros se los seleccionó considerando la Ley de los Grandes Números, así también como la capacidad del computador en la que se efectuaron las simulaciones.

De los resultados obtenidos se establecieron comparaciones entre los valores teóricos y los valores simulados para:

**Tabla V**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Principales enunciados a comprobar mediante simulación**

<b>Probabilidad de retornar al origen en tiempo <math>2v</math></b>	$u_{2v}$
<b>Probabilidad de primer retorno al origen en el tiempo <math>2n</math></b>	$f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}$
<b>Probabilidad de que hasta el tiempo <math>2n</math>, la última visita ocurra en el tiempo <math>2k</math></b>	$\alpha_{2k, 2n}$
<b>Probabilidad de que en el intervalo de tiempo de 0 a <math>2n</math> la partícula permanezca <math>2k</math> unidades de tiempo en el lado positivo</b>	$\alpha_{2k, 2n}$
<b>Número de trayectorias de longitud <math>2n</math> tales que <math>S_{2n}=0</math> y que tienen exactamente <math>2k</math> de</b>	$2^{2n} u_{2n}/(n+1) = 2^{2n+1}$

***sus lados por encima del eje.***

$f_{2n+2}$

Elaboración: M. Bravo

Para obtener los valores teóricos de las definiciones mencionadas se aplicaron sus respectivas fórmulas, las cuales se encuentran detalladas en el capítulo 2. Los valores teóricos se muestran para cada caso en las respectivas tablas.

***n =10000 ; m =500***

En esta primera simulación se generaron 500 caminatas aleatorias de longitud 10000, de las cuales se obtuvieron los siguientes resultados:

### **1. Posición de los retornos**

**Tabla VI**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Posición de los retornos**  
**Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000**

<b># caminata</b>	<b>1<sup>er</sup> retorno</b>	<b>2<sup>do</sup> retorno</b>	<b>Última visita</b>
1	4	238	172 retornos (9704)
100	2	6	9 retornos (5868)
500	274	276	9 retornos (704)

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se seleccionaron tres caminatas aleatorias, de las cuales se puede apreciar la posición en la que ocurrieron el primer retorno, el segundo retorno y la última visita. Por ejemplo para la caminata 1 se tiene que el primer retorno sucedió en la posición 4, el segundo retorno en la posición 238 y la última visita al origen en la posición 9704, teniendo esta caminata un total de 172 retornos. Sin embargo si consideramos la caminata 500 el primer retorno se produjo en la

posición 274, el segundo retorno en la posición 276 y la última visita al origen en la posición 704, teniendo esta caminata un total de 9 retornos. Si comparamos estas dos caminatas se puede apreciar que las posiciones tanto para el primero, segundo y último retorno al origen defieren considerablemente, es decir que en un juego de lanzamiento de monedas donde se tiene que la probabilidad de obtener cara o sello es la misma e igual a  $\frac{1}{2}$ , un jugador puede tener el liderato del juego durante poco o mucho tiempo, por ejemplo en la caminata uno se obtiene el primer empate en el juego luego de 4 lanzamientos y el último después de 9704 lanzamientos, mientras que en la caminata 500 el primer empate sucede luego de 274 lanzamientos y el último luego de 704, lo que significa que en este juego uno de los jugadores tendrá ventaja hasta el final.

## 2. Retorno al origen en la posición 2v

**Tabla VII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas que tuvieron un retorno al origen en la posición 2v**  
**Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Posición	#caminatas
2	253
4	188
6	150
8	133
10	119
50	46
100	56
1000	14
5000	5
6000	8
7000	3

8000	4
9000	5
10000	2

En esta tabla se tiene el número de caminatas aleatorias que tuvieron un retorno al origen en la posición especificada.

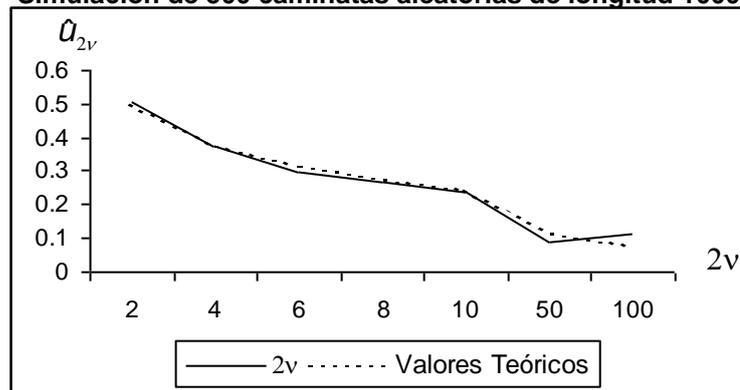
**Tabla VIII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $u_{2v}$**   
**Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Posición	$\hat{u}_{2v}$	$U_{2v}$	$ u_{2v} - \hat{u}_{2v} $
2	0.506	0.5	0.006
4	0.376	0.375	0.001
6	0.3	0.3125	0.0125
8	0.266	0.2734	0.0074
10	0.238	0.2460	0.008
50	0.092	0.1122	0.0202
100	0.112	0.0795	0.0325

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se muestran los valores teóricos y estimados de  $u_{2v}$ , de donde se obtuvieron en valor absoluto los respectivos errores.

**Gráfico 3.14**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Valores estimados para  $u_{2v}$**   
**Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000**



Elaboración: M. Bravo

En el gráfico 3.14 se puede observar que los valores estimados de probabilidad de un retorno al origen en el tiempo  $2v$  van decreciendo a medida que se considera una mayor posición en la caminata aleatoria, por lo que se cumple la teoría, aunque para la posición 100 se presenta un ligero incremento en su probabilidad. Es decir que en un juego de lanzamiento de monedas, es menos probable que suceda un empate a medida que se vayan incrementando el número de lanzamientos.

### 3. Primer retorno al origen en el tiempo $2n$

**Tabla IX**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas que tuvieron el primer retorno al origen en la posición  $2n$**   
**Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Posición	# caminatas
2	253
4	61
6	34
8	18
10	14
20	1
50	0
100	1

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se muestra el número de caminatas aleatorias que tuvieron el primer retorno al origen en la posición especificada.

**Tabla X**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $f_{2n}$**   
**Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000**

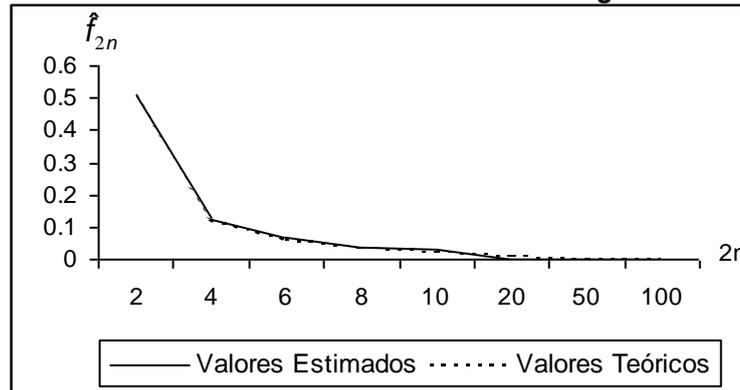
Posición	$\hat{f}_{2n}$	$f_{2n}$	$ f_{2n} - \hat{f}_{2n} $
2	0.506	0.5	0.006
4	0.122	0.125	0.003

6	0.068	0.063	0.005
8	0.036	0.0391	0.0031
10	0.028	0.0274	0.0006
20	0.002	0.0093	0.0073
50	0	0.0023	0.0023
100	0.002	0.0008	0.0012

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se presentan los valores estimados de  $f_{2n}$ , los cuales no difieren en consideración respecto a los valores teóricos.

**Gráfico 3.15**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Valores estimados para  $f_{2n}$**   
**Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000**



Elaboración: M. Bravo

En el gráfico 3.15 se aprecia que los valores estimados de probabilidad de que el primer retorno al origen ocurra en el tiempo  $2n$  tiene una tendencia a cero a medida que se incrementa la posición en la caminata aleatoria, por ejemplo la probabilidad de que el primer retorno al origen suceda en la posición 2 es de 0.506, mientras que la probabilidad de que el primer retorno ocurra en el posición 50 es 0, es decir que en un

juego de lanzamiento de monedas es mayormente probable de que el primer empate transcurra entre los primeros lanzamientos.

#### 4. Última visita al origen en el tiempo 2k

**Tabla XI**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas aleatorias que tuvieron su última visita en el tiempo 2k**  
**Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Posición	# caminatas
2	3
10	0
50	0
100	0
1000	0
5000	0
6000	0
7000	0
8000	0
9000	0
10000	2

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se indica el número de caminatas aleatorias que tuvieron su última visita al origen en la posición especificada.

**Tabla XII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $\alpha_{2k,2n}$**   
**Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Posición	$\hat{\alpha}_{2k,2n}$	$\alpha_{2k,2n}$	$ \alpha_{2k,2n} - \hat{\alpha}_{2k,2n} $
2	0.006	0.000008	0.0059
10	0	0.0020	0.0020
50	0	0.00090	0.00090
100	0	0.00063	0.00063
1000	0	0.00021	0.00021
5000	0	0.000127	0.000127
6000	0	0.000129	0.000129

7000	0	0.000138	0.000138
8000	0	0.00159	0.00159
9000	0	0.000212	0.000212

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se muestran los valores teóricos y estimados de  $\alpha_{2k, 2n}$ , de donde se puede apreciar que la mayoría de los valores obtenidos mediante la simulación son cero, es decir que de las 500 caminatas simuladas ninguna tuvo el último retorno al origen en esas posiciones.

Además, en la simulación realizada se obtuvo que 495 caminatas tuvieron un primer retorno y última visita al origen, mientras que 5 no tuvieron ningún retorno al origen, es decir que si lo comparamos con un juego de lanzamiento de monedas, éste nunca tuvo un empate.

##### 5. Tiempos de permanencia: unidades de tiempo en el lado positivo

**Tabla XIII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas que estuvieron 2k unidades de tiempo en el lado positivo**  
**Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Unidades de tiempo en el lado positivo	# caminatas
1000	0
5000	0
6000	0
7000	0
8000	0
9000	0
10000	3

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se muestra el número de caminatas en la que la partícula estuvo cierta cantidad de unidades de tiempo en el lado positivo, es decir por encima del eje t. Si lo comparamos con un juego de lanzamiento de monedas en el que si sale cara obtengo un punto y si sale sello me quitan un punto, cada vez que la suma de mis puntos  $S_n > 0$  significa que se encuentra en el lado positivo. Es decir que en un juego de 10000 lanzamientos, la suma de mis puntos nunca estuvo por encima del eje exactamente 1000 veces.

**Tabla XIV**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $\alpha_{2k, 2n}$**   
**Simulación de 500 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Unidades de tiempo en el lado positivo	$\hat{\alpha}_{2k, 2n}$	$\alpha_{2k, 2n}$	$ \alpha_{2k, 2n} - \hat{\alpha}_{2k, 2n} $
1000	0	0.00021	0.00021
5000	0	0.000127	0.000127
6000	0	0.000129	0.000129
7000	0	0.000138	0.000138
8000	0	0.00159	0.00159
9000	0	0.000212	0.000212

Elaboración: M. Bravo

Se pueden observar los valores estimados de la probabilidad de que en el intervalo tiempo de 0 a  $2n$  (10000) la partícula permanezca  $2k$  unidades de tiempo de el lado positivo que es igual a la probabilidad de que el último retorno al origen ocurra en determinada posición ( $\alpha_{2k, 2n}$ ). Se observa también que la mayoría de los valores encontrados son

cero, es decir que no existen caminatas que estuvieron por encima del eje para las unidades de tiempo especificadas.

**$n = 10000 ; m = 1000$**

En esta simulación se generaron 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000, de las cuales se obtuvieron los siguientes resultados:

### 1. Posición de los retornos

**Tabla XV**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Posición de los retornos**  
**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000**

# caminata	1 <sup>er</sup> retorno	2 <sup>do</sup> retorno	Ultima visita
1	2	456	20 retornos (1404)
100	2	6	63 retornos (5194)
500	12	258	32 retornos (456)
1000	2	8	135 retornos (9990)

Elaboración: M. Bravo

Se pueden apreciar la posición del primero, segundo y último retorno al origen de 4 caminatas aleatorias. En la caminata 1 se tiene que el primer retorno (empate) transcurrió luego de 2 lanzamientos, el segundo retorno se presenta en la posición 456, es decir luego de 454 lanzamientos y la última visita al origen ocurrió en la posición 1404, teniendo esta caminata un total de 20 retornos o empates en el juego.

En la caminata 1000 el primer retorno se produjo en la posición 2, el segundo retorno en la posición 8 y la última visita al origen en la posición 9990, teniendo esta caminata un total de 135 retornos. En esta última caminata se observa que este juego tuvo su último empate faltando únicamente 10 lanzamientos para finalizarlo.

## 2. Retorno al origen en la posición 2v

**Tabla XVI**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas que tuvieron un retorno al origen en la posición 2v**  
**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Posición	#caminatas
2	503
4	360
6	314
8	267
10	237
50	119
100	85
1000	38
5000	9
6000	7
7000	15
8000	12
9000	8
10000	10

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se muestra el número de caminatas aleatorias que tuvieron un retorno al origen en la posición especificada. Por ejemplo se tiene que después de dos lanzamientos 503 caminatas tuvieron un retorno al origen y que luego de 9000 lanzamientos 8 caminatas tuvieron un retorno al origen.

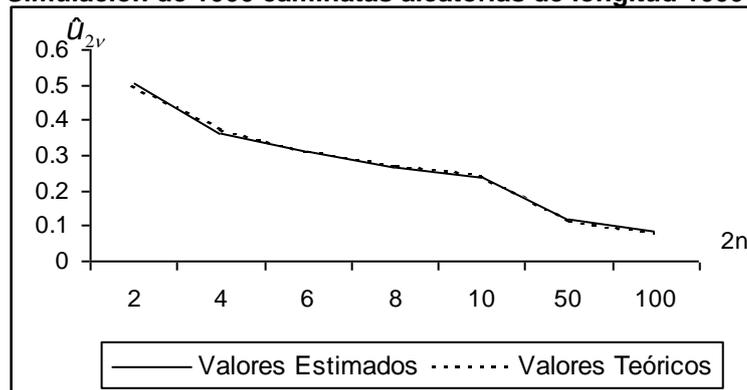
**Tabla XVII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $u_{2v}$**   
**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Posición	$\hat{u}_{2v}$	$U_{2v}$	$ u_{2v} - \hat{u}_{2v} $
2	0.503	0.5	0.003
4	0.360	0.375	0.015
6	0.314	0.3125	0.0015
8	0.267	0.2734	0.0064
10	0.237	0.2460	0.009
50	0.119	0.1122	0.0068
100	0.085	0.0795	0.0055

Elaboración: M. Bravo

Se puede observar que los errores calculados son relativamente pequeños, es decir que los valores estimados de  $u_{2v}$  no difieren de los valores teóricos por lo cual se cumple el sustento teórico expuesto en el capítulo anterior.

**Gráfico 3.16**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Valores estimados para  $u_{2v}$**   
**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000**



Elaboración: M. Bravo

En este gráfico 3.16 se presenta la tendencia de los valores estimados de probabilidad de un retorno al origen en el tiempo  $2v$ , donde se muestra un notable decrecimiento de que ocurra un retorno al origen a medida que aumenta el número de lanzamientos.

### 3. Primer retorno al origen en el tiempo $2n$

**Tabla XVIII**  
*Caminatas Aleatorias*  
Número de caminatas que tuvieron el primer retorno al origen en la posición  $2n$   
Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000

Posición	# caminatas
2	503
4	116
6	54
8	40
10	37
20	6
50	2
100	0

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla para cada posición en particular se indica el número de caminatas aleatorias que tuvieron su primer retorno al origen en dicha posición. Es decir que si lo consideramos con un juego, esto nos denota luego de cuantos lanzamientos se efectuó un empate.

**Tabla XIX**  
*Caminatas Aleatorias*  
Errores para  $f_{2n}$   
Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000

Posición	$\hat{f}_{2n}$	$f_{2n}$	$ f_{2n} - \hat{f}_{2n} $
2	0.503	0.5	0.003

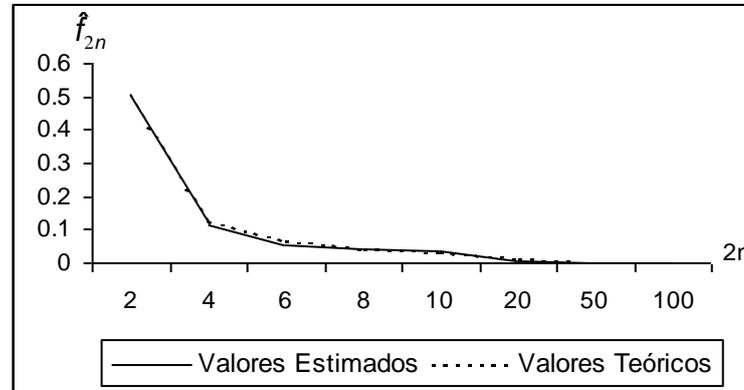
4	0.116	0.125	0.009
6	0.054	0.063	0.009
8	0.040	0.0391	0.0009
10	0.037	0.0274	0.0096
20	0.006	0.0093	0.0033
50	0.002	0.0023	0.0003
100	0	0.0008	0.0008

Elaboración: M. Bravo

Se puede apreciar la estimación de la probabilidad de que ocurra un retorno al origen para cada posición señalada. Esta estimación nos permite ver su aproximación con los valores teóricos correspondientes, dando como resultado errores relativamente pequeños.

**Gráfico 3.17**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Valores estimados para  $f_{2n}$**

**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000**



Elaboración: M. Bravo

En la gráfica se observa un comportamiento decreciente en los valores estimados de  $f_{2n}$ , con una tendencia a cero a medida que la cantidad de lanzamientos se va incrementando. Esto nos muestra que un juego de

lanzamiento de monedas la mayoría de los empates se producen durante los primeros lanzamientos.

#### **4. Ultima visita al origen en el tiempo $2k$**

**Tabla XX**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas aleatorias que tuvieron su última visita en el tiempo 2k**  
**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Posición	# caminatas
2	0
10	3
50	1
100	1
1000	0
5000	0
6000	0
7000	0
8000	0
9000	0
10000	10

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se presentan los valores del número de caminatas aleatorias que tuvieron su última visita la origen para cada una de las posiciones correspondientes.

**Tabla XXI**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $\alpha_{2k,2n}$**   
**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Posición	$\hat{\alpha}_{2k,2n}$	$\alpha_{2k,2n}$	$ \alpha_{2k,2n} - \hat{\alpha}_{2k,2n} $
2	0	0.000008	0.000008
10	0.006	0.0020	0.004
50	0.001	0.00090	0.0001
100	0.001	0.00063	0.00037
1000	0	0.00021	0.00021
5000	0	0.000127	0.000127
6000	0	0.000129	0.000129
7000	0	0.000138	0.000138
8000	0	0.00159	0.00159
9000	0	0.000212	0.000212

Elaboración: M. Bravo

Se observa que para la mayoría de las posiciones en la caminata aleatoria la probabilidad calculada tiene el valor de cero, esto se debe a que inclusive teóricamente la probabilidad de que este evento ocurra es bastante pequeño.

En la simulación efectuada se obtuvo también como resultado que las 1000 caminatas simuladas, 988 tuvieron un primer retorno y última visita al origen, teniendo que 12 no tuvieron ningún retorno al origen, es decir que para cada uno de estos juegos nunca se produjo un empate.

**5. Tiempos de permanencia: unidades de tiempo en el lado positivo**

**Tabla XXII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas que estuvieron 2k unidades de tiempo en el lado positivo**  
**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Unidades de tiempo en el lado positivo	# caminatas
1000	1
5000	0
6000	0
7000	0
8000	0
9000	0
10000	6

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se muestra el número de caminatas aleatorias que permanecieron determinadas unidades de tiempo en el lado positivo.

**Tabla XXIII**  
**Caminatas Aleatorias**  
**Errores para  $\alpha_{2k,2n}$**   
**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Unidades de tiempo en el lado positivo	$\hat{\alpha}_{2k,2n}$	$\alpha_{2k,2n}$	$ \alpha_{2k,2n} - \hat{\alpha}_{2k,2n} $
1000	0.001	0.00021	0.00079
5000	0	0.000127	0.000127
6000	0	0.000129	0.000129
7000	0	0.000138	0.000138
8000	0	0.00159	0.00159
9000	0	0.000212	0.000212

Elaboración: M. Bravo

Se observa que para la mayoría de unidades de tiempo especificadas, la probabilidad es cero debido a que ninguna de las caminatas cumplió con dicha especificación. Además se aprecia que las probabilidades teóricas para cada uno de los casos son bastantes pequeñas, dando como resultado consecuentemente errores pequeños.

**$n = 10000$  ;  $m = 2000$**

En esta simulación se generaron 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000, de las cuales se obtuvieron los siguientes resultados:

### 1. Posición de los retornos

**Tabla XXIV**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Posición de los retornos**  
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000**

# caminata	1 <sup>er</sup> retorno	2 <sup>do</sup> retorno	Ultima visita
1	2	4	145 retornos (6380)
100	10	12	102 retornos (9612)
500	8	18	62 retornos (2042)
1000	2	4	58 retornos (3076)
2000	2	4	100 retornos (7896)

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se observa el primero, segundo y último retorno de 5 caminatas aleatorias. En la caminata 1 se produjeron 145 empates siéndole último luego de 6380 lanzamientos, en la caminata 100 un total de 102 empates después de 9612 lanzamientos, en la caminata 500, 1000 y 2000 ocurrieron 62, 58 y 100 empates respectivamente, de un total de 10000 lanzamientos para cada una.

## 2. Retorno al origen en la posición 2v

**Tabla XXV**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas que tuvieron un retorno al origen en la posición 2v**  
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Posición	#caminatas
2	997
4	759
6	627
8	556
10	489
50	221
100	179
1000	51
5000	17

6000	30
7000	14
8000	15
9000	21
10000	18

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se presentan los valores del número de caminatas que tuvieron un retorno al origen en la posición dada.

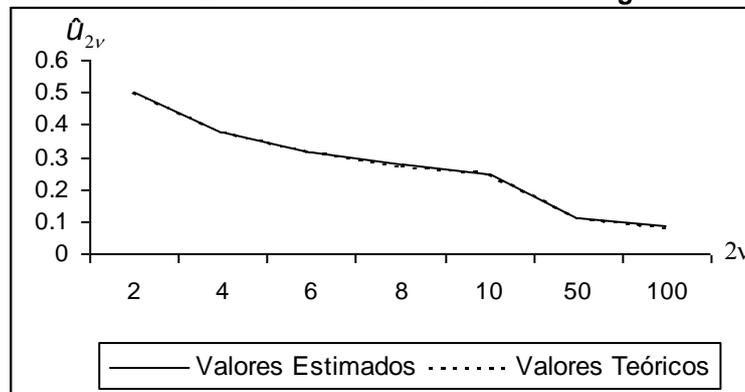
**Tabla XXVI**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $u_{2v}$**   
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Posición	$\hat{u}_{2v}$	$u_{2v}$	$ u_{2v} - \hat{u}_{2v} $
2	0.4985	0.5	0.0015
4	0.3795	0.375	0.0045
6	0.3135	0.3125	0.001
8	0.278	0.2734	0.0046
10	0.2445	0.2460	0.0015
50	0.1105	0.1122	0.0017
100	0.0895	0.0795	0.01

Elaboración: M. Bravo

Se observa que el error obtenido entre la diferencia del valor teórico con el valor estimado es pequeño para todos los casos, es decir que los valores obtenidos de la simulación no difieren de los establecidos teóricamente.

**Gráfico 3.18**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Valores estimados para  $u_{2v}$**   
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000**



Elaboración: M. Bravo

En la gráfica de los valores estimados de  $u_{2v}$ , se nota el decrecimiento de los mismos a medida que aumenta el número de lanzamientos.

### 3. Primer retorno al origen en el tiempo $2n$

**Tabla XXVII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas que tuvieron el primer retorno al origen en la posición  $2n$**   
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Posición	# caminatas
2	997
4	248
6	147
8	65
10	61
20	17
50	1
100	6

Elaboración: M. Bravo

Del total de caminatas simuladas, se muestra cuantas de ellas tuvieron su primer retorno al origen para cada una de las posiciones

especificadas. Se puede notar que cerca de la mitad de las caminatas simuladas obtuvieron su primer retorno luego de dos lanzamientos.

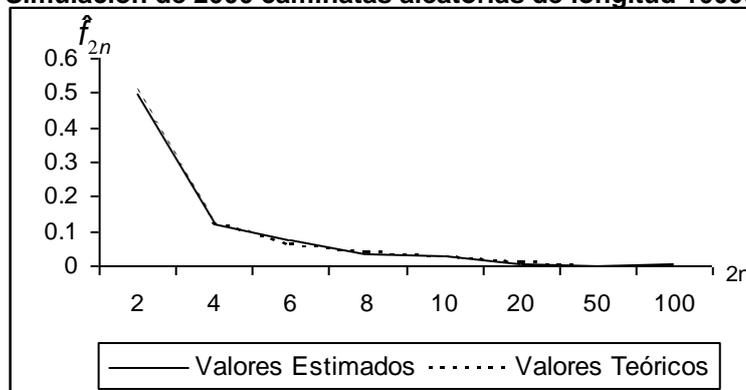
**Tabla XXVIII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $f_{2n}$**   
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Posición	$\hat{f}_{2n}$	$f_{2n}$	$ f_{2n} - \hat{f}_{2n} $
2	0.4985	0.5	0.0015
4	0.124	0.125	0.001
6	0.0735	0.063	0.0105
8	0.0325	0.0391	0.0066
10	0.0305	0.0274	0.0031
20	0.0085	0.0093	0.0008
50	0.0005	0.0023	0.0018
100	0.003	0.0008	0.0022

Elaboración: M. Bravo

Se observan los valores estimados de  $f_{2n}$ , donde se puede notar que el simulador dio muy resultados debido a los errores encontrados entre la diferencia del valor teórico y el valor estimado de  $f_{2n}$  para cada una de las posiciones.

**Gráfico 3.19**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Valores estimados para  $f_{2n}$**   
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000**



Elaboración: M. Bravo

En semejanza con la simulación realizada anteriormente, se presenta un comportamiento decreciente con tendencia a cero en los valores estimados de la probabilidad de que el primer retorno ocurra en una posición en particular.

#### 4. Última visita al origen en el tiempo $2k$

**Tabla XXIX**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas aleatorias que tuvieron su última visita en el tiempo  $2k$**   
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Posición	# caminatas
2	13
10	2
50	2
100	1
1000	2
5000	0
6000	0
7000	0
8000	1
9000	1
10000	18

Elaboración: M. Bravo

Para cada posición especificada se muestra la cantidad de caminatas aleatorias que tuvieron su última visita al origen en esa posición.

**Tabla XXX**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $\alpha_{2k, 2n}$**   
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Posición	$\hat{\alpha}_{2k, 2n}$	$\alpha_{2k, 2n}$	$ \alpha_{2k, 2n} - \hat{\alpha}_{2k, 2n} $
2	0.0065	0.000008	0.0064
10	0.001	0.0020	0.001
50	0.001	0.00090	0.0001
100	0.0005	0.00063	0.00013

1000	0.001	0.00021	0.00079
5000	0	0.000127	0.000127
6000	0	0.000129	0.000129
7000	0	0.000138	0.000138
8000	0.0005	0.00159	0.00109
9000	0.0005	0.000212	0.000288

Elaboración: M. Bravo

Se pueden observar los valores estimados de  $\alpha_{2k, 2n}$ , los cuales no difieren en consideración respecto a los valores teóricos, dando como resultado errores relativamente pequeños en su estimación. Además se puede notar que tanto los valores teóricos como los estimados no son decreciente, esto se debe a la relación de éstos con la función arco seno.

Del total de caminatas simuladas, 1985 de éstas tuvieron un primer retorno y última visita al origen, es decir que en 15 de éstas no se produjo ningún retorno al origen.

## 5. Tiempos de permanencia: unidades de tiempo en el lado positivo

**Tabla XXXI**

*Caminatas Aleatorias*

**Número de caminatas que estuvieron 2k unidades de tiempo en el lado positivo  
Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Unidades de tiempo en el lado positivo	# caminatas
1000	0
5000	1
6000	1
7000	0
8000	0
9000	0
10000	11

Elaboración: M. Bravo

Del total de caminatas simuladas se tiene que una caminata estuvo durante 5000 y 6000 unidades de tiempo en el lado positivo y 11 caminatas estuvieron 10000 unidades de tiempo en el lado positivo o encima del eje t.

**Tabla XXXII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $\alpha_{2k,2n}$**   
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 10000**

Unidades de tiempo en el lado positivo	$\hat{\alpha}_{2k,2n}$	$\alpha_{2k,2n}$	$ \alpha_{2k,2n} - \hat{\alpha}_{2k,2n} $
1000	0	0.00021	0.00021
5000	0.0005	0.000127	0.00023
6000	0.0005	0.000129	0.000371
7000	0	0.000138	0.000138
8000	0	0.00159	0.00159
9000	0	0.000212	0.000212

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se observan los valores estimados de  $\alpha_{2k,2n}$ , donde para ciertos casos la probabilidad es cero. Los errores calculados son relativamente pequeños, es decir que los valores estimados se aproximan en consideración con los valores teóricos.

**$n=5000 ; m=1000$**

En esta simulación se generaron 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000, de las cuales se obtuvieron los siguientes resultados:

### 1. Posición de los retornos

**Tabla XXXIII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Posición de los retornos**  
**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

# caminata	1 <sup>er</sup> retorno	2 <sup>do</sup> retorno	Ultima visita
1	2	4	140 retornos(1834)
500	4	26	77 retornos(4928)
1000	3982	3984	27 retornos(4228)

Elaboración: M. Bravo

Luego de realizadas las 1000 simulaciones, se obtuvo que la caminata 1000 tuvo su primer empate luego de 3982 lanzamientos y su último empate luego de haberse realizado 4228 lanzamientos. Lo que se puede apreciar es que uno de los jugadores tuvo un largo liderato en el juego, es decir que aunque teóricamente la probabilidad de cada uno es la misma, en un juego un jugador puede ir ganando durante un largo período de tiempo.

## 2. Retorno al origen en la posición 2v

**Tabla XXXIV**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas que tuvieron un retorno al origen en la posición 2v**  
**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	#caminatas
2	504
4	379
6	318
8	280
10	244
50	122
100	80
1000	36
2000	13
3000	17
4000	11

5000	15
------	----

Elaboración: M. Bravo

En la tabla se presentan para cierto número de lanzamientos la cantidad de caminatas aleatorias que tuvieron un retorno al origen.

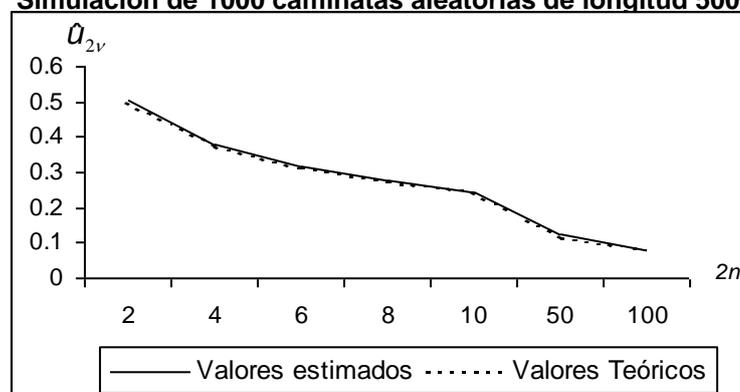
**Tabla XXXV**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $u_{2v}$**   
**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	$\hat{u}_{2v}$	$u_{2v}$	$ u_{2v} - \hat{u}_{2v} $
2	0.504	0.5	0.004
4	0.379	0.375	0.004
6	0.318	0.3125	0.0055
8	0.280	0.2734	0.0066
10	0.244	0.2460	0.002
50	0.122	0.1122	0.0098
100	0.08	0.0795	0.0005

Elaboración: M. Bravo

Los valores obtenidos mediante la simulación, es decir los valores estimados se aproximan considerablemente a los valores teóricos, obteniendo un error pequeño para cada uno de los casos.

**Gráfico 3.20**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Valores estimados para  $u_{2v}$**   
**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000**



Para este caso, asimismo como en los anteriores se observa una tendencia decreciente en las probabilidades de que ocurra un retorno al origen en la posición  $2v$ .

### 3. Primer retorno al origen en el tiempo $2n$

**Tabla XXXVI**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas que tuvieron el primer retorno al origen en la posición  $2n$**   
**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	# caminatas
2	504
4	130
6	57
8	47
10	25
20	10
50	2
100	1

Elaboración: M. Bravo

Esta tabla muestra el número de caminatas en las que se produjo un retorno al origen para una de las posiciones detalladas. Se tiene que en la mayoría de las caminatas el primer retorno al origen se efectuó luego de dos lanzamientos, mientras que tan solo una caminata tuvo su primer retorno después de haberse realizado 100 lanzamientos. Además se observa que a medida que se incrementa el número de lanzamientos, la cantidad de caminatas que tuvieron su primer retorno al origen se va reduciendo.

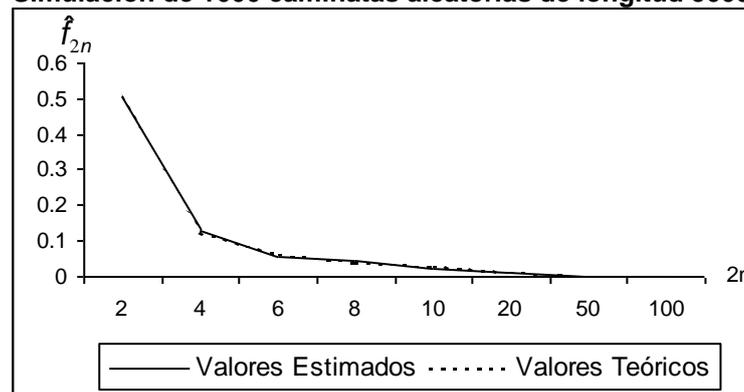
**Tabla XXXVII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $f_{2n}$**   
**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	$\hat{f}_{2n}$	$f_{2n}$	$ f_{2n} - \hat{f}_{2n} $
2	0.504	0.5	0.004
4	0.130	0.125	0.005
6	0.057	0.063	0.006
8	0.047	0.0391	0.0079
10	0.025	0.0274	0.0024
20	0.010	0.0093	0.0007
50	0.002	0.0023	0.0003
100	0.001	0.0008	0.0002

Elaboración: M. Bravo

Se pueden apreciar los errores calculados para cada posición correspondiente, lo que muestra una buena estimación de los valores teóricos de  $f_{2n}$ .

**Gráfico 3.21**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Valores estimados para  $f_{2n}$**   
**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000**



Elaboración: M. Bravo

En esta gráfica se puede notar que los valores estimados de  $f_{2n}$  tienden a cero a razón de que aumenta la posición en la caminata aleatoria.

#### 4. Ultima visita al origen en el tiempo 2k

**Tabla XXXVIII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas aleatorias que tuvieron su última visita en el tiempo 2k**  
**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	# caminatas
2	5
10	3
50	1
100	0
1000	0
2000	0
3000	1
4000	1
5000	15

Elaboración: M. Bravo

Para cada posición de la caminata aleatoria se muestra el número de caminatas que tuvieron su última visita en dicha posición.

**Tabla XXXIX**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $\alpha_{2k,2n}$**   
**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	$\hat{\alpha}_{2k,2n}$	$\alpha_{2k,2n}$	$ \alpha_{2k,2n} - \hat{\alpha}_{2k,2n} $
2	0.005	0.00636	0.00136
10	0.003	0.00284	0.00016
50	0.001	0.00127	0.00027
100	0	0.00090	0.00090
1000	0	0.00031	0.00031
2000	0	0.00025	0.00025
3000	0.001	0.00025	0.00075
4000	0.001	0.00031	0.00069

Elaboración: M. Bravo

En semejanza con la simulación realizada anteriormente, se observan los valores estimados de la probabilidad de que la última visita al origen

o el última empate se produzca en una posición en particular. Se observa también la aproximación de los valores estimados con los teóricos, los cuales no son totalmente decrecientes.

Como resultados obtenidos de la simulación se obtuvo que 14 de éstas no tuvieron ningún retorno al origen, es decir que un juego éste nunca tuvo un empate, lo que indica que uno de los jugadores estuvo liderando desde el inicio hasta el final del juego.

**5. Tiempos de permanencia: unidades de tiempo en el lado positivo**

**Tabla XL**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas que estuvieron  $2k$  unidades de tiempo en el lado positivo**  
**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Unidades de tiempo en el lado positivo	# caminatas
1000	1
2000	0
2500	0
3000	0
3500	0
4000	0
4500	1
5000	10

Elaboración: M. Bravo

Esta tabla muestra el número de caminatas que tuvieron una determinada cantidad de unidades de tiempo por encima del eje t.

**Tabla XLI**  
**Caminatas Aleatorias**  
**Errores para  $\alpha_{2k,2n}$**   
**Simulación de 1000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Unidades de tiempo en el lado positivo	$\alpha_{2k,2n}$	$\alpha_{2k,2n}$	$ \alpha_{2k,2n} - \hat{\alpha}_{2k,2n} $
1000	0.001	0.000318	0.000682
2000	0	0.000259	0.000259
2500	0	0.000254	0.000254
3000	0	0.000259	0.000259
3500	0	0.000277	0.000277
4000	0	0.000318	0.000318
4500	0.001	0.000424	0.000576

Elaboración: M. Bravo

Se pueden observar los valores teóricos y estimados de  $\alpha_{2k,2n}$ , donde se tiene igual que para las simulaciones anteriores probabilidades de cero debido que ninguna de las caminatas permanecen determinadas unidades de tiempo en el eje positivo.

**$n = 5000 ; m = 2000$**

En esta simulación se generaron 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000, de las cuales se obtuvieron los siguientes resultados:

### 1. Posición de los retornos

**Tabla XLII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Posición de los retornos**  
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

# caminata	1 <sup>er</sup> retorno	2 <sup>do</sup> retorno	Ultima visita
1	2	4	13 retornos (396)
500	4	8	7 retornos (28)
1000	4	6	86 retornos (1122)
2000	6	8	31 retornos (4464)

Elaboración: M. Bravo

Para cada una de las caminatas se muestra la posición, es decir después de cuantos lanzamientos se efectuaron el primero y segundo retorno, así como la última visita al origen. Por ejemplo la caminata 500 tuvo un total de 7 retornos o empates en el juego, siendo el último después de 28 de 5000 lanzamientos, por lo que se puede decir que de ahí en adelante uno de los jugadores se mantuvo liderando el juego por un largo período de tiempo.

## 2. Retorno al origen en la posición 2n

**Tabla XLIII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas que tuvieron un retorno al origen en la posición 2v**  
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	#caminatas
2	988
4	764
6	609
8	535
10	482
50	226
100	150
1000	56
2000	40

3000	27
4000	23
5000	23

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se tiene el número de caminatas aleatorias que tuvieron un retorno al origen en la posición especificada.

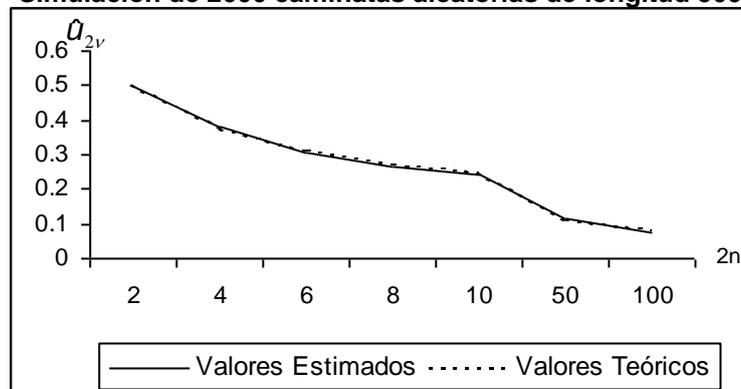
**Tabla XLIV**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $u_{2v}$**   
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	$\hat{u}_{2v}$	$u_{2v}$	$ u_{2v} - \hat{u}_{2v} $
2	0.494	0.5	0.006
4	0.382	0.375	0.007
6	0.3045	0.3125	0.008
8	0.2675	0.2734	0.0059
10	0.241	0.2460	0.005
50	0.113	0.1122	0.0008
100	0.075	0.0795	0.0045

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se muestran los valores teóricos y estimados de  $u_{2v}$ , de donde se obtuvieron en valor absoluto los respectivos errores, teniendo el error más pequeño para  $u_{50}$  con un 0.08%.

**Gráfico 3.22**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Valores estimados para  $u_{2v}$**   
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000**



En el gráfico 3.22 se puede observar que los valores estimados de probabilidad de un retorno al origen en el tiempo  $2v$  van decreciendo a medida que se considera una mayor posición en la caminata aleatoria, cumpliéndose la teoría establecida.

### 3. Primer retorno al origen en el tiempo $2n$

**Tabla XLV**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas que tuvieron el primer retorno al origen en la posición  $2n$**   
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	# caminatas
2	988
4	250
6	112
8	81
10	65
20	12
50	2
100	3

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se muestra el número de caminatas aleatorias que tuvieron el primer retorno al origen en la posición especificada.

**Tabla XLVI**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $f_{2n}$**   
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

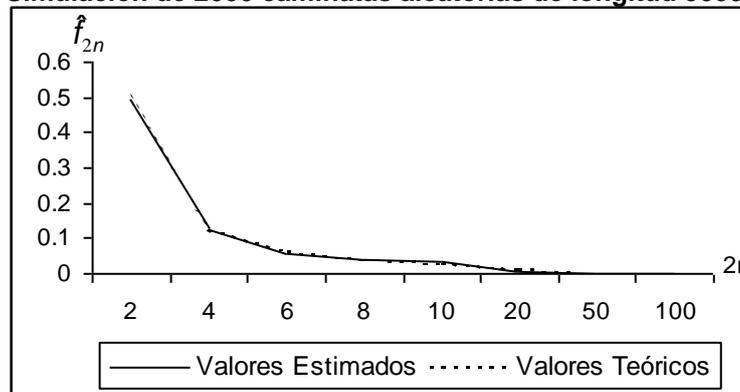
Posición	$\hat{f}_{2n}$	$f_{2n}$	$ f_{2n} - \hat{f}_{2n} $
2	0.494	0.5	0.006
4	0.125	0.125	0.00
6	0.056	0.063	0.007
8	0.0405	0.0391	0.0014
10	0.0325	0.0274	0.0051
20	0.006	0.0093	0.0033
50	0.001	0.0023	0.0013

100	0.0015	0.0008	0.0007
-----	--------	--------	--------

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se presentan los valores estimados de  $f_{2n}$ , de donde se observa que éstos no difieren en consideración respecto a los valores teóricos.

**Gráfico 3.23**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Valores estimados para  $f_{2n}$**   
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000**



Elaboración: M. Bravo

En el gráfico 3.23 se aprecia que los valores estimados de probabilidad de que el primer retorno al origen ocurra en el tiempo  $2n$  tiene una tendencia a cero a medida que se incrementa la posición en la caminata aleatoria, por ejemplo la probabilidad de que el primer retorno al origen suceda en la posición 2 es de 0.494, mientras que la probabilidad de que el primer retorno ocurra en el posición 100 es de 0.0015, es decir que en un juego de lanzamiento de monedas es mayormente probable que el primer empate transcurra entre los primeros lanzamientos.

#### 4. Última visita al origen en el tiempo 2k

**Tabla XLVII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas aleatorias que tuvieron su última visita en el tiempo 2k**  
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	# caminatas
2	14
10	6
50	2
100	3
1000	1
2000	0
3000	0
4000	2
5000	23

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se indica el número de caminatas aleatorias que tuvieron su última visita al origen en la posición especificada.

**Tabla XLVIII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $\alpha_{2k,2n}$**   
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	$\hat{\alpha}_{2k,2n}$	$\alpha_{2k,2n}$	$ \alpha_{2k,2n} - \hat{\alpha}_{2k,2n} $
2	0.007	0.00636	0.00064
10	0.003	0.00284	0.00016
50	0.001	0.00127	0.00027
100	0.0015	0.00090	0.0006
1000	0.0005	0.00031	0.00019
2000	0	0.00025	0.00025
3000	0	0.00025	0.00025
4000	0.001	0.00031	0.00069

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se muestran los valores teóricos y estimados de  $\alpha_{2k,2n}$ , de donde se puede apreciar que la mayoría de los valores obtenidos son

relativamente pequeños, es decir que de las 2000 caminatas simuladas muy pocas de ellas y en algunos casos ninguna tuvo el último retorno al origen en una posición en particular.

Además, en la simulación realizada se obtuvo que 1979 caminatas tuvieron un primer retorno y última visita al origen, mientras que 21 no tuvieron ningún retorno al origen, es decir que si lo comparamos con un juego de lanzamiento de monedas, éste nunca tuvo un empate.

**5. Tiempos de permanencia: unidades de tiempo en el lado positivo**

**Tabla XLIX**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas que estuvieron 2k unidades de tiempo en el lado positivo**  
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Unidades de tiempo en el lado positivo	# caminatas
1000	0
2000	0
2500	0
3000	1
3500	0
4000	1
4500	0
5000	11

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se muestra el número de caminatas en la que la partícula estuvo cierta cantidad de unidades de tiempo en el lado positivo, es decir por encima del eje t.

**Tabla L**

*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $\alpha_{2k, 2n}$**   
**Simulación de 2000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Unidades de tiempo en el lado positivo		$\alpha_{2k, 2n}$	$ \alpha_{2k, 2n} - \hat{\alpha}_{2k, 2n} $
1000	0	0.000318	0.000318
2000	0	0.000259	0.000259
2500	0	0.000254	0.000254
3000	0.0005	0.000259	0.000241
3500	0	0.000277	0.000277
4000	0.0005	0.000318	0.000182
4500	0	0.000424	0.000424

Elaboración: M. Bravo

Se pueden observar los valores estimados de la probabilidad de que en el intervalo tiempo de 0 a  $2n$  (5000) la partícula permanezca  $2k$  unidades de tiempo de el lado positivo. Se observa también que la mayoría de los valores encontrados son cero, es decir que no existen caminatas que estuvieron por encima del eje para las unidades de tiempo especificadas.

**$n = 5000 ; m = 3000$**

En esta simulación se generaron 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000, de las cuales se obtuvieron los siguientes resultados:

**1. Posición de los retornos**

**Tabla LI**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Posición de los retornos**  
**Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Elaboración: M. Bravo

# caminata	1 <sup>er</sup> retorno	2 <sup>do</sup> retorno	Ultima visita
1	234	246	86 retornos (3974)
500	2	4	84 retornos (4936)
1000	18	20	33 retornos (708)
2000	6	8	85 retornos (3704)
3000	2	4	107 retornos (4740)

En la tabla se muestran 5 juegos de lanzamientos de monedas en los cuales se produjeron 86, 84, 33, 85 y 107 empates para cada uno de ellos respectivamente.

## 2. Retorno al origen en la posición 2n

**Tabla LII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas que tuvieron un retorno al origen en la posición 2v**  
**Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	#caminatas
2	1480
4	1136
6	962
8	829
10	741
50	340
100	235
1000	79
2000	56
3000	44
4000	40
5000	36

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se muestra el número de caminatas aleatorias que tuvieron un retorno al origen en la posición especificada. Por ejemplo se tiene que después de 100 lanzamientos 235 de 3000 caminatas tuvieron

un retorno al origen y que luego de 5000 lanzamientos 36 de 3000 caminatas tuvieron un retorno al origen.

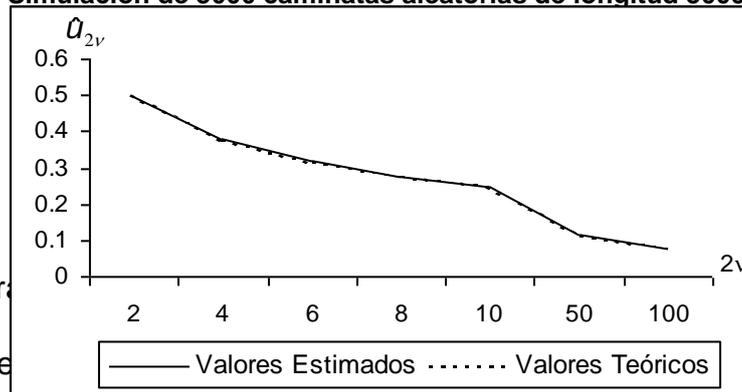
**Tabla LIII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $u_{2v}$**   
**Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	$\hat{u}_{2v}$	$u_{2v}$	$ u_{2v} - \hat{u}_{2v} $
2	0.4933	0.5	0.0067
4	0.3786	0.375	0.0036
6	0.3206	0.3125	0.0081
8	0.2763	0.2734	0.0029
10	0.247	0.2460	0.001
50	0.1133	0.1122	0.0011
100	0.0783	0.0795	0.0012

Elaboración: M. Bravo

Se puede notar que los errores calculados son relativamente pequeños, es decir que los valores estimados de  $u_{2v}$  no difieren de los valores teóricos por lo cual se cumple el sustento teórico expuesto la presente tesis.

**Gráfico 3.24**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Valores estimados para  $u_{2v}$**   
**Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000**



En la gráfica se aprecia el decrecimiento del número de lanzamientos.

### 3. Primer retorno al origen en el tiempo $2n$

**Tabla LIV**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas que tuvieron el primer retorno al origen en la posición 2n**  
**Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	# caminatas
2	1480
4	370
6	184
8	128
10	79
20	27
50	5
100	6

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla para cada posición en particular se indica el número de caminatas aleatorias que tuvieron su primer retorno al origen. Es decir que si se tiene un juego de lanzamiento de monedas, esto nos denota después de cuantos lanzamientos se realizó un empate.

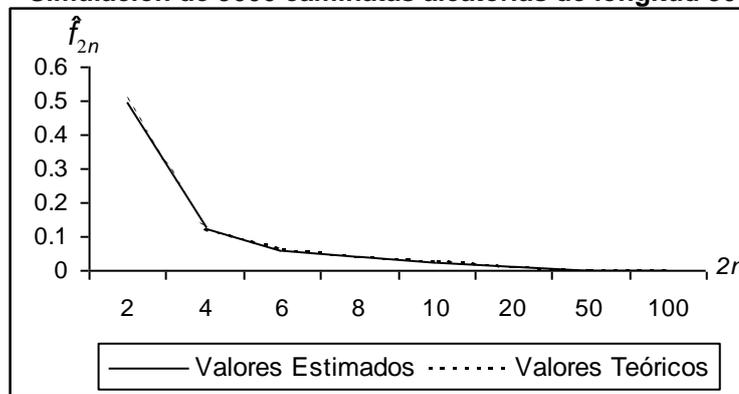
**Tabla LV**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $f_{2n}$**   
**Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	$\hat{f}_{2n}$	$f_{2n}$	$ f_{2n} - \hat{f}_{2n} $
2	0.4933	0.5	0.0067
4	0.1233	0.125	0.0017
6	0.0613	0.063	0.0017
8	0.0426	0.0391	0.0035
10	0.0263	0.0274	0.0011
20	0.009	0.0093	0.0003
50	0.0016	0.0023	0.0007
100	0.002	0.0008	0.0012

Elaboración: M. Bravo

Se puede observar la estimación de la probabilidad de que ocurra un retorno al origen para cada posición señalada. Esta estimación nos permite ver su aproximación con los valores teóricos correspondientes, dando como resultado errores relativamente pequeños, lo que indica los buenos resultados que ha generado el simulador realizado.

**Gráfico 3.25**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Valores estimados para  $f_{2n}$**   
**Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000**



Elaboración: M. Bravo

En la gráfica se observa un comportamiento decreciente en los valores estimados de  $f_{2n}$  con una tendencia a cero a medida que la cantidad de lanzamientos se va incrementando. Esto nos muestra que un juego de lanzamiento de monedas la probabilidad de que exista empate entre los últimos lanzamientos es bastante pequeña.

#### 4. Ultima visita al origen en el tiempo 2k

**Tabla LVI**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas aleatorias que tuvieron su última visita en el tiempo 2k**  
**Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	# caminatas
2	23
10	8
50	6
100	6
1000	0
2000	1
3000	0
4000	0
5000	36

Elaboración: M. Bravo

Para cada posición de la caminata aleatoria se muestra el número de caminatas que tuvieron su última visita en dicha posición.

**Tabla LVII**  
**Caminatas Aleatorias**  
**Errores para  $\alpha_{2k,2n}$**   
**Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	$\hat{\alpha}_{2k,2n}$	$\alpha_{2k,2n}$	$ \alpha_{2k,2n} - \hat{\alpha}_{2k,2n} $
2	0.0076	0.00636	0.00124
10	0.0026	0.00284	0.00024
50	0.002	0.00127	0.00073
100	0.002	0.00090	0.0011
1000	0	0.00031	0.00031
2000	0.0003	0.00025	0.00005
3000	0	0.00025	0.00025
4000	0	0.00031	0.00031

Elaboración: M. Bravo

Se observa que en algunas de las posiciones en la caminata aleatoria la probabilidad calculada tiene el valor de cero, esto se debe a que inclusive teóricamente la probabilidad de que este evento ocurra es bastante pequeño.

En la simulación efectuada se obtuvo también como resultado que de las 3000 caminatas simuladas, 2956 tuvieron un primer retorno y última visita al origen, teniendo que 44 no tuvieron ningún retorno al origen, es decir que para cada uno de estos juegos nunca se produjo un empate.

**5. Tiempos de permanencia: unidades de tiempo en el lado positivo**

**Tabla LVIII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas que estuvieron 2k unidades de tiempo en el lado positivo**  
**Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Unidades de tiempo en el lado positivo	# caminatas
1000	0
2000	0
2500	0
3000	0
3500	0
4000	2
4500	0
5000	22

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se muestra el número de caminatas aleatorias que permanecieron determinadas unidades de tiempo en el lado positivo.

**Tabla LIX**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $\alpha_{2k,2n}$**   
**Simulación de 3000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Unidades de tiempo en el lado positivo	$\hat{\alpha}_{2k,2n}$	$\alpha_{2k,2n}$	$ \alpha_{2k,2n} - \hat{\alpha}_{2k,2n} $
1000	0	0.000318	0.000318
2000	0	0.000259	0.000259

2500	0	0.000254	0.000254
3000	0	0.000259	0.000259
3500	0	0.000277	0.000277
4000	0.00066	0.000318	0.000342
4500	0	0.000424	0.000424

Elaboración: M. Bravo

Se observa que para la mayoría de unidades de tiempo especificadas, la probabilidad es cero debido a que ninguna de las caminatas cumplió con dicha especificación. Además se aprecia que las probabilidades teóricas para cada uno de los casos son bastantes pequeñas, dando como resultado errores pequeños en su cálculo.

**$n = 5000 ; m = 4000$**

En esta simulación se generaron 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000, de las cuales se obtuvieron los siguientes resultados:

## 1. Posición de los retornos

**Tabla LX**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Posición de los retornos**  
**Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

# caminata	1 <sup>er</sup> retorno	2 <sup>do</sup> retorno	Ultima visita
1	4	28	62 retornos (2008)
500	2	4	24 retornos (96)
1000	2	4	61 retornos (4726)
2000	4	6	45 retornos (3162)
3000	18	20	24 retornos (3992)
4000	4	16	50 retornos (1294)

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se observa el primero, segundo y último retorno de 6 caminatas aleatorias realizadas durante la simulación. Se tiene por ejemplo que la caminata 2000 tuvo su primero retorno en la posición 4, el segundo retorno en la posición 6 y su última visita al origen en la posición 3162 luego de 45 retornos en total.

## 2. Retorno al origen en la posición 2v

**Tabla LXI**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas que tuvieron un retorno al origen en la posición 2v**  
**Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	#caminatas
2	1973
4	1521
6	1240
8	1116
10	1010
50	445
100	335
1000	121
2000	78
3000	52
4000	58
5000	29

Elaboración: M. Bravo

Para determinada posición se indica el número de caminatas que de 4000 simuladas tuvieron un retorno en dicha ubicación.

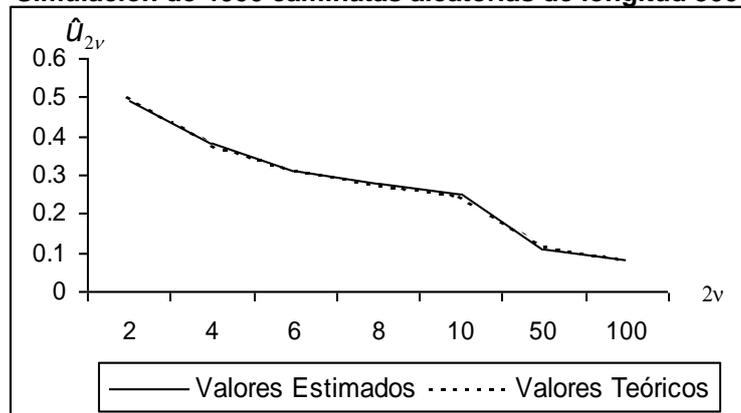
**Tabla LXII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $u_{2v}$**   
**Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	$\hat{u}_{2v}$	$u_{2v}$	$ u_{2v} - \hat{u}_{2v} $
2	0.49325	0.5	0.00675
4	0.38025	0.375	0.00525
6	0.31	0.3125	0.0025
8	0.279	0.2734	0.0056
10	0.2525	0.2460	0.0065
50	0.11125	0.1122	0.00095
100	0.08375	0.0795	0.00425

Elaboración: M. Bravo

Se observa que el error obtenido entre la diferencia del valor teórico con el valor estimado es relativamente pequeño para todos los casos, por lo que se puede notar que los valores obtenidos de la simulación no difieren de los establecidos teóricamente.

**Gráfico 3.26**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Valores estimados para  $u_{2v}$**   
**Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000**



En la gráfica de los valores estimados de  $u_{2v}$ , se observa el decrecimiento de los mismos a medida que aumenta el número de lanzamientos.

### 3. Primer retorno al origen en el tiempo $2n$

**Tabla LXIII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas que tuvieron el primer retorno al origen en la posición  $2n$**   
**Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	# caminatas
2	1973
4	505
6	221
8	161
10	114
20	39
50	13
100	2

Elaboración: M. Bravo

Del total de caminatas simuladas, se muestra cuantas de ellas tuvieron su primer retorno al origen en cada una de las posiciones correspondientes. Se puede notar que cerca de la mitad de las caminatas simuladas obtuvieron su primer retorno luego de dos lanzamientos.

**Tabla LXIV**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $f_{2n}$**   
**Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

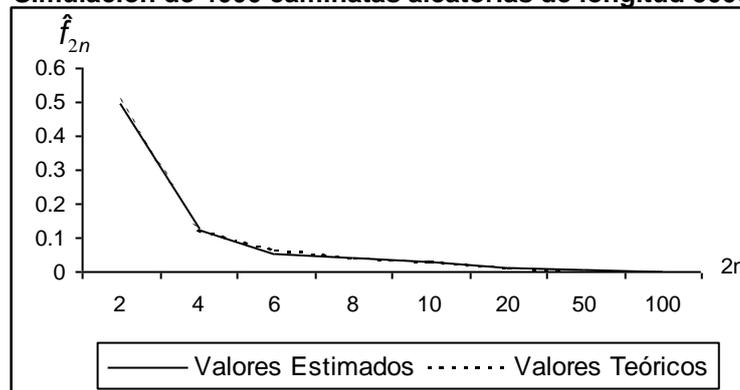
Posición	$\hat{f}_{2n}$	$f_{2n}$	$ f_{2n} - \hat{f}_{2n} $
2	0.49325	0.5	0.00675
4	0.12625	0.125	0.00125

6	0.05525	0.063	0.00775
8	0.04025	0.0391	0.00115
10	0.0285	0.0274	0.0011
20	0.00975	0.0093	0.00045
50	0.00325	0.0023	0.00095
100	0.0005	0.0008	0.0003

Elaboración: M. Bravo

Se observan los valores estimados de  $f_{2n}$ , donde se puede notar los pequeños errores encontrados entre la diferencia del valor teórico y el valor estimado de  $f_{2n}$  para cada una de las posiciones.

**Gráfico 3.27**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Valores estimados para  $f_{2n}$**   
**Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000**



Elaboración: M. Bravo

En semejanza con la simulación realizada anteriormente, se presenta un comportamiento decreciente con tendencia a cero en los valores estimados de la probabilidad de que el primer retorno ocurra en una posición en particular.

#### 4. Ultima visita al origen en el tiempo 2k

**Tabla LXV**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas aleatorias que tuvieron su última visita en el tiempo 2k**  
**Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	# caminatas
2	21
10	11
50	4
100	2
1000	3
2000	2
3000	1
4000	1
5000	39

Elaboración: M. Bravo

Para cada posición especificada se muestra la cantidad de caminatas aleatorias que tuvieron su última visita al origen en esa posición.

**Tabla LXVI**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Errores para  $\alpha_{2k,2n}$**   
**Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Posición	$\hat{\alpha}_{2k,2n}$	$\alpha_{2k,2n}$	$ \alpha_{2k,2n} - \hat{\alpha}_{2k,2n} $
2	0.00525	0.00636	0.00111
10	0.00275	0.00284	0.00009
50	0.001	0.00127	0.00027
100	0.0005	0.00090	0.0004
1000	0.00075	0.00031	0.00044
2000	0.0005	0.00025	0.00025
3000	0.00025	0.00025	0.000
4000	0.00025	0.00031	0.00006

Elaboración: M. Bravo

Se pueden observar los valores estimados de  $\alpha_{2k,2n}$ , los cuales no difieren en consideración respecto a los valores teóricos, dando como

resultado errores relativamente pequeños en su estimación. Además se puede notar que tanto los valores teóricos como los estimados no son decreciente.

Del total de caminatas simuladas, 3945 de éstas tuvieron un primer retorno y última visita al origen, es decir que en 55 de éstas no se produjo ningún retorno al origen.

**5. Tiempos de permanencia: unidades de tiempo en el lado positivo**

**Tabla LXVII**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Número de caminatas que estuvieron 2k unidades de tiempo en el lado positivo**  
**Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Unidades de tiempo en el lado positivo	# caminatas
1000	0
2000	0
2500	1
3000	0
3500	1
4000	1
4500	0
5000	23

Elaboración: M. Bravo

Del total de caminatas simuladas se tiene que una caminata estuvo durante 2500 unidades de tiempo en el lado positivo y 23 caminatas estuvieron 5000 unidades de tiempo en el lado positivo o encima del eje t.

**Tabla LXVIII**  
**Caminatas Aleatorias**  
**Errores para  $\alpha_{2k,2n}$**   
**Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Unidades de tiempo en el lado positivo	$\alpha_{2k,2n}$	$\alpha_{2k,2n}$	$ \alpha_{2k,2n} - \hat{\alpha}_{2k,2n} $
1000	0	0.000318	0.000318
2000	0	0.000259	0.000259
2500	0.00025	0.000254	0.000004
3000	0	0.000259	0.000259
3500	0.00025	0.000277	0.000027
4000	0.00025	0.000318	0.000068
4500	0	0.000424	0.000424

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se observan los valores estimados de  $\alpha_{2k,2n}$ , donde para ciertos casos la probabilidad es cero. Los errores calculados son relativamente pequeños, es decir que los valores estimados se aproximan considerablemente a los valores teóricos.

### 3.6.1. Aplicación del Teorema de Equidistribución

En esta sección se aplicará el teorema de equidistribución el cual enuncia que el número de trayectorias de longitud  $2n$  tales que  $S_{2n}=0$  y que tienen exactamente  $2k$  de sus lados por encima del eje, es independiente de  $k$  e igual a  $2^{2n} u_{2n}/(n+1) = 2^{2n+1} f^{2n+2}$ , para valores de  $k = 0, 1, \dots, n$ . Es decir que sin considerar el número de veces que la trayectoria está en el lado positivo el número de trayectorias desde el origen hasta el punto  $(2n,0)$  es el mismo.

**$n = 5000 ; m = 4000$**

En este análisis se consideran los valores de  $u_{2n}$  presentados en los resultados anteriormente obtenidos de la simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000.

**Tabla LXIX**  
*Caminatas Aleatorias*  
**Valores Estimados del número de trayectorias de longitud  $2n$**   
**Simulación de 4000 caminatas aleatorias de longitud 5000**

Longitud de la trayectoria ( $2n$ )	# trayectorias $2^{2n} u_{2n}/(n+1)$	# trayectorias estimadas
10	41.98 $\approx$ 42	43.09 $\approx$ 43
50	$4.8556 \times 10^{12}$	$4.8175 \times 10^{12}$
100	$1.9760 \times 10^{27}$	$2.08168 \times 10^{296}$
1000	$5.3939 \times 10^{296}$	$6.4697 \times 10^{296}$

Elaboración: M. Bravo

Como se puede observar el número de trayectorias estimadas de los resultados obtenidos se aproximan considerablemente con los valores teóricos de los mismos. Lo que este teorema nos dice es que el número de trayectorias desde el origen al punto (10,0) es el mismo si consideramos el número de trayectorias desde el punto (1,1) al punto (10,0) en el eje t. Si lo comparamos con un juego de lanzamiento de monedas donde ocurre un empate en el lanzamiento 10, se tiene que existen aproximadamente 42 maneras diferentes de obtener un empate luego de esa cantidad

de lanzamientos, sin considerar el número de veces en la que la suma de los valores obtenidos es mayor a cero. De los resultados obtenidos podemos notar que a medida que la longitud de la trayectoria aumenta el número de trayectorias posibles es bastante grande.

### 3.6.2. Análisis Comparativo

A continuación se presentan tablas comparativas entre los valores teóricos y estimados para  $u_{2v}$  y  $f_{2n}$ , así como para los errores obtenidos en cada una de los simulaciones efectuadas.

**Tabla LXX**  
*Caminatas Aleatorias*

Tabla Comparativa entre los valores teóricos y los valores estimados de  $u_{2v}$

	$u_2$	$u_4$	$u_6$	$u_8$	$u_{10}$	$u_{50}$	$u_{100}$
Valores Teóricos	0.5	0.375	0.3125	0.2734	0.246	0.1122	0.0795
Valores Estimados	$\hat{u}_{2v}$						
10000-500	0.506	0.376	0.3	0.266	0.238	0.092	0.112
10000-1000	0.503	0.36	0.314	0.267	0.237	0.119	0.085
10000-2000	0.4985	0.3795	0.3135	0.278	0.2445	0.1105	0.0895
5000-1000	0.504	0.379	0.318	0.28	0.244	0.122	0.08
5000-2000	0.494	0.382	0.3045	0.2675	0.241	0.113	0.075
5000-3000	0.4933	0.3786	0.3206	0.2763	0.247	0.1133	0.0783
5000-4000	0.4932	0.3802	0.31	0.279	0.2525	0.1112	0.0837

Elaboración: M. Bravo.

En esta tabla se aprecia los valores teóricos y los valores estimados de  $u_{2v}$  obtenidos en la diferentes simulaciones, donde se puede apreciar que la convergencia de éstos respecto a los valores teóricos es muy notable. Es decir que la variación en el número o longitud de las caminatas aleatorias no afecta en consideración para la estimación de los valores de  $u_{2v}$ .

**Tabla LXXI**  
*Caminatas Aleatorias*  
Tabla Comparativa de los errores  $|u_{2v} - \hat{u}_{2v}|$  para todas las simulaciones

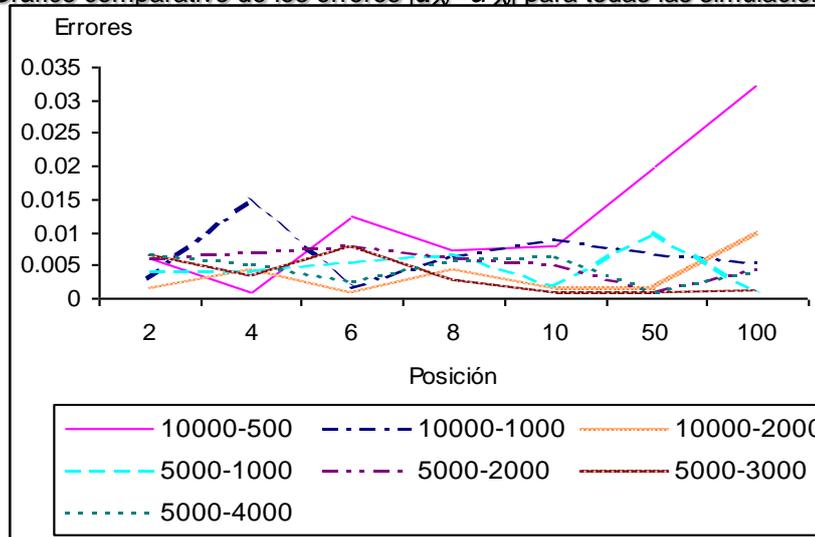
Posición	$ u_{2v} - \hat{u}_{2v} $						
	10000-500	10000-1000	10000-2000	5000-1000	5000-2000	5000-3000	5000-4000
2	0.006	0.003	0.0015	0.004	0.006	0.0067	0.00675
4	0.001	0.015	0.0045	0.004	0.007	0.0036	0.00525
6	0.0125	0.0015	0.001	0.0055	0.008	0.0081	0.0025
8	0.0074	0.0064	0.0046	0.0066	0.0059	0.0029	0.0056
10	0.008	0.009	0.0015	0.002	0.005	0.001	0.0065
50	0.0202	0.0068	0.0017	0.0098	0.0008	0.0011	0.00095
100	0.0325	0.0055	0.01	0.0005	0.0045	0.0012	0.00425

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se muestran los errores de  $u_{2v}$  para cada una de las simulaciones.

**Gráfico 3.28**  
Caminatas Aleatorias

Gráfico comparativo de los errores  $|u_{2v} - \hat{U}_{2v}|$  para todas las simulaciones



Elaboración: M. Bravo

En el gráfico se observa que los errores para  $u_{2v}$  no difieren entre sí considerablemente, y esto se debe a la aproximación de los valores estimados con los teóricos. Sin embargo se nota que para la simulación de 500 caminatas de longitud 10000 el error es ligeramente más grande.

**Tabla LXXII**  
Caminatas Aleatorias

Tabla Comparativa entre los valores teóricos y los valores estimados de  $f_{2n}$

	$f_2$	$f_4$	$f_6$	$f_8$	$f_{10}$	$f_{20}$	$f_{50}$	$f_{100}$
Valores Teóricos	0.5	0.125	0.063	0.0391	0.0274	0.0093	0.0023	0.0008
Valores Estimados	$\hat{f}_{2n}$							
10000-500	0.506	0.122	0.068	0.036	0.028	0.002	0	0.002
10000-1000	0.503	0.116	0.054	0.04	0.037	0.006	0.002	0
10000-	0.498	0.124	0.073	0.0325	0.0305	0.0085	0.0005	0.003

2000								
5000-1000	0.504	0.13	0.057	0.047	0.025	0.01	0.002	0.001
5000-2000	0.494	0.125	0.056	0.0405	0.0325	0.006	0.001	0.0015
5000-3000	0.493 3	0.123 3	0.061 3	0.0426	0.0263	0.009	0.0016	0.002
5000-4000	0.493	0.126	0.055	0.0402	0.0285	0.0097	0.0032	0.0005

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se aprecia los valores teóricos y los valores estimados de  $f_{2n}$  obtenidos en las diferentes simulaciones, donde se observa una buena estimación para todos los casos.

**Tabla LXXIII**  
*Caminatas Aleatorias*

Tabla Comparativa de los errores  $|f_{2n} - \hat{f}_{2n}|$  para todas las simulaciones

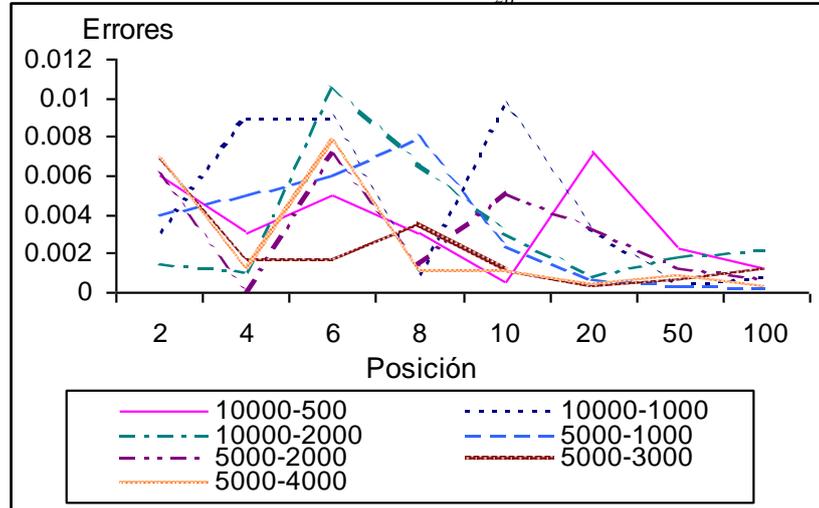
Posición	10000-500	10000-1000	10000-2000	5000-1000	5000-2000	5000-3000	5000-4000
2	0.006	0.003	0.0015	0.004	0.006	0.0067	0.00675
4	0.003	0.009	0.001	0.005	0	0.0017	0.00125
6	0.005	0.009	0.0105	0.006	0.007	0.0017	0.00775
8	0.0031	0.0009	0.0066	0.0079	0.0014	0.0035	0.00115
10	0.0006	0.0096	0.0031	0.0024	0.0051	0.0011	0.0011
20	0.0073	0.0033	0.0008	0.0007	0.0033	0.0003	0.00045
50	0.0023	0.0003	0.0018	0.0003	0.0013	0.0007	0.00095
100	0.0012	0.0008	0.0022	0.0002	0.0007	0.0012	0.0003

Elaboración: M. Bravo

En esta tabla se muestran los errores de  $|f_{2n} - \hat{f}_{2n}|$  para cada una de las simulaciones.

**Gráfico 3.29**  
*Caminatas Aleatorias*

Gráfico comparativo de los errores  $|f_{2n} - \hat{f}_{2n}|$  para todas las simulaciones



Elaboración: M. Bravo

En el gráfico se pueden apreciar los errores  $|f_{2n} - \hat{f}_{2n}|$ , en el cual se observa que en general éstos no difieren considerablemente entre sí.

# CAPÍTULO 4

## 4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 4.1 Conclusiones

1. En un juego ideal donde la probabilidad de éxito o fracaso es la misma e igual a  $\frac{1}{2}$  (por ejemplo el juego de lanzamiento de monedas, el cual toma 2 valores posibles cara o sello), el número de formas diferentes en la que los jugadores pueden llegar al final de la partida, siendo esta de duración  $n$  es de  $2^n$  maneras. Es decir que  $2^n$  representa todas las posibilidades que tienen los jugadores hasta llegar al final del juego, pero para cada juego existirá una sola trayectoria la cual dependerá de los resultados que se vayan generando en cada lanzamiento de la moneda.
2. En un juego de lanzamiento de monedas donde los valores generados son únicamente cara o sello, y se tiene además que el número de veces que se repite la cara está representado por  $p$  y el número de

veces que se repite el sello está representado por  $q$ , suponiendo que en que en algún momento del juego existen más valores de caras que de sellos, la probabilidad de que en cualquier instante del juego existan más caras que sellos es de  $(p-q)/(p+q)$ . Esto también se lo puede aplicar en procesos de elecciones donde se tienen dos candidatos en competencia, lo que indica que la probabilidad de que el candidato que tiene mayor número de votos vaya ganando en cualquier momento de las elecciones, es la razón entre su ventaja respecto al otro candidato y el total de votos escrutados.

3. Para toda caminata aleatoria de longitud finita se puede obtener su réplica invirtiendo los valores obtenidos en cada momento, por ejemplo en un juego de lanzamiento de monedas cada vez que sale cara lo cambiamos por sello o viceversa. El resultado de la partida quedará invertido, ya que si suponemos que originalmente gana el número de caras, como consecuencia del cambio, ahora ganará el número de sellos. Sin embargo ambas trayectorias tienen igual probabilidad de ser recorridas.
4. En un proceso electoral de dos candidatos (con igual intención de voto) o en un juego de lanzamiento de monedas, la probabilidad de ocurrencia del primer empate es mucho más alta durante los primeros

votos o lanzamientos, es decir que a medida que se incrementa el número de votos o lanzamientos efectuados, la probabilidad de un empate va decreciendo con una tendencia a cero. Esto indicaría que si una persona va ganando el juego, o las lecciones, después de que se han realizado una gran cantidad de votos o lanzamientos, la posibilidad de que la otra persona empate es casi nulo. Sin embargo existe una posibilidad aunque pequeña de empate en los últimos momentos del juego.

5. En un juego de lanzamiento de monedas, el sentido común nos dice que a la larga el número de caras es aproximadamente igual al número de sellos, es decir ninguno de los dos jugadores obtiene una marcada ventaja sobre el otro. Sin embargo las simulaciones realizadas desdican este hecho, pues se ha observado que en un juego una persona puede ir ganando desde el inicio hasta el final sin que se produzca un empate, o en otros casos deben transcurrir un considerable número de lanzamientos para que el otro jugador lo iguale.
6. En un juego de lanzamiento de monedas la probabilidad de que después de cierta cantidad de lanzamientos exista un empate o retorno al origen, está dado por  $u_{2v}$  donde  $2v$  es un número par. Para

todas las simulaciones realizadas en nuestro estudio se pudo comprobar que a medida que aumenta el número de lanzamientos de monedas, la probabilidad de un empate va decreciendo con una tendencia a cero sin importar la cantidad de empates que se hayan efectuado anteriormente. Los valores obtenidos de las simulaciones no difirieron considerablemente de los valores teóricos, dando como resultado errores relativamente pequeños en su estimación.

7. Respecto a la última visita al origen, se pudo comprobar que las probabilidades de ocurrencia de este evento para diferentes posiciones en la caminata aleatoria es relativamente pequeña. En todas las simulaciones realizadas para varios de los casos se obtuvieron probabilidades de cero, es decir que la posibilidad de que después de cierto número de lanzamientos se efectúe el último empate es aproximadamente nulo. Es necesario acotar que para valores grandes de  $n$ , la distribución de probabilidades de  $\alpha_{2k,2n}$  se ve afectada por la distribución discreta del arco seno la cual da una buena aproximación en el cálculo de esta probabilidad.
8. En el análisis de tiempos de permanencia, se obtuvo que en un juego de 10000 lanzamientos, la suma de los puntos nunca estuvo por

encima del eje exactamente 1000 veces en la simulación de 500 caminatas.

9. Los valores de probabilidad de que en el intervalo de tiempo de 0 a  $2n$  la partícula permanezca  $2k$  unidades de tiempo de el lado positivo es igual a la probabilidad de que el último retorno al origen ocurra en determinada posición  $(\alpha_{2k, 2n})$ . Se puede concluir igual que en el análisis de la última visita al origen que la mayoría de los valores encontrados en las diferentes simulaciones son cero, es decir que la probabilidad de que existen caminatas que estuvieron por encima del eje para las unidades de tiempo especificadas es casi nula. Esto nos muestra que una persona en un juego de lanzamiento de monedas puede ir en ventaja o desventaja respecto al otro jugador durante un largo período de tiempo.

10. La aplicación del teorema de equidistribución nos permite encontrar el número de trayectorias posibles para una longitud dada, tal que la suma hasta ese punto debe ser igual a cero. El teorema indica que este número no depende de la cantidad de veces que la partícula se encuentra encima del eje  $t$ . Para el cálculo del número de trayectorias se toma en cuenta la probabilidad de un retorno al origen en dicha posición, de donde se obtuvo que el número de trayectorias se

incrementa rápidamente a medida que aumenta la longitud de la trayectoria. Para nuestro estudio se tomaron los valores obtenidos de la simulación de 4000 caminatas de longitud 5000 lo cual dio como resultado valores muy cercanos a los establecidos teóricamente.

11. La variación en la cantidad y longitud de caminatas aleatorias simuladas no influyó en consideración respecto a la aproximación de los valores estimados con los teóricos.

12. Los resultados obtenidos por simulación dieron muy buenas aproximaciones respecto al sustento teórico aplicado en los diferentes análisis realizados en la presente tesis.

## **4.2 Recomendaciones**

1. Se recomienda ampliar el estudio a caminatas aleatorias que tomen valores multinomiales, con el objetivo de estudiar sus comportamientos desde el punto de vista empírico.
2. Una persona que es parte de un juego de lanzamiento de monedas o de un proceso electoral en el cual las posibilidades de

éxito son del 50%, no debe esperar con una gran posibilidad de empatar los votos o lanzamientos de monedas cuando se encuentre cerca de finalizar el juego o elecciones. Pues la probabilidad de ocurrencia de este evento es bastante baja.

3. En un estudio de caminatas aleatorias, se recomienda aumentar el número de caminatas y la longitud de las mismas, ya que mientras mayor información se obtenga, esto dará como resultado valores más aproximados para los diferentes análisis que se realicen. Sin embargo es necesario considerar la capacidad del computador en el cual se realizarán las simulaciones.

## **ANEXOS**

### **Anexo 1**

**Simulador de Caminatas Aleatorias (Código fuente en Lenguaje de Visual Basic)**

```

Public matriz() As Integer
Public sumas() As Integer
Public mayores() As Variant
Public fil As Double
Public col As Double

Public Sub iniciar_simulacion()
Dim ifil As Double
Dim icol As Double
Dim r As Double
Dim auxm As Double
Dim auxsuma As Double
VBA.Randomize
ReDim sumas(1 To fil, 1 To col)
ReDim matriz(1 To fil, 1 To col)
ReDim mayores(1 To fil)

For auxm = 1 To fil
    mayores(auxm) = 0
Next auxm

For ifil = 1 To fil
    auxsuma = 0
    For icol = 1 To col
        r = VBA.Rnd
        If r <= 0.5 Then
            matriz(ifil, icol) = -1
        Else
            matriz(ifil, icol) = 1
        End If
        auxsuma = auxsuma + matriz(ifil, icol)
        sumas(ifil, icol) = auxsuma
        If auxsuma > 0 Then
            mayores(ifil) = mayores(ifil) + 1
        End If
    Next icol
Next ifil
End Sub

Public Function validar_numeros(KeyAscii As Integer) As Integer
If (KeyAscii < 48 Or KeyAscii > 57) And (KeyAscii <> 9) And (KeyAscii <> 8) Then
    validar_numeros = 0
    VBA.Beep
Else
    validar_numeros = KeyAscii
End If
End Function

Private Sub Command1_Click()
Unload Me
End Sub

Private Sub Command2_Click()
Dim ifil As Double
Dim icol As Double
Dim sum As Double
Dim cont As Double

```

```

List1.Clear
If txtnum.Text = "" Or txtw.Text = "" Then
    MsgBox "Los datos no deben ser vacíos"
    Exit Sub
End If

If VBA.Val(txtnum.Text) <= 0 Or VBA.Val(txtw.Text) <= 0 Then
    MsgBox "Los datos deben ser positivos"
    Exit Sub
End If

If VBA.Val(txtw.Text) > fil Then
    MsgBox "Esa caminata aleatoria no existe"
    Exit Sub
End If

If VBA.Val(txtnum.Text) > col Then
    MsgBox "El número de retornos al origen excede la longitud de la caminata"
    Exit Sub
End If

ifil = VBA.Val(txtw.Text)
cont = 0
sum = 0
List1.Clear
For icol = 1 To col
    sum = sum + matriz(ifil, icol)
    If sum = 0 Then
        cont = cont + 1
        List1.AddItem ("Retorno No." & VBA.Str(cont) & ": " & icol)
    End If
    If cont = VBA.Val(txtnum.Text) Then
        GoTo siguiente
    End If
Next icol

siguiente: MsgBox "Busqueda Finalizada "
Dim indlist As Double
Dim acumlist As Double
acumlist = 0
For indlist = 0 To List1.ListCount - 1
    If List1.List(indlist) <> "" Then
        acumlist = acumlist + 1
    End If
Next indlist
Text4.Text = VBA.Str(acumlist)
End Sub

Private Sub Command3_Click()
Dim ifil As Double
Dim icol As Double
Dim sum As Double
Dim cont As Double
Dim sumpro As Double
Dim indice As Double

List2.Clear
If txtnumret.Text = "" Then
    MsgBox "Los datos no deben ser vacíos"

```

```

Exit Sub
End If

If VBA.Val(txtnumret.Text) <= 0 Then
    MsgBox "Los datos deben ser positivos"
Exit Sub
End If

If VBA.Val(txtnumret.Text) > col Then
    MsgBox "El número de retorno excede la longitud de la caminata aleatoria"
Exit Sub
End If

List2.Clear

indice = 0
sumpro = 0
For ifil = 1 To fil
    cont = 0
    sum = 0
    icol = 1
    Do
        sum = sum + matriz(ifil, icol)

        If sum = 0 Then
            cont = cont + 1
        End If

        If cont = VBA.Val(txtnumret.Text) Then
            List2.AddItem ("Caminata No." & VBA.Str(ifil) & " Valor del Retorno: " & icol)
            sumpro = sumpro + icol
        Else
            icol = icol + 1
        End If
    Loop While (cont <> VBA.Val(txtnumret.Text)) And (icol <= col)
Next ifil
If (VBA.Round(sumpro / fil, 0)) Mod 2 = 0 Then
    txtpromedio.Text = VBA.Str(VBA.Round(sumpro / fil, 0))
Else
    txtpromedio.Text = VBA.Str(VBA.Round(sumpro / fil, 0) + 1)
End If

Dim indlist As Double
Dim acumlist As Double
acumlist = 0
For indlist = 0 To List2.ListCount - 1
    If List2.List(indlist) <> "" Then

        acumlist = acumlist + 1
    End If
Next indlist
Text5.Text = VBA.Str(acumlist)
MsgBox "Busqueda Finalizada 1"

End Sub

```

```

Private Sub Command4_Click()
Dim ifil As Double
Dim icol As Double
Dim sum As Double
Dim cont As Double
Dim sumpro As Double
Dim indice As Double
Dim auxindice As Double
Dim contador_lista As Double

List2.Clear
indice = 0
contador_lista = 0
sumpro = 0
For ifil = 1 To fil
    cont = 0
    sum = 0
    icol = 1
    Do
        sum = sum + matriz(ifil, icol)

        If sum = 0 Then
            List2.AddItem ("")
            List2.List(indice) = ("Caminata No." & VBA.Str(ifil) & " Valor del Retorno: " & icol)
            'List2.AddItem ("Caminata No." & VBA.Str(ifil) & " Valor del Retorno: " & icol), indice
            auxindice = icol
        End If

        icol = icol + 1

    Loop While (icol <= col)

    sumpro = sumpro + auxindice
    If List2.List(indice) <> "" Then
        contador_lista = contador_lista + 1
    End If
    indice = indice + 1
Next ifil

If (VBA.Round(sumpro / fil, 0)) Mod 2 = 0 Then
    txtpromedio.Text = VBA.Str(VBA.Round(sumpro / fil, 0))
Else
    txtpromedio.Text = VBA.Str(VBA.Round(sumpro / fil, 0) + 1)
End If

'Dim indlist1 As Double
'Dim acumlist As Double
'acumlist = 0
'MsgBox "antes"
'For indlist1 = 0 To VBA.Abs(List2.ListCount) - 1
',
' If VBA.Left(List2.List(indlist), 1) = "C" Then
',
'     acumlist = acumlist + 1
' End If
'Next indlist1
'MsgBox acumlist

```

```

Text5.Text = VBA.Str(contador_lista)
MsgBox "Busqueda Finalizada 7b"

End Sub

Private Sub Command5_Click()
Dim ifil As Double
Dim icol As Double
List3.Clear
If npos.Text = "" Then
    MsgBox "Los datos no deben ser vacíos"
    Exit Sub
End If

If VBA.Val(npos.Text) <= 0 Then
    MsgBox "Los datos deben ser positivos"
    Exit Sub
End If

If VBA.Val(npos.Text) > col Then
    MsgBox "La posición indicada excede la longitud de la caminata"
    Exit Sub
End If

If VBA.Val(npos.Text) Mod 2 <> 0 Then
    MsgBox "El valor ingresado debe ser un número par"
    Exit Sub
End If

List3.Clear

For ifil = 1 To fil
    If sumas(ifil, VBA.Val(npos.Text)) = 0 Then
        List3.AddItem ("Caminata número: " & VBA.Str(ifil))
    End If
Next ifil

MsgBox "Busqueda Finalizada 7c"
Dim indlist As Double
Dim acumlist As Double
acumlist = 0
For indlist = 0 To List3.ListCount - 1
    If List3.List(indlist) <> "" Then
        acumlist = acumlist + 1
    End If
Next indlist
Text1.Text = VBA.Str(acumlist)

End Sub

Private Sub Command6_Click()
Dim auxfil As Double
Dim auxcol As Double

Dim ifil As Double
Dim icol As Double

```

```

Dim cont As Double
List4.Clear

If npos2.Text = "" Then
    MsgBox "Los datos no deben ser vacíos"
    Exit Sub
End If

If VBA.Val(npos2.Text) <= 0 Then
    MsgBox "Los datos deben ser positivos"
    Exit Sub
End If

If VBA.Val(npos2.Text) > col Then
    MsgBox "La posición indicada excede la longitud de la caminata"
    Exit Sub
End If

If VBA.Val(npos2.Text) Mod 2 <> 0 Then
    MsgBox "El valor ingresado debe ser un número par"
    Exit Sub
End If

List4.Clear

For ifil = 1 To fil
    If sumas(ifil, VBA.Val(npos2.Text)) = 0 Then
        cont = 0
        For auxcol = 1 To VBA.Val(npos2.Text)
            If sumas(ifil, auxcol) = 0 Then
                cont = cont + 1
            End If
        Next auxcol
        If cont = 1 Then
            List4.AddItem ("Caminata número: " & VBA.Str(ifil))
        End If
    End If
Next ifil

MsgBox "Busqueda Finalizada"
'MsgBox List4.ListCount
Dim indlist As Double
Dim acumlist As Double
acumlist = 0
For indlist = 0 To List4.ListCount - 1
    If List4.List(indlist) <> "" Then
        acumlist = acumlist + 1
    End If
Next indlist
Text2.Text = VBA.Str(acumlist)
End Sub

Private Sub Command7_Click()
List5.Clear
Dim auxfil As Double
Dim auxcol As Double

```

```

Dim ifil As Double
Dim icol As Double
Dim cont As Double

If npos3.Text = "" Then
    MsgBox "Los datos no deben ser vacíos"
    Exit Sub
End If

If VBA.Val(npos3.Text) <= 0 Then
    MsgBox "Los datos deben ser positivos"
    Exit Sub
End If

If VBA.Val(npos3.Text) > col Then
    MsgBox "La posición indicada excede la longitud de la caminata"
    Exit Sub
End If

If VBA.Val(npos3.Text) Mod 2 <> 0 Then
    MsgBox "El valor ingresado debe ser un número par"
    Exit Sub
End If
List5.Clear
For ifil = 1 To fil
    If sumas(ifil, VBA.Val(npos3.Text)) = 0 Then
        cont = 0
        For auxcol = npos3 To col
            If sumas(ifil, auxcol) = 0 Then
                cont = cont + 1
            End If
        Next auxcol
        If cont = 1 Then
            List5.AddItem ("Caminata número: " & VBA.Str(ifil))
        End If
    End If
Next ifil

MsgBox "Busqueda Finalizada"
Dim indlist As Double
Dim acumlist As Double
acumlist = 0
For indlist = 0 To List5.ListCount - 1
    If List5.List(indlist) <> "" Then
        acumlist = acumlist + 1
    End If
Next indlist
Text3.Text = VBA.Str(acumlist)

End Sub

Private Sub Command8_Click()
List6.Clear
If Option6.Value = True Then
'análisis particular

If txtanalysumas.Text = "" Then

```

```

    MsgBox "Los datos no deben ser vacíos"
    Exit Sub
End If

If VBA.Val(txtanalysumas.Text) <= 0 Then
    MsgBox "Los datos deben ser positivos"
    Exit Sub
End If

If VBA.Val(txtanalysumas.Text) > fil Then
    MsgBox "Ese número de caminata no existe"
    Exit Sub
End If

txtresultado.Text = VBA.Str(mayores(txtanalysumas.Text))
Else

If txtanalysumas.Text = "" Then
    MsgBox "Los datos no deben ser vacíos"
    Exit Sub
End If

If VBA.Val(txtanalysumas.Text) <= 0 Then
    MsgBox "Los datos deben ser positivos"
    Exit Sub
End If

If VBA.Val(txtanalysumas.Text) > col Then
    MsgBox "El valor ingresado no debe exceder la longitud de la caminata"
    Exit Sub
End If

    Dim aux As Double
    Dim indaux As Double
    aux = 0
    List6.Clear
    For indaux = 1 To fil
        If mayores(indaux) = VBA.Val(txtanalysumas.Text) Then
            List6.AddItem ("Caminata No. " & VBA.Str(indaux))
            aux = aux + 1
        End If
    Next indaux
    txtresultado.Text = VBA.Str(aux)
End If
MsgBox "Busqueda Finalizada"
End Sub

Private Sub Form_Load()
    SSTab1.Tab = 0
End Sub

Private Sub List2_Click()
    MsgBox List2.ListIndex
    MsgBox VBA.Len(List2.List(List2.ListIndex))
End Sub

Private Sub npos_KeyPress(KeyAscii As Integer)
    KeyAscii = validar_numeros(KeyAscii)

```

```

End Sub

Private Sub npos2_KeyPress(KeyAscii As Integer)
KeyAscii = validar_numeros(KeyAscii)
End Sub

Private Sub npos3_KeyPress(KeyAscii As Integer)
KeyAscii = validar_numeros(KeyAscii)
End Sub

Private Sub Option1_Click()
If Option1.Value = True Then
Label4.Visible = False
txtnumret.Visible = False
txtnumret.Text = VBA.Str(1)
Command3.Visible = True
Command4.Visible = False
End If
If Option2.Value = True Then
Label4.Visible = False
txtnumret.Visible = False
Command3.Visible = False
Command4.Visible = True
'txtnumret.Text=vba.
End If
If Option3.Value = True Then
Label4.Visible = True
txtnumret.Visible = True
txtnumret.Text = ""
Command3.Visible = True
Command4.Visible = False
End If
End Sub

Private Sub Option2_Click()
Option1_Click
End Sub

Private Sub Option3_Click()
Option1_Click
End Sub

Private Sub Option6_Click()
If Option6.Value = True Then
Label14.Caption = "Número de Caminata"
Label15.Caption = "Total Unidades de Tiempo en el lado Positivo"
Else
Label14.Caption = "Unidades de tiempo en el lado Positivo"
Label15.Caption = "Total Caminatas"
End If
End Sub

Private Sub Option7_Click()
Option6_Click
End Sub

Private Sub txtanalysumas_KeyPress(KeyAscii As Integer)
KeyAscii = validar_numeros(KeyAscii)
End Sub

```

```

Private Sub txtnum_KeyPress(KeyAscii As Integer)
KeyAscii = validar_numeros(KeyAscii)
End Sub

Private Sub txtnumret_KeyPress(KeyAscii As Integer)
KeyAscii = validar_numeros(KeyAscii)
End Sub

Private Sub txtrow_KeyPress(KeyAscii As Integer)
KeyAscii = validar_numeros(KeyAscii)
End Sub

//Ploteo de caminatas aleatorias//

Private Sub Command2_Click()
chart.Visible = True
Dim vector() As Variant
ReDim vector(1 To (VBA.Val(txtfin.Text) - VBA.Val(txtinicio.Text) + 1), 1 To 2)
Dim i As Integer
sfil = VBA.Val(txtsfil.Text)
For i = 1 To (VBA.Val(txtfin.Text) - VBA.Val(txtinicio.Text) + 1) 'col
vector(i, 1) = i
vector(i, 2) = sumas(sfil, VBA.Val(txtinicio.Text) + i - 1)
Next i
chart.chartType = VtChChartType2dXY
chart.ChartData = vector

Dim filmatrix As Double
Dim colmatrix As Double

filmatrix = VBA.Val(txtsfil.Text)

Open "C:\Documents and Settings\David\Desktop\Monica\datos.txt" For Append As #1

For colmatrix = VBA.Val(txtinicio.Text) To VBA.Val(txtfin.Text)
Print #1, VBA.Str(matriz(filmatrix, colmatrix)) & "," & VBA.Str(sumas(filmatrix, colmatrix))
Next colmatrix

Close #1

End Sub

```

## BIBLIOGRAFÍA

1. Mendenhall William (1994). *“Estadística Matemática con Aplicaciones”*, Segunda Edición, Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V., México.
2. Freund J., Walpole R. (1990). *“Estadística Matemática con aplicaciones”*, Cuarta edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, México.
3. Papoulis Athanasios. *“ Probability, Random Variable, and Stochastic Processes”*, Editorial Consultants Mc. Graw Hill, USA.
4. Feller William (1991). *“ Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones”*, Volumen I, Editorial Limusa, México.
5. Bailey N. T. J. (1994). *“ The Elements of Stochastic Proceses with applications to the natural sciences”*, Jhon Wiley & Sons. Inc., USA.
6. Parzen E. (1962). *“ Stochastic Processes”*, Holden Day, USA:
7. Evans M., Hastings N., Peacock B. (1993). *“Statistical Distributions”*, Segunda edición, John Wiley & Sons. New York.
8. Ross Sheldon M. (1999), *“Simulación”*, Segunda edición, Prentice may, México.
9. Microsoft Press (2001). *“Curso rápido de Microsoft Office 2000”*, Editorial Norma, México.
10. Birnios M. (2001). *“Manual de Visual Basic 6.0”*, Primera Edición, MP Ediciones, México.