

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL



FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TESIS DE GRADO

PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE:
MAGÍSTER EN INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA

TEMA

ANÁLISIS COMPARATIVO DE MODELOS DE RESPUESTA AL ÍTEM
EXPLICATIVO

AUTOR

OSWALDO VICENTE NAVARRETE CARREÑO

Guayaquil-Ecuador

2015

Dedicatoria

A Eloiza, Ramón, Liliana, Tatiana, Michelle, Jordy, Carolina, Sofía, Francisco, Marcia, Mauricio y Manuel. Los cuatro costados de mi familia

Agradecimientos

A Dios por darme la fortaleza para alcanzar mis metas, a mis padres por su apoyo incondicional, al Dr. Francisco Vera por su acertada dirección en este proyecto, a la Universidad Politécnica Salesiana por su auspicio, a mis estudiantes por su paciencia.

Declaración Expresa

La responsabilidad por los hechos y doctrinas expuestas en esta Tesis de Postgrado, me corresponde exclusivamente; el patrimonio intelectual del mismo, corresponde exclusivamente a la **Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Departamento de Matemáticas** de la Escuela Superior Politécnica Del Litoral.

(Reglamento de Graduación de la ESPOL)

Oswaldo Vicente Navarrete Carreño

TRIBUNAL DE GRADUACIÓN

MsC. Carlos Martín Barreiro

PRESIDENTE DEL
TRIBUNAL

Ph.D. Francisco Vera Alcivar

DIRECTOR DE
TESIS

Ph.D. Omar Ruíz Barzola

VOCAL DEL TRIBUNAL

Índice general

1. Modelos Mixtos	1
1.1. Modelos Lineales Mixtos	4
1.1.1. Estimación de los parámetros	4
Máxima Verosimilitud (ML)	5
Máxima Verosimilitud Restringida (REML)	7
Algoritmos para la maximización de la función de Verosimilitud	8
1.2. Modelos Lineales Mixtos Generalizados	9
1.2.1. Estimación de los parámetros	11
1.3. Modelos no Lineales Mixtos	12
1.3.1. Estimación de los parámetros	13
2. Modelos de respuesta al Ítem Explicativos	15
2.1. Teoría Clásica de las Pruebas	15
2.2. Teoría de Respuesta al Ítem	16
2.3. Modelos de Respuesta al Ítem Explicativos	17
2.3.1. Modelo Rasch	21
2.3.2. Modelos de Covariables por Item	22
Modelo lineal logístico de prueba	23
2.3.3. Modelos de Covariables de Personas	25
Regresión latente 1PL (R1PL)	25
Modelos Multinivel	26
2.3.4. Modelos de Covariables de persona por ítem	26
Modelos DIF	27

3. Implementación de los modelos	32
3.1. Análisis de los aspirantes por carrera y tipo de colegio	34
3.2. Implementación	36
3.2.1. Modelo lineal logístico de prueba	38
3.2.2. Regresión latente 1PL (R11PL)	41
3.2.3. Modelos Multinivel	52
3.2.4. Modelos DIF	56
3.3. Resumen de los resultados	67
3.4. Discusión	70
4. Conclusiones y Recomendaciones	74
4.1. Conclusiones	74
4.2. Recomendaciones	76
Bibliografía	78

Índice de figuras

1.1. Estadística Clásica y Efectos mixtos	2
1.2. Resultados opuestos o diferentes	3
1.3. Representación gráfica de un GLMM	11
3.1. Aspirantes por Carrera	35
3.2. Aspirantes por Carrera y Género	37
3.3. Aspirantes por Carrera y Tipo de Colegio	37
3.4. Distritos de la Ciudad de Guayaquil	52

Índice de tablas

1.1. Algoritmos implementados en los programas más usados	8
2.1. Ejemplo de una matriz de covariables por Ítem	23
2.2. Ejemplo de una matriz de covariables por persona	25
3.1. Estructura de la prueba	33
3.2. Carreras de la IES	33
3.3. Aspirantes por carrera	34
3.4. Alumnos por Carrera: Tipo y Género	36
3.5. Modelo 1: Estimadores de los parámetros del LLTM	38
3.6. Ítems con mayor porcentaje de aciertos	40
3.7. Ítems con menor porcentaje de aciertos	40
3.8. Estimadores de los efectos aleatorios del modelo 1(b)	41
3.9. Modelo 2: Estimadores de los parámetros de la (R11PL) - Ítems fijos	43
3.10. Modelo 3: Estimadores de los parámetros de la (R11PL) - Género fijo	44
3.11. Estimadores de los efectos aleatorios del modelo 3	45
3.12. Modelo 4: Estimadores de los parámetros de la (R11PL) - Tipo Fijo	46
3.13. Estimadores de los efectos aleatorios del modelo 4	46
3.14. Modelo 5: Estimadores de los parámetros de la (R11PL) - Interacción entre Género y Tipo	48
3.15. Estimadores de los efectos aleatorios del modelo 5	48
3.16. Modelo 6: Estimadores de los parámetros de la (R11PL) - Ítems, Género y Tipo fijos	49
3.17. Modelo 7: Estimadores de los parámetros de la (R11PL) - Género Aleatorio	50

3.18. Estimadores de los efectos aleatorios (R11PL) - Género Aleatorio . . .	51
3.19. Modelo 8: Estimadores de los parámetros del modelo Multinivel - Ítems Aleatorios	53
3.20. Efectos aleatorios de los distritos en el modelo multinivel - Ítems Aleatorios	53
3.21. Estimadores de los efectos aleatorios del modelo 8	54
3.22. Efectos aleatorios del modelo multinivel - Ítems Fijos	54
3.23. Modelo 9: Estimadores de los parámetros del modelo Multinivel - Ítems fijos	55
3.24. Modelo 10: Estimadores de los parámetros del DIF - Verbal (Ítems Aleatorios)	57
3.25. Estimadores de los efectos aleatorios del modelo 10	58
3.26. Modelo 11: Estimadores de los parámetros del DIF - Numérico (Ítems Aleatorios)	59
3.27. Estimadores de los efectos aleatorios del modelo 11	59
3.28. Modelo 12: Estimadores de los parámetros del DIF - Abstracto (Ítems Aleatorios)	60
3.29. Estimadores de los efectos aleatorios del modelo 12	60
3.30. Modelo 13 Estimadores de los parámetros del DIF - Verbal	61
3.31. Modelo 14: Estimadores de los parámetros del DIF - Numérico	62
3.32. Modelo 15: Estimadores de los parámetros del DIF - Abstracto	63
3.33. Modelo 16: Estimadores de los parámetros del DIF - Verbal, Numéri- co, Abstracto (Ítems Aleatorios)	64
3.34. Estimadores de los efectos aleatorios del modelo 16	65
3.35. Modelo 17: Estimadores de los parámetros del DIF - Verbal, Numéri- co, Abstracto (Ítems Fijos)	66
3.36. Resumen de los modelos implementados	69

Objetivos Generales

1. Explicar la relación entre los modelos lineales generalizados mixtos y la teoría de respuesta al ítem.
2. Definir los modelos de respuesta al ítem explicativos e implementarlos en el análisis de resultados en pruebas de ingreso.

Objetivos Específicos

1. Definir los modelos lineales generalizados mixtos.
2. Explicar la diferencia entre la teoría de respuesta al ítem (IRT) y los modelos de respuesta al ítem explicativos.
3. Implementar modelos de respuesta al ítem explicativos en un conjunto de datos de pruebas de ingreso aplicadas a un grupo de aspirantes a una Institución de Educación Superior de la ciudad de Guayaquil.
4. Analizar y comparar los modelos de respuesta al ítem explicativos implementados.

Introducción

En ciencias como la psicometría, psiquiatría, biología, neurología y medicina es común observar grupos de unidades experimentales con características similares (datos agrupados o en paneles), unidades experimentales anidadas a otras unidades experimentales (datos jerárquicos) o unidades experimentales observadas a través del tiempo o varias observaciones por unidad experimental ya sea a través del tiempo (datos longitudinales) o de diferentes condiciones (mediciones repetidas). Las unidades experimentales, relacionadas con estos conjuntos de datos, tienden a presentar alguna dependencia o correlación entre ellos, por lo que los modelos estadísticos que suponen observaciones independientes no son los más indicados para realizar el análisis de los datos. Por eso, hay que usar modelos que tomen en cuenta estas características.

Algunos de esos modelos son los modelos multinivel y modelos mixtos. Particularmente los modelos lineales mixtos (LMM, por sus siglas en inglés), modelos lineales mixtos generalizados (GLMM), y los modelos no lineales mixtos (NLMM) presentan gran potencial en analizar los tipos de datos mencionados. Los efectos aleatorios son adecuados para tomar en cuenta la heterogeneidad y la dependencia. Briggs (2008).

Los modelos mixtos son muy usados para analizar datos agrupados, como, por ejemplo, datos de estudiantes anidados dentro de escuelas o datos de medidas repetidas, el problema es que modelar datos agrupados asumiendo observaciones independientes es inapropiado porque las observaciones de las subunidades (estudiantes, mediciones) de la misma unidad (escuela, participante) tienden a ser más homogéneas que las observaciones de subunidades de diferentes unidades. La heterogeneidad entre

unidades puede ser tomada en cuenta suponiendo que alguno de los parámetros del modelo sigue alguna distribución aleatoria sobre la población de unidades. Por lo que algunos de los parámetros del modelo son variables aleatorias y el modelo es un modelo de efectos aleatorios o modelo mixto (efectos fijos y efectos aleatorios). El efecto aleatorio representa el efecto de cada unidad. Los parámetros que no se suponen aleatorios son los efectos fijos.

En particular, la Teoría de Respuesta al Ítem (IRT) es un conjunto de modelos que trabaja con datos dependientes y que considera efectos aleatorios especiales, que usualmente se llaman rasgos latentes. Aunque los modelos de respuesta al ítem (IRM) presentan características particulares, comparten estructuras comunes con la mayoría de los modelos mencionados, especialmente con los GLMM y los NLMM.

Rjimen et al. (2003) explicaron como los modelos de teoría de respuesta al ítem pueden ser conceptualizados como modelos no lineales mixtos. El término “*modelos de respuesta al ítem explicativos*” fue acuñado por De Boeck & Wilson (2004) la idea de ellos fue usar la teoría de respuesta al ítem para la medición y explicación. Los modelos de respuesta al ítem son usados para medir tendencias como habilidades, destrezas, niveles de logro, etc. . . . En el modelamiento de respuesta al ítem tradicional cada ítem se modela con su propio conjunto de parámetros y de alguna forma u otra se estiman los parámetros de cada persona, esta aproximación se la conoce como medición; en una aproximación más amplia se podría desear modelar como las propiedades de los ítems y las personas que contestan las pruebas llevan a las respuestas de las personas este último es el enfoque explicativo. Entender como las respuestas de los ítems son generadas implica que se puedan explicar las respuestas en función de las propiedades de los ítems y las personas.

Briggs (2008) utilizó estos modelos para poder medir las diferencias entre grupos en exámenes de ciencia estandarizados. En este estudio el aplicó al mismo conjunto de datos dos análisis diferentes primero un análisis de dos pasos en el que el primer paso consistió en medir los estimados de los logros con un modelo Rasch

y luego en el segundo paso esos estimados de los logros se tratan de explicar con un modelo de regresión en función de los diversos grupos de los estudiantes. En el segundo análisis se utilizó un modelo de respuesta al ítem explicativo obteniendo resultados que permitieron explicar de mejor manera las diferencias entre grupos.

En este trabajo se busca explicar, utilizando los modelos de respuesta al ítem explicativos, los resultados obtenidos en las notas de los exámenes de admisión a una universidad guayaquileña, en función del grupo al que pertenece el estudiante que rinde la prueba. Los grupos a considerar son el género del estudiante y el tipo de colegio del que procede el estudiante. A fin de verificar si el género o el tipo de colegio de donde proviene el estudiante influye en los resultados obtenidos en las pruebas.

En el primer capítulo se dan a conocer los modelos mixtos explicando de manera breve los diferentes tipos de modelos mixtos que existen, el segundo capítulo se enfocará en los modelos de respuesta al ítem explicativos comenzando por un breve repaso de la teoría de la respuesta al ítem y en el capítulo final se implementan los modelos en R. La implementación se la hace usando el paquete **lme4**, en especial la función **glmer** que es la actualización de la función **lmer** usada en De Boeck et al. (2011), .

Capítulo 1

Modelos Mixtos

La mayoría de las aplicaciones de la estadística, enfocan su interés en las medias y en las variaciones alrededor de estos promedios, este interés se ha visto reflejado en el extenso uso que se ha hecho del análisis de varianza (ANOVA). (McCulloch et al., 2008). Una aplicación clásica es buscar una relación entre dos variables X e Y , por ejemplo X puede ser la variable publicidad e Y la variable ventas mensuales, a cada valor $x_i \in X$ le corresponde un valor $y_i \in Y$. En la estadística clásica se supone que los pares ordenados (x_i, y_i) son independientes e idénticamente distribuidos con la recta de regresión $E(y|x) = \alpha + \beta x$. Clásicamente el modelo supuesto es:

$$y_k = \alpha + \beta x_k + \varepsilon_k, \quad k = 1, \dots, K \quad (1.1)$$

Donde los errores $\{\varepsilon_k\}$ son normales con media cero y varianza constante σ^2 y K es el número total de observaciones. Es decir que se supone que los datos corresponden a publicidad y ventas de productos homogéneos o similares (Demidenko, 2013). Sin embargo los productos pueden no ser homogéneos y variar significativamente en términos de publicidad y ventas. Un modelo adecuado para el problema de las ventas en función de la publicidad podría ser asumir que a cada producto le corresponde un intercepto propio, lo que implica un modelo:

$$y_{ij} = \alpha_i + \beta x_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n_i \quad (1.2)$$

El doble índice se debe a que ahora estamos tratando con datos agrupados; i corresponde al i –ésimo producto, j corresponde a la j –ésima observación del i –ésimo producto, n_i es el número de observaciones del i –ésimo producto, y α_i es el intercepto específico para un producto. El número total de observaciones es $\sum_{i=1}^N n_i$. Considerando además que los términos de error ε_{ij} son independientes e idénticamente distribuidos con varianza σ^2 .

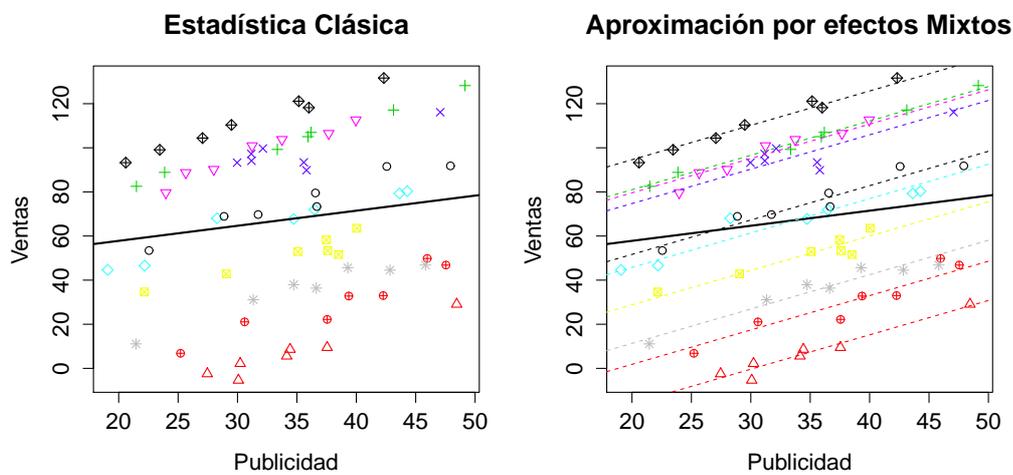


Figura 1.1: Estadística Clásica y Efectos mixtos

Fuente: Datos Simulados.

En la figura 1.1 se puede observar que en la gráfica de la izquierda que representa el enfoque clásico, se realiza la regresión para todo el conjunto de datos sin tomar en cuenta el grupo al que pertenecen, se asume que los datos son independientes e idénticamente distribuidos. Mientras que en la gráfica de la derecha que es el enfoque de efectos mixtos, se asume que cada producto representa un grupo, la regresión se realiza tomando en cuenta el grupo al que pertenece cada elemento.

El análisis clásico y la aproximación por efectos mixtos pueden llevar a conclusiones diferentes. En la figura 1.2 se puede observar que en la gráfica de la izquierda que representa el enfoque clásico, se realiza la regresión para todo el conjunto de datos sin tomar en cuenta el grupo al que pertenecen, se asume que los datos son inde-

pendientes e idénticamente distribuidos y se obtiene una relación negativa. Mientras que en la gráfica de la derecha que es el enfoque de efectos mixtos, se asume que cada producto representa un grupo, la regresión se realiza tomando en cuenta el grupo al que pertenece cada elemento. Se observa que un aumento en la publicidad provoca un aumento en las ventas.

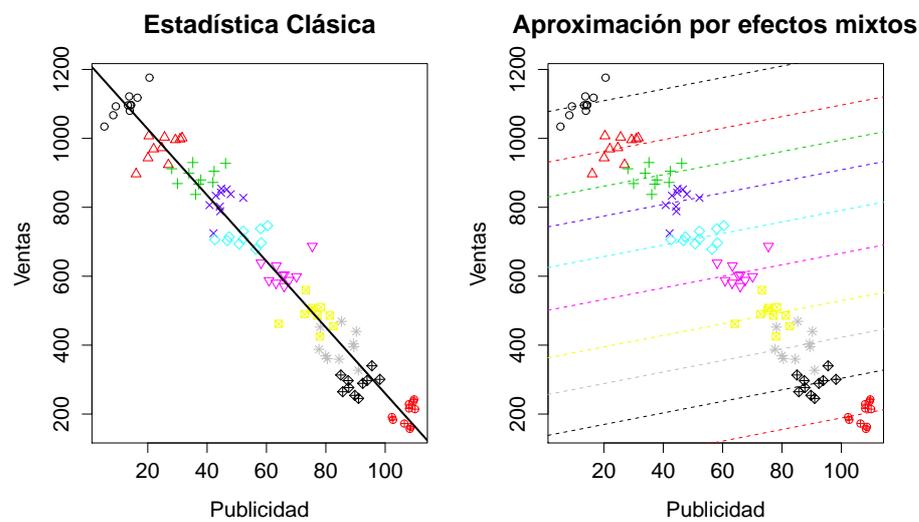


Figura 1.2: Resultados opuestos o diferentes

Fuente: Datos Simulados.

El modelo (1.1) es más sencillo de manejar que el modelo (1.2). La principal característica de los modelos de efectos mixtos es que los interceptos $\{\alpha_i, i = 1, \dots, N\}$ son aleatorios y se pueden expresar de la forma:

$$\alpha_i = \alpha + b_i, \quad (1.3)$$

en el ejemplo propuesto α es la venta promedio poblacional (intercepto) y b_i es el efecto aleatorio, o la desviación de la venta promedio poblacional para un producto específico.

1.1. Modelos Lineales Mixtos

Combinando los modelos (1.2) y (1.3) se define un modelo lineal de efectos mixtos, los parámetros α y β son efectos fijos y b_i es el efecto aleatorio con media cero y varianza σ_b^2 independiente de $\{\varepsilon_{ij}\}$. El modelo definido por las ecuaciones (1.2) y (1.3) se lo puede escribir como uno solo:

$$y_{ij} = \alpha + \beta x_{ij} + \eta_{ij}, \quad i = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, n_i, \quad (1.4)$$

donde $\eta_{ij} = \varepsilon_{ij} + b_i$ es el error compuesto aleatorio.

Los modelos lineales mixtos se los puede considerar como una extensión de los modelos lineales puesto que manejan datos dependientes, observaciones agrupadas, variación adicional y diferentes fuentes de heterogeneidad. (De Boeck et al., 2010).

Los modelos lineales de efectos mixtos son modelos mixtos en los cuales los efectos fijos y los aleatorios contribuyen linealmente a la función respuesta y se pueden expresar de la forma:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_i \boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.5)$$

donde \mathbf{y} es el vector de las respuestas, \mathbf{X} y \mathbf{Z} son las matrices de diseño correspondientes a los efectos fijos y aleatorios respectivamente. $\boldsymbol{\beta}$ es el vector de efectos fijos $\boldsymbol{\theta}$ es el vector de efectos aleatorios y $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el vector de los errores. Se asume que $\boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{D})$ y $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$, con $\boldsymbol{\theta}$ independiente de $\boldsymbol{\varepsilon}$. σ y \mathbf{D} son los parámetros desconocidos de la varianza y son estimados junto con $\boldsymbol{\beta}$ (Demidenko, 2013).

1.1.1. Estimación de los parámetros

Los métodos tradicionales de estimación son máxima verosimilitud (ML) y la máxima verosimilitud restringida (REML). Aunque hay métodos más robustos o más

simples que los basados en la máxima verosimilitud, en este trabajo se presentan los dos métodos ya mencionados, se recomienda por ejemplo Searle et al. (1992) para conocer sobre los otros métodos.

Máxima Verosimilitud (ML)

En los primeros años del siglo XX Fisher (1922), popularizó el uso de este método. La estimación por ML es un método para obtener los estimados de parámetros desconocidos optimizando una función de verosimilitud (Galecki et al., 2007). Aunque era un método muy usado, la máxima verosimilitud no se usó en análisis de modelos mixtos hasta Hartley & Rao (1967). La principal razón es que aunque la estimación de los efectos fijos dada la varianza es relativamente fácil, el manejo de los componentes de la varianza en un LMM no era sencillo computacionalmente hablando.

El modelo mixto de la ecuación (1.5) puede ser escrito en forma marginal (Demidenko, 2013):

$$\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{V}) \quad \mathbf{V} = \mathbf{I} + \mathbf{ZDZ}' \quad (1.6)$$

La distribución de probabilidad conjunta de (1.6) (Jiang, 2007; Pinheiro, 1994)

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{V}|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right\} \quad (1.7)$$

donde n es la dimensión de \mathbf{y} . La función logaritmo de la verosimilitud está dada por:

$$l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Phi}) = c - \frac{1}{2} \log(|\mathbf{V}|) - \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \quad (1.8)$$

$\boldsymbol{\Phi}$ representa el vector de todos las componentes de varianza (incluidas en \mathbf{V}), y c es una constante. Diferenciando (1.8) con respecto a los parámetros, se obtiene:

$$\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \Phi_j} = \frac{1}{2} \left\{ (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) - \text{tr} \left(\mathbf{V}^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \Phi_j} \right) \right\} \quad r = 1, \dots, q \quad (1.10)$$

donde Φ_j es el j -ésimo componente de $\boldsymbol{\Phi}$ que es un vector de dimensión q , El procedimiento común para determinar el estimador de máxima verosimilitud (MLE), es resolver las ecuaciones $\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0$, $\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\Phi}} = 0$. Sin embargo las soluciones de (1.9) y (1.10) podrían no ser los estimadores de máxima verosimilitud, Jiang (2007) discute esta cuestión en profundidad.

Sea p la dimensión de $\boldsymbol{\beta}$. Por cuestiones prácticas, asumamos que \mathbf{X} es de rango completo. es decir que $\text{rango}(\mathbf{X}) = p$. Sean $(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\Phi}})$ los MLE. De (1.9) se obtiene:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{y} \quad (1.11)$$

donde $\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{V}(\hat{\boldsymbol{\Phi}})$. Así, una vez que se determinan los MLE de $\boldsymbol{\Phi}$, se puede determinar los MLE de $\boldsymbol{\beta}$ por la expresión (1.11). Para los MLE de $\boldsymbol{\Phi}$ usando (1.9) y (1.10) se puede demostrar que se satisface:

$$\mathbf{y}'\mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \Phi_j} \mathbf{P}\mathbf{y} = \text{tr} \left(\mathbf{V}^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \Phi_j} \right) \quad r = 1, \dots, q \quad (1.12)$$

donde

$$\mathbf{P} = \mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1} \quad (1.13)$$

En resumen primero se resuelve (1.12) para $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$ y luego se calcula $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ por (1.11).

Máxima Verosimilitud Restringida (REML)

Según Jiang (2007) y Demidenko (2013) los MLE para los componentes de la varianza son sesgados. Jiang (1996) demuestra que el sesgo no se desvanece a medida que el tamaño muestral aumenta, si el número de efectos fijos es proporcional al tamaño muestral. En este último caso el MLE es inconsistente. Para reducir el sesgo en los componentes de la varianza del modelo, Patterson & Thompson (1971) y Harville (1974) recomendaron modificar el logaritmo de la verosimilitud utilizando mínimos cuadrados residuales generalizados. Este nuevo método que resultó se llama Máxima Verosimilitud Restringida aunque algunos autores como Galwey (2006) prefieren Máxima Verosimilitud Residual.

Al igual que antes se asume que $\text{rango}(\mathbf{X}) = p$. Además se define una matriz \mathbf{A} de dimensión $n \times (n - p)$ talque:

$$\text{rango}(\mathbf{A}) = n - p \quad \mathbf{A}'\mathbf{X} = 0 \quad (1.14)$$

Definamos $\mathbf{z} = \mathbf{A}'\mathbf{y}$. Se puede demostrar que $\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{A}'\mathbf{V}\mathbf{A})$. La función de densidad de probabilidad conjunta de \mathbf{z} está dada por:

$$f_R(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{(n-p)/2} |\mathbf{A}'\mathbf{V}\mathbf{A}|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{z}' (\mathbf{A}'\mathbf{V}\mathbf{A})^{-1} \mathbf{z} \right\} \quad (1.15)$$

el subíndice R es por restringida (o residual). El logaritmo de la verosimilitud basado en \mathbf{z} , que recibe el nombre de logaritmo de la verosimilitud restringido, está dado por:

$$l_R(\Phi) = c - \frac{1}{2} \log(|\mathbf{A}'\mathbf{V}\mathbf{A}|) - \frac{1}{2} \mathbf{z}' (\mathbf{A}'\mathbf{V}\mathbf{A})^{-1} \mathbf{z} \quad (1.16)$$

donde c es una constante. Cuando se deriva el logaritmo de la verosimilitud restringida, se obtiene en términos de \mathbf{y}

$$\frac{\partial l_R}{\partial \Phi_i} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{y}' \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \Phi_i} \mathbf{P} \mathbf{y} - \text{tr} \left(\mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \Phi_i} \right) \right\} \quad i = 1, \dots, q \quad (1.17)$$

con

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} (\mathbf{A}' \mathbf{V} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' = \mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \quad (1.18)$$

El estimador REML de Φ se define como el valor que maximiza la ecuación (1.17).

Al igual que en ML, este valor satisface la ecuación $\frac{\partial l_R}{\partial \Phi} = 0$.

El logaritmo de la verosimilitud restringida (1.16) solo depende de Φ . Es decir que REML es un método para estimar Φ puesto que β es eliminado antes de la estimación. Después de estimar Φ por REML, se estima β por la ecuación (1.11), con $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\hat{\Phi})$ siendo $\hat{\Phi}$ el REML. Este estimador de β se lo conoce como el estimador "REML".

Algoritmos para la maximización de la función de Verosimilitud

Paquete o procedimiento	Métodos de estimación	Algoritmos
	disponibles	Computacionales
SAS Proc Mixed	ML, REML	NR, FS
SPSS MIXED	ML, REML	NR, FS
R:nlme	ML, REML	ECMC, NR
Stata:xtmixed	ML, REML	EM, NR

Tabla 1.1: Algoritmos implementados en los programas más usados

Fuente: Galecki et al. (2007).

La principal dificultad computacional en estos modelos es la estimación de los parámetros de la covarianza. Para la optimización de los logaritmos de las verosimilitudes mostrados para ML y REML. Los algoritmos más usados para el problema

de la optimización son el algoritmo *Expectation-Maximization* (EM), el algoritmo Newton Raphson (N-R) y el algoritmo Fisher-Scoring (FS) (Galecki et al., 2007). Foulley et al. (2000) presentan algunos procedimientos para implementar el algoritmo EM para calcular los REML estimados en modelos mixtos para análisis de datos longitudinales. En los últimos años, se han presentado variaciones al algoritmo EM que permiten que este funcione mucho mejor y sea más estable. Una de esas variaciones es el PX-EM presentado por Liu et al. (1998) y que luego fue aplicado a modelos lineales mixtos de Henderson por Foulley & Dyk (2000), Diffey et al. (2013) presentan un PX(EM) más eficiente cuando la información es incompleta.

Galecki et al. (2007) y Demidenko (2013) desarrollan los métodos arriba mencionados. En la tabla 1.1 se muestran los algoritmos usados en los paquetes o procedimientos de los programas estadísticos más usados, esta tabla fue escrita inicialmente por Galecki et al. (2007) en este trabajo se ha actualizado parcialmente la misma ya que han aparecido algunos paquetes y otros han caído en desuso. No se incluye el paquete `lme4` de R porque no utiliza alguno de los tres algoritmos puestos a consideración en esta sección.

1.2. Modelos Lineales Mixtos Generalizados

Los modelos que requieren una transformación en la forma de una función de enlace antes de que la variable dependiente esté relacionada a los predictores lineales son llamados modelos lineales generalizados (GLM) (McCullagh & Nelder, 1989). Si un modelo de estos incluye un efecto aleatorio es llamado un modelo lineal mixto generalizado (GLMM). Los GLMMs son ampliamente utilizados en el análisis de datos agrupados, incluyendo datos longitudinales o datos de medidas repetidas en los que las respuestas no son continuas (Sinha, 2004; Rabe-Hesketh & Skrondal, 2010) Los modelos GLMM tienen tres partes.

1. El componente lineal (o predictor lineal) es una función lineal de los predictores. Como se mencionó antes, los modelos mixtos tienen dos tipos de predictores.

res los fijos y los aleatorios. La formulación general del componente lineal en un GLMM puede ser escrito como

$$\eta_{pi} = \sum_{k=0}^K \beta_k X_{ik} + \sum_{j=0}^J \theta_{pj} Z_{ij} \quad (1.19)$$

donde X_{ik} representa los elementos de la matriz \mathbf{X} de diseño de los efectos fijos de dimensión $I \times K$, β_k representa los elementos del vector $\boldsymbol{\beta}$ de efectos fijos de dimensión $K \times I$, Z_{ij} representa los elementos de la matriz \mathbf{Z} de diseño de los efectos aleatorios de dimensión $I \times J$ y θ_{pj} es elemento del vector de efectos aleatorios $\boldsymbol{\theta}_p$ de dimensión $J \times I$. En el contexto de los modelos a ser implementados en este trabajo, I representa el número de ítems de una prueba, P el número de personas que realizan la prueba, J el número de covariables con efectos aleatorios y K el número de covariables con efectos fijos.

2. La función de enlace conecta el valor esperado condicional del componente lineal al valor esperado de la variable observada, dados los efectos aleatorios: $\eta_{pi} = f_{link}(E(Y_{pi}|\boldsymbol{\theta}_p))$, con $f_{link}(\cdot)$ como la función de enlace. Para datos binarios $E(Y_{pi}|\boldsymbol{\theta}_p) = \pi_{pi}$. Las dos funciones de enlace más comunes son la probit y la logit.
3. El componente aleatorio describe la función de distribución de Y_{pi} con $f_{link}^{-1}(\eta_{pi})$ como la media condicional de la distribución. En modelos para datos binarios la distribución Bernoulli independiente es usada cuando solo se hace una observación por cada par (p, i) . Cuando se hace más de una observación, se usa la distribución binomial.

Según Davidian & Giltinan (1995) si se añade un componente no lineal el modelo se vuelve un modelo no lineal o un modelo no lineal de efectos mixtos como los descritos en la sección 1.3. En los modelos GLM o en los GLMM la naturaleza no lineal nace en la función enlace, mientras que en los modelos NLM o NLMM se origina en η_{pi} .

En Wilson et al. (2008) y De Boeck & Wilson (2004) se propone una representación gráfica de los GLMM. En esa representación se muestran las 3 partes de un modelo,

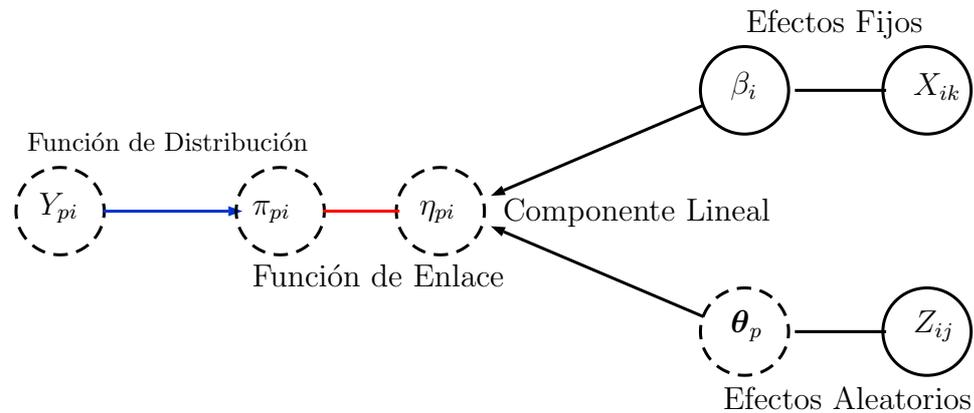


Figura 1.3: Representación gráfica de un GLMM

Fuente: (Wilson et al., 2008; De Boeck & Wilson, 2004)

de izquierda a derecha: el componente aleatorio (denotado con la línea azul) que conecta Y_{pi} y π_{pi} a través de una función de distribución de algún tipo, donde π_{pi} es la probabilidad de que la persona p conteste bien al ítem i , condicionado en el efecto aleatorio; la función enlace (denotada con una línea recta que conecta π_{pi} a η_{pi}); y finalmente, el componente lineal conectando η_{pi} a sus conjuntos de predictores lineales \mathbf{X} y \mathbf{Z} , a través de β_k 's y θ_{pj} 's. La formulación general incluye un intercepto aleatorio así como también las pendientes aleatorias. Los círculos punteados representan un efecto aleatorio, y los círculos sólidos representan un efecto fijo.

1.2.1. Estimación de los parámetros

Debido a la complejidad de los GLMMs, la estimación eficiente de los parámetros está llena de dificultades para los investigadores. Generalmente, al igual que en la sección 1.1, se utiliza el método de máxima verosimilitud, sin embargo la estimación es bastante complicada porque incluye integrales de dimensiones elevadas involucradas en la función verosimilitud de los GLMMs. En Sinha (2004) se hace un recuento de algunos de los métodos existentes para la estimación.

En la literatura existente se puede encontrar que los esfuerzos están dirigidos ha-

cia como implementar algoritmos eficientes para evaluar los MLE. (Nielsen & Dean, 2007; Xiang & Tse, 2003; McCulloch, 1997; Jiang, 1998). Tuerlinckz et al. (2006) revisan de forma exhaustiva la estimación para los GLMMs con una distribución normal, esta discusión incluye las ventajas y desventajas de los métodos propuestos y los paquetes estadísticos que los implementan.

1.3. Modelos no Lineales Mixtos

Los datos de medidas repetidas son datos en los que los individuos tienen múltiples mediciones a lo largo del tiempo. Así el método de análisis para este tipo de datos necesita reconocer y estimar dos tipos distintos de variabilidad la primera entre los individuos y la segunda en la población (Wang, 2007). No es raro que la relación entre la variable explicativa y la variable respuesta sea no lineal en los parámetros. Los modelos no lineales de efectos mixtos (NLMM) proveen una forma de analizar los datos de medidas repetidas en los cuales la relación entre la variable explicativa y la variable respuesta puede ser modelado como una función, permitiendo a los parámetros diferir entre individuos. (Davidian & Giltinan, 1993; Bonate, 2011)

Para estos modelos es posible encontrar algunas formulaciones propuestas que son generales como en Wolfinger & Lin (1997), Pinheiro & Bates (1994) o Ge et al. (2004); o que son específicas para un área determinada como la farmacocinética como en Wang (2007). Sin embargo en este trabajo se usará la notación de Lindstrom & Bates (1990). Esta formulación se hace en dos etapas, en la primera etapa se modela la j -ésima observación del i -ésimo individuo

$$y_{ij} = f(\phi_{ij}, \mathbf{x}_{ij}) + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, n_i \quad (1.20)$$

donde f es una función no lineal del vector ϕ_{ij} de parámetros específicos de un individuo y del vector \mathbf{x}_{ij} de predictores, ε_{ij} está normalmente distribuido. M es el total de individuos y n_i es el número de observaciones del i -ésimo individuo. En la

segunda etapa se modela el vector de parámetros específicos de los individuos

$$\phi_{ij} = \mathbf{X}_{ij}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_{ij}\boldsymbol{\theta}_i, \quad \boldsymbol{\theta}_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{D}) \quad (1.21)$$

donde $\boldsymbol{\beta}$ es el vector de parámetros poblacionales fijos, $\boldsymbol{\theta}_i$ es un vector de efectos aleatorios asociado al i -ésimo individuo, \mathbf{X}_{ij} y \mathbf{Z}_{ij} son las matrices de diseño para los efectos fijos y los aleatorios respectivamente, $\sigma^2\mathbf{D}$ es la matriz de varianza-covarianza. Se asume además que las observaciones hechas para diferentes individuos son independientes y que ε_i es independiente de $\boldsymbol{\theta}_i$.

1.3.1. Estimación de los parámetros

Los parámetros en el modelo se pueden estimar ya sea por ML, o por REML, basados en la densidad marginal de \mathbf{y} . Los métodos propuestos, generalmente se basan en la linearización del logaritmo de la verosimilitud. Una aproximación por Laplace fue propuesta por Vonesh (1996), mientras que Racine-Poon (1985) propone una aproximación bayesiana. Otros autores como Walker (1996) y Wakefield (1996) usaron un algoritmo EM Monte-Carlo. Kuhn & Lavielle (2005) utilizaron una aproximación estocástica del algoritmo EM (SAEM), este algoritmo tiene la ventaja de que obtiene un estimador cercano al MLE en muy pocas iteraciones.

Capítulo 2

Modelos de respuesta al Ítem Explicativos

El análisis de ítems provee una forma de medir la calidad de las preguntas realizadas en un examen, una prueba psicométrica, o un test psicológico. En el análisis de ítems se busca determinar cuan apropiadas fueron las preguntas y que tan bien ayudaron a medir la habilidad de los evaluados. Además se logra volver a usar los ítems en diferentes pruebas con un conocimiento previo de como se van a desempeñar, lo que ayuda a crear un banco de preguntas.

2.1. Teoría Clásica de las Pruebas

El análisis de ítems tuvo sus inicios con la teoría clásica de las pruebas (CTT), en esta teoría los análisis son realizados sobre la prueba como un todo en lugar de cada ítem y aunque se puede generar estadísticas para los ítems, estas solo aplican para *ese* grupo de estudiantes sobre *ese* grupo de ítems Sijtsma & Junker (2006).

Los modelos CTT están basados en la idea de que, debido a un error aleatorio ε una nota de una prueba observable y que se denota con X_+ , regularmente no es el valor representativo del rendimiento de un individuo examinado, esto último se

denota con T . Es decir que para un determinado individuo v evaluado

$$X_{+v} = T_v + \varepsilon_v \quad (2.1)$$

Se hacen los siguientes supuestos para el error:

- Está normalmente distribuido.
- No está correlacionado con la nota verdadera. Es decir $\rho(X_+, \varepsilon) = 0$
- $E(\varepsilon_v) = 0$

2.2. Teoría de Respuesta al Ítem

En la teoría clásica de las pruebas se miden los parámetros de dificultad, discriminación y confiabilidad. Como ya se mencionó, en CTT la prueba es la base del análisis y aunque los valores obtenidos se pueden generalizar a estudiantes similares que dan una prueba similar, en realidad estos modelos aplican a *esos* estudiantes que rinden *esa* prueba. Lord (1952) fue más allá y utilizó modelos de rasgo latente cuyo objetivo es ir más allá de los rasgos subyacentes que producen la realización de la prueba. Se miden a nivel de ítem y se obtiene medidas que pueden ser generalizadas.

Aunque estos modelos fueron desarrollados en los 40 no fueron usados de manera más amplia sino hasta los 60. Puesto que eran teóricamente posibles, pero en la práctica eran inviables sin software especializado. Su objetivo es medir la habilidad subyacente (rasgo) que produce el desempeño de la prueba en vez de medir el desempeño per se. Como las estadísticas que se obtienen no son dependientes de la situación de la prueba que los generó, pueden ser usados más flexiblemente.

La teoría de respuesta al ítem (IRT) se refiere a una familia de modelos de rasgo latente usados para establecer propiedades psicométricas de ítems, en muchas ocasiones se la refiere como la psicometría moderna porque en la evaluación educativa a gran escala, ha reemplazado casi completamente a la teoría clásica de pruebas. La teoría de respuesta al ítem tiene tres componentes básicos:

1. La función de respuesta al ítem (IRF), que es una función matemática que relaciona los rasgos latentes con la probabilidad de contestar un ítem.
2. La función de información del ítem, que es un indicador de la calidad del ítem; la capacidad de un ítem para diferenciar entre los evaluados.
3. Invarianza de los parámetros, esto significa que los parámetros de los ítems deben ser los mismos en poblaciones diferentes de examinados. (DeMars, 2010)

Los modelos IRT relacionan la respuesta dada a un ítem por un individuo a las características de los ítems y los individuos. Las características comunes de los ítems incluyen dificultad y discriminación. Para el individuo, puede ser un rasgo latente, como la competencia en matemáticas o los niveles de depresión (Goncalves et al., 2013).

La teoría de respuesta al ítem, sin embargo está basada en modelos en los que se supone que los ítems se comportan igual para todos los individuos, pero en muchas ocasiones es necesario conocer como se comportan los ítems de acuerdo al grupo al que pertenece el individuo o a las características del individuo. En la siguiente sección se discuten los modelos que son el tema central de este trabajo y que ayudan a resolver este tipo de problemas.

2.3. Modelos de Respuesta al Ítem Explicativos

Los modelos de respuesta al ítem son usados para medición. En Rjimen et al. (2003); De Boeck & Wilson (2004) se presenta un marco en el que los modelos IRT pueden ser enmarcados dentro del contexto de los modelos lineales mixtos generalizados o de los no lineales mixtos, para poder tomar en cuenta las características de los grupos de individuos que hacen la prueba o las propiedades de los ítems que son examinados. Por ejemplo si quisieramos medir como difieren los resultados de los exámenes en función del grupo al que pertenecen los estudiantes (género, raza, tipo de colegio, carrera) y como esas diferencias varían de acuerdo al tema que está siendo evaluado.

Una manera de resolver este problema sería realizar un modelo de teoría de respuesta al ítem para cada tema evaluado y luego utilizar el resultado como variables de respuesta para una regresión con las variables de género, raza, etc. Con esta aproximación el modelo IRT subyacente es solo de interés para generar la variable respuesta. Las respuestas que se obtienen están basadas en regresiones lineales que son independientes del modelo escogido. Sin embargo, cuando no solo queremos medir, sino también *explicar* la diferencia entre los grupos a los que pertenecen los estudiantes, este procedimiento no es el mejor. (Briggs, 2008)

De Boeck & Wilson (2004) fueron los primeros en usar el término **modelos de respuesta al ítem explicativos** para explicar el uso de IRT como una herramienta para la medición y la explicación.

Supongamos que tenemos un instrumento de prueba que tiene preguntas de opción múltiple que se califican de manera dicotómica. Sea la variable Y_{ni} que representa la respuesta de la persona n al ítem i . Cuando se selecciona la respuesta correcta $Y_{ni} = 1$ de otra forma $Y_{ni} = 0$. La probabilidad de una respuesta correcta se puede expresar como una función de los efectos fijos, β , y de los aleatorios, θ_n , tales que:

$$P(Y_{ni} = 1 | \mathbf{x}_{ni}, \mathbf{z}_{ni}, \beta, \theta_n) = \frac{e^{\mathbf{x}'_{ni}\beta + \mathbf{z}'_{ni}\theta_n}}{1 + e^{\mathbf{x}'_{ni}\beta + \mathbf{z}'_{ni}\theta_n}} \quad (2.2)$$

donde \mathbf{x}'_{ni} es un vector de covariables observadas de dimensión P para P efectos fijos; \mathbf{z}'_{ni} es un vector de covariables observadas de dimensión Q para los Q efectos aleatorios, β es el vector de dimensión P de parámetros de efectos fijos, y θ_n es el vector de dimensión Q de parámetros de efectos aleatorios asociados con el individuo n . En la ecuación (2.2) se supone que todas las observaciones provienen de una distribución de familia exponencial, condicional en los efectos aleatorios especificados, los predictores y los efectos fijos.

La forma lineal generalizada del modelo es más fácil cuando las respuestas medias de

Y_{ni} se asocian a los predictores lineales con la función de enlace. En este caso si Y_{ni} toma una distribución Bernoulli, $E(Y_{ni} = 1 | \mathbf{x}_{ni}, \mathbf{z}_{ni}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}_n) = P(Y_{ni} = 1 | \mathbf{x}_{ni}, \mathbf{z}_{ni}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}_n) = \pi_{ni}$, de esta forma la función de enlace es la función logit, $L(\pi_{ni}) = \ln\left(\frac{\pi_{ni}}{1-\pi_{ni}}\right)$. Con la función logit de enlace, (2.2) puede ser reescrita como:

$$L(\pi_{ni}) = \mathbf{x}'_{ni}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{z}'_{ni}\boldsymbol{\theta}_n \quad (2.3)$$

La ecuación (2.3) es un ejemplo de modelo lineal mixto generalizado (McCulloch et al., 2008). Se supone que los efectos aleatorios $\boldsymbol{\theta}_n$ siguen una distribución normal multivariada con vector de medias $\mathbf{0}$ y una matriz de covarianzas Σ . Según De Boeck et al. (2011) los modelos de respuesta al ítem que pueden ser explicados en el contexto de los modelos lineales mixtos generalizados se pueden explicar usando una taxonomía que tiene cuatro dimensiones, dos que se refieren al tipo de variables, y dos que se refieren al tipo de efectos:

1. Tipo de variables

- a) **Modo de las variables** Las variables se pueden referir a los ítems, a las personas, o a pares de personas e ítems.
- b) **Variables internas versus Variables Externas** Una variable externa a los ítems es externa a las respuestas de los ítems a ser modeladas. Una variable interna no se deriva de las respuestas a modelar. Los modelos con covariables internas se llaman modelos condicionales (Fahrmeir & Tutz, 2001). Por ejemplo, el número previo de respuestas exitosas en un examen es una variable interna para un modelo que va a ser usado para las respuestas de los ítems, mientras que el género es una variable externa.

2. Tipo de efectos

- a) **Efectos fijos versus Efectos Aleatorios** Los efectos fijos son constantes desconocidas y no varían como una función de las unidades observacionales, mientras que los efectos aleatorios varían a través de las

unidades observacionales y tienen una distribución que comúnmente es la normal.

- b) **Modo de la aleatoriedad** Un efecto aleatorio sigue una distribución asociada con la población de las unidades observacionales que se quieren considerar. Un efecto puede ser aleatorio a través de las personas, a través de los ítems, a través de las personas dentro de un grupo, a través de los ítems dentro de un tipo de ítems, a través de grupos de personas, a través de tipos de ítems, y se pueden construir casos aún más complicados. Por los elementos anidados presentes (personas y grupos de personas) los modelos multinivel también pueden ser usados.

Diferentes combinaciones de las cuatro dimensiones taxonómicas conducen a diferentes modelos de respuesta al ítem. Sin embargo en este trabajo se considerarán las tres categorías definadas por Rjimen et al. (2003), basadas en la primera dimensión taxonómica:

1. **Covariables de ítems** Una covariable es una covariable de ítem si y solo si los elementos de la columna correspondiente de \mathbf{X} o \mathbf{Z} varían a través de los ítems pero son constantes a través de las personas.
2. **Covariables de personas** Una covariable es una covariable de personas si y solo si los elementos de la columna correspondiente de \mathbf{X} o \mathbf{Z} varían a través de las personas pero son constantes a través de los ítems.
3. **Covariables de persona por ítem** Una covariable es una covariable de persona por ítem si y solo si los elementos de la columna correspondiente de \mathbf{X} o \mathbf{Z} varían tanto a través de los ítems como de las personas. (Wilson et al., 2008, Cap. 8)

Cuando se usan modelos de respuesta al ítem en investigación educativa, los estudiantes son típicamente la unidad de análisis. En el momento que se incluyen

covariables de personas por ítem para describir o explicar diferencias entre estudiantes, el modelo, especificado en el marco de los modelos GLMM se convierte en un modelo de respuesta al ítem explicativo (EIRM).

2.3.1. Modelo Rasch

El modelo Rasch es el modelo más simple de la teoría de respuesta al ítem fue formulado por el matemático danés George Rasch en los años 60. De acuerdo a este modelo, la respuesta de un individuo a un ítem se determina por el nivel del rasgo latente del individuo (habilidad) y la dificultad del ítem.

El modelo usa $I + 1$ covariables de ítem: I indicadores de ítem más una constante 1 para todos los ítems. La matriz \mathbf{X} de dimensión $I \times (I + 1)$ de covariables de ítem es la unión de un vector de 1's y de una matriz identidad $I \times I$. El vector de 1's tiene un efecto aleatorio, que generalmente es el rasgo latente o la habilidad en un modelo IRT, mientras que los efectos de las covariables de la matriz identidad son fijos, uno por ítem y corresponden a los parámetros de dificultad. La versión logística del modelo se conoce como el modelo Rasch o el modelo logístico de un parámetro (1PL). El modelo puede ser formulado en términos de los predictores de los ítems y sus efectos:

$$\eta_{pi} = \theta_p X_{i0} + \sum_{k=1}^K \beta_i X_{ik} \quad (2.4)$$

con $X_{i0} = 1$ para todos los ítems $X_{ik} = 1$ si $i = k$ (k e i tienen el mismo rango) y 0 en otros casos; y $\theta_p \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\theta^2)$. El modelo en (2.4) puede ser escrito en una forma más sencilla:

$$\eta_{pi} = \theta_p + \beta_i \quad (2.5)$$

Se concluye de (2.4) que el modelo 1PL y su ojiva normal equivalente son modelos de

intercepto aleatorio. El signo más en (2.4) implica que β_i debería ser interpretado como la facilidad del ítem en lugar de la dificultad del ítem, por lo que es una práctica común en la ecuación (2.5) cambiar el signo del parámetro del ítem de tal forma que la contribución del ítem sea negativa y pueda ser interpretado como la dificultad del ítem en el contexto del logro obtenido en el ítem. Wilson et al. (2008). La ecuación resultante es

$$\eta_{pi} = \theta_p - \beta_i \quad (2.6)$$

De manera general, en este enfoque, todas las formas de medición dependen de los efectos de las covariables. Por ejemplo, en la mayoría de los modelos, los rasgos latentes son efectos aleatorios, y la dificultad de los ítems son los efectos fijos.

Tradicionalmente un conjunto de datos para IRT con respuestas a ítems es un arreglo con P filas e I columnas, donde las filas representan a las personas y las columnas a los ítems, esta representación es conocida como “forma ancha”. Para poder realizar los modelos que se verán en las siguientes secciones es necesario que los datos estén en “forma larga”, con una fila por respuesta y una longitud de columna igual al número de personas P por el número de ítems I ($P \times I$). Las respuestas constituyen una de las columnas, dos de las otras columnas deben ser una para las personas y otra para los ítems, hay modelos que contienen más columnas para otras covariables como el tipo de colegio, o el género en ese caso el indicador de cada covariable para la persona p debe estar presente en cada fila que contenga una respuesta de la persona p .

2.3.2. Modelos de Covariables por Ítem

Las covariables de ítem, las vamos a ubicar en una matriz de covariable por ítem, con dimensiones $I \times (K + 1)$, y con k ($k = 0, 1, \dots, K$) como índice para las covariables de cada ítem. Debido al formato de forma larga de todas las variables, la matriz de covariables de ítem necesita ser repetida para cada persona, de tal forma que una

matriz \mathbf{X} de tamaño $(P \times I) \times (K + 1)$ con entradas $X_{(p,i)k}$ en lugar de X_{ik} como en la ecuación (2.4). La matriz \mathbf{X} consiste de dos submatrices que se sobrepone una para covariables con efectos fijos y otra para las covariables con un efecto aleatorio. Es necesario que las submatrices sean de rango completo para que el modelo sea identificable.

Persona	Item	Verbal	Numérico
1	1	1	0
1	2	0	1
2	1	1	0
2	2	0	1
3	1	1	0
3	2	0	1
4	1	1	0
4	2	0	1

Tabla 2.1: Ejemplo de una matriz de covariables por Ítem

Modelo lineal logístico de prueba

Fischer (1973) introdujo un modelo, llamado modelo lineal logístico de prueba (LLTM). El LLTM ha sido usado para examinar los efectos de varias propiedades en las dificultades de los ítems. El LLTM descompone las dificultades de ítems específicos en combinaciones lineales de componentes elementales (Draney & Wilson, 2008). El LLTM es una extensión del modelo Rasch de 2.3.1 diseñado para investigar las operaciones cognitivas que nos llevan a lo que ha sido observado (de Ayala, 2013).

Las propiedades de los ítems son usadas para explicar las diferencias entre ítems en términos de η_{pi} , y por lo tanto de π_{pi} , la diferencia entre el LLTM y el modelo Rasch radica en que la contribución del ítem i se reduce a la contribución de las propiedades de los ítems y los valores que toman para el ítem i :

$$\eta_{pi} = \theta_p - \sum_{k=0}^K \beta_k \mathbf{X}_{(p,i)k} \quad (2.7)$$

donde $\mathbf{X}_{(p,i)k}$ es el valor del ítem i de la persona p para la propiedad k del ítem y β_k es el peso (efecto) en la regresión de la propiedad k . Si se compara la ecuación (2.6) con la (2.7) se puede ver que el parámetro de los ítems β_k se reemplaza con una función lineal:

$$\beta'_i = \sum_{k=0}^K \beta_k \mathbf{X}_{(p,i)k} \quad (2.8)$$

En las ecuaciones (2.7) y (2.8) no hay componente de error, este modelo implica que los efectos de los ítems pueden ser perfectamente explicados por las propiedades de los ítems, es decir que β_i de la ecuación (2.6) y β'_i de la ecuación (2.8) son iguales. Esto último hace que el modelo sea altamente restrictivo. Janssen et al. (2004) propusieron una extensión al modelo incluyendo un término de error, De Boeck (2008) explica que un término de error es necesario por dos razones, la primera es que raramente los efectos de los ítems pueden ser explicados perfectamente por las propiedades de los ítems debido a que la teoría tras el modelo no es perfecta y porque la dificultad puede ser realmente una variable aleatoria. La segunda razón es que el término del error puede ser mayor en una parte del diseño que en otra.

$$\eta_{pi} = \theta_p - \sum_{k=0}^K \beta_k \mathbf{X}_{(p,i)k} + \varepsilon_i \quad (2.9)$$

con $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, como en el modelo de regresión tradicional. En la ecuación (2.9) se supone que el error de la varianza es homocedástico, sin embargo se puede modelar de tal forma que el error de la varianza cambie de acuerdo a la propiedad del ítem esto sería un modelo con error heterocedástico. Un error de la varianza muy grande significa que las propiedades de los ítems tienen menor poder explicativo de las dificultades de los ítems.

2.3.3. Modelos de Covariables de Personas

Las covariables de persona las podemos agrupar en una matriz de covariables por persona, con dimensiones $P \times J$, con j ($j = 1, \dots, J$) como el subíndice para las covariables de personas. Debido al formato de forma larga de los datos, la fila de una persona p debe repetirse para todas las I respuestas por persona, de esta manera se forma una matriz \mathbf{F} de dimensión $(P \times I) \times J$, con entradas $F_{(p,i)j}$.

Persona	Item	Género	Tipo de Colegio
1	1	1	1
1	2	1	1
2	1	0	0
2	2	0	0
3	1	0	1
3	2	0	1
4	1	1	1
4	2	1	1

Tabla 2.2: Ejemplo de una matriz de covariables por persona

Regresión latente 1PL (R1PL)

Uno de los primeros en describir este modelo fue Zwinderman (1991) quien usó el término “modelo Rasch generalizado para predictores manifiestos” para el modelo global y “modelo estructural” para la parte de la regresión latente del modelo. Este modelo incluye las propiedades de las personas para explicar las diferencias entre las personas con respecto a la variable de respuesta. La inclusión de propiedades de las personas es posible en los GLMMs. Los predictores para las personas son representados con \mathbf{F} , y el subíndice del predictor con j mientras que el efecto fijo se denota con $\boldsymbol{\vartheta}$. La diferencia con el modelo Rasch de 2.3.1 en que ahora $\boldsymbol{\theta}_p$ se reemplaza con una ecuación de regresión lineal:

$$\theta_p = \sum_{j=1}^J \vartheta_j F_{pj} + \varepsilon_p \quad (2.10)$$

de esta forma

$$\eta_{pi} = \sum_{j=1}^J \vartheta_j F_{pj} + \varepsilon_p - \beta_i \quad (2.11)$$

donde F_{pj} es el valor de la persona p en la propiedad j , ϑ_j es el peso (fijo) en la regresión de la propiedad j , ε_p es el efecto restante de la persona luego de haber tomado en cuenta las propiedades de la persona, $\varepsilon_p \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Modelos Multinivel

En estos modelos vamos a utilizar particiones para las personas, estas particiones pueden ser los grupos a los que pertenecen las personas por ejemplo el distrito al que pertenece el colegio. La estructura de las particiones puede ser anidada o cruzada (parcial o totalmente). Frecuentemente se usa el término *multinivel* para particiones anidadas, sin embargo Raudesbaum (1993) describió grupos de personas cruzados.

Una versión sencilla multinivel del modelo Rasch es la siguiente:

$$\eta_{pi(g)} = \theta_p + \beta_i + \theta_g X_{(pi)j=0} \quad (2.12)$$

donde $\eta_{pi(g)}$ es el logit para el ítem i de la persona p que pertenece al grupo g ; θ_p y β_i están definidos como en (2.4); con θ_g como un efecto aleatorio del grupo, $\theta_g \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_g^2)$ y $X_{(pi)j=0} = 1$ para todo p e i .

2.3.4. Modelos de Covariables de persona por ítem

A diferencia de los predictores por persona o los predictores por ítem los predictores de persona por ítem varían tanto entre y dentro de las personas. La inclusión de este

tipo de predictores es importante para modelar varios fenómenos como el Funcionamiento Diferencial de Ítems (*Differential Item Functioning* DIF), este tema va a ser tratado en profundidad en 2.3.4. En este tipo de modelos se pueden distinguir dos tipos de modelos los de interacción estática y los de interacción dinámica. La interacción estática incluye predictores que no están basados directamente en la respuesta que está siendo modelada, pero que son suministradas de manera independiente, o que son obtenidas en la base de personas y predictores de ítems.

En los modelos de interacción dinámica, las respuestas de los ítems son modeladas en base a las respuestas de los otros ítems, Fahrmeir & Tutz (2001) nombró a estos modelos como modelos condicionales puesto que se construyen especificando la probabilidad de una respuesta condicionada en los predictores y en otras respuestas. En el contexto de pruebas cognitivas y educacionales, los modelos dinámicos son usados para asegurar el aprendizaje durante la aplicación de la prueba. Stevenson et al. (2013) utilizaron este tipo de modelos para analizar el razonamiento analógico en pruebas aplicadas a niños.

En los modelos de personas por ítem, vamos a colocar las covariables de personas por ítem en una matriz de forma larga de covariable de persona por ítem \mathbf{W} con dimensiones $(P \times I) \times H$, con $(h = 1, \dots, H)$ como un índice para la covariable de personas por ítem. Las covariables ahora se refieren a pares de personas e ítems (p, i) .

Modelos DIF

El Funcionamiento Diferencial de Ítems (*Differential Item Functioning* DIF), se refiere a las diferencias en el funcionamiento de ítems para grupos diferentes, por ejemplo en una prueba de razonamiento verbal es posible que una palabra tenga diferentes significados para dos personas que pertenecen a dos grupos étnicos diferentes. Los modelos DIF, también reciben el nombre de *sesgo de los ítems* (De Boeck & Wilson, 2004). Su uso comenzó en la década de los 60's, históricamente el desarrollo de este tipo de modelos está relacionado con la búsqueda de pruebas que no sean sesgadas

en contra o a favor de determinados grupos étnicos o grupos manifiestos dentro de la muestra estudiada (Holland & Wainer, 1993).

La inclusión de un predictor de persona por ítem obtenido como el producto de un indicador de ítem y un predictor de personas indicando la pertenencia a un grupo puede ser usada para investigar el DIF. Generalmente, el funcionamiento diferencial es estudiado basado en un grupo focal comparando con un grupo de referencia. El grupo focal es el grupo que está siendo investigado para ver si tiene desventajas al momento de responder el ítem. Algunos autores llaman *minoría* al grupo focal y al grupo de referencia lo llaman la *mayoría* (de Ayala, 2013).

Un ítem puede ser etiquetado con DIF si personas examinadas con igual habilidad, pero de diferentes grupos, tienen una probabilidad diferente de éxito, y un ítem se etiqueta sin DIF cuando personas examinadas tienen la misma probabilidad de responder el ítem correctamente, sin importar el grupo al que pertenecen los examinados.

El modelo DIF requiere:

- Una matriz \mathbf{F} para incluir la comparación del grupo focal $F_{(p,i)focal}$.
- La matriz \mathbf{X} del modelo de un parámetro.
- La matriz \mathbf{W} que consiste de covariables resultado del producto de otras dos covariables: la covariable del grupo focal $F_{(p,i)focal}$ y una covariable de indicador de ítem $X_{(p,i)k=i}$ (DIF para un ítem específico) o una covariable de propiedad de ítem $X_{(p,i)k}$ (DIF para un subconjunto de ítems)

En el caso del DIF para un ítem específico, un par (p, i) tiene un valor de 1 en la covariable h si la persona p pertenece al grupo focal y el ítem i es hipotéticamente un ítem DIF. El efecto fijo de esta covariable es el parámetro DIF del ítem i . Y se lo interpreta como la desviación de la facilidad o dificultad del ítem i en el grupo focal de su dificultad o facilidad en el grupo de referencia. Mientras que en el caso del DIF

para un subconjunto de ítems, un par (p, i) tiene un valor de 1 en la covariable h si la persona p pertenece al grupo focal y el ítem i pertenece al subconjunto en cuestión es decir que tiene una propiedad específica. Los dos tipos de modelos pueden ser escritos en un solo modelo, como a continuación se muestra:

$$\eta_{pi} = \theta_p + \beta_i + \zeta_{focal} F_{(p,i)focal} + \sum_{h=1}^H \omega_h W_{(p,i)h}, \quad (2.13)$$

Donde

- θ_p y β_i están definidos como en (2.4)
- ζ_{focal} es el efecto global del efecto focal en comparación con el grupo referencia
- $F_{(p,i)focal} = 1$, para el grupo focal, y 0 para el grupo de referencia.
- $W_{(p,i)h}$ como la covariable h de persona por ítem, de tal forma que $W_{(p,i)h} = 1$ si $F_{(p,i)focal} = 1$ y, $X_{(p,i)k=i} = 1$ o $X_{(p,i)k} = 1$, de otra forma $W_{(p,i)h} = 0$.
- Y ω_h como el parámetro DIF correspondiente.

La identificación de ítems que presenten DIF es muy importante. De acuerdo a Magis et al. (2011) los métodos de detección de DIF se pueden clasificar de la siguiente forma

- De acuerdo a la aproximación
 - **Métodos IRT** requieren ajustar un modelo de respuesta al ítem.
 - **Métodos sin IRT** basados en métodos estadísticos que permiten asegurar la presencia de DIF basados en los resultados de las pruebas
- De acuerdo al tipo de DIF
 - **DIF Uniforme** Este DIF existe cuando la interacción entre las respuestas de los ítems y los grupos de personas son independientes del nivel de habilidad.

- **DIF no uniforme** Se caracteriza por una interacción entre los grupos y los ítems que puede variar con la escala de la habilidad

Otros autores como Mapuranga et al. (2008) proponen otra clasificación, sin embargo la aquí expuesta es una de las más presentadas en la literatura. En el capítulo 3 se utiliza DIF para varios modelos y luego se los interpreta sin entrar a profundidad en la detección del DIF.

Capítulo 3

Implementación de los modelos

En el sistema de Educación Superior Ecuatoriano las Instituciones de Educación Superior (IES) deben seguir un procedimiento para la admisión de los estudiantes a sus cursos regulares. Las instituciones de educación superior públicas tienen regulado su ingreso a través del Sistema de Nivelación y Admisión, mientras que las instituciones de educación superior privadas deben establecer su propio sistema de admisión, siguiendo las normativas establecidas por el Consejo de Educación Superior (CES).

La implementación de los modelos vistos en las secciones 2.3.2, 2.3.3 y 2.3.4 se realizará a un conjunto de datos proveniente de los exámenes de actitud tomados a un grupo de estudiantes aspirantes a una universidad privada ubicada en la ciudad de Guayaquil. En esta universidad el examen de actitud es parecido al Examen Nacional para la Educación Superior (ENES) que es el examen que se toma a todos los estudiantes de tercero de bachillerato del país y que se lo utiliza para el ingreso a las IES públicas. La prueba fue computarizada, diseñada para tomarse en un tiempo máximo de 120 minutos y estaba dividida en tres secciones como se puede ver en la tabla 3.1.

La prueba fue aplicada a cada uno de los 355 aspirantes a las carreras de pregrado ofrecidas por la IES, que ofrece en la actualidad 7 carreras de pregrado. En la tabla 3.2 se aprecia las carreras que ofrece la universidad con las abreviaturas usadas en

el análisis. Las carreras de Administración de Empresas y Contabilidad y Auditoría pertenecen al área administrativa, la carrera de Comunicación Social pertenece al área social, mientras que las otras carreras pertenecen al área técnica.

Sección	Número de Temas
Razonamiento Verbal	40
Razonamiento Numérico	40
Razonamiento Lógico y Abstracto	20

Tabla 3.1: Estructura de la prueba

Fuente: Datos proporcionados por la IES.

Carrera	Abreviatura
Administración de Empresas	ADM
Comunicación Social	COM
Contabilidad y Auditoría	CON
Ingeniería Eléctrica	IEC
Ingeniería Electrónica	IEL
Ingeniería Industrial	IID
Ingeniería de Sistemas	SIS

Tabla 3.2: Carreras de la IES

Fuente: Datos proporcionados por la IES

3.1. Análisis de los aspirantes por carrera y tipo de colegio

La carrera que tiene mayor número de aspirantes es la carrera de Administración de Empresas mientras que la carrera con menor número de aspirantes es Ingeniería Eléctrica, como se puede apreciar en la tabla 3.3 y en la figura 3.1. Tradicionalmente en esta universidad el mayor porcentaje de estudiantes son de las carreras del área administrativa, en este caso el 47,89% de los aspirantes pertenecen a este tipo de carreras. Un 41,97% pertenece al área técnica y el resto al área social.

Carrera	Número de Aspirantes
Administración de Empresas	121
Comunicación Social	36
Contabilidad y Auditoría	49
Ingeniería Eléctrica	20
Ingeniería Electrónica	31
Ingeniería Industrial	44
Ingeniería de Sistemas	54

Tabla 3.3: Aspirantes por carrera

Fuente: Datos proporcionados por la IES

En la tabla 3.4 se puede ver la distribución de los estudiantes de cada carrera por género y por tipo de colegio. Esta información se aprecia en las figuras 3.2 y 3.3. Se desprende que el 60,85% de los aspirantes es de género masculino, siendo este género el de mayor presencia en las carreras del área técnica.

Según la Constitución de la República del Ecuador y la Ley Orgánica de Educación Intercultural las instituciones educativas de educación media se clasifican según la fuente principal de financiamiento que permite su sostenimiento, estas pueden ser:

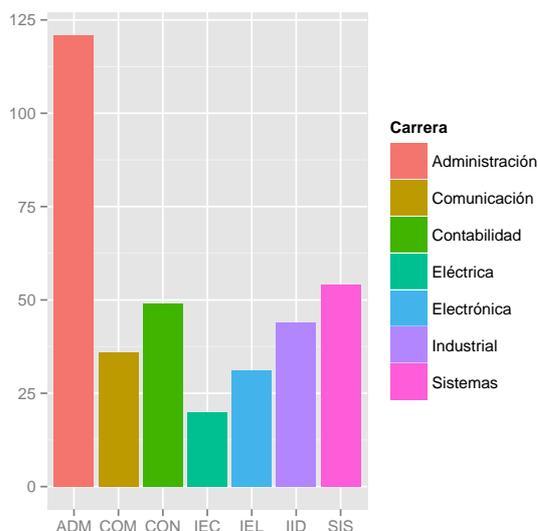


Figura 3.1: Aspirantes por Carrera

Fuente: Datos proporcionados por la IES.

- **Públicas:** Financiadas por el Estado o los Municipios, y de acuerdo a esto pueden ser consideradas Fiscales o Municipales respectivamente. No realizan cobros a los padres de los estudiantes.
- **Fiscomisionales:** Son aquellas cuyos promotores son congregaciones, órdenes o cualquiera otra denominación confesional o laica. Estas son de carácter religioso o laico, de derecho privado y sin fines de lucro. Reciben un financiamiento total o parcial del Estado y realizan cobros siempre que el financiamiento del Estado sea insuficiente para el correcto funcionamiento del Centro Educativo.
- **Particular:** Constituidas y administradas por personas naturales o jurídicas de derecho privado. Estas instituciones realizan cobros a los padres de los estudiantes.

En el conjunto de datos analizado los estudiantes solo provenían de dos tipos de colegio: Fiscales y Particulares. En cuanto al tipo de colegio de donde provienen los aspirantes el 60 % de los aspirantes pertenece a instituciones de tipo particular.

En años anteriores la presencia de estudiantes provenientes de instituciones de tipo particular era mayor, sin embargo debido a los nuevos requisitos para ingresar a las instituciones de educación superior públicas, muchos estudiantes provenientes de instituciones de tipo fiscal optan por ingresar a universidades privadas.

Carrera	Género		Tipo	
	Femenino	Masculino	Fiscal	Particular
ADM	66	55	45	76
COM	20	16	8	28
CON	25	24	21	28
SIS	13	41	24	30
IEC	4	27	13	7
IEL	5	15	11	20
IID	6	38	20	24
TOTAL:	139	216	142	213

Tabla 3.4: Alumnos por Carrera: Tipo y Género

Fuente: Datos proporcionados por la IES

3.2. Implementación

La implementación de todos los modelos fue realizada en R. Los datos originalmente estaban en “forma ancha”, sin embargo como se indicó en la sección 2.3.1, para utilizar el paquete **lme4** es necesario que los datos estén en “forma larga”. Esto fue realizado con la función `melt` del paquete **reshape2**. El conjunto de datos final fue llamado `datos2LONG` y tiene siete variables:

- `id`: Es el número del aspirante.
- `TIPO`: Es el tipo de colegio al que pertenece al aspirante.
- `CARRERA`: Es la carrera en la que se inscribió el aspirante.

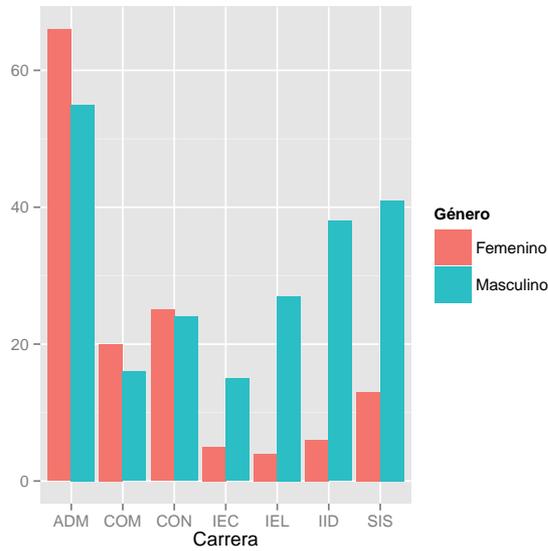


Figura 3.2: Aspirantes por Carrera y Género

Fuente: IES

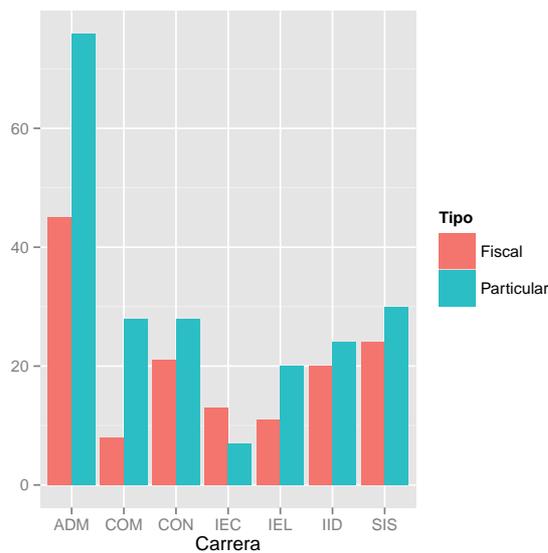


Figura 3.3: Aspirantes por Carrera y Tipo de Colegio

Fuente: IES

- GENERO: Es el género del aspirante.
- item: Es el número del ítem resuelto por el aspirante.
- value: Es la respuesta dada por el aspirante a la pregunta, toma el valor de 1 si el ítem fue respondido correctamente y 0 si no.
- SECC: Es la sección a la que pertenece el ítem.

3.2.1. Modelo lineal logístico de prueba

Parámetro	Notación	Ecuación (2.7)		Ecuación (2.9)	
		Modelo 1(a)	Valor p	Modelo 1(b)	Valor p
Coefficientes fijos ^a					
Intercepto	β_0	-0,4921 (0,0323)	2×10^{-16}	-0,5086 (0,0773)	$4,68 \times 10^{-11}$
Abstracto		Constante		Constante	
Númérico	β_1	0,1414 (0,0303)	$2,99 \times 10^{-6}$	0,1541 (0,0909)	0,0902
Verbal	β_2	0,0482 (0,0303)	0,11	0,0518 (0,0910)	0,5691
Varianzas ^b					
Efecto aleatorio del estudiante	σ_p^2	0,1518 (1,4764)		0,1599 (1,4917)	
Efecto aleatorio del ítem	σ_i^2			0,0976 (1,3667)	

Tabla 3.5: **Modelo 1:** Estimadores de los parámetros del LLTM

^aEn paréntesis el error del estimador

^bEn paréntesis la variación del *odds ratio*

Este modelo fue presentado en la sección 2.3.2, en la tabla 3.5 se muestra el modelo con dos variantes:

- El modelo 1(a): Un modelo lineal logístico de prueba en el que solo se usa a los estudiantes como efectos aleatorios.
- El modelo 1(b): Un modelo parecido al anterior con la diferencia de que en este caso se añaden los ítems como efectos aleatorios.

Para los coeficientes fijos se muestran los estimadores de los parámetros y entre paréntesis el error del estimador, en el caso de las varianzas de los efectos aleatorios entre paréntesis se muestra la variación del *odds ratio* que se calcula como e^σ . En ambos modelos se obtiene que la sección de razonamiento abstracto presenta una menor probabilidad de ser contestado de forma correcta, en el caso del modelo

1(a) la probabilidad de que un ítem de la sección de razonamiento abstracto sea correctamente contestado es de

$$\frac{e^{-0,4921}}{1 + e^{-0,4921}} = 0,3794$$

y en el caso del modelo 1(b) esta probabilidad es de 0,3755. Mientras que la sección de razonamiento numérico tiene una mayor probabilidad de ser contestada correctamente con un logaritmo del odds ratio de 0,1414 más para el modelo 1(a) lo que implica que la probabilidad de que un ítem de la sección de razonamiento numérico sea correctamente contestado es de $\frac{e^{-0,4921+0,1414}}{1+e^{-0,4921+0,1414}} = 0,4132$ y un logaritmo del odds ratio de 0,1541 más en el modelo 1(b), es decir que la probabilidad es de 0,4123. Por otro lado, la probabilidad de que un ítem de la sección verbal sea contestado correctamente es 0,3908 para el modelo 1(a) y de 0,3877 en el caso del modelo 1(b).

Además, en el modelo 1(a) el intercepto y el parámetro de la sección de razonamiento numérico son significativos, no así el parámetro de la sección de razonamiento verbal; en el modelo 1(b) el parámetro de la sección de razonamiento numérico no es tan significativo como en el primero.

En la tabla 3.8 se muestran los estimadores de los efectos aleatorios del modelo 1(b). Estos valores corresponden a la dificultad de los ítems. Se puede apreciar que los 10 ítems que presentaron menor dificultad para los aspirantes son los ítems 15, 16, 18, 12, 14, 11, 13, 44, 17 y 95 estos ítems también corresponden a los que tuvieron un mayor porcentaje de aciertos, como se puede apreciar en la tabla 3.6. Estos valores se muestran con color azul en la tabla 3.8.

De la misma forma se puede observar en la tabla 3.8 que los 10 ítems que presentaron una mayor dificultad para los aspirantes fueron los ítems 81, 84, 82, 6, 83, 34, 33, 8, 9 y 27 estos ítems también corresponden a los que tuvieron un menor porcentaje de aciertos como se puede apreciar en la tabla 3.7. Estos valores se muestran con color rojo en la tabla 3.8.

Ítem	Porcentaje de Aciertos
15	57,87
16	57,84
18	57,02
12	55,90
14	52,53
11	52,53
13	52,25
44	51,69
17	51,40
95	50

Tabla 3.6: Ítems con mayor porcentaje de aciertos

Ítem	Porcentaje de Aciertos
81	21,35
84	22,47
82	24,16
6	26,12
83	26,12
34	26,69
33	27,53
8	27,81
9	28,65
27	29,21

Tabla 3.7: Ítems con menor porcentaje de aciertos

	Intercepto		Intercepto		Intercepto		Intercepto	
VERBAL	item_1	0, 2146	item_2	0, 1725	item_3	0, 2983	item_4	0, 1197
	item_5	0, 1303	item_6	-0, 5292	item_7	-0, 2769	item_8	-0, 4549
	item_9	-0, 4185	item_10	-0, 2424	item_11	0, 5059	item_12	0, 6307
	item_13	0, 4956	item_14	0, 5059	item_15	0, 704	item_16	0, 6935
	item_17	0, 4644	item_18	0, 6725	item_19	0, 0557	item_20	0, 1514
	item_21	-0, 0525	item_22	0, 0127	item_23	0, 0127	item_24	0, 1197
	item_25	-0, 1631	item_26	-0, 0854	item_27	-0, 3944	item_28	-0, 2309
	item_29	-0, 2309	item_30	-0, 2309	item_31	-0, 3234	item_32	-0, 3825
	item_33	-0, 4671	item_34	-0, 5042	item_35	-0, 1519	item_36	-0, 0744
	item_37	-0, 0744	item_38	-0, 1744	item_39	-0, 2082	item_40	-0, 1631
NUMÉRICO	item_41	-0, 2537	item_42	-0, 1324	item_43	0, 2797	item_44	0, 3834
	item_45	0, 1861	item_46	0, 3212	item_47	0, 2277	item_48	0, 1129
	item_49	0, 2381	item_50	0, 1338	item_51	0, 0708	item_52	0, 0391
	item_53	0, 0602	item_54	0, 1443	item_55	-0, 014	item_56	0, 1338
	item_57	0, 0179	item_58	0, 1443	item_59	0, 0285	item_60	0, 0918
	item_61	0, 0813	item_62	0, 0391	item_63	0, 0285	item_64	-0, 1107
	item_65	0, 0179	item_66	0, 0391	item_67	0, 0285	item_68	-0, 1324
	item_69	-0, 0999	item_70	-0, 2425	item_71	-0, 0247	item_72	-0, 0999
	item_73	-0, 1542	item_74	-0, 4134	item_75	-0, 2537	item_76	-0, 1871
	item_77	-0, 1871	item_78	-0, 0999	item_79	-0, 1871	item_80	-0, 1652
ABSTRACTO	item_81	-0, 7076	item_82	-0, 5737	item_83	-0, 4841	item_84	-0, 6531
	item_85	-0, 0065	item_86	-0, 0395	item_87	-0, 0175	item_88	0, 0695
	item_89	0, 187	item_90	0, 1658	item_91	0, 0803	item_92	0, 187
	item_93	0, 4278	item_94	0, 3237	item_95	0, 4589	item_96	0, 3654
	item_97	0, 0479	item_98	0, 0587	item_99	0, 1018	item_100	0, 0803

Tabla 3.8: Estimadores de los efectos aleatorios del modelo 1(b)

3.2.2. Regresión latente 1PL (R1PL)

Como ya se mencionó en la sección 2.3.3, la regresión latente 1PL incluye las propiedades de las personas para explicar las diferencias entre las personas con respecto a la variable de respuesta; las propiedades de las personas analizadas fueron el género, el tipo de colegio del que provenía el aspirante y una posible interacción entre estas dos propiedades. Se realizaron 6 modelos:

1. En la tabla 3.9 se presenta el modelo 2 en el que el género del aspirante y los ítems son considerados efectos fijos.
2. En la tabla 3.10 se muestran los resultados del modelo 3 en el que el género se considera efecto fijo, los ítems efecto aleatorio e incluye intercepto.
3. En la tabla 3.12 se presentan los resultados del modelo 4 en el que el tipo de colegio es un efecto fijo, los ítems son efecto aleatorio e incluye intercepto.
4. En la tabla 3.14 se muestran los resultados del modelo 5. En este modelo el tipo de colegio y el género son considerados efectos fijos además se incluye en

los efectos fijos una interacción entre el tipo de colegio y el género. Los ítems son considerados efecto aleatorio.

5. En la tabla 3.16 se muestran los resultados del modelo 6 en el que se incluyó intercepto, y los ítems, el tipo de colegio y el género se consideraron efectos fijos.
6. Finalmente en la tabla 3.17 se pueden apreciar los resultados del modelo 7 en el que el género se considera un efecto aleatorio, adicionalmente en la tabla 3.18 se dan a conocer los efectos aleatorios del género en cada uno de los ítems.

Los resultados obtenidos en el modelo 2 de la tabla 3.9 nos muestran que las personas pertenecientes al género masculino tienen una probabilidad elevada de contestar correctamente cada uno de los ítems.

	Parámetro	Notación	Ecuación (2.11)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.11)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.11)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.11)
	Coefficientes fijos ^a											
VERBAL	item_1	β_1	-0, 3305 (0, 1145)	item_2	β_2	-0, 3780 (0, 1147)	item_3	β_3	-0, 2372 (0, 1141)	item_4	β_4	-0, 4390 (0, 1151)
	item_5	β_5	-0, 4264 (0, 1151)	item_6	β_6	-1, 1864 (0, 1276)	item_7	β_7	-0, 8909 (0, 1210)	item_8	β_8	-1, 0966 (0, 1254)
	item_9	β_9	-1, 0544 (0, 1243)	item_10	β_{10}	-0, 8505 (0, 1203)	item_11	β_{11}	-0, 0010 (0, 1140)	item_12	β_{12}	0, 1385 (0, 1146)
	item_13	β_{13}	-0, 0136 (0, 1140)	item_14	β_{14}	-0, 0025 (0, 1141)	item_15	β_{15}	0, 2226 (0, 1152)	item_16	β_{16}	0, 2107 (0, 1151)
	item_17	β_{17}	-0, 0486 (0, 1140)	item_18	β_{18}	0, 1865 (0, 1150)	item_19	β_{19}	-0, 5102 (0, 1158)	item_20	β_{20}	-0, 4009 (0, 1149)
	item_21	β_{21}	-0, 6330 (0, 1171)	item_22	β_{22}	-0, 5580 (0, 1162)	item_23	β_{23}	-0, 5591 (0, 1162)	item_24	β_{24}	-0, 4377 (0, 1152)
	item_25	β_{25}	-0, 7601 (0, 1188)	item_26	β_{26}	-0, 6700 (0, 1175)	item_27	β_{27}	-1, 0266 (0, 1238)	item_28	β_{28}	-0, 8366 (0, 1200)
	item_29	β_{29}	-0, 8368 (0, 1201)	item_30	β_{30}	-0, 8363 (0, 1200)	item_31	β_{31}	-0, 9445 (0, 1221)	item_32	β_{32}	-1, 0123 (0, 1235)
	item_33	β_{33}	-1, 1124 (0, 1258)	item_34	β_{34}	-1, 1562 (0, 1269)	item_35	β_{35}	-0, 7459 (0, 1186)	item_36	β_{36}	-0, 6573 (0, 1174)
	item_37	β_{37}	-0, 6579 (0, 1173)	item_38	β_{38}	-0, 7713 (0, 1190)	item_39	β_{39}	-0, 8113 (0, 1197)	item_40	β_{40}	-0, 7592 (0, 1188)
NUMÉRICO	item_41	β_{41}	-0, 7589 (0, 1188)	item_42	β_{42}	-0, 6205 (0, 1170)	item_43	β_{43}	-0, 1552 (0, 1139)	item_44	β_{44}	-0, 0382 (0, 1140)
	item_45	β_{45}	-0, 2605 (0, 1142)	item_46	β_{46}	-0, 1079 (0, 1140)	item_47	β_{47}	-0, 2132 (0, 1140)	item_48	β_{48}	-0, 3425 (0, 1145)
	item_49	β_{49}	-0, 2017 (0, 1140)	item_50	β_{50}	-0, 3186 (0, 1144)	item_51	β_{51}	-0, 3948 (0, 1148)	item_52	β_{52}	-0, 4266 (0, 1151)
	item_53	β_{53}	-0, 4011 (0, 1148)	item_54	β_{54}	-0, 3076 (0, 1143)	item_55	β_{55}	-0, 4856 (0, 1156)	item_56	β_{56}	-0, 3189 (0, 1144)
	item_57	β_{57}	-0, 4493 (0, 1152)	item_58	β_{58}	-0, 3072 (0, 1144)	item_59	β_{59}	-0, 4379 (0, 1151)	item_60	β_{60}	-0, 3664 (0, 1146)
	item_61	β_{61}	-0, 3788 (0, 1148)	item_62	β_{62}	-0, 4260 (0, 1151)	item_63	β_{63}	-0, 4375 (0, 1151)	item_64	β_{64}	-0, 5956 (0, 1166)
	item_65	β_{65}	-0, 4503 (0, 1152)	item_66	β_{66}	-0, 4261 (0, 1151)	item_67	β_{67}	-0, 4370 (0, 1151)	item_68	β_{68}	-0, 6206 (0, 1170)
	item_69	β_{69}	-0, 5840 (0, 1165)	item_70	β_{70}	-0, 7461 (0, 1186)	item_71	β_{71}	-0, 4978 (0, 1157)	item_72	β_{72}	-0, 5834 (0, 1166)
	item_73	β_{73}	-0, 6448 (0, 1172)	item_74	β_{74}	-0, 9436 (0, 1221)	item_75	β_{75}	-0, 7594 (0, 1188)	item_76	β_{76}	-0, 6827 (0, 1177)
	item_77	β_{77}	-0, 6825 (0, 1176)	item_78	β_{78}	-0, 5836 (0, 1164)	item_79	β_{79}	-0, 6829 (0, 1177)	item_80	β_{80}	-0, 6574 (0, 1173)
ABSTRACTO	item_81	β_{81}	-1, 4583 (0, 1359)	item_82	β_{82}	-1, 2940 (0, 1307)	item_83	β_{83}	-1, 1873 (0, 1277)	item_84	β_{84}	-1, 3912 (0, 1337)
	item_85	β_{85}	-0, 6331 (0, 1171)	item_86	β_{86}	-0, 6698 (0, 1175)	item_87	β_{87}	-0, 6456 (0, 1172)	item_88	β_{88}	-0, 5472 (0, 1161)
	item_89	β_{89}	-0, 4147 (0, 1150)	item_90	β_{90}	-0, 4382 (0, 1151)	item_91	β_{91}	-0, 5341 (0, 1160)	item_92	β_{92}	-0, 4140 (0, 1149)
	item_93	β_{93}	-0, 1434 (0, 1139)	item_94	β_{94}	-0, 2604 (0, 1141)	item_95	β_{95}	-0, 1076 (0, 1139)	item_96	β_{96}	-0, 2130 (0, 1140)
	item_97	β_{97}	-0, 5710 (0, 1164)	item_98	β_{98}	-0, 5593 (0, 1162)	item_99	β_{99}	-0, 5101 (0, 1158)	item_100	β_{100}	-0, 5346 (0, 1160)
	Masculino	ϑ_1	0, 1890 (0, 0482)									
	Varianzas ^b											
	Efecto aleatorio	σ_p^2	0,152 (1, 4768)									

Tabla 3.9: **Modelo 2:** Estimadores de los parámetros de la (R11PL) - Ítems fijos^aEn paréntesis el error del estimador^bEn paréntesis la variación del *odds ratio*

De acuerdo a lo que se observa en la tabla 3.10 el logaritmo natural del odds de que una mujer promedio conteste bien un ítem promedio es $-0,5426$ es decir la probabilidad es

$$\frac{e^{-0,5426}}{1 + e^{-0,5426}} = 0,3676$$

mientras que el logaritmo del odds de los hombres es $0,1913$ más que el de las mujeres, es decir que es $-0,5426 + 0,1913 = -0,3513$, resultando en una probabilidad de $0,4131$.

Parámetro	Notación	Ecuación (2.11)	
		Estimador	Valor p
Coefficientes fijos ^a			
Intercepto	ϑ_0	$-0,5426 (0,0493)$	2×10^{-16}
Femenino		Constante	
Masculino	ϑ_1	$0,1913 (0,0481)$	$7,02 \times 10^{-5}$
Varianzas ^b			
Efecto aleatorio del estudiante	σ_p^2	$0,1512 (1,4753)$	
Efecto aleatorio del ítem	σ_i^2	$0,1013 (1,3748)$	

Tabla 3.10: **Modelo 3**: Estimadores de los parámetros de la (R11PL) - Género fijo

^aEn paréntesis el error del estimador

^bEn paréntesis el error del estimador

Para probar si la diferencia entre el estimador del parámetro para el género masculino y el estimador del parámetro para el género femenino (intercepto) es significativa, se va a hacer uso del estadístico propuesto por Paternoster et al. (1998) basado en el trabajo de Clogg et al. (1995), de acuerdo a ellos el estadístico para la diferencia de dos estimadores β_1 y β_2 de un modelo de regresión es:

$$Z = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\sqrt{se_{\beta_1}^2 + se_{\beta_2}^2}}$$

donde se es el error estándar del estimador. En este caso se obtiene un Z de $10,6552$ con un valor p de $8,86 \times 10^{-26}$, lo que implica que la diferencia entre los estimadores de los dos géneros es significativa.

En la tabla 3.11 se muestran las dificultades para los ítems, los resultados difieren ligeramente de los obtenidos en la tabla 3.8 sin embargo los hallazgos son los mismos, puesto que tanto los 10 ítems con menor dificultad como los 10 ítems con mayor dificultad coinciden.

	Intercepto		Intercepto		Intercepto		Intercepto	
VERBAL	item_1	0,1881	item_2	0,1459	item_3	0,272	item_4	0,0928
	item_5	0,1034	item_6	-0,5585	item_7	-0,3051	item_8	-0,4838
	item_9	-0,4473	item_10	-0,2705	item_11	0,4805	item_12	0,6058
	item_13	0,4701	item_14	0,4805	item_15	0,6794	item_16	0,6689
	item_17	0,4389	item_18	0,6478	item_19	0,0286	item_20	0,1247
	item_21	-0,08	item_22	-0,0146	item_23	-0,0146	item_24	0,0928
	item_25	-0,191	item_26	-0,113	item_27	-0,4231	item_28	-0,2591
	item_29	-0,2591	item_30	-0,2591	item_31	-0,3518	item_32	-0,4111
	item_33	-0,4961	item_34	-0,5334	item_35	-0,1798	item_36	-0,102
	item_37	-0,102	item_38	-0,2023	item_39	-0,2362	item_40	-0,191
NUMÉRICO	item_41	-0,191	item_42	-0,069	item_43	0,3451	item_44	0,4493
	item_45	0,2511	item_46	0,3868	item_47	0,2929	item_48	0,1775
	item_49	0,3034	item_50	0,1986	item_51	0,1353	item_52	0,1034
	item_53	0,1247	item_54	0,2091	item_55	0,0501	item_56	0,1986
	item_57	0,0821	item_58	0,2091	item_59	0,0928	item_60	0,1564
	item_61	0,1459	item_62	0,1034	item_63	0,0928	item_64	-0,0472
	item_65	0,0821	item_66	0,1034	item_67	0,0928	item_68	-0,069
	item_69	-0,0363	item_70	-0,1798	item_71	0,0393	item_72	-0,0363
	item_73	-0,091	item_74	-0,3518	item_75	-0,191	item_76	-0,1241
	item_77	-0,1241	item_78	-0,0363	item_79	-0,1241	item_80	-0,102
ABSTRACTO	item_81	-0,7824	item_82	-0,6482	item_83	-0,5585	item_84	-0,7278
	item_85	-0,08	item_86	-0,113	item_87	-0,091	item_88	-0,0038
	item_89	0,1141	item_90	0,0928	item_91	0,007	item_92	0,1141
	item_93	0,3555	item_94	0,2511	item_95	0,3868	item_96	0,2929
	item_97	-0,0254	item_98	-0,0146	item_99	0,0286	item_100	0,007

Tabla 3.11: Estimadores de los efectos aleatorios del modelo 3

En la tabla 3.12 se muestran los parámetros del modelo 4, de acuerdo a los resultados el logaritmo del odds de que un aspirante proveniente de un colegio fiscal promedio conteste bien un ítem promedio es $-0,4649$ es decir que tiene una probabilidad de $0,3858$, mientras que el logaritmo del odds de los aspirantes que vienen de colegios particulares es mayor en $0,0645$ al de los provenientes de colegios fiscales, es decir que tienen un logaritmo del odds de $-0,4004$ y una probabilidad de $0,4012$.

Usando el estadístico ya mencionado en el modelo 3 para la diferencia de los estimadores se obtiene un $Z = 7,6161$ y un valor $p = 1,01 \times 10^{-13}$, es decir que la diferencia entre los colegios particulares y fiscales sí es significativa.

En la tabla 3.13 se muestran las dificultades para los ítems, los valores difieren de los obtenidos anteriormente, sin embargo los resultados siguen siendo los mismos en cuanto a los ítems con mayor y menor dificultad.

Parámetro	Notación	Ecuación (2.11)	
		Estimador	Valor p
Coefficientes fijos ^a			
Intercepto	ϑ_0	-0,4649 (0,0495)	2×10^{-16}
Fiscal		Constante	
Particular	ϑ_1	0,0645 (0,0488)	0,187
Varianzas ^b			
Efecto aleatorio del estudiante	σ_p^2	0,1589 (1, 4898)	
Efecto aleatorio del ítem	σ_i^2	0,1013 (1, 3748)	

Tabla 3.12: **Modelo 4:** Estimadores de los parámetros de la (R11PL) - Tipo Fijo

^aEn paréntesis el error del estimador

^bEn paréntesis la variación del *odds ratio*

	Intercepto		Intercepto		Intercepto		Intercepto	
VERBAL	item_1	0, 1881	item_2	0, 1458	item_3	0, 272	item_4	0, 0928
	item_5	0, 1034	item_6	-0, 5584	item_7	-0, 3051	item_8	-0, 4838
	item_9	-0, 4473	item_10	-0, 2705	item_11	0, 4805	item_12	0, 6058
	item_13	0, 47	item_14	0, 4805	item_15	0, 6793	item_16	0, 6688
	item_17	0, 4388	item_18	0, 6477	item_19	0, 0286	item_20	0, 1247
	item_21	-0, 08	item_22	-0, 0146	item_23	-0, 0146	item_24	0, 0928
	item_25	-0, 191	item_26	-0, 113	item_27	-0, 4231	item_28	-0, 259
	item_29	-0, 259	item_30	-0, 259	item_31	-0, 3518	item_32	-0, 4111
	item_33	-0, 4961	item_34	-0, 5334	item_35	-0, 1798	item_36	-0, 102
	item_37	-0, 102	item_38	-0, 2023	item_39	-0, 2362	item_40	-0, 191
NUMÉRICO	item_41	-0, 191	item_42	-0, 069	item_43	0, 3451	item_44	0, 4492
	item_45	0, 2511	item_46	0, 3868	item_47	0, 2929	item_48	0, 1775
	item_49	0, 3034	item_50	0, 1986	item_51	0, 1352	item_52	0, 1034
	item_53	0, 1247	item_54	0, 2091	item_55	0, 05	item_56	0, 1986
	item_57	0, 0821	item_58	0, 2091	item_59	0, 0928	item_60	0, 1564
	item_61	0, 1458	item_62	0, 1034	item_63	0, 0928	item_64	-0, 0472
	item_65	0, 0821	item_66	0, 1034	item_67	0, 0928	item_68	-0, 069
	item_69	-0, 0363	item_70	-0, 1798	item_71	0, 0393	item_72	-0, 0363
	item_73	-0, 091	item_74	-0, 3518	item_75	-0, 191	item_76	-0, 1241
	item_77	-0, 1241	item_78	-0, 0363	item_79	-0, 1241	item_80	-0, 102
ABSTRACTO	item_81	-0, 7823	item_82	-0, 6482	item_83	-0, 5584	item_84	-0, 7278
	item_85	-0, 08	item_86	-0, 113	item_87	-0, 091	item_88	-0, 0038
	item_89	0, 114	item_90	0, 0928	item_91	0, 007	item_92	0, 114
	item_93	0, 3555	item_94	0, 2511	item_95	0, 3868	item_96	0, 2929
	item_97	-0, 0254	item_98	-0, 0146	item_99	0, 0286	item_100	0, 007

Tabla 3.13: Estimadores de los efectos aleatorios del modelo 4

En la tabla 3.14 se muestran los resultados del modelo 5, en este modelo se incluyó al tipo de colegio y al género como efectos fijos además un coeficiente de interacción entre el tipo de colegio y el género. De acuerdo a los resultados el logaritmo del odds de que una aspirante de un colegio fiscal promedio conteste correctamente un ítem promedio es $-0,5580$ lo que implica que la probabilidad es $0,3640$, si la persona analizada es del género femenino de un colegio particular promedio el logaritmo del odds es $-0,5329$ con una probabilidad de $0,3698$, si el aspirante es del género masculino de un colegio fiscal promedio el logaritmo del odds sería $-0,4089$ con una probabilidad de $0,3992$, finalmente el logaritmo del odds de que un aspirante masculino de un colegio particular promedio conteste correctamente un ítem promedio es $-0,3104$ con una probabilidad de $0,4230$.

En la tabla 3.15 se muestran las dificultades para los ítems, los valores difieren de los ya obtenidos en los modelos anteriores, sin embargo las conclusiones siguen siendo las mismas en cuanto a los ítems con mayor y menor dificultad.

En la tabla 3.16 se muestran los resultados del modelo 6 en el que el tipo de colegio el género y los ítems se incluyeron como efectos fijos. En este modelo se incluye intercepto y las conclusiones son parecidas a los casos anteriores el género del aspirante influye en la probabilidad de responder correctamente de manera significativa no así el tipo de colegio.

Parámetro	Notación	Ecuación (2.11)	
		Estimador	Valor p
Coefficientes fijos ^a			
Intercepto	ϑ_0	-0,5580 (0,0686)	$3,93 \times 10^{-16}$
Fiscal		Constante	
Femenino		Constante	
Particular	ϑ_1	0,0251 (0,0771)	0,7453
Masculino	ϑ_2	0,1489 (0,0766)	0,0518
Particular:Masculino	ϑ_3	0,0734 (0,0982)	0,4550
Varianzas ^b			
Efecto aleatorio del estudiante	σ_p^2	0,1496 (1,4722)	
Efecto aleatorio del ítem	σ_i^2	0,1013 (1,3748)	

Tabla 3.14: **Modelo 5**: Estimadores de los parámetros de la (R1PL) - Interacción entre Género y Tipo

^aEn paréntesis el error del estimador

^bEn paréntesis la variación del *odds ratio*

	Intercepto		Intercepto		Intercepto		Intercepto	
VERBAL	item_1	0,1881	item_2	0,1459	item_3	0,272	item_4	0,0928
	item_5	0,1034	item_6	-0,5585	item_7	-0,3051	item_8	-0,4839
	item_9	-0,4473	item_10	-0,2705	item_11	0,4805	item_12	0,6058
	item_13	0,4701	item_14	0,4805	item_15	0,6794	item_16	0,6689
	item_17	0,4389	item_18	0,6478	item_19	0,0286	item_20	0,1247
	item_21	-0,08	item_22	-0,0146	item_23	-0,0146	item_24	0,0928
	item_25	-0,191	item_26	-0,113	item_27	-0,4231	item_28	-0,2591
	item_29	-0,2591	item_30	-0,2591	item_31	-0,3518	item_32	-0,4111
	item_33	-0,4962	item_34	-0,5334	item_35	-0,1798	item_36	-0,102
	item_37	-0,102	item_38	-0,2023	item_39	-0,2362	item_40	-0,191
NUMÉRICO	item_41	-0,191	item_42	-0,069	item_43	0,3451	item_44	0,4493
	item_45	0,2511	item_46	0,3868	item_47	0,293	item_48	0,1775
	item_49	0,3034	item_50	0,1986	item_51	0,1353	item_52	0,1034
	item_53	0,1247	item_54	0,2091	item_55	0,0501	item_56	0,1986
	item_57	0,0821	item_58	0,2091	item_59	0,0928	item_60	0,1564
	item_61	0,1459	item_62	0,1034	item_63	0,0928	item_64	-0,0472
	item_65	0,0821	item_66	0,1034	item_67	0,0928	item_68	-0,069
	item_69	-0,0363	item_70	-0,1798	item_71	0,0393	item_72	-0,0363
	item_73	-0,091	item_74	-0,3518	item_75	-0,191	item_76	-0,1241
	item_77	-0,1241	item_78	-0,0363	item_79	-0,1241	item_80	-0,102
ABSTRACTO	item_81	-0,7824	item_82	-0,6482	item_83	-0,5585	item_84	-0,7278
	item_85	-0,08	item_86	-0,113	item_87	-0,091	item_88	-0,0038
	item_89	0,1141	item_90	0,0928	item_91	0,007	item_92	0,1141
	item_93	0,3556	item_94	0,2511	item_95	0,3868	item_96	0,293
	item_97	-0,0254	item_98	-0,0146	item_99	0,0286	item_100	0,007

Tabla 3.15: Estimadores de los efectos aleatorios del modelo 5

	Parámetro	Notación	Ecuación (2.11)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.11)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.11)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.11)
Coefficientes fijos ^a												
	Intercepto	ϑ_0	-0, 3791 (0, 1189)									
	Fiscal		Constante									
	Femenino		Constante									
	Particular	ϑ_1	0, 0705 (0, 0479)									
	Masculino	ϑ_2	0, 194 (0, 0481)									
VERBAL	item_2	β_2	-0, 0457 (0, 1544)	item_3	β_3	0, 096 (0, 1541)	item_4	β_4	-0, 1054 (0, 1548)	item_5	β_5	-0, 0934 (0, 1546)
	item_6	β_6	-0, 854 (0, 1644)	item_7	β_7	-0, 5574 (0, 1593)	item_8	β_8	-0, 7656 (0, 1627)	item_9	β_9	-0, 7226 (0, 162)
	item_10	β_{10}	-0, 5176 (0, 1587)	item_11	β_{11}	0, 3303 (0, 154)	item_12	β_{12}	0, 4718 (0, 1544)	item_13	β_{13}	0, 3185 (0, 1539)
	item_14	β_{14}	0, 3303 (0, 1541)	item_15	β_{15}	0, 5553 (0, 1551)	item_16	β_{16}	0, 5433 (0, 1548)	item_17	β_{17}	0, 2834 (0, 1539)
	item_18	β_{18}	0, 5194 (0, 1546)	item_19	β_{19}	-0, 1777 (0, 1551)	item_20	β_{20}	-0, 0695 (0, 1545)	item_21	β_{21}	-0, 3003 (0, 1563)
	item_22	β_{22}	-0, 2264 (0, 1556)	item_23	β_{23}	-0, 2264 (0, 1555)	item_24	β_{24}	-0, 1054 (0, 1549)	item_25	β_{25}	-0, 4266 (0, 1575)
	item_26	β_{26}	-0, 3378 (0, 1564)	item_27	β_{27}	-0, 6944 (0, 1613)	item_28	β_{28}	-0, 5045 (0, 1587)	item_29	β_{29}	-0, 5044 (0, 1585)
	item_30	β_{30}	-0, 5045 (0, 1586)	item_31	β_{31}	-0, 6114 (0, 16)	item_32	β_{32}	-0, 6804 (0, 1608)	item_33	β_{33}	-0, 7801 (0, 1628)
	item_34	β_{34}	-0, 8241 (0, 1635)	item_35	β_{35}	-0, 4137 (0, 1574)	item_36	β_{36}	-0, 3253 (0, 1566)	item_37	β_{37}	-0, 3253 (0, 1565)
	item_38	β_{38}	-0, 4394 (0, 1575)	item_39	β_{39}	-0, 4783 (0, 158)	item_40	β_{40}	-0, 4266 (0, 1576)			
NUMÉRICO	item_41	β_{41}	-0, 4266 (0, 1574)	item_42	β_{42}	-0, 2879 (0, 1561)	item_43	β_{43}	0, 178 (0, 1542)	item_44	β_{44}	0, 2951 (0, 1539)
	item_45	β_{45}	0, 0725 (0, 1541)	item_46	β_{46}	0, 2248 (0, 1539)	item_47	β_{47}	0, 1194 (0, 154)	item_48	β_{48}	-0, 0101 (0, 154)
	item_49	β_{49}	0, 1312 (0, 1539)	item_50	β_{50}	0, 0135 (0, 1543)	item_51	β_{51}	-0, 0576 (0, 1545)	item_52	β_{52}	-0, 0934 (0, 1546)
	item_53	β_{53}	-0, 0695 (0, 1544)	item_54	β_{54}	0, 0253 (0, 1541)	item_55	β_{55}	-0, 1535 (0, 1552)	item_56	β_{56}	0, 0135 (0, 1542)
	item_57	β_{57}	-0, 1174 (0, 1547)	item_58	β_{58}	0, 0253 (0, 1543)	item_59	β_{59}	-0, 1054 (0, 1547)	item_60	β_{60}	-0, 0338 (0, 1543)
	item_61	β_{61}	-0, 0457 (0, 1544)	item_62	β_{62}	-0, 0934 (0, 1546)	item_63	β_{63}	-0, 1054 (0, 1548)	item_64	β_{64}	-0, 2632 (0, 156)
	item_65	β_{65}	-0, 1174 (0, 1547)	item_66	β_{66}	-0, 0934 (0, 1546)	item_67	β_{67}	-0, 1054 (0, 1548)	item_68	β_{68}	-0, 2879 (0, 1561)
	item_69	β_{69}	-0, 2509 (0, 1557)	item_70	β_{70}	-0, 4138 (0, 1573)	item_71	β_{71}	-0, 1656 (0, 1554)	item_72	β_{72}	-0, 2509 (0, 1558)
	item_73	β_{73}	-0, 3128 (0, 1563)	item_74	β_{74}	-0, 6114 (0, 1598)	item_75	β_{75}	-0, 4266 (0, 1574)	item_76	β_{76}	-0, 3504 (0, 1568)
	item_77	β_{77}	-0, 3503 (0, 1565)	item_78	β_{78}	-0, 2509 (0, 1558)	item_79	β_{79}	-0, 3503 (0, 1565)	item_80	β_{80}	-0, 3253 (0, 1562)
ABSTRACTO	item_81	β_{81}	-1, 1264 (0, 1708)	item_82	β_{82}	-0, 9618 (0, 1666)	item_83	β_{83}	-0, 854 (0, 1642)	item_84	β_{84}	-1, 0589 (0, 1689)
	item_85	β_{85}	-0, 3004 (0, 1564)	item_86	β_{86}	-0, 3378 (0, 1564)	item_87	β_{87}	-0, 3128 (0, 1564)	item_88	β_{88}	-0, 2142 (0, 1554)
	item_89	β_{89}	-0, 0815 (0, 1548)	item_90	β_{90}	-0, 1054 (0, 1547)	item_91	β_{91}	-0, 202 (0, 1555)	item_92	β_{92}	-0, 0815 (0, 1547)
	item_93	β_{93}	0, 1897 (0, 1538)	item_94	β_{94}	0, 0725 (0, 1541)	item_95	β_{95}	0, 2248 (0, 154)	item_96	β_{96}	0, 1194 (0, 1539)
	item_97	β_{97}	-0, 2386 (0, 1558)	item_98	β_{98}	-0, 2264 (0, 1555)	item_99	β_{99}	-0, 1777 (0, 1552)	item_100	β_{100}	-0, 202 (0, 1554)
Varianzas ^b												
	Efecto aleatorio	σ_p^2	0,1508 (1, 4745)									

Tabla 3.16: **Modelo 6:** Estimadores de los parámetros de la (R11PL) - Ítems, Género y Tipo fijos^aEn paréntesis el error del estimador^bEn paréntesis la variación del *odds ratio*

En la tabla 3.17 se muestran los parámetros del modelo 7 en el que se incluye el género como efecto aleatorio. De acuerdo a los resultados el logaritmo natural del odds de que una mujer promedio conteste bien un ítem promedio es $-0,5411$ es decir la probabilidad es $0,3679$, mientras que el logaritmo del odds de los hombres es $-0,3524$ lo que da una probabilidad de $0,4128$.

Además, en este caso el odds ratio del género masculino varía, en algunos ítems, aproximadamente el 10% . Por ejemplo de acuerdo a lo que se puede observar en la tabla 3.18, en los ítems 13, 46, 54, 93 y 95 los hombres tienen una mayor probabilidad de contestar correctamente, mientras que en ítems como en el 6, 8, 9, 32, 82 y 84 la probabilidad de que las mujeres los contesten correctamente aumenta de forma significativa. Adicionalmente en lo que refiere a las dificultades de los ítems las conclusiones son parecidas a los casos anteriores.

Parámetro	Notación	Ecuación (2.11)	
		Estimador	Valor p
Coefficientes fijos ^a			
Intercepto	ϑ_0	$-0,5411 (0,0480)$	2×10^{-16}
Femenino		Constante	
Masculino	ϑ_1	$0,1887 (0,0492)$	$0,0001$
Varianzas ^b			
Efecto aleatorio del estudiante	σ_p^2	$0,1514 (1,4757)$	
Efecto aleatorio del ítem	σ_i^2	$0,0891 (1,3478)$	
Masculino	σ^2	$0,0104 (1,1074)$	

Tabla 3.17: **Modelo 7**: Estimadores de los parámetros de la (R11PL) - Género Aleatorio

^aEn paréntesis el error del estimador

^bEn paréntesis la variación del *odds ratio*

	Intercepto	Masculino		Intercepto	Masculino		Intercepto	Masculino		Intercepto	Masculino
Item_1	0,1802	0,009	Item_26	-0,0935	-0,0376	Item_51	0,1274	0,0113	Item_76	-0,092	-0,0646
Item_2	0,1324	0,0229	Item_27	-0,3975	-0,036	Item_52	0,0878	0,0293	Item_77	-0,099	-0,0494
Item_3	0,2475	0,0416	Item_28	-0,2535	0	Item_53	0,1328	-0,0231	Item_78	-0,0455	0,0217
Item_4	0,0688	0,0479	Item_29	-0,2361	-0,0383	Item_54	0,1727	0,07	Item_79	-0,1129	-0,0189
Item_5	0,1157	-0,0312	Item_30	-0,2327	-0,046	Item_55	0,031	0,0392	Item_80	-0,116	0,0351
Item_6	-0,5051	-0,0915	Item_31	-0,322	-0,049	Item_56	0,1852	0,0206	Item_81	-0,741	-0,0499
Item_7	-0,2736	-0,0552	Item_32	-0,3568	-0,1013	Item_57	0,0427	0,0817	Item_82	-0,5828	-0,1149
Item_8	-0,4165	-0,1274	Item_33	-0,4918	0,0157	Item_58	0,1971	0,0171	Item_83	-0,5531	0,0175
Item_9	-0,3864	-0,1143	Item_34	-0,4879	-0,075	Item_59	0,0863	0,0101	Item_84	-0,6424	-0,1579
Item_10	-0,2385	-0,0579	Item_35	-0,1614	-0,032	Item_60	0,1617	-0,0184	Item_85	-0,0633	-0,0328
Item_11	0,4492	0,0478	Item_36	-0,0985	-0,003	Item_61	0,1359	0,0154	Item_86	-0,1179	0,0157
Item_12	0,5772	0,0368	Item_37	-0,0811	-0,0411	Item_62	0,0843	0,0369	Item_87	-0,0896	0,0011
Item_13	0,4271	0,0739	Item_38	-0,1901	-0,0174	Item_63	0,0758	0,0328	Item_88	0,0051	-0,0192
Item_14	0,4665	0,0101	Item_39	-0,1899	-0,0912	Item_64	-0,0404	-0,0128	Item_89	0,0859	0,0561
Item_15	0,643	0,0507	Item_40	-0,1775	-0,0209	Item_65	0,0672	0,0287	Item_90	0,121	-0,0656
Item_16	0,6414	0,0314	Item_41	-0,1566	-0,0668	Item_66	0,1087	-0,0161	Item_91	-0,0037	0,0229
Item_17	0,4366	-0,0138	Item_42	-0,0684	0,0017	Item_67	0,0897	0,0025	Item_92	0,0929	0,0409
Item_18	0,5938	0,0911	Item_43	0,3235	0,0324	Item_68	-0,0719	0,0093	Item_93	0,2833	0,1421
Item_19	0,0346	-0,0145	Item_44	0,4001	0,0883	Item_69	-0,0351	-0,0011	Item_94	0,2168	0,0636
Item_20	0,1293	-0,0155	Item_45	0,2307	0,0334	Item_70	-0,151	-0,0549	Item_95	0,343	0,0789
Item_21	-0,1053	0,0585	Item_46	0,3257	0,1166	Item_71	0,0398	-0,0028	Item_96	0,2678	0,0422
Item_22	-0,0036	-0,0233	Item_47	0,2643	0,0497	Item_72	-0,056	0,0444	Item_97	-0,0019	-0,0502
Item_23	-0,0281	0,0298	Item_48	0,1752	-0,0026	Item_73	-0,1141	0,0544	Item_98	-0,0246	0,0223
Item_24	0,1002	-0,0202	Item_49	0,2657	0,0689	Item_74	-0,322	-0,049	Item_99	0,0207	0,0159
Item_25	-0,1775	-0,0209	Item_50	0,1747	0,0433	Item_75	-0,1809	-0,0133	Item_100	0,0033	0,0077

Tabla 3.18: Estimadores de los efectos aleatorios (R11PL) - Género Aleatorio

3.2.3. Modelos Multinivel

Este tipo de modelos fueron analizados en la sección 2.3.3, en este caso se tomó como base los distritos educativos definidos por el Ministerio de Educación del Ecuador aunque en algunos casos se recategorizaron para poder tener más elementos dentro de un determinado grupo, puesto que la universidad en estudio tiene muy pocos aspirantes pertenecientes a ciertos distritos. Los colegios pertenecientes a las ciudades de Guayaquil y Durán se categorizaron de acuerdo a la codificación del ministerio, los colegios pertenecientes a los distritos ubicados dentro de Guayas pero fuera de Guayaquil y Durán se categorizaron como FGYE, mientras que los que están fuera de la provincia del Guayas se categorizaron como FGU. En la figura 3.4 se puede apreciar la ubicación de los diferentes distritos de la ciudad de Guayaquil.

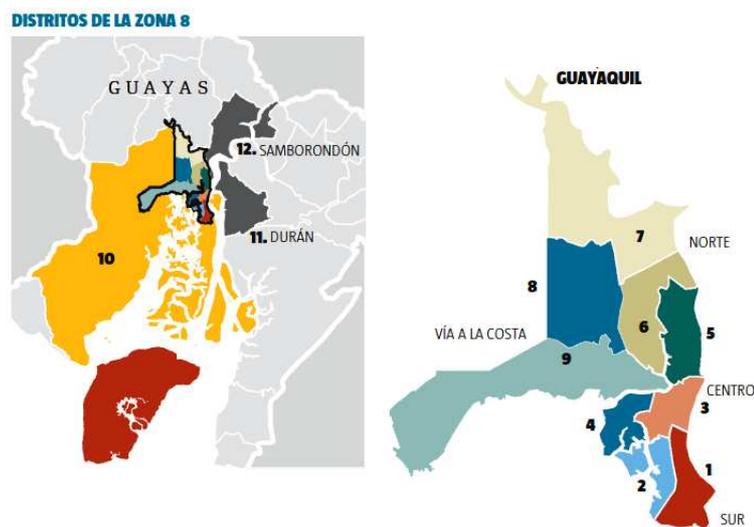


Figura 3.4: Distritos de la Ciudad de Guayaquil

Fuente: El Telégrafo (2012).

En este caso se elaboraron dos modelos multinivel:

1. En la tabla 3.19 se presenta el modelo 8 que es un modelo multinivel con intercepto en el que los ítems y el distrito son aleatorios.
2. En la tabla 3.23 se muestra el modelo 9, en este caso los ítems son fijos y el distrito se mantiene aleatorio.

En la tabla 3.19 se puede apreciar que el distrito no tiene ningún efecto sobre la respuesta dada al ítem, puesto que la varianza del efecto aleatorio es 0, lo que implica que la variación del *odds ratio* es 0%. En la tabla 3.22 se detallan los estimadores aleatorios del modelo 8, es notorio que la contribución de los distritos es muy baja y casi nula.

Parámetro	Notación	Ecuación (2.12)	
		Estimador	Valor p
Coefficientes fijos ^a			
Intercepto	θ_0	-0,42620 (0,0399)	2×10^{-16}
Varianzas ^b			
Efecto aleatorio del estudiante	σ_p^2	0,1599 (1, 4916)	
Efecto aleatorio del ítem	σ_i^2	0,1013 (1, 3748)	
Efecto aleatorio del distrito	σ_d^2	0,0000 (1, 0000)	

Tabla 3.19: **Modelo 8:** Estimadores de los parámetros del modelo Multinivel - Ítems Aleatorios

^aEn paréntesis el error del estimador

^bEn paréntesis la variación del *odds ratio*

Distrito	Intercepto	Distrito	Intercepto
09D01	0	09D02	0
09D03	0	09D04	0
09D05	0	09D06	0
09D07	0	09D08	0
09D24	0	FGU	0
FGYE	0		

Tabla 3.20: Efectos aleatorios de los distritos en el modelo multinivel - Ítems Aleatorios

En la tabla 3.23 se muestran los parámetros del modelo 9 en el que los ítems son fijos y al igual que en el caso anterior se obtiene que no hay una diferencia significativa de acuerdo al distrito de donde provenga el aspirante.

	Intercepto		Intercepto		Intercepto		Intercepto	
VERBAL	item_1	0,1881	item_2	0,1458	item_3	0,272	item_4	0,0928
	item_5	0,1034	item_6	-0,5584	item_7	-0,3051	item_8	-0,4838
	item_9	-0,4473	item_10	-0,2705	item_11	0,4805	item_12	0,6058
	item_13	0,47	item_14	0,4805	item_15	0,6793	item_16	0,6688
	item_17	0,4388	item_18	0,6477	item_19	0,0286	item_20	0,1246
	item_21	-0,08	item_22	-0,0146	item_23	-0,0146	item_24	0,0928
	item_25	-0,191	item_26	-0,113	item_27	-0,4231	item_28	-0,259
	item_29	-0,259	item_30	-0,259	item_31	-0,3518	item_32	-0,4111
	item_33	-0,4961	item_34	-0,5333	item_35	-0,1798	item_36	-0,102
	item_37	-0,102	item_38	-0,2023	item_39	-0,2362	item_40	-0,191
NUMÉRICO	item_41	-0,191	item_42	-0,069	item_43	0,3451	item_44	0,4492
	item_45	0,2511	item_46	0,3868	item_47	0,2929	item_48	0,1775
	item_49	0,3034	item_50	0,1986	item_51	0,1352	item_52	0,1034
	item_53	0,1246	item_54	0,2091	item_55	0,05	item_56	0,1986
	item_57	0,0821	item_58	0,2091	item_59	0,0928	item_60	0,1564
	item_61	0,1458	item_62	0,1034	item_63	0,0928	item_64	-0,0472
	item_65	0,0821	item_66	0,1034	item_67	0,0928	item_68	-0,069
	item_69	-0,0363	item_70	-0,1798	item_71	0,0393	item_72	-0,0363
	item_73	-0,091	item_74	-0,3518	item_75	-0,191	item_76	-0,1241
	item_77	-0,1241	item_78	-0,0363	item_79	-0,1241	item_80	-0,102
VERBAL	item_81	-0,7823	item_82	-0,6482	item_83	-0,5584	item_84	-0,7278
	item_85	-0,08	item_86	-0,113	item_87	-0,091	item_88	-0,0038
	item_89	0,114	item_90	0,0928	item_91	0,007	item_92	0,114
	item_93	0,3555	item_94	0,2511	item_95	0,3868	item_96	0,2929
	item_97	-0,0254	item_98	-0,0146	item_99	0,0286	item_100	0,007

Tabla 3.21: Estimadores de los efectos aleatorios del modelo 8

Distrito	Intercepto	Distrito	Intercepto
09D01	0,0000000099518302	09D02	-0,0000000082504030
09D03	0,0000000006647423	09D04	-0,0000000019743425
09D05	0,0000000040702932	09D06	0,0000000068014940
09D07	-0,0000000011376005	09D08	-0,0000000024405393
09D24	-0,0000000007861981	FGU	-0,0000000032824706
FGYE	-0,0000000010931108		

Tabla 3.22: Efectos aleatorios del modelo multinivel - Ítems Fijos

	Parámetro	Notación	Ecuación (2.12)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.12)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.12)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.12)
	Coefficientes fijos ^a											
VERBAL	item_1	β_1	-0, 217 (0, 1108)	item_2	β_2	-0, 2645 (0, 1111)	item_3	β_3	-0, 1228 (0, 1104)	item_4	β_4	-0, 3246 (0, 1115)
	item_5	β_5	-0, 312 (0, 1114)	item_6	β_6	-1, 0727 (0, 1244)	item_7	β_7	-0, 7761 (0, 1175)	item_8	β_8	-0, 9842 (0, 122)
	item_9	β_9	-0, 9414 (0, 121)	item_10	β_{10}	-0, 7364 (0, 1168)	item_11	β_{11}	0, 1116 (0, 1104)	item_12	β_{12}	0, 2529 (0, 111)
	item_13	β_{13}	0, 0998 (0, 1104)	item_14	β_{14}	0, 1115 (0, 1104)	item_15	β_{15}	0, 3365 (0, 1117)	item_16	β_{16}	0, 3247 (0, 1115)
	item_17	β_{17}	0, 0648 (0, 1103)	item_18	β_{18}	0, 3006 (0, 1113)	item_19	β_{19}	-0, 3964 (0, 1121)	item_20	β_{20}	-0, 2881 (0, 1113)
	item_21	β_{21}	-0, 5191 (0, 1135)	item_22	β_{22}	-0, 445 (0, 1126)	item_23	β_{23}	-0, 445 (0, 1126)	item_24	β_{24}	-0, 3242 (0, 1115)
	item_25	β_{25}	-0, 6452 (0, 1152)	item_26	β_{26}	-0, 5565 (0, 1139)	item_27	β_{27}	-0, 9131 (0, 1204)	item_28	β_{28}	-0, 7233 (0, 1165)
	item_29	β_{29}	-0, 7232 (0, 1166)	item_30	β_{30}	-0, 7236 (0, 1166)	item_31	β_{31}	-0, 8301 (0, 1186)	item_32	β_{32}	-0, 8992 (0, 12)
	item_33	β_{33}	-0, 9986 (0, 1224)	item_34	β_{34}	-1, 0427 (0, 1236)	item_35	β_{35}	-0, 6323 (0, 1151)	item_36	β_{36}	-0, 5439 (0, 1138)
	item_37	β_{37}	-0, 544 (0, 1138)	item_38	β_{38}	-0, 6581 (0, 1155)	item_39	β_{39}	-0, 6968 (0, 1161)	item_40	β_{40}	-0, 6455 (0, 1152)
NUMÉRICO	item_41	β_{41}	-0, 6452 (0, 1153)	item_42	β_{42}	-0, 5065 (0, 1133)	item_43	β_{43}	-0, 0407 (0, 1103)	item_44	β_{44}	0, 0766 (0, 1103)
	item_45	β_{45}	-0, 1463 (0, 1105)	item_46	β_{46}	0, 0062 (0, 1103)	item_47	β_{47}	-0, 0993 (0, 1104)	item_48	β_{48}	-0, 2291 (0, 1109)
	item_49	β_{49}	-0, 0875 (0, 1104)	item_50	β_{50}	-0, 2052 (0, 1108)	item_51	β_{51}	-0, 2764 (0, 1112)	item_52	β_{52}	-0, 3119 (0, 1114)
	item_53	β_{53}	-0, 2881 (0, 1113)	item_54	β_{54}	-0, 1935 (0, 1107)	item_55	β_{55}	-0, 3722 (0, 1119)	item_56	β_{56}	-0, 2053 (0, 1108)
	item_57	β_{57}	-0, 3362 (0, 1116)	item_58	β_{58}	-0, 1934 (0, 1107)	item_59	β_{59}	-0, 324 (0, 1115)	item_60	β_{60}	-0, 2526 (0, 111)
	item_61	β_{61}	-0, 2644 (0, 1111)	item_62	β_{62}	-0, 3121 (0, 1114)	item_63	β_{63}	-0, 3239 (0, 1115)	item_64	β_{64}	-0, 482 (0, 113)
	item_65	β_{65}	-0, 3361 (0, 1116)	item_66	β_{66}	-0, 312 (0, 1114)	item_67	β_{67}	-0, 3241 (0, 1115)	item_68	β_{68}	-0, 5066 (0, 1133)
	item_69	β_{69}	-0, 4696 (0, 1129)	item_70	β_{70}	-0, 6324 (0, 115)	item_71	β_{71}	-0, 3841 (0, 112)	item_72	β_{72}	-0, 4696 (0, 1129)
	item_73	β_{73}	-0, 5315 (0, 1136)	item_74	β_{74}	-0, 8301 (0, 1186)	item_75	β_{75}	-0, 6454 (0, 1153)	item_76	β_{76}	-0, 569 (0, 1141)
	item_77	β_{77}	-0, 5689 (0, 1141)	item_78	β_{78}	-0, 4695 (0, 1129)	item_79	β_{79}	-0, 569 (0, 1141)	item_80	β_{80}	-0, 544 (0, 1138)
ABSTRACTO	item_81	β_{81}	-1, 345 (0, 1329)	item_82	β_{82}	-1, 1805 (0, 1274)	item_83	β_{83}	-1, 0727 (0, 1243)	item_84	β_{84}	-1, 2778 (0, 1305)
	item_85	β_{85}	-0, 5191 (0, 1135)	item_86	β_{86}	-0, 5563 (0, 114)	item_87	β_{87}	-0, 5316 (0, 1137)	item_88	β_{88}	-0, 4328 (0, 1125)
	item_89	β_{89}	-0, 3001 (0, 1113)	item_90	β_{90}	-0, 3241 (0, 1115)	item_91	β_{91}	-0, 4207 (0, 1124)	item_92	β_{92}	-0, 3002 (0, 1113)
	item_93	β_{93}	-0, 029 (0, 1102)	item_94	β_{94}	-0, 1461 (0, 1105)	item_95	β_{95}	0, 0062 (0, 1103)	item_96	β_{96}	-0, 0993 (0, 1103)
	item_97	β_{97}	-0, 4573 (0, 1128)	item_98	β_{98}	-0, 4451 (0, 1126)	item_99	β_{99}	-0, 3965 (0, 1121)	item_100	β_{100}	-0, 4207 (0, 1123)
	Varianzas ^b											
	Efecto aleatorio	σ_p^2	0,1607 (1, 4931)									
	Efecto aleatorio distrito	σ_d^2	4×10^{-10} (1, 00002)									

Tabla 3.23: **Modelo 9**: Estimadores de los parámetros del modelo Multinivel - Ítems fijos^aEn paréntesis el error del estimador^bEn paréntesis la variación del *odds ratio*

3.2.4. Modelos DIF

Estos modelos fueron explicados brevemente en la sección 2.3.4 donde se mencionó que el Funcionamiento Diferencial de Ítems (*Differential Item Functioning* DIF), se refiere a las diferencias en el funcionamiento de ítems para grupos diferentes; en nuestro caso a manera de ejemplo se estableció como grupo focal a las mujeres que pertenecen a colegios fiscales y se establecieron modelos para detectar DIF para cada sección de la prueba.

Se establecieron 8 modelos:

1. En la tabla 3.24 se presenta el modelo 10, en el que se incluye una variable de funcionamiento diferencial para los ítems de la sección verbal y los ítems son efectos aleatorios.
2. En la tabla 3.26 se presenta el modelo 11, en el que se incluye una variable de funcionamiento diferencial para los ítems de la sección numérica y los ítems son efectos aleatorios.
3. En la tabla 3.28 se presenta el modelo 12, en el que se incluye una variable de funcionamiento diferencial para los ítems de la sección de razonamiento abstracto y los ítems son efectos aleatorios.
4. En la tabla 3.30 se presenta el modelo 13, en el que se incluye una variable de funcionamiento diferencial para los ítems de la sección verbal y los ítems son efectos fijos.
5. En la tabla 3.31 se presenta el modelo 14, en el que se incluye una variable de funcionamiento diferencial para los ítems de la sección numérica y los ítems son efectos fijos.
6. En la tabla 3.32 se presenta el modelo 15, en el que se incluye una variable de funcionamiento diferencial para los ítems de la sección de razonamiento abstracto y los ítems son efectos fijos.

7. En la tabla 3.33 se presenta el modelo 16, en el que se incluye una variable de funcionamiento diferencial para cada sección y los ítems son efectos aleatorios.
8. Finalmente en la tabla 3.35 se presenta el modelo 17, parecido al modelo anterior con la diferencia de que los ítems son efectos fijos.

En la tabla 3.24 se muestran los parámetros del modelo 10, en el que se incluye un parámetro de funcionamiento diferencial para los ítems de la sección verbal, contestados por mujeres de colegio fiscal. De acuerdo a los resultados obtenidos los hombres tienen mayor probabilidad de contestar correctamente los ítems, en cuanto a la variable de funcionamiento diferencial esta no es significativa es decir que no hay diferencia significativa cuando el ítem es de la sección verbal y es contestado por una mujer de un colegio fiscal.

Parámetro	Notación	Ecuación (2.13)	
		Estimador	Valor p
Coefficientes fijos ^a			
Intercepto	ω_0	-0,5536 (0,0502)	2×10^{-16}
Femenino		Constante	
Masculino	ω_1	0,2022 (0,0490)	$3,7 \times 10^{-5}$
dif_ver	ζ_1	0,0725 (0,0607)	0,232
Varianzas ^b			
Efecto aleatorio del estudiante	σ_p^2	0,1514 (1,4757)	
Efecto aleatorio del ítem	σ_i^2	0,1015 (1,3752)	

Tabla 3.24: **Modelo 10**: Estimadores de los parámetros del DIF - Verbal (Ítems Aleatorios)

^aEn paréntesis el error del estimador

^bEn paréntesis la variación del *odds ratio*

En la tabla 3.26 se muestran los parámetros del modelo 11, en el que se incluye un parámetro de funcionamiento diferencial para los ítems de la sección numérica, contestados por mujeres de colegio fiscal. De acuerdo a los resultados obtenidos los

	Intercepto		Intercepto		Intercepto		Intercepto	
VERBAL	item_1	0,1824	item_2	0,1402	item_3	0,2664	item_4	0,0871
	item_5	0,0977	item_6	-0,5641	item_7	-0,3108	item_8	-0,4895
	item_9	-0,4529	item_10	-0,2762	item_11	0,4748	item_12	0,6002
	item_13	0,4644	item_14	0,4748	item_15	0,6737	item_16	0,6632
	item_17	0,4332	item_18	0,6421	item_19	0,0229	item_20	0,119
	item_21	-0,0856	item_22	-0,0203	item_23	-0,0203	item_24	0,0871
	item_25	-0,1967	item_26	-0,1187	item_27	-0,4288	item_28	-0,2647
	item_29	-0,2647	item_30	-0,2647	item_31	-0,3575	item_32	-0,4168
	item_33	-0,5018	item_34	-0,539	item_35	-0,1854	item_36	-0,1076
	item_37	-0,1076	item_38	-0,2079	item_39	-0,2419	item_40	-0,1967
NUMÉRICO	item_41	-0,1873	item_42	-0,0653	item_43	0,3491	item_44	0,4533
	item_45	0,255	item_46	0,3908	item_47	0,2969	item_48	0,1814
	item_49	0,3073	item_50	0,2025	item_51	0,1391	item_52	0,1073
	item_53	0,1285	item_54	0,213	item_55	0,0539	item_56	0,2025
	item_57	0,086	item_58	0,213	item_59	0,0966	item_60	0,1603
	item_61	0,1497	item_62	0,1073	item_63	0,0966	item_64	-0,0434
	item_65	0,086	item_66	0,1073	item_67	0,0966	item_68	-0,0653
	item_69	-0,0325	item_70	-0,1761	item_71	0,0431	item_72	-0,0325
	item_73	-0,0872	item_74	-0,3483	item_75	-0,1873	item_76	-0,1204
	item_77	-0,1204	item_78	-0,0325	item_79	-0,1204	item_80	-0,0982
ABSTRACTO	item_81	-0,7792	item_82	-0,6449	item_83	-0,5551	item_84	-0,7245
	item_85	-0,0762	item_86	-0,1093	item_87	-0,0872	item_88	0
	item_89	0,1179	item_90	0,0966	item_91	0,0108	item_92	0,1179
	item_93	0,3595	item_94	0,255	item_95	0,3908	item_96	0,2969
	item_97	-0,0217	item_98	-0,0108	item_99	0,0324	item_100	0,0108

Tabla 3.25: Estimadores de los efectos aleatorios del modelo 10

hombres tienen mayor probabilidad de contestar correctamente los ítems, en cuanto a la variable de funcionamiento diferencial esta no es significativa es decir que no hay diferencia significativa cuando el ítem es de la sección numérica y es contestado por una mujer de un colegio fiscal.

En la tabla 3.28 se muestran los parámetros del modelo 12, en el que se incluye un parámetro de funcionamiento diferencial para los ítems de la sección de razonamiento abstracto, contestados por mujeres de colegio fiscal. De acuerdo a los resultados obtenidos los hombres tienen mayor probabilidad de contestar correctamente los ítems, en cuanto a la variable de funcionamiento diferencial esta no es significativa es decir que no hay diferencia significativa cuando el ítem es de la sección de razonamiento abstracto y es contestado por una mujer de un colegio fiscal.

En las tablas 3.30, 3.31 y 3.32 se muestran los resultados de los modelos 13, 14 y 15 que son parecidos a los modelos 10, 11 y 12 respectivamente con la diferencia que los ítems son fijos. Las conclusiones obtenidas son parecidas a las de los modelos anteriores.

Parámetro	Notación	Ecuación (2.13)	
		Estimador	Valor p
Coefficientes fijos ^a			
Intercepto	ω_0	-0,5348 (0,0502)	2×10^{-16}
Femenino		Constante	
Masculino	ω_1	0,1835 (0,0490)	0,0002
dif_num	ζ_1	-0,0504 (0,0604)	0,404
Varianzas ^b			
Efecto aleatorio del estudiante	σ_p^2	0,1511 (1,4751)	
Efecto aleatorio del ítem	σ_i^2	0,1017 (1,3756)	

Tabla 3.26: **Modelo 11:** Estimadores de los parámetros del DIF - Numérico (Ítems Aleatorios)

^aEn paréntesis el error del estimador

^bEn paréntesis la variación del *odds ratio*

	Intercepto		Intercepto		Intercepto		Intercepto	
VERBAL	item_1	0,1855	item_2	0,1433	item_3	0,2695	item_4	0,0902
	item_5	0,1008	item_6	-0,5612	item_7	-0,3078	item_8	-0,4866
	item_9	-0,45	item_10	-0,2732	item_11	0,478	item_12	0,6034
	item_13	0,4676	item_14	0,478	item_15	0,677	item_16	0,6664
	item_17	0,4363	item_18	0,6454	item_19	0,026	item_20	0,1221
	item_21	-0,0826	item_22	-0,0172	item_23	-0,0172	item_24	0,0902
	item_25	-0,1937	item_26	-0,1156	item_27	-0,4259	item_28	-0,2617
	item_29	-0,2617	item_30	-0,2617	item_31	-0,3545	item_32	-0,4139
	item_33	-0,4989	item_34	-0,5361	item_35	-0,1824	item_36	-0,1046
	item_37	-0,1046	item_38	-0,2049	item_39	-0,2389	item_40	-0,1937
NUMÉRICO	item_41	-0,1872	item_42	-0,0652	item_43	0,3493	item_44	0,4535
	item_45	0,2552	item_46	0,391	item_47	0,2971	item_48	0,1816
	item_49	0,3075	item_50	0,2027	item_51	0,1393	item_52	0,1074
	item_53	0,1287	item_54	0,2132	item_55	0,054	item_56	0,2027
	item_57	0,0861	item_58	0,2132	item_59	0,0968	item_60	0,1605
	item_61	0,1499	item_62	0,1074	item_63	0,0968	item_64	-0,0433
	item_65	0,0861	item_66	0,1074	item_67	0,0968	item_68	-0,0652
	item_69	-0,0324	item_70	-0,176	item_71	0,0433	item_72	-0,0324
	item_73	-0,0871	item_74	-0,3482	item_75	-0,1872	item_76	-0,1202
	item_77	-0,1202	item_78	-0,0324	item_79	-0,1202	item_80	-0,0981
ABSTRACTO	item_81	-0,7852	item_82	-0,651	item_83	-0,5612	item_84	-0,7306
	item_85	-0,0826	item_86	-0,1156	item_87	-0,0936	item_88	-0,0064
	item_89	0,1115	item_90	0,0902	item_91	0,0044	item_92	0,1115
	item_93	0,353	item_94	0,2485	item_95	0,3843	item_96	0,2904
	item_97	-0,0281	item_98	-0,0172	item_99	0,026	item_100	0,0044

Tabla 3.27: Estimadores de los efectos aleatorios del modelo 11

Parámetro	Notación	Ecuación (2.13)	
		Estimador	Valor p
Coefficientes fijos ^a			
Intercepto	ω_0	-0,5381 (0,0496)	2×10^{-16}
Femenino		Constante	
Masculino	ω_1	0,1868 (0,0485)	0,0001
dif_abs	ζ_1	-0,0598 (0,0776)	0,441
Varianzas ^b			
Efecto aleatorio del estudiante	σ_p^2	0,1511 (1,4751)	
Efecto aleatorio del ítem	σ_i^2	0,1010 (1,3741)	

Tabla 3.28: **Modelo 12**: Estimadores de los parámetros del DIF - Abstracto (Ítems Aleatorios)

^aEn paréntesis el error del estimador

^bEn paréntesis la variación del *odds ratio*

	Intercepto		Intercepto		Intercepto		Intercepto	
VERBAL	item_1	0,1865	item_2	0,1443	item_3	0,2704	item_4	0,0912
	item_5	0,1018	item_6	-0,5598	item_7	-0,3065	item_8	-0,4852
	item_9	-0,4486	item_10	-0,2719	item_11	0,4788	item_12	0,6041
	item_13	0,4684	item_14	0,4788	item_15	0,6776	item_16	0,6671
	item_17	0,4372	item_18	0,646	item_19	0,027	item_20	0,1231
	item_21	-0,0815	item_22	-0,0161	item_23	-0,0161	item_24	0,0912
	item_25	-0,1925	item_26	-0,1145	item_27	-0,4245	item_28	-0,2605
	item_29	-0,2605	item_30	-0,2605	item_31	-0,3532	item_32	-0,4125
	item_33	-0,4975	item_34	-0,5347	item_35	-0,1812	item_36	-0,1035
	item_37	-0,1035	item_38	-0,2037	item_39	-0,2377	item_40	-0,1925
NUMÉRICO	item_41	-0,1925	item_42	-0,0705	item_43	0,3435	item_44	0,4476
	item_45	0,2495	item_46	0,3851	item_47	0,2913	item_48	0,1759
	item_49	0,3017	item_50	0,197	item_51	0,1337	item_52	0,1018
	item_53	0,1231	item_54	0,2075	item_55	0,0485	item_56	0,197
	item_57	0,0806	item_58	0,2075	item_59	0,0912	item_60	0,1548
	item_61	0,1443	item_62	0,1018	item_63	0,0912	item_64	-0,0487
	item_65	0,0806	item_66	0,1018	item_67	0,0912	item_68	-0,0705
	item_69	-0,0378	item_70	-0,1812	item_71	0,0378	item_72	-0,0378
	item_73	-0,0925	item_74	-0,3532	item_75	-0,1925	item_76	-0,1255
	item_77	-0,1255	item_78	-0,0378	item_79	-0,1255	item_80	-0,1035
ABSTRACTO	item_81	-0,7764	item_82	-0,6422	item_83	-0,5524	item_84	-0,7218
	item_85	-0,0738	item_86	-0,1068	item_87	-0,0848	item_88	0,0024
	item_89	0,1203	item_90	0,099	item_91	0,0132	item_92	0,1203
	item_93	0,3618	item_94	0,2573	item_95	0,3931	item_96	0,2992
	item_97	-0,0192	item_98	-0,0084	item_99	0,0348	item_100	0,0132

Tabla 3.29: Estimadores de los efectos aleatorios del modelo 12

	Parámetro	Notación	Ecuación (2.13)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.13)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.13)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.13)
Coefficientes fijos												
	Masculino	ω_1	0, 2022 (0, 049)									
	dif_ver	ζ_1	0, 0792 (0, 0614)									
VERBAL	item_1	β_1	-0, 3314 (0, 1144)	item_2	β_2	-0, 379 (0, 1147)	item_3	β_3	-0, 2374 (0, 1141)	item_4	β_4	-0, 439 (0, 1151)
	item_5	β_5	-0, 4263 (0, 115)	item_6	β_6	-1, 1868 (0, 1277)	item_7	β_7	-0, 8903 (0, 1209)	item_8	β_8	-1, 0984 (0, 1254)
	item_9	β_9	-1, 0562 (0, 1244)	item_10	β_{10}	-0, 851 (0, 1203)	item_11	β_{11}	-0, 0029 (0, 114)	item_12	β_{12}	0, 1385 (0, 1147)
	item_13	β_{13}	-0, 0145 (0, 114)	item_14	β_{14}	-0, 0028 (0, 114)	item_15	β_{15}	0, 2219 (0, 1152)	item_16	β_{16}	0, 21 (0, 1152)
	item_17	β_{17}	-0, 0499 (0, 1139)	item_18	β_{18}	0, 1862 (0, 1149)	item_19	β_{19}	-0, 5106 (0, 1157)	item_20	β_{20}	-0, 4025 (0, 1149)
	item_21	β_{21}	-0, 6339 (0, 117)	item_22	β_{22}	-0, 5595 (0, 1162)	item_23	β_{23}	-0, 5597 (0, 1162)	item_24	β_{24}	-0, 4389 (0, 1151)
	item_25	β_{25}	-0, 7596 (0, 1188)	item_26	β_{26}	-0, 6711 (0, 1175)	item_27	β_{27}	-1, 0271 (0, 1237)	item_28	β_{28}	-0, 8373 (0, 1201)
	item_29	β_{29}	-0, 8374 (0, 12)	item_30	β_{30}	-0, 8375 (0, 12)	item_31	β_{31}	-0, 9444 (0, 122)	item_32	β_{32}	-1, 0131 (0, 1234)
	item_33	β_{33}	-1, 1133 (0, 1257)	item_34	β_{34}	-1, 157 (0, 1268)	item_35	β_{35}	-0, 7471 (0, 1186)	item_36	β_{36}	-0, 6582 (0, 1173)
	item_37	β_{37}	-0, 6589 (0, 1174)	item_38	β_{38}	-0, 7728 (0, 1189)	item_39	β_{39}	-0, 811 (0, 1196)	item_40	β_{40}	-0, 7596 (0, 1188)
NUMÉRICO	item_41	β_{41}	-0, 7596 (0, 1187)	item_42	β_{42}	-0, 6208 (0, 1169)	item_43	β_{43}	-0, 1555 (0, 1139)	item_44	β_{44}	-0, 0383 (0, 114)
	item_45	β_{45}	-0, 261 (0, 1142)	item_46	β_{46}	-0, 1083 (0, 1139)	item_47	β_{47}	-0, 2136 (0, 114)	item_48	β_{48}	-0, 3434 (0, 1145)
	item_49	β_{49}	-0, 2019 (0, 114)	item_50	β_{50}	-0, 3198 (0, 1144)	item_51	β_{51}	-0, 3908 (0, 1148)	item_52	β_{52}	-0, 4265 (0, 115)
	item_53	β_{53}	-0, 4026 (0, 1149)	item_54	β_{54}	-0, 3076 (0, 1143)	item_55	β_{55}	-0, 4867 (0, 1155)	item_56	β_{56}	-0, 3196 (0, 1144)
	item_57	β_{57}	-0, 4502 (0, 1152)	item_58	β_{58}	-0, 308 (0, 1144)	item_59	β_{59}	-0, 4387 (0, 1151)	item_60	β_{60}	-0, 3673 (0, 1147)
	item_61	β_{61}	-0, 3789 (0, 1147)	item_62	β_{62}	-0, 4263 (0, 115)	item_63	β_{63}	-0, 4385 (0, 1152)	item_64	β_{64}	-0, 5963 (0, 1166)
	item_65	β_{65}	-0, 4502 (0, 1152)	item_66	β_{66}	-0, 4264 (0, 1151)	item_67	β_{67}	-0, 4383 (0, 1152)	item_68	β_{68}	-0, 6209 (0, 1169)
	item_69	β_{69}	-0, 5844 (0, 1165)	item_70	β_{70}	-0, 7472 (0, 1186)	item_71	β_{71}	-0, 4984 (0, 1156)	item_72	β_{72}	-0, 5838 (0, 1164)
	item_73	β_{73}	-0, 646 (0, 1171)	item_74	β_{74}	-0, 9444 (0, 122)	item_75	β_{75}	-0, 7595 (0, 1188)	item_76	β_{76}	-0, 6832 (0, 1177)
	item_77	β_{77}	-0, 6834 (0, 1177)	item_78	β_{78}	-0, 5839 (0, 1165)	item_79	β_{79}	-0, 6835 (0, 1177)	item_80	β_{80}	-0, 6583 (0, 1173)
ABSTRACTO	item_81	β_{81}	-1, 4526 (0, 1365)	item_82	β_{82}	-1, 2881 (0, 1315)	item_83	β_{83}	-1, 18 (0, 1284)	item_84	β_{84}	-1, 3854 (0, 1343)
	item_85	β_{85}	-0, 6264 (0, 118)	item_86	β_{86}	-0, 6641 (0, 1184)	item_87	β_{87}	-0, 639 (0, 1181)	item_88	β_{88}	-0, 5403 (0, 117)
	item_89	β_{89}	-0, 4079 (0, 1159)	item_90	β_{90}	-0, 4315 (0, 116)	item_91	β_{91}	-0, 5281 (0, 1169)	item_92	β_{92}	-0, 4075 (0, 1159)
	item_93	β_{93}	-0, 1355 (0, 1148)	item_94	β_{94}	-0, 2538 (0, 1151)	item_95	β_{95}	-0, 1009 (0, 1149)	item_96	β_{96}	-0, 2065 (0, 115)
	item_97	β_{97}	-0, 5647 (0, 1172)	item_98	β_{98}	-0, 5527 (0, 1171)	item_99	β_{99}	-0, 5042 (0, 1166)	item_100	β_{100}	-0, 5282 (0, 1168)
Varianzas												
	Efecto aleatorio	σ_p^2	0,152 (1,4768)									

Tabla 3.30: Modelo 13 Estimadores de los parámetros del DIF - Verbal

	Parámetro	Notación	Ecuación (2.13)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.13)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.13)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.13)
Coefficientes fijos												
	Masculino	ω_1	0,1808 (0,0491)									
	dif_num	ζ_1	-0,0649 (0,0609)									
VERBAL	item_1	β_1	-0,3268 (0,1146)	item_2	β_2	-0,3745 (0,1149)	item_3	β_3	-0,2326 (0,1142)	item_4	β_4	-0,4338 (0,1153)
	item_5	β_5	-0,4215 (0,1152)	item_6	β_6	-1,1821 (0,1278)	item_7	β_7	-0,8865 (0,1211)	item_8	β_8	-1,0943 (0,1256)
	item_9	β_9	-1,0502 (0,1245)	item_10	β_{10}	-0,8451 (0,1204)	item_11	β_{11}	0,0016 (0,1141)	item_12	β_{12}	0,1434 (0,1147)
	item_13	β_{13}	-0,0107 (0,1141)	item_14	β_{14}	0,0017 (0,1142)	item_15	β_{15}	0,2272 (0,1153)	item_16	β_{16}	0,2144 (0,1152)
	item_17	β_{17}	-0,0447 (0,1141)	item_18	β_{18}	0,1901 (0,115)	item_19	β_{19}	-0,5064 (0,1159)	item_20	β_{20}	-0,3977 (0,115)
	item_21	β_{21}	-0,6287 (0,1172)	item_22	β_{22}	-0,5561 (0,1163)	item_23	β_{23}	-0,5549 (0,1163)	item_24	β_{24}	-0,4334 (0,1153)
	item_25	β_{25}	-0,755 (0,1189)	item_26	β_{26}	-0,6663 (0,1177)	item_27	β_{27}	-1,0221 (0,1239)	item_28	β_{28}	-0,8326 (0,1201)
	item_29	β_{29}	-0,8331 (0,1202)	item_30	β_{30}	-0,8321 (0,1202)	item_31	β_{31}	-0,9394 (0,1221)	item_32	β_{32}	-1,0087 (0,1236)
	item_33	β_{33}	-1,1077 (0,1258)	item_34	β_{34}	-1,1521 (0,1269)	item_35	β_{35}	-0,7413 (0,1187)	item_36	β_{36}	-0,6537 (0,1175)
	item_37	β_{37}	-0,6546 (0,1175)	item_38	β_{38}	-0,768 (0,119)	item_39	β_{39}	-0,8059 (0,1198)	item_40	β_{40}	-0,7546 (0,1189)
NUMÉRICO	item_41	β_{41}	-0,7456 (0,1196)	item_42	β_{42}	-0,608 (0,1178)	item_43	β_{43}	-0,14 (0,1149)	item_44	β_{44}	-0,0241 (0,1149)
	item_45	β_{45}	-0,2464 (0,1151)	item_46	β_{46}	-0,0937 (0,1148)	item_47	β_{47}	-0,1996 (0,115)	item_48	β_{48}	-0,3292 (0,1155)
	item_49	β_{49}	-0,1871 (0,1149)	item_50	β_{50}	-0,3051 (0,1153)	item_51	β_{51}	-0,3765 (0,1157)	item_52	β_{52}	-0,4125 (0,116)
	item_53	β_{53}	-0,3875 (0,1158)	item_54	β_{54}	-0,2939 (0,1153)	item_55	β_{55}	-0,4724 (0,1165)	item_56	β_{56}	-0,3067 (0,1154)
	item_57	β_{57}	-0,4371 (0,1162)	item_58	β_{58}	-0,2931 (0,1153)	item_59	β_{59}	-0,4242 (0,116)	item_60	β_{60}	-0,3519 (0,1156)
	item_61	β_{61}	-0,3642 (0,1157)	item_62	β_{62}	-0,4123 (0,116)	item_63	β_{63}	-0,4253 (0,1161)	item_64	β_{64}	-0,5831 (0,1175)
	item_65	β_{65}	-0,436 (0,1162)	item_66	β_{66}	-0,4122 (0,116)	item_67	β_{67}	-0,4243 (0,1161)	item_68	β_{68}	-0,6068 (0,1179)
	item_69	β_{69}	-0,5695 (0,1174)	item_70	β_{70}	-0,7332 (0,1195)	item_71	β_{71}	-0,4853 (0,1166)	item_72	β_{72}	-0,5689 (0,1174)
	item_73	β_{73}	-0,6314 (0,1181)	item_74	β_{74}	-0,9309 (0,1229)	item_75	β_{75}	-0,746 (0,1196)	item_76	β_{76}	-0,6691 (0,1186)
	item_77	β_{77}	-0,6695 (0,1186)	item_78	β_{78}	-0,5695 (0,1174)	item_79	β_{79}	-0,67 (0,1186)	item_80	β_{80}	-0,6446 (0,1183)
ABSTRACTO	item_81	β_{81}	-1,455 (0,136)	item_82	β_{82}	-1,2913 (0,1308)	item_83	β_{83}	-1,1821 (0,1278)	item_84	β_{84}	-1,3866 (0,1338)
	item_85	β_{85}	-0,6283 (0,1172)	item_86	β_{86}	-0,6662 (0,1176)	item_87	β_{87}	-0,6409 (0,1173)	item_88	β_{88}	-0,5423 (0,1162)
	item_89	β_{89}	-0,4096 (0,1151)	item_90	β_{90}	-0,4323 (0,1152)	item_91	β_{91}	-0,5303 (0,1161)	item_92	β_{92}	-0,4103 (0,1151)
	item_93	β_{93}	-0,1387 (0,1141)	item_94	β_{94}	-0,2559 (0,1143)	item_95	β_{95}	-0,1032 (0,114)	item_96	β_{96}	-0,2098 (0,1142)
	item_97	β_{97}	-0,5675 (0,1165)	item_98	β_{98}	-0,555 (0,1163)	item_99	β_{99}	-0,5059 (0,1158)	item_100	β_{100}	-0,5294 (0,1161)
Varianzas												
	Efecto aleatorio	σ_p^2	0,1519 (1,4766)									

Tabla 3.31: Modelo 14: Estimadores de los parámetros del DIF - Numérico

	Parámetro	Notación	Ecuación (2.13)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.13)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.13)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.13)
Coefficientes fijos												
	Masculino	ω_1	0, 1881 (0, 0484)									
	dif_abs	ζ_1	-0, 0483 (0, 0784)									
VERBAL	item_1	β_1	-0, 3314 (0, 1144)	item_2	β_2	-0, 6711 (0, 1175)	item_3	β_3	-0, 3908 (0, 1148)	item_4	β_4	-0, 6832 (0, 1177)
	item_5	β_5	-0, 379 (0, 1147)	item_6	β_6	-1, 0271 (0, 1237)	item_7	β_7	-0, 4265 (0, 115)	item_8	β_8	-0, 6834 (0, 1177)
	item_9	β_9	-0, 2374 (0, 1141)	item_10	β_{10}	-0, 8373 (0, 1201)	item_11	β_{11}	-0, 4026 (0, 1149)	item_12	β_{12}	-0, 5839 (0, 1165)
	item_13	β_{13}	-0, 439 (0, 1151)	item_14	β_{14}	-0, 8374 (0, 12)	item_15	β_{15}	-0, 3076 (0, 1143)	item_16	β_{16}	-0, 6835 (0, 1177)
	item_17	β_{17}	-0, 4263 (0, 115)	item_18	β_{18}	-0, 8375 (0, 12)	item_19	β_{19}	-0, 4867 (0, 1155)	item_20	β_{20}	-0, 6583 (0, 1173)
	item_21	β_{21}	-1, 1868 (0, 1277)	item_22	β_{22}	-0, 9444 (0, 122)	item_23	β_{23}	-0, 3196 (0, 1144)	item_24	β_{24}	-1, 4526 (0, 1365)
	item_25	β_{25}	-0, 8903 (0, 1209)	item_26	β_{26}	-1, 0131 (0, 1234)	item_27	β_{27}	-0, 4502 (0, 1152)	item_28	β_{28}	-1, 2881 (0, 1315)
	item_29	β_{29}	-1, 0984 (0, 1254)	item_30	β_{30}	-1, 1133 (0, 1257)	item_31	β_{31}	-0, 308 (0, 1144)	item_32	β_{32}	-1, 18 (0, 1284)
	item_33	β_{33}	-1, 0562 (0, 1244)	item_34	β_{34}	-1, 157 (0, 1268)	item_35	β_{35}	-0, 4387 (0, 1151)	item_36	β_{36}	-1, 3854 (0, 1343)
	item_37	β_{37}	-0, 851 (0, 1203)	item_38	β_{38}	-0, 7471 (0, 1186)	item_39	β_{39}	-0, 3673 (0, 1147)	item_40	β_{40}	-0, 6264 (0, 118)
NUMÉRICO	item_41	β_{41}	-0, 0029 (0, 114)	item_42	β_{42}	-0, 6582 (0, 1173)	item_43	β_{43}	-0, 3789 (0, 1147)	item_44	β_{44}	-0, 6641 (0, 1184)
	item_45	β_{45}	0, 1385 (0, 1147)	item_46	β_{46}	-0, 6589 (0, 1174)	item_47	β_{47}	-0, 4263 (0, 115)	item_48	β_{48}	-0, 639 (0, 1181)
	item_49	β_{49}	-0, 0145 (0, 114)	item_50	β_{50}	-0, 7728 (0, 1189)	item_51	β_{51}	-0, 4385 (0, 1152)	item_52	β_{52}	-0, 5403 (0, 117)
	item_53	β_{53}	-0, 0028 (0, 114)	item_54	β_{54}	-0, 811 (0, 1196)	item_55	β_{55}	-0, 5963 (0, 1166)	item_56	β_{56}	-0, 4079 (0, 1159)
	item_57	β_{57}	0, 2219 (0, 1152)	item_58	β_{58}	-0, 7596 (0, 1188)	item_59	β_{59}	-0, 4502 (0, 1152)	item_60	β_{60}	-0, 4315 (0, 116)
	item_61	β_{61}	0, 21 (0, 1152)	item_62	β_{62}	-0, 7596 (0, 1187)	item_63	β_{63}	-0, 4264 (0, 1151)	item_64	β_{64}	-0, 5281 (0, 1169)
	item_65	β_{65}	-0, 0499 (0, 1139)	item_66	β_{66}	-0, 6208 (0, 1169)	item_67	β_{67}	-0, 4383 (0, 1152)	item_68	β_{68}	-0, 4075 (0, 1159)
	item_69	β_{69}	0, 1862 (0, 1149)	item_70	β_{70}	-0, 1555 (0, 1139)	item_71	β_{71}	-0, 6209 (0, 1169)	item_72	β_{72}	-0, 1355 (0, 1148)
	item_73	β_{73}	-0, 5106 (0, 1157)	item_74	β_{74}	-0, 0383 (0, 114)	item_75	β_{75}	-0, 5844 (0, 1165)	item_76	β_{76}	-0, 2538 (0, 1151)
	item_77	β_{77}	-0, 4025 (0, 1149)	item_78	β_{78}	-0, 261 (0, 1142)	item_79	β_{79}	-0, 7472 (0, 1186)	item_80	β_{80}	-0, 1009 (0, 1149)
ABSTRACTO	item_81	β_{81}	-0, 6339 (0, 117)	item_82	β_{82}	-0, 1083 (0, 1139)	item_83	β_{83}	-0, 4984 (0, 1156)	item_84	β_{84}	-0, 2065 (0, 115)
	item_85	β_{85}	-0, 5595 (0, 1162)	item_86	β_{86}	-0, 2136 (0, 114)	item_87	β_{87}	-0, 5838 (0, 1164)	item_88	β_{88}	-0, 5647 (0, 1172)
	item_89	β_{89}	-0, 5597 (0, 1162)	item_90	β_{90}	-0, 3434 (0, 1145)	item_91	β_{91}	-0, 646 (0, 1171)	item_92	β_{92}	-0, 5527 (0, 1171)
	item_93	β_{93}	-0, 4389 (0, 1151)	item_94	β_{94}	-0, 2019 (0, 114)	item_95	β_{95}	-0, 9444 (0, 122)	item_96	β_{96}	-0, 5042 (0, 1166)
	item_97	β_{97}	-0, 7596 (0, 1188)	item_98	β_{98}	-0, 3198 (0, 1144)	item_99	β_{99}	-0, 7595 (0, 1188)	item_100	β_{100}	-0, 5282 (0, 1168)
Varianzas												
	Efecto aleatorio	σ_p^2	0,152 (1,4768)									

Tabla 3.32: Modelo 15: Estimadores de los parámetros del DIF - Abstracto

En las tablas 3.33 y 3.35 se muestran los modelos 16 y 17 en los que se incluyen las tres variables diferenciales la diferencia entre los dos modelos es que en el primero los ítems son efectos fijos, y en el segundo son efectos aleatorios.

En ambos modelos las variables diferenciales no son significativas.

Parámetro	Notación	Ecuación (2.13)	
		Estimador	Valor p
Coefficientes fijos ^a			
Intercepto	ω_0	-0,5331 (0,0574)	2×10^{-16}
Femenino		Constante	
Masculino	ω_1	0,1817 (0,0564)	0,0013
dif_ver	ζ_1	0,0275 (0,0865)	0,750
dif_num	ζ_2	-0,0541 (0,0861)	0,529
dif_abs	ζ_3	-0,0710 (0,1002)	0,479
Varianzas ^b			
Efecto aleatorio del estudiante	σ_p^2	0,1512 (1,4753)	
Efecto aleatorio del ítem	σ_i^2	0,1015 (1,3752)	

Tabla 3.33: **Modelo 16:** Estimadores de los parámetros del DIF - Verbal, Numérico, Abstracto (Ítems Aleatorios)

^aEn paréntesis el error del estimador

^bEn paréntesis la variación del *odds ratio*

	Intercepto		Intercepto		Intercepto		Intercepto	
VERBAL	item_1	0,1865	item_2	0,1443	item_3	0,2704	item_4	0,0912
	item_5	0,1018	item_6	-0,5598	item_7	-0,3065	item_8	-0,4852
	item_9	-0,4486	item_10	-0,2719	item_11	0,4788	item_12	0,6041
	item_13	0,4684	item_14	0,4788	item_15	0,6776	item_16	0,6671
	item_17	0,4372	item_18	0,646	item_19	0,027	item_20	0,1231
	item_21	-0,0815	item_22	-0,0161	item_23	-0,0161	item_24	0,0912
	item_25	-0,1925	item_26	-0,1145	item_27	-0,4245	item_28	-0,2605
	item_29	-0,2605	item_30	-0,2605	item_31	-0,3532	item_32	-0,4125
	item_33	-0,4975	item_34	-0,5347	item_35	-0,1812	item_36	-0,1035
	item_37	-0,1035	item_38	-0,2037	item_39	-0,2377	item_40	-0,1925
NUMÉRICO	item_41	-0,1925	item_42	-0,0705	item_43	0,3435	item_44	0,4476
	item_45	0,2495	item_46	0,3851	item_47	0,2913	item_48	0,1759
	item_49	0,3017	item_50	0,197	item_51	0,1337	item_52	0,1018
	item_53	0,1231	item_54	0,2075	item_55	0,0485	item_56	0,197
	item_57	0,0806	item_58	0,2075	item_59	0,0912	item_60	0,1548
	item_61	0,1443	item_62	0,1018	item_63	0,0912	item_64	-0,0487
	item_65	0,0806	item_66	0,1018	item_67	0,0912	item_68	-0,0705
	item_69	-0,0378	item_70	-0,1812	item_71	0,0378	item_72	-0,0378
	item_73	-0,0925	item_74	-0,3532	item_75	-0,1925	item_76	-0,1255
	item_77	-0,1255	item_78	-0,0378	item_79	-0,1255	item_80	-0,1035
ABSTRACTO	item_81	-0,7764	item_82	-0,6422	item_83	-0,5524	item_84	-0,7218
	item_85	-0,0738	item_86	-0,1068	item_87	-0,0848	item_88	0,0024
	item_89	0,1203	item_90	0,099	item_91	0,0132	item_92	0,1203
	item_93	0,3618	item_94	0,2573	item_95	0,3931	item_96	0,2992
	item_97	-0,0192	item_98	-0,0084	item_99	0,0348	item_100	0,0132

Tabla 3.34: Estimadores de los efectos aleatorios del modelo 16

	Parámetro	Notación	Ecuación (2.11)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.11)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.11)	Parámetro	Notación	Ecuación (2.11)	
	Coefficientes fijos ^a												
	Intercepto	ω_0	-0,3343 (0,1185)										
	Femenino		Constante										
	Masculino	ω_1	0,1823 (0,0566)										
	dif_ver	ζ_1	0,0325 (0,0869)										
	dif_num	ζ_2	-0,0631 (0,0864)										
	dif_abs	ζ_3	-0,0615 (0,1009)										
VERBAL	item_1	β_0	Constante	item_2	β_1	-0,0458 (0,1539)	item_3	β_2	0,0958 (0,1534)	item_4	β_3	-0,1055 (0,1542)	
	item_5	β_4	-0,0935 (0,1542)	item_6	β_5	-0,8538 (0,1636)	item_7	β_6	-0,5574 (0,1586)	item_8	β_7	-0,7654 (0,1622)	
	item_9	β_8	-0,7225 (0,1613)	item_10	β_9	-0,5176 (0,1581)	item_11	β_{10}	0,33 (0,1535)	item_12	β_{11}	0,4715 (0,1538)	
	item_13	β_{12}	0,3183 (0,1536)	item_14	β_{13}	0,33 (0,1535)	item_15	β_{14}	0,555 (0,1545)	item_16	β_{15}	0,543 (0,1544)	
	item_17	β_{16}	0,2831 (0,1535)	item_18	β_{17}	0,5191 (0,1539)	item_19	β_{18}	-0,1778 (0,1546)	item_20	β_{19}	-0,0697 (0,1541)	
	item_21	β_{20}	-0,3004 (0,1557)	item_22	β_{21}	-0,2264 (0,1551)	item_23	β_{22}	-0,2265 (0,1551)	item_24	β_{23}	-0,1055 (0,1543)	
	item_25	β_{24}	-0,4265 (0,157)	item_26	β_{25}	-0,3378 (0,1561)	item_27	β_{26}	-0,6943 (0,1607)	item_28	β_{27}	-0,5044 (0,1579)	
	item_29	β_{28}	-0,5044 (0,1579)	item_30	β_{29}	-0,5044 (0,1578)	item_31	β_{30}	-0,6113 (0,1594)	item_32	β_{31}	-0,6803 (0,1605)	
	item_33	β_{32}	-0,7799 (0,1623)	item_34	β_{33}	-0,824 (0,1632)	item_35	β_{34}	-0,4137 (0,157)	item_36	β_{35}	-0,3253 (0,1558)	
	item_37	β_{36}	-0,3253 (0,1559)	item_38	β_{37}	-0,4394 (0,1573)	item_39	β_{38}	-0,4783 (0,1577)	item_40	β_{39}	-0,4265 (0,1568)	
	NUMÉRICO	item_41	β_{40}	-0,4128 (0,1573)	item_42	β_{41}	-0,2741 (0,156)	item_43	β_{42}	0,192 (0,1537)	item_44	β_{43}	0,3091 (0,1537)
		item_45	β_{44}	0,0864 (0,1541)	item_46	β_{45}	0,2388 (0,1538)	item_47	β_{46}	0,1335 (0,1538)	item_48	β_{47}	0,0038 (0,1541)
item_49		β_{48}	0,1452 (0,1539)	item_50	β_{49}	0,0275 (0,1543)	item_51	β_{50}	-0,0437 (0,1543)	item_52	β_{51}	-0,0795 (0,1546)	
item_53		β_{52}	-0,0556 (0,1545)	item_54	β_{53}	0,0393 (0,1542)	item_55	β_{54}	-0,1396 (0,1551)	item_56	β_{55}	0,0275 (0,1542)	
item_57		β_{56}	-0,1035 (0,1546)	item_58	β_{57}	0,0393 (0,154)	item_59	β_{58}	-0,0915 (0,1549)	item_60	β_{59}	-0,0199 (0,1542)	
item_61		β_{60}	-0,0318 (0,1542)	item_62	β_{61}	-0,0795 (0,1546)	item_63	β_{62}	-0,0915 (0,1546)	item_64	β_{63}	-0,2494 (0,1558)	
item_65		β_{64}	-0,1035 (0,1545)	item_66	β_{65}	-0,0795 (0,1547)	item_67	β_{66}	-0,0915 (0,1546)	item_68	β_{67}	-0,2741 (0,1559)	
item_69		β_{68}	-0,2371 (0,1557)	item_70	β_{69}	-0,3999 (0,1572)	item_71	β_{70}	-0,1517 (0,155)	item_72	β_{71}	-0,2371 (0,1556)	
item_73		β_{72}	-0,2989 (0,1564)	item_74	β_{73}	-0,5977 (0,1597)	item_75	β_{74}	-0,4128 (0,1574)	item_76	β_{75}	-0,3365 (0,1565)	
item_77		β_{76}	-0,3365 (0,1567)	item_78	β_{77}	-0,2371 (0,1558)	item_79	β_{78}	-0,3365 (0,1565)	item_80	β_{79}	-0,3114 (0,1564)	
ABSTRACTO	item_81	β_{80}	-1,113 (0,1708)	item_82	β_{81}	-0,9483 (0,1666)	item_83	β_{82}	-0,8405 (0,1645)	item_84	β_{83}	-1,0456 (0,1687)	
	item_85	β_{84}	-0,2867 (0,1563)	item_86	β_{85}	-0,3242 (0,1568)	item_87	β_{86}	-0,2992 (0,1565)	item_88	β_{87}	-0,2005 (0,1555)	
	item_89	β_{88}	-0,0678 (0,1546)	item_90	β_{89}	-0,0917 (0,1548)	item_91	β_{90}	-0,1883 (0,1553)	item_92	β_{91}	-0,0678 (0,1548)	
	item_93	β_{92}	0,2035 (0,1539)	item_94	β_{93}	0,0862 (0,1542)	item_95	β_{94}	0,2386 (0,154)	item_96	β_{95}	0,1332 (0,154)	
	item_97	β_{96}	-0,225 (0,1557)	item_98	β_{97}	-0,2127 (0,1557)	item_99	β_{98}	-0,164 (0,1553)	item_100	β_{99}	-0,1883 (0,1556)	
		Varianzas ^b											
	Efecto aleatorio	σ_p^2	0,1519 (1,4766)										

Tabla 3.35: **Modelo 17:** Estimadores de los parámetros del DIF - Verbal, Numérico, Abstracto (Ítems Fijos)^aEn paréntesis el error del estimador^bEn paréntesis la variación del *odds ratio*

3.3. Resumen de los resultados

En la tabla 3.36 se presenta una lista de todos los modelos implementados a lo largo de este capítulo, en este resumen se indican las variables usadas y si se las usó como efecto aleatorio o como efecto fijo. Adicionalmente se indica el AIC (*Akaike Information Criterion*) y el BIC (*Bayesian Information Criterion*) para cada modelo. El AIC y el BIC son usados para comparar modelos, las expresiones para cada uno de ellos son:

$$AIC = -2 \ln(L) + 2k \quad (3.1)$$

$$BIC = -2 \ln(L) + \ln(N) k \quad (3.2)$$

donde k es el número de parámetros estimados, L es la verosimilitud del modelo, y N es el número de observaciones. Ambos pueden ser vistos como medidas que incluyen la bondad de ajuste y la complejidad de un modelo, en los dos casos la bondad de ajuste del modelo se la mide negativamente con $-2 \ln(L)$ y la complejidad se la mide positivamente usando $2k$ o $\ln(N) k$.

El término de la complejidad es mucho más riguroso en el caso del BIC, por lo que cuando se usa el BIC se tiende a escoger modelos que son más parsimoniosos que los escogidos con el AIC, un modelo se puede considerar parsimonioso si ajusta bien los datos pero con la menor cantidad de variables regresoras posibles (Vandekerckhove et al., 2014). Valores más bajos del BIC de un modelo indican mejor calidad del mismo. (Schwarz, 1978; Akaike, 1974)

En este trabajo el criterio que fue usado para escoger los mejores modelos fue el BIC. En general aquellos modelos con el BIC más bajo fueron aquellos en que los ítems se consideraron efectos aleatorios. Los modelos con el BIC más bajo fueron los modelos 3, 10, 11 y 12. Estos 4 modelos tienen en común que usan el género del aspirante como un regresor en los efectos fijos.

Algunos autores como Braun et al. (2014) o Yu & Yau (2012) proponen otras me-

metodologías para escoger el mejor modelo, los primeros proponen un método basado en validación cruzada predictiva y los segundos una metodología basada en el AIC condicional.

	Intercepto	Ítem	Género	Sección	Tipo de Colegio	Distrito	Diferencial	AIC	BIC
Modelo 1(a)	Sí			Fijo				47101,19	47135,10
Modelo 1(b)	Sí	Aleatorio		Fijo				46548,39	46590,78
Modelo 2	No	Fijo	Fijo					46409,25	47273,93
Modelo 3	Sí	Aleatorio	Fijo					46534,31	46568,22
Modelo 4	Sí	Aleatorio			Fijo			46548,04	46581,95
Modelo 5	Sí	Aleatorio	Fijo		Fijo			46535,59	46586,45
Modelo 6	Sí	Fijo	Fijo		Fijo			46409,08	47282,24
Modelo 7	Sí	Aleatorio	Aleatorio					46534,37	46585,23
Modelo 8	Sí	Aleatorio				Aleatorio		46549,78	46583,69
Modelo 9	No	Fijo				Aleatorio		46424,70	47289,41
Modelo 10	Sí	Aleatorio	Fijo				Verbal	46534,88	46577,27
Modelo 11	Sí	Aleatorio	Fijo				Numérico	46535,61	46578,00
Modelo 12	Sí	Aleatorio	Fijo				Abstracto	46535,70	46578,10
Modelo 13	No	Fijo	Fijo				Verbal	46409,60	47282,73
Modelo 14	No	Fijo	Fijo				Numérico	46410,10	47283,29
Modelo 15	No	Fijo	Fijo				Abstracto	46410,90	47284,02
Modelo 16	Sí	Aleatorio	Fijo				3 secciones	46538,31	46597,65
Modelo 17	Sí	Fijo	Fijo				3 secciones	46413,00	47303,10

Tabla 3.36: Resumen de los modelos implementados

3.4. Discusión

Los primeros artículos dedicados a los modelos de respuesta al ítem explicativos (EIRM) estaban enfocados a la implementación de los mismos en el área de la psicometría, en De Boeck & Wilson (2004) por ejemplo se utiliza un conjunto de preguntas sobre agresión verbal, sin embargo los autores aclaran que es posible extender el uso de estos modelos a la medición educativa.

En este trabajo se han tomado en cuenta covariables de ítems, de personas o de personas por ítem y se han implementado los EIRM en un conjunto de datos de calificaciones de pruebas de ingreso a una universidad. Algunos autores como Briggs (2008), Stevenson et al. (2013), Abdullah et al. (2012), Santi et al. (2015), Albano & Rodriguez (2013) y Kan & Bulut (2014) han realizado implementaciones de los EIRM tomando en cuenta todas o algunas de este tipo de covariables.

En cuanto a las covariables de ítems se realizó la implementación de un modelo lineal logístico de prueba, de este modelo se obtuvo que la sección de razonamiento abstracto presentaba mayor dificultad para los estudiantes. La inclusión de secciones de razonamiento abstracto en exámenes de ingreso no es nueva, sin embargo es un área poco trabajada a nivel medio ya que recién en los cuatro últimos años los programas educativos de nivel medio han incluido materias que permiten desarrollar este tipo de razonamiento. Sería interesante, en el lapso de 3 años, realizar un estudio parecido a los estudiantes que en sus seis años de escolaridad hayan estado expuestos a ese tipo de materias. Un estudio similar se realizó en Briggs (2008) en el que se midió los logros en materias relacionadas a ciencias tomando en cuenta las áreas de la ciencia evaluadas.

Con respecto a las covariables de personas se realizó la implementación de modelos de Regresión latente 1PL y modelos multinivel. En los modelos RL1PL se utilizó el género y el tipo de colegio como predictores. Los hallazgos en cuanto al género indican que un estudiante de género masculino tiene mayor probabilidad de

responder correctamente un ítem, en Briggs (2008) se utilizó el género como covariable de persona y no se encontraron diferencias significativas entre los dos géneros. Mientras que en el caso del tipo de colegio se encontró que los estudiantes de colegios particulares tienen mayor probabilidad de contestar correctamente un ítem. Al igual que en el LLTM, resultaría interesante realizar este estudio en el lapso de 3 años con la finalidad de evaluar si los cambios realizados al sistema educativo en los últimos años han impactado de manera significativa en los estudiantes de colegios fiscales puesto que en estas instituciones los cambios han sido más radicales.

Los modelos multinivel implementados mostraron que el distrito al que pertenece el estudiante no influye en la probabilidad de contestar correctamente un ítem. Estos resultados pueden verse afectados por el número de estudiantes que teníamos de cada distrito, sería interesante que estos modelos sean implementados en un conjunto de datos más grande, por ejemplo el conjunto de datos del ENES (Examen Nacional para la Educación Superior) a nivel nacional para verificar si en efecto el distrito del que proviene el estudiante no influye en la probabilidad de contestar correctamente un ítem. Con un conjunto de datos más grande como el del ENES, se podría realizar un modelo multinivel en el que los niveles de agrupamiento sean las provincias de donde viene el estudiante o las regiones naturales en las que se encuentra dividido el país.

En cuanto a los modelos DIF implementados, se trató de buscar si el género femenino y el tipo de colegio fiscal tenían un efecto de funcionamiento diferencial sobre cada una de las secciones del examen. No se halló evidencia de que las secciones del examen tengan un efecto de funcionamiento diferencial para estudiantes de colegio fiscal y de género femenino. En este trabajo no se utilizó previamente algún método conocido en la literatura para la detección de DIF. Kan & Bulut (2014) y Albano & Rodriguez (2013) utilizaron el género como variable para encontrar DIF en pruebas de matemáticas, ambos encontraron que el género masculino tenía ventajas en algunos ítems. Albano & Rodriguez (2013) en su estudio incluyó en las covariables de persona cuestiones relacionadas al ambiente socioeconómico del es-

tudiante, una extensión interesante para este trabajo sería la inclusión de variables relativas a características socioeconómicas o étnicas del estudiante a fin de ver la relación entre estas y la nota obtenida.

Este estudio puede servir además para que la universidad modifique su planificación a fin de hacer énfasis en las competencias donde los estudiantes tienen mayores dificultades, por ejemplo en Abdullah et al. (2012) se utilizaron EIRM para evaluar el desempeño de los estudiantes en un curso y a partir de los resultados obtenidos se realizaron cambios en los programas de la materia evaluada.

Algunos estudiantes, generalmente, realizan cursos previos a la realización de estos exámenes o contratan profesores particulares para que los preparen otros en cambio se preparan por su cuenta. Es posible que esa preparación adicional influya de alguna manera sobre los resultados, puesto que en estos cursos se adquieren o se perfeccionan ciertas habilidades. En un modelo de covariables por persona es posible incluir una covariable que tome en cuenta este aspecto para evaluar el efecto que tiene el tipo de preparación previa sobre la probabilidad de contestar correctamente un ítem. Por ejemplo Santi et al. (2015) hizo un estudio en el que trataba de explicar si la mejora en las habilidades de lectura ayudaba a mejorar las habilidades de percepción visual, se obtuvo que las mejoras en habilidades lectoras no ayudaba a mejorar las habilidades de percepción visual.

Para la implementación de estos modelos, se usó la función `glmer` del paquete **lme4** de R. Una limitación que se presentó fue los tiempos de ejecución de la función en algunos casos. Una extensión interesante al presente trabajo sería desarrollar un paquete para R que usando, por ejemplo, computación en paralelo permita reducir los tiempos de ejecución de los modelos.

Capítulo 4

Conclusiones y Recomendaciones

4.1. Conclusiones

De la investigación desarrollada se desprenden las siguientes conclusiones y resultados:

1. La teoría de respuesta al ítem tradicional permite explicar los resultados de pruebas sin tomar en cuenta las características de los individuos a los que se les administra las pruebas, sin embargo los modelos de respuesta al ítem explicativos facilitan la incorporación de las características de los individuos o de los ítems para poder explicar los resultados.
2. La inclusión de las características de los individuos o de los ítems se lo hace representando el problema como un modelo lineal mixto generalizado.
3. En los modelos LLTM implementados se encontró que la sección de razonamiento lógico y abstracto tiene menor probabilidad de ser contestada correctamente (Tabla 3.5).
4. En los modelos de Regresión Latente 1PL implementados se encontró que las personas del género masculino tienen mayor probabilidad de contestar correctamente un ítem, además la diferencia entre los dos géneros es significativa (Tabla 3.10).

5. En los modelos de Regresión Latente 1PL implementados se halló que las personas provenientes de colegios particulares tienen mayor probabilidad de contestar correctamente un ítem, además esta diferencia sí es significativa (Tabla 3.12).
6. En los modelos multinivel implementados se evidenció que el distrito no tiene efecto sobre las respuestas dadas a los ítems, es decir que las respuestas no dependen del distrito escolar del que proviene el aspirante (Tablas 3.19 y 3.23).
7. En los modelos DIF implementados no se evidenció que las variables de diferenciación funcional propuestas sean significativas, es decir que no se puede considerar que las mujeres de colegios fiscales tienen dificultad para contestar determinada sección de la prueba (Tablas 3.24, 3.26, 3.28, 3.30, 3.31, 3.32, 3.33 y 3.35).
8. El criterio usado para escoger los mejores modelos fue el BIC. En general se evidenció que los mejores modelos fueron aquellos en los que el género se consideró un efecto fijo y los ítems un efecto aleatorio, los modelos en los que se consideró el tipo de colegio o el distrito del que provenía el aspirante no fueron significativos (Tabla 3.36).

4.2. Recomendaciones

Una vez concluido este trabajo de investigación, se recomienda:

1. Implementar los modelos propuestos en conjuntos de datos más grandes, por ejemplo los exámenes del SNNA, en los que haya más miembros en los distritos escolares a fin de verificar si el distrito escolar no tiene algún efecto en los resultados obtenidos.
2. Realizar un estudio en el que se determine posibles causas por las que los temas de razonamiento lógico y abstracto son más difíciles para los estudiantes.
3. Realizar un estudio en el que se incluya una variable de diferenciamiento funcional que tome en cuenta si la persona que realiza el test pertenece a alguna etnia o nacionalidad indígena de nuestro país.
4. Realizar un estudio donde no solo se analice el funcionamiento diferencial por secciones, sino también por subsecciones. Por ejemplo en la sección de razonamiento verbal pueden haber subsecciones como sinónimos, completar oraciones, ordenar oraciones, etc...
5. Analizar la forma de incluir en los modelos estudiados un parámetro de discriminación para los ítems.

Bibliografía

- Abdullah, H., Arsad, N., Hanin Hashim, F., Abdul Aziz, N., Amin, N., & Hamid Ali, S. (2012). Evaluation of students' achievement in the final exam questions for microelectronic (kkkl3054) using the rasch model. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 60, 119 – 123.
- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716 – 723.
- Albano, A. & Rodriguez, M. (2013). Examining differential math performance by gender and opportunity to learn. *Educational and Psychological Measurement*, 73(5), 836–856.
- Bonate, P. (2011). *Pharmacokinetic-Pharmacodynamic Modeling and Simulation* (Primera ed.). New York: Springer-Verlag.
- Braun, J., Sabanés B., D., & Held, L. (2014). Choice of generalized linear mixed models using predictive crossvalidation. *Computational Statistics and Data Analysis*, 75, 190 – 202.
- Briggs, D. (2008). Using explanatory item response models to analyze group differences in science achievement. *Applied Measurement in Education*, 21(2), 89–118.
- Clogg, C., Petkova, E., & Haritou, H. (1995). Statistical methods for comparing regression coefficients between models. *American Journal of Sociology*, 100, 1261 – 1293.
- Davidian, M. & Giltinan, D. (1995). *Nonlinear models for repeated measurement data* (Primera ed.). London: Chapman & Hall.

- Davidian, M. & Giltinan, D. M. (1993). Analysis of repeated measurement data using nonlinear mixed effects models. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 20, 1 – 24.
- de Ayala, R. J. (2013). *The theory and practice of item response theory* (Primera ed.). Methodology in the Social Sciences. New York: Guilford Publications.
- De Boeck, P. (2008). Random item IRT models. *Psychometrika*, 73(4), 553 – 559.
- De Boeck, P., Bakker, M., Zwitser, R., Nivard, M., Hofman, A., Tuerlinckx, F., & Partchev, I. (2011). The estimation of item response models with the lmer function from the lme4 package in R. *Journal of Statistical Software*, 19(12), 1 – 28.
- De Boeck, P., Naberezny, C., & Tavares, H. (2010). *Linear and Nonlinear Generalized Mixed Models: inference and applications* (Primera ed.). EMR2011.
- De Boeck, P. & Wilson, M. (2004). *Explanatory Item Response Models, A Generalized Linear and Nonlinear Approach*. Statistics for Social Science and Public Policy. New York: Springer - Verlag.
- DeMars, C. (2010). *Item Response Theory, understanding statistics measurement* (Primera ed.). Understanding Statistics. Oxford University Press.
- Demidenko, E. (2013). *Mixed Models, Theory and Applications With R* (Segunda ed.). Probability and Statistics. New Jersey: Wiley.
- Diffey, S., Welsh, A., Smith, A., & Cullis, B. (2013). A faster and computationally more efficient REML (PX)EM algorithm for linear mixed models. *University of Wollongong, Centre for Statistical & Survey Methodology Working Paper Series*, 8, 2 – 13.
- Draney, K. & Wilson, M. (2008). A LLTM approach to the examination of teachers' ratings of classroom assesment tasks. *Psychology Science Quarterly*, 50(3), 417 – 432.

- El Telégrafo (2012). Distritos educativos, por una atención ágil a usuarios. *El Telégrafo*, 12.
- Fahrmeir, L. & Tutz, G. (2001). *Multivariate Statistical Modeling* (Segunda ed.). New York: Springer-Verlag.
- Fischer, G. (1973). The linear logistic test model as an instrument in educational research. *Acta Psychologica*, 37, 359 – 374.
- Fisher, R. (1922). On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 222, 309 – 368.
- Foulley, J.-L. & Dyk, D. A. (2000). The PX-EM algorithm for fast stable fitting of henderson's mixed model. *Genet. Sel. Evol*, 32, 143 – 163.
- Foulley, J.-L., Jaffrézic, F., & Robert-Granié, C. (2000). EM-REML estimation of covariance parameters in gaussian mixed models for longitudinal data analysis. *Genet. Sel. Evol*, 32, 129 – 141.
- Galecki, A. T., West, B. T., & Welch, K. B. (2007). *Linear Mixed Models: A Practical Guide Using Statistical Software* (Primera ed.). Statistics. Boca Raton: Chapman & Hall/Crc.
- Galwey, N. (2006). *Introduction to mixed modelling : beyond regression and analysis of variance* (Primera ed.). England: Wiley.
- Ge, Z., Bickel, P., & Rice, J. (2004). An Approximate Likelihood Approach to Non-linear Mixed Effects Models via spline approximation. *Computational Statistics and Data Analysis*, 46, 747 – 776.
- Goncalves, F. B., Gamerman, D., & Soares, T. M. (2013). Simultaneous multifactor DIF analysis and detection in item response theory. *Computational Statistics and Data Analysis*, 59, 144 – 160.
- Hartley, H. O. & Rao, J. N. K. (1967). Maximum likelihood estimation for the mixed analysis of variance model. *Biometrika*, 54, 93 – 108.

- Harville, D. A. (1974). Optimal procedures for some constrained selection problems. *Journal of the American Statistical Association*, *69*, 446 – 452.
- Holland, P. & Wainer, H. (1993). *Differential Item Functioning* (Primera ed.). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. Publishers.
- Janssen, R., Schepers, J., & Peres, D. (2004). *Models with items and item group predictors*, (pp. 198 –212). New York: Springer - Verlag.
- Jiang, J. (1996). REML, estimation: Asymptotic behavior and related topics. *Annals of statistics*, *24*, 255 – 286.
- Jiang, J. (1998). Consistent estimators in Generalized Linear Mixed Models. *Journal of the American Statistical Association*, *93*(442), 720 –729.
- Jiang, J. (2007). *Linear and Generalized Linear Mixed Models and Their Applications* (Primera ed.). Statistics. Springer.
- Kan, A. & Bulut, O. (2014). Examining the relationship between gender dif and language complexity in mathematics assessments. *International Journal of Testing*, *14*(3), 245 – 264.
- Kuhn, E. & Lavielle, M. (2005). Maximum likelihood estimation in nonlinear mixed effects models. *Computational Statistics & Data Analysis*, *49*, 1020 – 1038.
- Lindstrom, M. J. & Bates, D. M. (1990). Nonlinear mixed effects models for repeated measures data. *Biometrics*, *46*, 673–687.
- Liu, C., Rubin, D. B., & Wu, Y. N. (1998). Parameter expansion to accelerate EM: The PX-EM algorithm. *Biometrika*, *85*, 755 – 770.
- Lord, F. M. (1952). *A theory of test Scores* (Primera ed.). Psychometric Society.
- Magis, D., Raiche, G., Béland, S., & Gérard, P. (2011). A generalized logistic regression procedure to detect differential item functioning among multiple groups. *International Journal of Testing*, *11*(4), 365 – 386.

- Mapuranga, R., Dorans, N., & Middleton, K. (2008). A review of recent developments in differential item functioning.
- McCullagh, P. & Nelder, J. A. (1989). *Generalized Linear Models* (Segunda ed.). London: Chapman & Hall.
- McCulloch, C. E. (1997). Maximum likelihood algorithms for generalized linear mixed models. *Journal of the American Statistical Association*, *92*(437), 162 – 170.
- McCulloch, C. E., Searle, S., & Neuhaus, J. (2008). *Generalized, Linear and Mixed Models* (Segunda ed.). Probability and Statistics. Wiley.
- Nielsen, J. & Dean, C. B. (2007). Generalized linear mixed models: a review and some extensions. *Lifetime Data Anal.*, *13*, 497 – 512.
- Paternoster, R., Brame, R., Mazerolle, P., & Piquero, A. (1998). Using the correct statistical Test for the equality of regression coefficients. *Criminology*, *36*(4), 859 – 866.
- Patterson, H. & Thompson, R. (1971). Recovery of interblock information when block sizes are unequal. *Biometrika*, *58*, 545 – 554.
- Pinheiro, J. & Bates, D. (1994). Model building for nonlinear mixed-effects models. Research Report.
- Pinheiro, J. C. (1994). *Topics in Mixed Effects Models*. PhD thesis, University of Wisconsin, Madison.
- Rabe-Hesketh, S. & Skrondal, A. (2010). Generalized linear mixed models. In P. Peterson, E. Baker, & B. McGaw (Eds.), *International Encyclopedia of Education (Third Edition)* (Third Edition ed.). (pp. 171 – 177). Oxford: Elsevier.
- Racine-Poon, A. (1985). A bayesian approach to nonlinear random effects models. *Biometrics*, *41*(4), 1015 – 1023.

- Raudesbaum, S. W. (1993). A crossed random effects model for unbalanced data with applications in cross-sectional and longitudinal research. *Journal of Educational & Behavioral Statistics, 18*, 321 – 349.
- Rjimen, F., Tuerlinckx, F., De Boeck, P., & Kuppens, P. (2003). A nonlinear mixed model framework, for Item Response theory. *Psychological Methods, 8*(2), 185 – 205.
- Santi, K. L., Kulesz, P. A., Khalaf, S., & Francis, D. J. (2015). Developmental changes in reading do not alter the development of visual processing skills: an application of explanatory item response models in grades k-2. *Frontiers in Psychology, 6*.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics, 6*(2), 461 – 464.
- Searle, S. R., Casella, G., & McCulloch, C. E. (1992). *Variance Components* (Primera ed.). Wiley.
- Sijtsma, K. & Junker, B. (2006). Item response theory: past performance, present developments, and future expectations. *Behaviormetrika, 33*(12), 75 – 102.
- Sinha, S. K. (2004). Robust analysis of generalized linear mixed models. *Journal of the American Statistical Association, 99*(466), 451 – 460.
- Stevenson, C. E., Hickendoff, M., Resing, W. C. M., Heiser, W. J., & de Boeck, P. A. L. (2013). Explanatory item response modeling of children's change on a dynamic test of analogical reasoning. *Intelligence, 41*, 157 – 168.
- Tuerlinckz, F., Rjimen, F., Verbeke, G., & De Boeck, P. (2006). Statistical inference in generalized linear mixed models. *British Journal of Mathematical and Statistical Society, 59*, 225 – 255.
- Vandekerckhove, J., Matzke, D., & Wagenmakers, E. (2014). Model comparison and the principle of parsimony.

- Vonesh, E. F. (1996). A note on the use of laplace's approximation for nonlinear mixed-effects models. *Biometrika*, *83*(2), 447 – 452.
- Wakefield, J. (1996). The bayesian analysis of population pharmacokinetic models. *Journal of the American Statistical Association*, *91*(433), 62 – 75.
- Walker, S. (1996). An EM algorithm for nonlinear random effects models. *Biometrics*, *52*(3), 934 – 944.
- Wang, L. (2007). Estimating non-linear mixed effects models by the generalized profiling method and its application to pharmacokinetics. Master's thesis, McGill University.
- Wilson, M., De Boeck, P., & Carstensen, C. (2008). Explanatory item response models: A brief introduction. In *Assesment of Competencies in Educational Contexts* (Primera ed.). chapter 8. Hogrefe & Huber.
- Wolfinger, R. D. & Lin, X. (1997). Two Taylor-series approximation methods for nonlinear mixed models. *Computational Statistics and Data Analysis*, *25*, 465 – 490.
- Xiang, L. & Tse, S.-K. (2003). An approximate EM algorithm for maximum likelihood estimation in generalized linear mixed models. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, *32*, 787 – 798.
- Yu, D. & Yau, K. (2012). Conditional akaike information criterion for generalized linear mixed models. *Computational Statistics and Data Analysis*, *56*, 629 – 644.
- Zwinderman, A. H. (1991). A generalized Rasch model for manifest predictors. *Psychometrika*, *56*, 589 – 600.