



**ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL
INSTITUTO DE CIENCIAS HUMANISTICAS Y ECONOMICAS**

Tesis de Grado previa a la obtención del título de:
Economista en Gestión Empresarial
Especialización Sector Público y Finanzas

Tema:

**MODELOS ECONOMETRICOS DE PREDICCIÓN
MACROECONÓMICA EN EL ECUADOR**

Autoras:

MARÍA LEONOR JIMÉNEZ ÁLAVA
KENIA PÉREZ CEVALLOS
MARÍA PÍA WILLIAMS CASCANTE

Febrero, 2003

A nuestros padres.

A mis abuelos Ángel y Rodolfo.

A mi hermano Leonardo.

*A Allan Ernesto, porque en sus
primeros días de existencia, nos enseñó
lo que es luchar por la vida,
consiguiendo su milagro.*



*Agradecemos a Dios, porque nada
pasa por casualidad, todo viene
de su bondad.*

*A Manuel González, por dirigir
este trabajo; y, a Byron Idrovo,
por el apoyo en la realización
del mismo.*

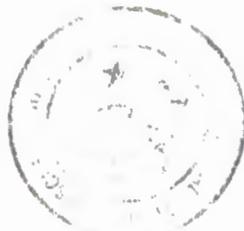
DECLARACIÓN EXPRESA

“ La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas, expuestos en esta Tesis de Grado, nos corresponde exclusivamente; y, el patrimonio intelectual de la misma, a la Escuela Superior Politécnica del Litoral”

Ma. Leonor Jiménez Alava
Ma. Leonor Jiménez Alava
Mat. #199813643

Kenia Pérez Cevallos
Kenia Pérez Cevallos
Mat. #199722794

Maria Pía Williams Casante
Ma. Pía Williams Casante
Mat. #199722810



TRIBUNAL DE GRADO

Dr. Hugo Arias
Sub-Director del ICHE

MSc. Manuel González
Director de Tesis

Econ. Leonardo Sánchez
Vocal

MSc. María Luisa Granda
Vocal

INDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN.....	10
I. MARCO TEÓRICO.....	12
1.1 Modelos Univariantes de Series de Tiempo.....	13
1.1.1 Propiedades de los procesos AR, MA y ARMA	14
1.1.2 Modelos de Series Univariantes de Tiempo No Estacionarios.....	28
1.1.2.1 Series estacionarias en Tendencia y Series estacionarias en Diferencias.....	28
1.1.2.2 Contrastes de estacionariedad y raíces unitarias.....	31
1.1.2.2.1 Contraste de Dickey-Fuller.....	32
1.1.2.2.2 Test de Phillips y Perron.....	38
1.1.2.2.3 Test Secuencial de Zivot y Andrews.....	39
1.1.2.2.4 Test de Bai-Perron.....	41
1.1.3 Identificación de los Modelos ARIMA.....	41
1.1.4 Estimación.....	42
1.1.5 Diagnóstico.....	48
1.1.5.1 Análisis de los coeficientes.....	48
1.1.5.2 Análisis de Residuos.....	49
1.1.6 Predicción.....	50
1.2 Modelos de Vectores Autorregresivos.....	57
1.2.1 Estimación del VAR.....	58
1.2.2 Selección del Orden del VAR.....	61
1.2.3 Predicción del VAR.....	62
II ANÁLISIS DE LAS VARIABLES.....	64
2.1 Funciones de Autocorrelación.....	65
2.2 Contrastes de Estacionariedad.....	65



I.I.] RESULTADOS.....76

 3.1 Modelos ARIMA.....76

 3.1.1 Identificación.....76

 3.1.2 Estimación.....81

 3.1.3 Diagnóstico.....82

 3.1.4 Predicción.....83

 3.2 Modelos VAR.....84

 3.2.1 Identificación.....84

 3.2.2 Estimación.....85

 3.2.3 Predicción.....87

 3.3 Proyecciones.....89

CONCLUSIONES.....91

RECOMENDACIONES.....93

BIBLIOGRAFÍA.....94

ANEXOS.....96



INDICE DE CUADROS

	<i>Pág</i>
<i>CUADRO N° 1: Resultados del ADF test al 1%</i>	66
<i>CUADRO N° 2: Resultados del PP test al 1%</i>	67
<i>CUADRO N° 3: Resultados del ZA test al 5%</i>	69
<i>CUADRO N° 4: Resultados del Test ZA al 5%</i>	72
<i>CUADRO N° 5: Resultados del test ZA al 5%</i>	75
<i>CUADRO N° 6: Elección de modelo ARIMA para la variable PIB</i>	77
<i>CUADRO N° 7: Elección de modelo ARIMA para la variable IMP</i>	78
<i>CUADRO N° 8: Elección de modelo ARIMA para la variable INV</i>	80
<i>CUADRO N° 9: Estimación de los modelos ARIMA</i>	81
<i>CUADRO N° 10: Errores de predicción</i>	84
<i>CUADRO N° 11: Criterio Akaike</i>	85
<i>CUADRO N° 12: Estimación del modelo VAR</i>	86
<i>CUADRO N° 13: Errores de predicción</i>	87
<i>CUADRO N° 14: Errores de predicción de todos los modelos</i>	88
<i>CUADRO N° 15: Tasas anuales de crecimiento proyectadas</i>	89

INDICE DE GRAFICOS

	Pág
<i>GRAFICO N°1: Correlogramas de las series</i>	65
<i>GRÁFICO N°2: Test Secuencial Zivot y Andrews</i>	68
<i>GRAFICO N° 3 : Test Secuencial Zivot y Andrews</i>	71
<i>GRAFICO N°4 : Test Secuencial Zivot y Andrews</i>	74
<i>GRAFICO N°5: Ajuste del Modelo ARIMA para el PIB</i>	78
<i>GRAFICO N°6: Ajuste del modelo ARIMA para las Importaciones</i>	79
<i>GRAFICO N°7: Ajuste del modelo ARIMA para la Inversión</i>	80



INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es evaluar el desempeño de distintos modelos econométricos en la generación de predicciones de corto y mediano plazo utilizándose tres variables reales de la economía ecuatoriana, éstas son: **PIB, Importaciones e Inversión**. El propósito de dicho ejercicio no es sólo establecer cuál método presenta mejores resultados, sino también observar cuales son los problemas que se presentan en la utilización regular de cada método, de modo de extraer conclusiones sobre las ventajas e inconvenientes que se derivan de su aplicación.

Existen varios estudios publicados sobre los modelos econométricos como una herramienta de predicción. Entre ellos se encuentra el de *Grubisic y Manteiga (2000)*; un estudio realizado para la Argentina en el que se realiza un análisis de varios agregados monetarios con el objetivo de poder describir su comportamiento, cuantificar su relación con otras variables económicas y en base a esto, realizar pronósticos de su comportamiento futuro. Otro artículo es el realizado por *McCandless, Gabrielli y Murphy (2001)*, en el que se evalúa el desempeño de modelos econométricos –ARIMA y VAR- en la realización de predicciones para algunas variables reales de la economía argentina. También se puede mencionar la publicación de *Cuadrado, Lorenzo y Queijo (2002)*, quienes analizan las potencialidades y debilidades que se presentan en la predicción del PIB trimestral de la economía uruguaya.

La importancia de desarrollar modelos de predicción radica en que cada vez resulta más necesario para los agentes económicos disponer de estimaciones, lo más precisas posibles, sobre la evolución previsible de un amplio conjunto de indicadores económicos con el objetivo de contribuir a la toma de decisiones.

CAPÍTULO I

MARCO TEÓRICO

Determinar las características más importantes asociadas a un conjunto de series temporales es generalmente considerado como un paso decisivo en el análisis macroeconómico. Ésta es una de las razones por las que es deseable formular un modelo para una serie de tiempo. Sin embargo, para que tales modelos sean válidos deben ser consistentes con las propiedades estocásticas de los datos y ofrecer información relevante.

Así, los métodos de predicción proporcionan una forma científica de contrastar las hipótesis con la evidencia empírica y por ende, un procedimiento sistemático para avanzar en el conocimiento de la realidad económica subyacente¹.

Los modelos econométricos para la generación de predicciones pueden diferenciarse según el conjunto de información que utilizan. En este trabajo se estudiarán especialmente dos tipos de modelos lineales de series de tiempo:

- ◆ **Univariantes**
- ◆ **Vectores Autorregresivos (VAR)**

¹ Currie, D. (1994). "Economic Forecasts: Their relevance and use". *Applied economic forecasting techniques*, London Business School, 1-8.

1.1 MODELOS UNIVARIANTES DE SERIES DE TIEMPO

La representación formal de los procesos aleatorios que generan series reales se puede realizar a través de los modelos lineales de series temporales, desarrollados especialmente a través de la metodología de **Box y Jenkins** (1976).

Esta técnica conocida también como modelos **ARIMA** (autorregresivos, integrados y de medias móviles), analiza el comportamiento de una variable en función no de otras variables distintas y contemporáneas con las que pueda mantener algún tipo de relación de causalidad, sino a través de su propio pasado, tratando de obtener la mayor parte de información posible de los datos observados para, a partir de ellos, inferir cuál puede ser su evolución en el futuro.

La ventaja los modelos **ARIMA** es que se elimina la posibilidad de efectuar predicciones utilizando relaciones espurias entre variables. La desventaja, en cambio, es que los mismos pueden ver disminuida su capacidad predictiva al no incorporar otra información disponible y relevante para predecir la variable de interés².

Una característica notable de estos modelos es que la estacionariedad se encuentre presente en el proceso, ya que ello permitirá asegurar, de algún modo, que el proceso que genera la serie permanece invariante con respecto del tiempo, o, al menos, que la probabilidad de fluctuación alrededor de un valor medio constante, sea la misma en cualquier instante del tiempo.

Con el fin de averiguar si la serie temporal procede de un proceso estacionario, se aplicará una metodología -que se describirá más adelante- para identificar si las series son estacionarias alrededor de una tendencia determinística ó estocástica, mediante el uso de contrastes de estacionariedad.

² Hall, S. G. (1994). "Time series Forecasting". *Applied economic forecasting techniques*, London Business School, 9-28.

Una vez solucionado el problema de no estacionariedad de las series, se procederá a realizar la metodología de Box-Jenkins, la misma que se resume en los siguientes pasos: 1) *Identificación*, 2) *Estimación*, 3) *Validación*, y 4) *Predicción*.

1.1.1 Propiedades de los procesos AR, MA y ARMA

Las estructuras estocásticas estacionarias lineales que se tratarán de asociar a una serie de datos económicos se clasifican en tres tipos: a) el modelo autorregresivo, b) el modelo de medias móviles y, c) el modelo autorregresivo de medias móviles.

a) *Modelos Autorregresivos*

Un modelo autorregresivo es aquel que explica una variable por su valor en uno o varios períodos anteriores, más un término de error, estableciendo una relación funcional de tipo lineal.

Un modelo autorregresivo de orden p $AR(p)$ tiene la forma siguiente:

$$y_t = \delta + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

donde y_t es la variable por modelar, δ es la constante y ε_t es el término de error, que se caracteriza por comportarse como una variable aleatoria con media cero, varianza constante y ausencia de correlación entre los valores referidos a distintos períodos. Dicho error se denomina ruido blanco.

A continuación se analizará las características de los procesos $AR(1)$ y $AR(2)$ y los resultados obtenidos se van a generalizar al $AR(p)$.

Modelos Autorregresivos de primer orden AR(1)

El proceso AR(1) está definido como:

$$y_t = \delta + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Si es estacionario en media y varianza, entonces:

$$E(y_t) = E(y_{t-1}) = \mu \Rightarrow \mu = \delta + \alpha\mu \Rightarrow \mu = \frac{\delta}{1-\alpha}$$

$$V(y_t) = V(y_{t-1}) = \gamma_0 \Rightarrow \gamma_0 = \alpha^2 \gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2 \Rightarrow \gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2}$$

La condición a cumplir para que γ_0 sea positiva y finita es que $|\alpha| < 1$. En ese caso el modelo es estacionario en media y en varianza.

Además, si el modelo es estacionario en sentido amplio se tendrá las autocovarianzas³:

$$\text{Cov}(y_{t-1}, y_t) = \text{Cov}(y_t, y_{t+1}) = \gamma_1, \quad \forall t$$

$$\text{Cov}(y_{t-1}, y_t) = E[(y_{t-1} - \mu)(y_t - \mu)] = E(x_{t-1} x_t)$$

$$y_t = \delta + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t = \mu(1-\alpha) + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow y_t - \mu = \alpha(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \Rightarrow x_t = \alpha x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\gamma_1 = E(x_{t-1} x_t) = E(x_{t-1}(\alpha x_{t-1} + \varepsilon_t)) = \alpha E(x_{t-1}^2) + E(x_{t-1} \varepsilon_t) = \alpha \gamma_0$$

³ La función de autocovarianza es simétrica dado que $\gamma_k = \gamma_{-k}$.



x_{t-1} está correlacionado con ε_{t-1} mas no con ε_t , ya que es una variable ruido blanco y no presenta autocorrelación.

$$\gamma_2 = E(x_{t-2}x_t) = E(x_{t-2}(\alpha x_{t-1} + \varepsilon_t)) = \alpha E(x_{t-2}x_{t-1}) + E(x_{t-2}\varepsilon_t) = \alpha\gamma_1 = \alpha^2\gamma_0$$

.....

$$\gamma_k = \alpha^k\gamma_0 \quad \forall k \geq 1$$

El coeficiente de autocorrelación simple será:

$$\rho_k = \frac{E(x_t x_{t-k})}{\sqrt{V(x_t)}\sqrt{V(x_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

$$\rho_k = \frac{\alpha^k\gamma_0}{\gamma_0} = \alpha^k, \forall k$$

Los valores de la función de autocorrelación son las sucesivas potencias de α . La condición $|\alpha| < 1$ garantiza que los sucesivos valores ρ_k confluyan a cero, por lo que el correlograma (ver figura 1) puede tener dos aspectos distintos, dependiendo del signo de α . Para la función de autocorrelación parcial se deduce que el primer valor es ρ_1 y los valores restantes son cero.

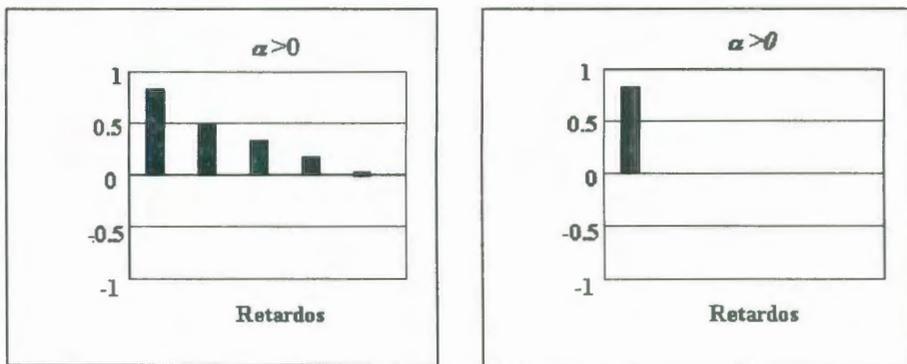


Figura 1 FAS y FAP de un proceso AR(1) con α positivo

Al utilizar el operador de rezagos⁴ L , se puede establecer la condición de estacionariedad:

$$LY_t = Y_{t-1}$$

$$L^2Y_t = LLY_t = LY_{t-1} = Y_{t-2}$$

.....

$$L^sY_t = Y_{t-s}$$

El modelo se escribirá como:

$$y_t = \delta + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t = \delta + \alpha Ly_t + \varepsilon_t$$

$$y_t - \alpha Ly_t = \delta + \varepsilon_t \Rightarrow (1 - \alpha L)y_t = \delta + \varepsilon_t$$

$$A(L)y_t = \delta + \varepsilon_t$$

Siendo $A(L) = (1 - \alpha L)$ el operador polinomial de retardos.

Para que el proceso AR(1) sea estacionario, se debe cumplir que $|\alpha| < 1$ siendo equivalente a la condición de que la raíz del operador polinomial $A(L) = 0$ deba caer fuera del círculo unitario:

$$1 - \alpha L = 0 \Rightarrow |L| > 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{\alpha} \right| > 1 \Rightarrow |\alpha| < 1$$

$$\text{Si } |\alpha| < 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{L} \right| < 1 \Rightarrow |L| > 1$$

⁴ El operador de rezagos, cuando se lo coloca delante de una variable indexada al tiempo, da el previo valor de la variable en la serie.

Modelos Autorregresivos de segundo orden AR(2)

El proceso AR(2) se define:

$$y_t = \delta + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Si es estacionario en media⁵ y varianza, entonces:

$$E(y_t) = E(y_{t-1}) = \mu \Rightarrow \mu = \delta + \alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu \Rightarrow \mu = \frac{\delta}{1 - \alpha_1 - \alpha_2}$$

$$V(y_t) = V(y_{t-1}) = V(y_{t-2}) = \gamma_0$$

$$V(y_t) = E(x_t^2) = E[x_t x_t] = E[x_t(\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \varepsilon_t)] = \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + E(x_t \varepsilon_t)$$

$$V(y_t) = \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2$$

Las autocovarianzas serán:

$$Cov(y_{t-1}, y_t) = Cov(y_t, y_{t+1}) = \gamma_1, \forall t$$

$$\gamma_1 = Cov(y_{t-1}, y_t) = E[(y_{t-1} - \mu)(y_t - \mu)] = E(x_{t-1} x_t) = E(x_{t-1}(\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \varepsilon_t))$$

$$\gamma_1 = \alpha_1 \gamma_0 + \alpha_2 \gamma_1$$

$$\gamma_2 = Cov(y_{t-2}, y_t) = E(x_{t-2} x_t) = E(x_{t-2}(\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \varepsilon_t))$$

$$\gamma_2 = \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_0$$

.....

$$\gamma_k = \alpha_1 \gamma_{k-1} + \alpha_2 \gamma_{k-2}, \forall k > 0$$

⁵ Para que la media sea finita $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 1$



El coeficiente de correlación simple será:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \alpha_1 \rho_{k-1} + \alpha_2 \rho_{k-2}, \forall k > 0$$

La FAS caerá exponencialmente hasta cero. Sin embargo, dicha convergencia puede presentar una gran variedad de aspectos, incluso puede tender a cero siguiendo una curva de tipo sinusoidal. Estas formas (ver figura 2) se pueden suscitar dependiendo de los signos que puedan tomar α_1 y α_2 . En cuanto a la FAP los dos primeros valores serán no nulos, y para valores $k > 2$ serán cero.

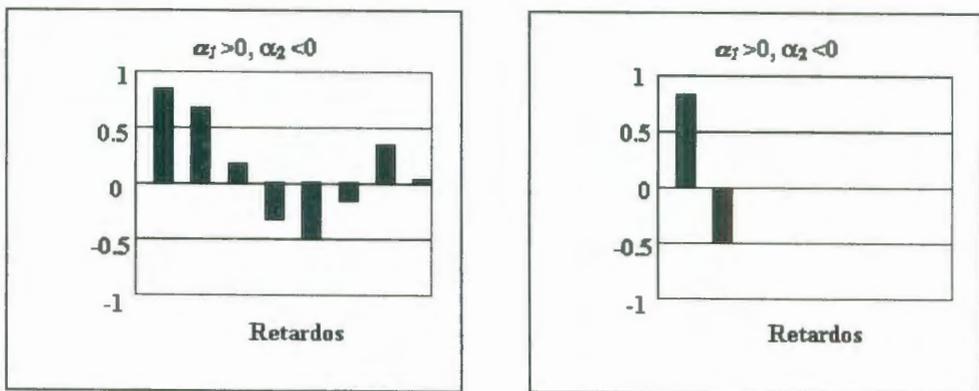


Figura 2 FAS Y FAP de un proceso AR(2)

Además, un proceso AR(2) se lo puede obtener por medio del operador de rezagos:

$$A(L)x_t = \varepsilon_t$$

$$\text{donde, } A(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2$$

El polinomio es el producto de dos factores:

$$A(L) = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L) = 1 - (\lambda_2 + \lambda_1)L + \lambda_2 \lambda_1 L^2$$

$$\Rightarrow \lambda_2 + \lambda_1 = \alpha_1 \wedge \lambda_2 \lambda_1 = -\alpha_2$$

Para encontrar los valores de λ_1 y λ_2 se hará lo siguiente:

1.- Igualar el polinomio a cero

2.- $L = z$

$$1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 = 0 \quad (*)$$

$$(1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = z^{-1} \wedge \lambda_2 = z^{-1} \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 = \lambda = z^{-1}$$

La ecuación (*) es dividida para z^2 :

$$z^{-2} - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 = 0$$

$$\lambda^2 - \alpha_1 \lambda - \alpha_2 = 0 \rightarrow \text{Ecuación Característica}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_2}}{2}$$

La condición de estacionariedad para el proceso AR(2) es que el módulo de las raíces sea menor a 1, o que las raíces características caigan dentro del círculo unitario, es decir:

$$|\lambda_1| < 1 \wedge |\lambda_2| < 1$$

Lo que implica:

$$\left| \frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_2}}{2} \right| < 1$$

Para esto, se tiene que cumplir que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 < 1$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 < 1$$

$$|\alpha_2| < 1$$

Alternativamente, las raíces de z deberán caer fuera del círculo de la unidad.

Modelos Autorregresivos de orden p AR(p)

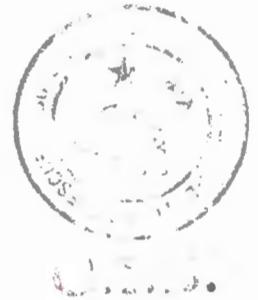
El proceso AR(p) se define:

$$y_t = \delta + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Si el proceso es estacionario en media y varianza:

$$E(y_t) = E(y_{t-1}) = \dots = E(y_{t-p}), \forall t$$

$$V(y_t) = V(y_{t-1}) = \dots = V(y_{t-p}), \forall t$$



La condición de estacionariedad es que las raíces de polinomio $A(L)$ o de z^6 caigan fuera del círculo unitario, dado que:

$$L = z \Rightarrow \lambda_i = z_i^{-1}$$

Donde λ_i son las raíces de la ecuación característica:

$$\lambda^p - \alpha_1 \lambda^{p-1} - \alpha_2 \lambda^{p-2} - \dots - \alpha_p = 0$$

Las cuales deben ser menores a 1 en valor absoluto.

⁶ Si las raíces dan un número complejo, basta calcular su módulo.

Autocovarianzas:

$$\gamma_1 = \text{Cov}(y_{t-1}, y_t) = E(x_{t-1} x_t) = E(x_{t-1} (\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + \varepsilon_t))$$

$$\gamma_1 = \alpha_1 \gamma_0 + \alpha_2 \gamma_1 + \dots + \alpha_p \gamma_{1-p}$$

.....

$$\gamma_k = \alpha_1 \gamma_{k-1} + \alpha_2 \gamma_{k-2} + \dots + \alpha_p \gamma_{k-p} \quad \forall k \geq 1$$

El sistema de ecuaciones γ_k , denominadas ecuaciones de *Yule-Walker*, relaciona las p primeras autocovarianzas con los parámetros del proceso.

Las ecuaciones de *Yule-Walker* se pueden expresar también en términos de los coeficientes de autocorrelación:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

$$\rho_k = \alpha_1 \rho_{k-1} + \alpha_2 \rho_{k-2} + \dots + \alpha_p \rho_{k-p}$$

de las cuales se pueden obtener los coeficientes del proceso.

Con respecto a las funciones de autocorrelación, los coeficientes del AR(p) caen lentamente hasta el infinito en la FAS, mientras que en la FAP los valores se interrumpen después del rezago p .

b) Procesos de Media Móvil

En los procesos de media móvil (MA) la variable y_t es expresada solamente en función de perturbaciones ruido blanco corrientes y pasados, con un retardo de q períodos. Se lo representa como MA(q):

$$y_t = \delta + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

Modelo MA(1)

El proceso MA(1) se define:

$$y_t = \delta + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1}$$

La media y la varianza del MA(1) son:

$$E(y_t) = \mu = E(\delta + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1}) = \delta$$

$$V(y_t) = \gamma_0 = E(y_t - \mu)^2 = E(\varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1})^2 = (1 + \beta_1^2) \sigma_\varepsilon^2$$

Autocovarianzas:

$$\gamma_1 = \text{Cov}(y_{t-1}, y_t) = E(x_{t-1}, x_t) = E(x_{t-1}(\varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1})) = -\beta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \dots = 0$$

De las cuales se obtienen los coeficientes de autocorrelación:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\beta_1 \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2 (1 + \beta_1^2)} = \frac{-\beta_1}{(1 + \beta_1^2)}$$

$$\rho_2 = \rho_3 = \dots = 0$$

En la figura 3 se puede observar que la FAS del proceso MA(1) se interrumpe a partir de $k > 1$, mientras que la FAP⁷ converge exponencialmente a cero, alternando el signo.

⁷ Un proceso MA(1) no puede generar nunca una FAP que sea siempre positiva, pero sí puede generar una FAP siempre negativa.

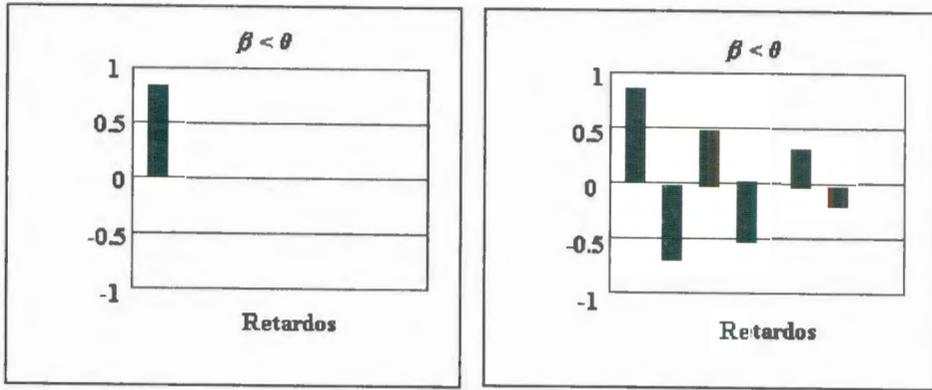


Figura 3 FAS y FAP de un proceso MA (1)

Modelo MA(q)

El proceso MA(q) se define:

$$y_t = \delta + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

La media y varianza del proceso son:

$$E(y_t) = \mu = \delta$$

$$V(y_t) = \gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_q^2)$$

Autocovarianzas:

$$\gamma_1 = E(x_{t-1} x_t) = \sigma_\varepsilon^2 (-\beta_1 + \beta_1 \beta_2 + \beta_2 \beta_3 + \dots + \beta_{q-1} \beta_q)$$

$$\gamma_2 = E(x_{t-2} x_t) = \sigma_\varepsilon^2 (-\beta_2 + \beta_1 \beta_3 + \beta_2 \beta_4 + \dots + \beta_{q-2} \beta_q)$$

.....

$$\gamma_q = -\beta_q \sigma_\varepsilon^2$$

.....

$$\gamma_k = 0, \forall k \geq q$$

Para la FAS, el proceso tiene autocorrelación hasta el orden del MA, de ahí en adelante, los retardos mayores al orden del proceso, toman el valor de cero. Para la FAP, los valores descienden lentamente al infinito.

Los procesos de medias móviles son siempre estacionarios independientemente del valor que tome el coeficiente β .

Por otro lado, entre los modelos AR y MA existe una relación, de tal manera que un proceso de medias móviles de primer orden puede convertirse en un proceso autorregresivo de infinitos términos:

$$\varepsilon_t = x_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$\varepsilon_t = x_t + \beta_1 (x_{t-1} + \beta_1 (x_{t-2} + \dots$$

$$\varepsilon_t = x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_1^2 x_{t-2} + \dots$$

$$x_t = -\beta_1 x_{t-1} - \beta_1^2 x_{t-2} - \dots + \varepsilon_t \quad (*)$$

La ecuación (*) es posible si $|\beta_1| < 1$, ya que de otro modo, los efectos del pasado serían importantes para explicar el comportamiento actual de la serie. Esta condición se la denomina **Condición de Invertibilidad**, es decir que las raíces de $|\beta_1|$ deben caer dentro del círculo unitario para que el proceso sea invertible.

c) *Procesos Autorregresivos De Medias Móviles (ARMA)*

Un modelo ARMA(p,q) se define:

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^q \beta_i \varepsilon_{t-i}$$

donde $\{\varepsilon_t\}$ es un ruido blanco.

Estos modelos llevan a representaciones parsimoniosas de procesos de orden superior AR(p) o MA(q).

Utilizando el operador de rezagos, la representación del modelo es la siguiente:

$$A(L)x_t = B(L)\varepsilon_t$$

Donde:

$$A(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_p L^p$$

$$B(L) = 1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \dots - \beta_q L^q$$



La estacionariedad del modelo requiere que las raíces de $A(L)$ se encuentren fuera del círculo unitario, y para invertibilidad del componente MA, se necesita la misma condición para las raíces de $B(L)$. Dadas estas condiciones, el proceso AIRMA puede ser expresado, alternativamente, como un AR infinito, o como un MA infinito:

$$AR(\infty) \rightarrow \beta^{-1}(L)A(L)x_t = \varepsilon_t$$

$$MA(\infty) \rightarrow x_t = A^{-1}(L)B(L)\varepsilon_t$$

Modelo ARMA(1, 1)

$$y_t = \delta + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Con media y varianza:

$$E(y_t) = \mu = \frac{\delta}{1 - \alpha_1}, |\alpha_1| < 1$$

$$V(y_t) = \gamma_0 = E(y_t - \mu)^2 = \alpha_1^2 \gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2 + \beta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 - 2\alpha_1 \beta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2(1 + \beta_1^2 - 2\alpha_1 \beta_1)}{1 - \alpha_1^2}, |\alpha_1| < 1$$

Autocovarianzas:

$$\gamma_1 = E(x_{t-1} x_t) = \alpha_1 \gamma_0 - \beta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_2 = E(x_{t-2} x_t) = \alpha_1 \gamma_1$$

...

$$\gamma_k = E(x_{t-k} x_t) = \alpha_1 \gamma_{k-1}, \forall k \geq 2$$

La función de autocorrelación es:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(\alpha_1 - \beta_1)(1 - \alpha_1 \beta_1)}{1 - 2\alpha_1 \beta_1 + \beta_1^2}$$

$$\rho_k = \alpha_1 \rho_{k-1}, \forall k \geq 2$$

Tanto la FAS como la FAP de los modelos ARMA tienen tantos elementos distintos de cero que caen hacia el infinito (ver figura 4). Ello se debe a que tanto la función de autocorrelación simple como la función de autocorrelación parcial de estos modelos heredan características de ambas componentes.

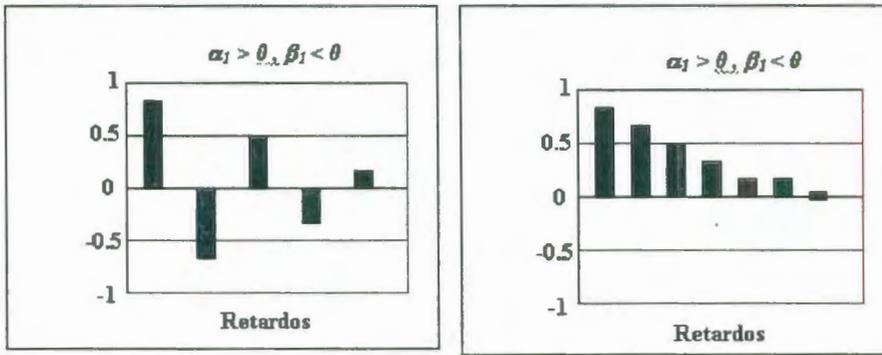


Figura 4 FAS y FAP de un proceso ARMA (1,1)

1.1.2 Modelos de Series Univariantes de Tiempo No Estacionarios

1.1.2.1 Series estacionarias en Tendencia y Series estacionarias en Diferencias

En el análisis de series de tiempo es preciso determinar la existencia de tendencias deterministas o de tendencias estocásticas. Una serie que tiene tendencia determinista es perfectamente predecible e invariante; presenta una raíz unitaria en su polinomio de medias móviles cuando se formula en diferencias y sus intervalos de confianza son acotados en el infinito .

Suponer:

$$Y_t = \alpha + \delta t + \varepsilon_t$$

Por otro lado, una serie de tendencia estocástica es inestable; presenta una raíz unitaria en su polinomio autorregresivo cuando se formula en niveles y sus intervalos de confianza son no acotados.

El caso más simple de modelo con tendencia estocástica viene determinado por lo que se conoce como random walk (paseo aleatorio):

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Iterando recursivamente se obtendrá:

$$Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i \quad (*)$$

Donde:

$$E[Y_t] = E\left[Y_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right] = E[Y_0] = Y_0$$



Su varianza, sin embargo, no es constante:

$$V[Y_t] = E[Y_t - E[Y_t]]^2 = E\left[Y_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i - Y_0\right]^2 = E\left[\sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right]^2 = E[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \dots] = E[\varepsilon_1^2 \dots \varepsilon_t^2] = t\sigma^2$$

De la ecuación (*) puede observarse como cada uno de los ε_i tiene sobre y_t un efecto permanente.

Así, la denominada esperanza condicional para y_{t+s} , es decir, su valor más probable dadas las "t" realizaciones anteriores del proceso y_t , es precisamente y_t para todos los valores posibles de "t" y "s"; esto confirma que cualquier shock de la secuencia contenida en:

$$\sum_{i=1}^t \varepsilon_i$$

tiene una presencia sobre y_{t+s} de la misma intensidad que sobre y_t , o sea, que se está frente a un componente tendencial estocástico.

Es también instructivo calcular la covarianza de y_t y y_{t-k} . Ya que la media es constante la covarianza puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} E[(y_t - y_0)(y_{t-k} - y_0)] &= E[(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-k} + \dots + \varepsilon_1)(\varepsilon_{t-k} + \varepsilon_{t-s-1} + \dots + \varepsilon_1)] \\ &= E[(\varepsilon_{t-k})^2 + (\varepsilon_{t-k-1})^2 + \dots + (\varepsilon_1)^2] \\ &= (t-k)\sigma^2 = \gamma_{t-k} \end{aligned}$$

Se sabe que el coeficiente de correlación ρ_k es:

$$\begin{aligned} \rho_k &= \frac{\text{Cov}(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{V(y_t)}\sqrt{V(y_{t-k})}} \\ \rho_k &= \frac{\gamma_{t-k}}{\sqrt{V(y_t)}\sqrt{V(y_{t-k})}} \end{aligned}$$

entonces reemplazando para obtener el coeficiente de correlación del paseo aleatorio se tiene:

$$\begin{aligned} \rho_k &= \frac{(t-k)\sigma^2}{\sqrt{t\sigma^2}\sqrt{(t-k)\sigma^2}} \\ \rho_k &= \frac{t-k}{\sqrt{t}\sqrt{t-k}} \\ \rho_k &= \frac{(t-k)(t-k)^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}} \\ \rho_k &= \frac{(t-k)^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}} \\ \rho_k &= [(t-k)/t]^{0.5} \end{aligned}$$

Este resultado es importante para la detección de series no estacionarias. Para las primeras autocorrelaciones, la muestra de tamaño t será grande relativo al número de autocorrelaciones formadas; para valores pequeños de k , el ratio $(t-k)/t$ es aproximadamente igual a 1. Sin embargo, cuando k se incrementa, los valores de ρ_k caen. Entonces no será posible usar la función de autocorrelación para distinguir entre un proceso con raíz unitaria ($\alpha=1$) y otro estacionario pero en el que α es cercano a la unidad.

1.1.2.2 Contrastes de estacionariedad y raíces unitarias

Una característica importante es estudiar la estacionariedad de las series, por lo que se debe asegurar que cumplan con esta condición. Si la serie temporal no es estacionaria se aplican las transformaciones adecuadas con objeto de convertirla en estacionaria. Cuando la serie presente no estacionariedad en media, se suele aplicar el proceso de diferenciación. Pero, a veces, la toma de diferencias no es suficiente para obtener series estacionarias en media y en varianza. Una solución consiste en fijar logaritmos de la serie, teniendo en cuenta que posteriormente hay que deshacer el cambio de variable.

Se utilizará dos métodos para determinar la estacionariedad de las series de estudio. El primero es la observación de las funciones de autocorrelación:

La función de autocorrelación simple (FAS) es la representación de los coeficientes de autocorrelación, en función de los distintos retardos o desfases entre las variables.

La función de autocorrelación parcial (FAP) responde a la medición de la correlación existente entre dos variables del proceso en distintos períodos de tiempo, pero una vez eliminados los efectos de los períodos intermedios.

Cuando la serie es no estacionaria, los valores de la función de autocorrelación parcial (FAP) son muy altos, mientras que los valores de la función de autocorrelación simple (FAS) decaen lentamente hasta hacerse cero.

El segundo método para determinar la estacionariedad de las series es la aplicación de los contrastes de “No Estacionariedad” en el que la hipótesis nula es la presencia de raíz unitaria en el proceso generador de datos de la serie, que provocan que la misma sea del tipo random walk.

Suponiendo un modelo autorregresivo de orden uno:

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

frente a este modelo se plantea el modelo alternativo que contiene la hipótesis nula H_0 , de un random walk no estacionario del tipo:

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

lo que se quiere testear es si el coeficiente α es igual o menor que uno; y, de ser efectivamente igual a la unidad, se tendría una serie con raíz unitaria o de tendencia estocástica que deberá ser diferenciada para que sea estacionaria.

1.1.2.2.1 Contraste de Dickey-Fuller

Para realizar este contraste no se puede utilizar el estadístico “t” de la estimación de MCO, debido a que la H_0 para usar la “t” es la nulidad del parámetro α y para este caso se necesita contrastar la $H_0: \alpha = 1$. Si esta hipótesis fuera cierta, la varianza de y_t no sería constante sino que crecería con el tiempo $V(y_t) = t\sigma_\varepsilon^2$ y la estimación de

MCO generaría un estimador consistente pero sesgado⁸ de α que no puede ser caracterizado como una distribución asintóticamente normal y por lo tanto el estadístico “ t ” de Student no converge hacia una $N(0,1)$.

En general, utilizar métodos clásicos de estimación como MCO para estimar relaciones con variables no estacionarias produce inferencias erróneas. Si las medias y varianzas de las variables “raíz unitaria” cambian a lo largo del tiempo, todos los estadísticos computados en un modelo de regresión, que usa estas medias y varianzas, también dependen del tiempo y no convergen a su verdadero valor cuando el tamaño muestral aumenta. Incluso los contrastes convencionales de hipótesis estarán muy sesgados hacia el rechazo de la hipótesis nula de no relación entre las variables dependiente e independiente.

Efectivamente, en el experimento de Monte Carlo⁹(realizado por Dickey 1976) fue demostrado que el estadístico “ t ” no sigue una distribución normal cuando existe raíz unitaria y, por lo tanto, los valores t obtenidos por la estimación mínimo cuadrática caen la mayoría de las veces en la zona de rechazo, es decir, al usar los valores críticos de la normal se comete error de tipo I (rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera), con lo que se tendría que la mayoría de las series serían consideradas como estacionarias.

Tras el experimento de Dickey, fue Fuller quien obtuvo la distribución límite apropiada, más tarde MacKinnon realizó un número mayor de simulaciones que las realizadas por Dickey y Fuller, que permiten calcular valores críticos del test de Dickey Fuller (DF) para cualquier tamaño muestral y cualquier número de variables en el lado derecho de la ecuación.

⁸ La estimación de α está directamente relacionada con el coeficiente de correlación del paseo aleatorio cuando $k=1$, $\rho_1 = [(t-1)/t]^{0.5} < 1$, entonces el valor estimado de α será sesgado a ser menor que la unidad.

⁹ G. Evans y N.E. Savin, “Testing for Unit Roots:I”, *Econometría*, Vol. 49,1981, pp 753-779 y “Testing for Unit Roots:II”, *Econometría*, Vol. 52,1984, pp 1241-1269

El siguiente modelo es equivalente al utilizado para realizar el contraste DF, y se obtiene restando a ambos lados de la ecuación el término y_{t-1} :

$$y_t - y_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} - y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \alpha_0 + (\alpha_1 - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$$

la hipótesis nula ahora será $\gamma = 0$ frente a la alternativa $\gamma < 0$, que es lo mismo que testear que $\alpha_1 = 1$ dado que $\gamma = \alpha_1 - 1$.

A partir de este modelo se obtiene el valor "t" del parámetro estimado y éste se compara con los valores críticos de las tablas de DF o MacKinnon. Si el valor "t" calculado es superior al crítico dado un determinado nivel de confianza, no se tendrá evidencia suficiente para el rechazo de la hipótesis nula, con lo que se admitirá la existencia de una raíz unitaria, es decir que la serie será no estacionaria.

Dado que los valores críticos de "t" para el contraste del test de DF dependen tanto del tamaño muestral como del proceso generador de datos, es necesario determinar si el modelo a estimar será simple o poseerá constante, tendencia o ambos elementos.

Los tres modelos propuestos por Dickey-Fuller son:

Modelo 1 (simple): $\Delta y_t = \alpha_0 + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$

Modelo 2 (con constante): $\Delta y_t = \alpha_0 + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$

Modelo 3 (con constante y tendencia determinista) : $\Delta y_t = \alpha_0 + \gamma y_{t-1} + \alpha_2 t + \varepsilon_t$

Cada modelo tiene valores críticos distintos para el contraste, cuyas denotaciones son τ , τ_μ y τ_τ respectivamente.



El test de DF permite contrastar la presencia de una raíz unitaria cuando se supone un proceso AR(1) en una serie temporal; sin embargo, muchas de las series temporales no pueden ser modeladas de esa manera sino que, se ajustan a procesos autorregresivos de orden superior. Para estos casos, se debe utilizar el test de Dickey-Fuller Aumentado (DFA), que siguiendo el mismo procedimiento para el caso simple, testea la presencia de raíces unitarias en procesos AR(p), suponiendo el siguiente modelo:

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta y_{t-i+1} + \varepsilon_t$$

en esta ecuación $\gamma = -\left(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i\right)$, $\beta_i = \sum_{j=1}^p \alpha_j$ y p es el número de rezagos que es necesario incluir para que los residuos se comporten como ruido blanco.

- ***Críticas al contraste de Dickey-Fuller***

Tanto el contraste de DF como el DFA presentan algunos problemas, por lo que han ganado muchas críticas. Uno de estos problemas es la sensibilidad del test a la elección del valor de p que permite que ε_t esté serialmente correlacionado, por otro lado el DFA incurre en importantes errores de tipo II (no rechazar¹⁰ la hipótesis nula cuando es falsa) cuando el proceso generador de datos es estacionario pero el valor de α es cercano a la unidad. Además existe evidencia de que el DFA tiene poco poder¹¹ cuando el verdadero proceso generador de datos presenta quiebres en el nivel o en la

¹⁰ No rechazar la hipótesis nula, no significa que se la está aceptando.

¹¹ Formalmente, el poder de un test es igual a la probabilidad de rechazar la hipótesis nula falsa, es decir 1 menos la probabilidad de cometer error de tipo II

tendencia¹². Esta crítica se basa en el hecho de que en los contrastes de Dickey y Fuller, la hipótesis alternativa viene dada por la regresión que se estima, y la hipótesis nula es que el coeficiente de la variable retardada un período en niveles no es significativamente diferente de cero, lo que implica que la variable en cuestión tiene una raíz unitaria. Para que estos contrastes tengan validez, la hipótesis alternativa ha de ser suficientemente general como para incluir el posible proceso generador de los datos. Si este proceso viene dado por una tendencia cuadrática en la media, o por una tendencia lineal que varía en determinados momentos del tiempo, o por cualquier otro esquema de comportamiento de la componente determinista de la serie, la aplicación de los tests anteriores no sería correcta, ya que suponen explícitamente un determinado modelo de comportamiento determinista, que puede ser diferente al que realmente genera los datos. En el caso de realizar estos contrastes, al estar la hipótesis alternativa mal especificada, ya que no recoge la correcta modelación determinista del proceso, se pueden cometer importantes errores debido a la mala especificación de los contrastes, con lo que los resultados derivados de la inferencia pueden ser seriamente objetados.

A continuación se demostrará los efectos que conllevaría diferenciar una serie por considerar que posee raíz unitaria cuando realmente tiene tendencia determinística.

Se supone el siguiente modelo con tendencia lineal:

$$y_t = \beta + \alpha_1 t + \varepsilon_t$$

para diferenciarla al determinar que tiene raíz unitaria, hay que restarle a ambos lados de la ecuación el término y_{t-1} , es decir la serie rezagada un período,

$$y_{t-1} = \beta + \alpha_1 (t - 1) + \varepsilon_{t-1}$$

¹² Perron (1989), demostró que en caso de que existan quiebres en una serie estacionaria en tendencia, los tests convencionales tienden a no rechazar la hipótesis nula de existencia de raíz unitaria cuando realmente no la hay.

el resultado de la diferenciación sería el siguiente:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

$$\Delta y_t = \beta + \alpha_1 t + \varepsilon_t - \beta - \alpha_1(t-1) - \varepsilon_{t-1}$$

$$\Delta y_t = \alpha_1 + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

Δy_t es no invertible, pues no puede ser expresado como un proceso autorregresivo.

La primera diferencia de la serie estacionaria en tendencia ha introducido una raíz unitaria en el componente MA, por lo que el proceso no puede ser invertido.

Así mismo, extraer un supuesto término de tendencia de una serie estacionaria en diferencias es inapropiado, y por tanto, no se obtendrá una serie estacionaria al no ser eliminada la tendencia estocástica o raíz unitaria.

Suponiendo el siguiente paseo aleatorio con término constante:

$$y_t = \alpha + y_{t-1} + \varepsilon_t$$

iterando hacia atrás, esto se puede escribir como sigue,

$$y_t = \alpha_t + y_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$$

restando α_t a ambos lados de la ecuación se tiene:

$$y_t - \alpha_t = y_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$$

para demostrar que este proceso tampoco es estacionario, hay que obtener la media y la varianza del mismo.

$$E(y_t - \alpha) = y_0$$

$$V(y_t - \alpha) = V\left(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right) = t\sigma_\varepsilon^2$$

1.1.2.2 Test de Phillips y Perron

Uno de los problemas atribuidos al test de Dickey-Fuller, es que asume que los errores del modelo a estimar son estadísticamente independientes y homocedásticos (poseen varianza constante). Phillips y Perron (1988) desarrollaron una generalización del procedimiento de Dickey-Fuller que permite otras asunciones acerca de la distribución de los errores. Este contraste PP es una corrección no paramétrica del DFA, en el que se elimina el problema de correlación serial de los residuos. Lo que hace el test, una vez obtenidos los residuos de la estimación del modelo de DF, es modificar los estadísticos “t” asociados a los parámetros del mismo, para tener en cuenta el efecto de los errores autocorrelacionados que aparecen en los resultados, con lo que el estadístico podrá ser comparado con los valores críticos del test de DF.

Para explicar brevemente este procedimiento, se considera las siguientes regresiones:

$$y_t = \alpha_0^* + \alpha_1^* y_{t-1} + \mu_t$$

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 (t - T/2) + \mu_t$$

donde T = número de observaciones y el término de error μ_t es tal que $E\mu_t = 0$, pero no hay ninguna condición de que el término de error sea independiente u homocedástico. Al contrario del contraste de DF, el de PP admite que los residuos sean dependientes y heterocedásticos.

El test de Phillips-Perron caracteriza las distribuciones y deriva contrastes estadísticos que pueden ser usados para contrastar la hipótesis acerca de los coeficiente α_i y a_i bajo la hipótesis nula de que los datos son generados por:

$$y_t = y_{t-1} + \mu_t$$

1.1.2.2.3 Test Secuencial de Zivot y Andrews

Como se mencionó anteriormente, el contraste de Dickey y Fuller no es apropiado para variables que pueden haber experimentado un cambio estructural. Perron (1990) desarrolló un procedimiento para probar la hipótesis que una serie dada y_t tiene una raíz unitaria con un quiebre estructural exógeno que ocurre en el tiempo T_B . Zivot y Andrews (1992) rechazaron la asunción de un punto de quiebre exógeno y desarrollaron un procedimiento para contrastar la existencia de una raíz unitaria, que contempla como hipótesis alternativa la existencia de un quiebre en la función de tendencia, el quiebre sería determinado endógenamente. Este contraste es llamado secuencial, porque evalúa la posible presencia de un quiebre estructural en cada observación de la serie analizada.

La hipótesis nula del test de Zivot y Andrews es:

$$y_t = \alpha + y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Ahora, se considera la especificación anidada para contrastar la presencia de una raíz unitaria.

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_t + \beta_0 T_t + \beta_1 DT_t + \rho y_{t-1} + \sum_{j=1}^L \delta_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$$

donde Δ es el operador de primera diferencia, T_t es un componente determinístico (lineal) de la tendencia y L es el número de rezagos necesarios para que ε_t sea ruido blanco. Además se incluye dos variables ficticias definidas como:

$$D_t = \begin{cases} 0 & t < T_0 \\ 1 & t \geq T_0 \end{cases} \quad DT_t = \begin{cases} 0 & t < T_0 \\ t - T_0 & t \geq T_0 \end{cases}$$

La especificación anidada contiene a los quiebres estructurales en los niveles medidos por D_t , quiebres en la tendencia, medidos por DT_t o una combinación de ambos. En estos casos, T_0 denota el período en el que se asume que el quiebre se presenta.

Una crítica al test de raíz unitaria propuesto por Perron es que el utilizó el período de quiebre como conocido por el econométrista, lo cual conduce a cometer importantes errores del Tipo I. Por ello, Zivot y Andrews (1992), Christiano (1992) y otros propusieron determinar T_0 endógenamente.

Lo que hace el contraste de Zivot y Andrews es estimar la regresión anidada para todos los T_0 que la muestra permita, de cada estimación se obtienen los valores de los estadísticos t y se escoge aquel valor que sea menos favorable para la hipótesis nula de raíz unitaria y por tanto más favorable a la alternativa de estacionariedad en tendencia con quiebre estructural que pueden ser en el nivel, en la tendencia o en ambos. Los valores de t , deben luego compararse con los valores críticos reportados en Zivot y Andrews (1992). Un valor bajo, en valor absoluto, constituye, una clara evidencia a favor de la hipótesis nula de existencia de raíz unitaria y en contra de la alternativa.



Definiendo el operador $\Delta = 1 - L$, se tendrá:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

$$\Delta^2 y_t = \Delta(y_t - y_{t-1}) = \Delta y_t - \Delta y_{t-1} = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}$$

Pudiéndose calcular diferencias de cualquier orden.

Como resultado, $\Delta^d y_t$ es una serie estacionaria que puede representarse como un modelo ARMA(p,q). Se dice entonces que y_t es un proceso autorregresivo integrado de medias móviles del orden (p,d,q), denominado ARIMA(p,d,q).

1.1.4 Estimación

a) *Procesos Autorregresivos*

Los modelos autorregresivos presentan variables aleatorias que son retardos de una variable aleatoria y_t . En tales condiciones, se puede estimar por mínimos cuadrados ordinarios ya que sus estimadores tienen buenas propiedades, siempre y cuando los errores del modelo tengan un comportamiento ruido blanco. Por el contrario, si el término de error estuviese correlacionado, entonces la condición de ortogonalidad no se cumpliría, por lo que los estimadores mínimocuadráticos serían inconsistentes. En este caso, el modelo estaría mal especificado, puesto que una especificación correcta debe generar un término de error sin autocorrelación.

$$y_t = \delta + \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Aplicar el criterio de mínimos cuadrados, implica minimizar la suma de los cuadrados de los residuos $\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$. El residuo se considera una estimación de la perturbación aleatoria una vez estimado el modelo.

En forma matricial:

$$\underline{y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdot & \cdot & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \cdot & \cdot & x_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{k1} & \cdot & \cdot & x_{kT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_T \end{bmatrix}$$



donde $\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1} X'y$ es el estimador de MCO.

b) *Procesos de Medias Móviles*

En el caso de los modelos MA, es imposible estimar por mínimos cuadrados ordinarios, debido a que los errores no son una función lineal de sus parámetros. Por esto, se utiliza un método de estimación alternativo denominado Máxima Verosimilitud.

El método de Máxima Verosimilitud supone que el término de error del modelo sigue un determinado tipo de distribución. Si el supuesto de dicha distribución es aproximadamente correcto, se ganará eficiencia utilizando tal información adicional.

Suponer:

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Definiendo un modelo MA(1):

$$y_t = \delta + \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}$$

Siendo $\underline{\theta} = (\delta, \beta, \sigma_\varepsilon^2)'$ la población de parámetros a ser estimados.

Si se condiciona que $\varepsilon_0 = 0$ ¹³ entonces:

$$y_1 = \delta + \varepsilon_1 + \beta\varepsilon_0$$

$$y_1 = \delta + \varepsilon_1 \Rightarrow y_1 \mid \varepsilon_0 \sim N(\delta, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\varepsilon_1 = y_1 - \delta$$

La función de densidad para ε_1 será:

$$f(y_1 \mid \varepsilon_0; \underline{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp^{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}(y_1 - \delta)^2}$$

Para $t=2$:

$$y_2 = \delta + \varepsilon_2 + \beta\varepsilon_1$$

$$\varepsilon_2 = y_2 - \delta - \beta\varepsilon_1$$

La función de densidad para ε_2 será:

$$f(y_2 \mid y_1, \varepsilon_0 = 0; \underline{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp^{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}(y_2 - \delta - \beta\varepsilon_1)^2}$$

Generalizando:

$$\varepsilon_t = y_t - \delta - \beta\varepsilon_{t-1} \text{ dado que } \varepsilon_0 = 0$$

¹³ Cuando se condiciona que $\varepsilon_0 = 0$, no se pierde ninguna observación para cualquier proceso MA.

Se obtiene la función de densidad para ε_t :

$$f(y_t \setminus y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \varepsilon_0 = 0; \underline{\theta}) = f(y_t \setminus \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_0 = 0, \underline{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \frac{-1}{2\sigma^2} \varepsilon_t^2$$

Ahora, se puede hallar la función de densidad conjunta:

$$f(y_t, y_{t-1}, \dots, y_1 \setminus \varepsilon_0 = 0; \underline{\theta}) = f(y_1 \setminus \varepsilon_0 = 0; \underline{\theta}) \prod_{i=2}^T f(y_i \setminus y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_1, \varepsilon_0 = 0; \underline{\theta})$$

$$L(\underline{\theta}) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \sigma_\varepsilon^2 - \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma_\varepsilon^2}$$

La maximización de la función de verosimilitud coincide con la minimización de la suma residual. Además, a partir de esta función se obtienen los parámetros estimados:

$$\frac{\partial L(\underline{\theta})}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \hat{\delta}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}_\varepsilon^2$$

Ahora se puede iterar ε_t hacia atrás:

$$\varepsilon_t = y_t - \delta - \beta(y_{t-1} - \delta - \beta\varepsilon_{t-2})$$

$$\varepsilon_t = y_t - \delta - \beta(y_{t-1} - \delta) + \beta^2 \varepsilon_{t-2}$$

$$\varepsilon_t = y_t - \delta - \beta(y_{t-1} - \delta) + \beta^2(y_{t-2} - \delta) - \beta^3 \varepsilon_{t-3} + \dots + (-1)^{t-1} \beta^{t-1} (y_1 - \delta) + (-1)^t \beta^t \varepsilon_0$$

Si $|\beta| > 1$ el efecto de ε_0 se acumula en el tiempo, es decir, se hará explosivo. Por el contrario, si $|\beta| < 1$, independientemente del valor que tome ε_0 , el efecto será pequeño; y, con una muestra grande, la estimación será aproximadamente la función de verosimilitud incondicional.

c) *Procesos ARMA*

Sea la función:

$$y_t = \delta + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

donde $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ y $\underline{\theta}' = [\delta, \alpha_1 \dots \alpha_p, \beta_1 \dots \beta_q, \sigma_\varepsilon^2]$ es el vector de parámetros a estimar.

Se toma como dado que:

$$\underline{y}_0' = (y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1})$$

$$\underline{\varepsilon}_0' = (\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}, \dots, \varepsilon_{-q+1})$$

Entonces:

$$\varepsilon_t = y_t - \delta - \alpha_1 y_{t-1} - \dots - \alpha_p y_{t-p} - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

En función de máxima verosimilitud:

$$L(\underline{\theta}) = \ln f(y_1, \dots, y_T \mid \underline{y}_0, \underline{\varepsilon}_0; \underline{\theta})$$

$$L(\underline{\theta}) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln \sigma_\varepsilon^2 - \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma_\varepsilon^2}$$

Cabe resaltar que esta función de densidad conjunta es teórica, sin embargo, existe en la práctica, dos métodos de estimación:

1.- Método de la Esperanza Incondicional

Denotando la media incondicional de la serie como:

$$y_s = \frac{\delta}{1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_p}; s = 0, -1, \dots, -p + 1$$

De la misma forma se fija $\varepsilon_0 = 0; s = 0, -1, \dots, -q + 1$

Con este método no se pierden observaciones.

2.- Método Box-Jenkins

Este método utiliza los verdaderos valores de y_t , por lo que la iteración empezaría en el dato $t = p + 1$.

Se condiciona $\varepsilon_p = \varepsilon_{p-1} = \dots = \varepsilon_{p-q+1} = 0$

Siendo la función de verosimilitud:

$$L(\theta) = \ln f(y_t, \dots, y_{p+1} \mid y_p, \dots, y_1, \varepsilon_p, \dots, \varepsilon_{p-q+1} = 0; \theta)$$

$$L(\theta) = -\frac{T-p}{2} \ln(2\pi) - \frac{T-p}{2} \ln \sigma^2 - \sum_{t=p+1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma^2}$$

Nótese que se están perdiendo p observaciones.

Este procedimiento se puede realizar si se cumple que las raíces del polinomio $B(L)$ caigan fuera del círculo unitario. En otras palabras, siempre que el proceso MA sea invertible o que $|\beta| < 1$.



1.1.5 Diagnóstico

Una vez estimado el modelo y_t , se deben verificar ciertos requisitos para la aceptación del mismo:

1.1.5.1 *Análisis de los coeficientes*

El primer paso a cumplir es que los coeficientes sean **estadísticamente significativos**. Para probar esto, se utiliza el estadístico de contraste¹⁴ cuya hipótesis nula (H_0) es que el coeficiente es cero, y que además, sigue una distribución *t de Student* con $T-k$ grados de libertad, siendo k igual al número de parámetros incluidos.

Si $|t^*|$ es mayor al t crítico¹⁵, se rechaza la hipótesis nula y el parámetro es significativo.

$$H_0 : \delta = 0$$

$$t^* = \frac{\delta - E(\delta)}{\sigma_\delta} \approx t_{T-k}$$

$$H_0 : \alpha_i = 0$$

$$t^* = \frac{\alpha_i - E(\alpha_i)}{\sigma_{\alpha_i}} \approx t_{T-k}$$

$$H_0 : \beta_i = 0$$

$$t^* = \frac{\beta_i - E(\beta_i)}{\sigma_{\beta_i}} \approx t_{T-k}$$

Otro punto importante a examinar, es el cumplimiento de las **condiciones de estacionariedad e invertibilidad** de los coeficientes. Si tanto las raíces del polinomio $A(L)=0$ como las del polinomio $B(L)=0$ se encuentran dentro del círculo unitario, entonces, se rechazaría el modelo.

Sería útil analizar también la **estabilidad de los parámetros** estimados, ya que, de no ser así, éstos cambiarían bastante de una muestra a otra. Para estos casos se pueden

¹⁴ La aplicación del test anterior requiere un contraste de dos colas, pues la hipótesis alternativa considera que el coeficiente puede ser distinto de cero.

¹⁵ Alternativamente se puede observar el *p-value* del estadístico, el cual debe ser menor a 0.05 para rechazar la hipótesis nula.

utilizar los contrastes de estabilidad¹⁶ como el contraste de *OLS recursivo* o los estadísticos *CUSUM* y *CUSUMSQ*, los cuales permiten rechazar o no la hipótesis nula de estabilidad del modelo.

1.1.5.2 Análisis de Residuos

Lo más importante en este punto es que los **residuos se comporten como ruido blanco**. Los tests de perturbación aleatoria deben basarse en los residuos del modelo, los que deben seguir un comportamiento de un proceso aleatorio normal, ya que, de lo contrario, contendrían información relevante en el momento de realizar predicciones.

Existen algunos tests para contrastar si los residuos son procesos ruido blanco:

- **Contraste de Box-Pierce.**- Es un contraste cuya hipótesis nula es la no autocorrelación de los residuos, es decir:

$$H_o : r_1 = r_2 = \dots = r_k = 0$$

El estadístico de Box-Pierce:

$$Q = T \sum_{j=1}^k r_j^2$$

se distribuye aproximadamente como una $\chi^2_{(k)}$, siendo k el número de rezagos. Si el Q^{17} estimado es mayor al crítico se rechaza la hipótesis nula a favor de la alternativa.

¹⁶ Ver Novales Alfonso, *Econometría*. Segunda Edición. McGraw-Hill 1993. pp. 140.

- **Contraste de Ljung-Box.-** Es la versión más actual del contraste anterior, utilizado para reducir el sesgo en muestras pequeñas.

El estadístico Ljung-Box:

$$Q = T(T + 2) \sum_{j=1}^k \frac{r_j^2}{T - j}$$

Se distribuye como una $\chi_{(k)}^2$, al igual que el estadístico Box-Pierce. Se rechazará la hipótesis nula si el Q estimado es mayor al crítico.

- **Contraste del Multiplicador de Lagrange.-** Es una prueba válida para hipótesis generales en torno a la correlación serial de los residuos.

El estadístico está determinado por:

$$LM = NR^2$$

que tiene una distribución asintótica del tipo $\chi_{(p)}^2$, siendo p el número de rezagos de los residuos.

1.1.6 Predicción

Una vez diagnosticado el modelo estimado, se procede a realizar la predicción.

¹⁷ De igual forma, se puede usar el p-value del estadístico Q , el cual debe ser mayor a 0.05 para no rechazar la nula de no autocorrelación de los residuos.

El objetivo es minimizar el error cuadrático medio de predicción:

$$\underset{\hat{y}_{T+s}}{\text{Min}} E(y_{T+s} - \hat{y}_{T+s})^2$$

C.P.O.:

$$\frac{\partial \text{MSE}_p}{\partial \hat{y}_{T+s}} = -2E(y_{T+s} - \hat{y}_{T+s}) = 0$$

$$\begin{aligned} E(y_{T+s}) &= E(\hat{y}_{T+s}) \\ &= E(E_T y_{T+s}) \\ &= E(y_{T+s}) \end{aligned}$$

Siendo la esperanza incondicional la que minimiza el MSE_p .

y_{T+s} es el valor desconocido de y en el período $T+s$, \hat{y}_{T+s} es la predicción de y_{T+s} , y

$e_{T+s} = y_{T+s} - \hat{y}_{T+s}$ es el error de predicción¹⁸.

Dado esto, la predicción será $\hat{y}_{T+s} = E_T y_{T+s}$, es decir, la esperanza condicional de la variable y_{T+s} , calculada sobre la base de la información disponible en T .

a) *Procesos Autorregresivos*

Sea un modelo AR(1):

$$\begin{aligned} y_t - \mu &= \alpha(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \\ y_t &= (1 - \alpha)\mu + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

¹⁸ Siendo el error de predicción una variable aleatoria de esperanza cero, su varianza da una medida de su tamaño. En este sentido, una de las variables de más interés en el análisis de predicción es la *varianza del error de predicción*.

Siendo ε_t un proceso ruido blanco.

Haciendo predicciones hacia futuro, se tendrá:

$$y_{T+1} = (1-\alpha)\mu + \alpha y_T + \varepsilon_{T+1}$$

$$\hat{y}_{T+1} = E_T(y_{T+1} | y_T) = (1-\alpha)\mu + \alpha y_T$$

$$\hat{y}_{T+1} - \mu = \alpha(y_T - \mu)$$

$$e_{T+1} = y_{T+1} - \hat{y}_{T+1} = \varepsilon_{T+1}$$

$$V(e_{T+1}) = V(\varepsilon_{T+1}) = \sigma^2$$

$$y_{T+2} = (1-\alpha)\mu + \alpha y_{T+1} + \varepsilon_{T+2}$$

$$= (1-\alpha)\mu + \alpha((1-\alpha)\mu + \alpha y_T + \varepsilon_{T+1}) + \varepsilon_{T+2}$$

$$= (1-\alpha^2)\mu + \alpha^2 y_T + \alpha \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2}$$

$$\hat{y}_{T+2} = E_T(y_{T+2}) = (1-\alpha^2)\mu + \alpha^2 y_T$$

$$\hat{y}_{T+2} - \mu = \alpha^2(y_T - \mu)$$

$$e_{T+2} = \alpha \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2}$$

$$V(e_{T+2}) = V(\alpha \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2}) = \sigma^2(1 + \alpha^2)$$

.....

$$y_{T+s} = (1-\alpha^s)\mu + \alpha^s y_T + \varepsilon_{T+s} + \alpha \varepsilon_{T+s-1} + \dots + \alpha^{s-1} \varepsilon_{T+1}$$

$$\hat{y}_{T+s} = (1-\alpha^s)\mu + \alpha^s y_T$$

$$\hat{y}_{T+s} - \mu = \alpha^s(y_T - \mu)$$

$$e_{T+s} = \varepsilon_{T+s} + \alpha \varepsilon_{T+s-1} + \dots + \alpha^{s-1} \varepsilon_{T+1}$$

$$V(e_{T+s}) = \sigma^2(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots + \alpha^{2(s-1)})$$

Según se avanza hacia el futuro, la última observación recibe una ponderación más pequeña, y la esperanza matemática recibe un peso más importante; ello es muestra de que, en un proceso estacionario, cuanto más a futuro se quiera predecir, mayor será

la incertidumbre en que se obtiene la predicción. Cuando exista total incertidumbre, la predicción óptima será la media incondicional de la variable. Es decir que:

$$s \rightarrow \infty$$

$$\hat{y}_{T+s} = \mu$$

$$V(e_{T+s}) = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2} = \sigma_y^2$$

En procesos $AR(p)$ de orden superior a 1, no es fácil llevar una representación metódica sencilla para la predicción con s períodos a futuro. Sin embargo, se puede decir que la información muestral relevante para la predicción, se resume en las últimas p observaciones de la variable a predecir.

b) *Procesos de Medias Móviles*

Sea un modelo MA(1):

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \beta\varepsilon_{t-1}$$

Donde $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Realizando predicciones a futuro se tendrá:

$$y_{T+1} = \mu + \varepsilon_{T+1} - \beta\varepsilon_T$$

$$\hat{y}_{T+1} = \mu - \beta\varepsilon_T$$

$$e_{T+1} = \varepsilon_{T+1}$$

$$V(e_{T+1}) = V(\varepsilon_{T+1}) = \sigma^2$$



$$y_{T+2} = \mu + \varepsilon_{T+2} - \beta\varepsilon_{T+1}$$

$$\hat{y}_{T+2} = \mu$$

$$e_{T+2} = \varepsilon_{T+2} - \beta\varepsilon_{T+1}$$

$$V(e_{T+2}) = \sigma^2(1 + \beta^2)$$

.....

$$y_{T+s} = \mu + \varepsilon_{T+s} - \beta\varepsilon_{T+s-1}$$

$$\hat{y}_{T+s} = \mu$$

$$e_{T+s} = \varepsilon_{T+s} - \beta\varepsilon_{T+s-1}$$

$$V(e_{T+s}) = \sigma^2(1 + \beta^2)$$

Como se puede observar, la predicción del modelo $MA(1)$ para 2 o más períodos es la media incondicional. Análogamente, se puede decir en forma general, que en un modelo $MA(q)$ la predicción para $s > q$ períodos será la media incondicional.

c) *Procesos ARMA*

Sea un modelo ARMA (1,1):

$$y_t - \mu = \alpha(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t - \beta\varepsilon_{t-1}$$

$$y_t = (1 - \alpha)\mu + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t - \beta\varepsilon_{t-1}$$

Siendo ε_t un ruido blanco.

Haciendo predicciones a futuro se tendrá:

$$y_{T+1} = (1 - \alpha)\mu + \alpha y_T + \varepsilon_{T+1} - \beta\varepsilon_T$$

$$\hat{y}_{T+1} = (1 - \alpha)\mu + \alpha y_T - \beta\varepsilon_T$$

$$e_{T+1} = \varepsilon_{T+1}$$

$$V(e_{T+1}) = \sigma^2$$

$$\begin{aligned}
 y_{T+2} &= (1-\alpha)\mu + \alpha y_{T+1} + \varepsilon_{T+2} - \beta \varepsilon_{T+1} \\
 \hat{y}_{T+2} &= (1-\alpha)\mu + \alpha E_T y_{T+1} \\
 &= (1-\alpha)\mu + \alpha(1-\alpha)\mu + \alpha^2 y_T - \alpha\beta \varepsilon_T \\
 &= (1-\alpha^2)\mu + \alpha^2 y_T - \alpha\beta \varepsilon_T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{T+2} &= \alpha \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2} - \beta \varepsilon_{T+1} \\
 V(e_{T+2}) &= \sigma^2 (1 - (\alpha - \beta)^2)
 \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned}
 y_{T+s} &= (1-\alpha)\mu + \alpha y_{T+s-1} + \varepsilon_{T+s} - \beta \varepsilon_{T+s-1} \\
 \hat{y}_{T+s} &= (1-\alpha^s)\mu + \alpha^s y_T + \alpha^{s-1} \beta \varepsilon_T \\
 e_{T+s} &= \varepsilon_{T+s} + (\alpha - \beta)\varepsilon_{T+s-1} + \alpha(\alpha - \beta)\varepsilon_{T+s-2} + \dots + \alpha^{s-2}(\alpha - \beta)\varepsilon_{T+1} \\
 V(e_{T+s}) &= \sigma^2 \left(1 + (\alpha - \beta)^2 \frac{1}{1 - \alpha^2} \right)
 \end{aligned}$$

Cuando el horizonte de predicción tiende al infinito, la predicción converge a su esperanza matemática:

$$\begin{aligned}
 \lim_{s \rightarrow \infty} \hat{y}_{T+s} &= \mu \\
 \lim_{s \rightarrow \infty} V(\hat{y}_{T+s}) &= \sigma^2 \left(\frac{1 - 2\alpha\beta + \beta^2}{1 - \alpha^2} \right) = \sigma_y^2
 \end{aligned}$$

d) *Procesos ARIMA*

Cuando se estiman modelos **ARIMA** con un orden de integración d no nulo, se tendrá que recuperar las predicciones de la serie original a partir de las predicciones elaboradas para la serie diferenciada.

Sea z_t una serie estacionaria integrada de orden 1 que sigue un proceso $AR(1)$, siendo la serie original y_t un proceso $ARIMA(1,1,0)$:

$$\begin{aligned} z_t &= y_t - y_{t-1} \\ z_t - \mu &= \alpha(z_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Haciendo la predicción s períodos adelante en función de la variable original, se tendrá:

$$y_{T+s} = z_{T+s} + y_{T+s-1}$$

$$y_{T+s} = z_{T+s} + z_{T+s-1} + \dots + z_{T+1} + y_T$$

$$y_{T+s} = (z_{T+s} - \mu) + (z_{T+s-1} - \mu) + \dots + (z_{T+1} - \mu) + (y_T + s\mu)$$

$$y_{T+s} = \alpha(z_{T+s-1} - \mu) + \varepsilon_{T+s} + \dots + \alpha(z_T - \mu) + \varepsilon_{T+1} + (y_T + s\mu)$$

$$y_{T+s} = \alpha^s(z_T - \mu) + \varepsilon_{T+s} + \alpha^{s-1}(z_T - \mu) + (1 + \alpha)\varepsilon_{T+s-1} + \dots + \alpha(z_T - \mu) + \varepsilon_{T+1} + (y_T + s\mu)$$

$$y_{T+s} = \alpha(z_T - \mu) \left(\frac{1 - \alpha^s}{1 - \alpha} \right) + e_{T+s} + (y_T + s\mu)$$

donde, $e_{T+s} = \varepsilon_{T+s} + (1 + \alpha)\varepsilon_{T+s-1} + \dots + (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{s-1})\varepsilon_{T+1}$

$$\hat{y}_{T+s} = \alpha(z_T - \mu) \left(\frac{1 - \alpha^s}{1 - \alpha} \right) + (y_T + s\mu)$$

$$V(e_{T+s}) = \sigma^2(1 + (1 + \alpha)^2 + \dots + (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{s-1})^2)$$

Como se puede notar, la predicción crece monótonicamente con s , además, a medida que el horizonte aumenta, la varianza de predicción también lo hace, es decir:

Si $s \rightarrow \infty$

$$V(e_{T+s}) \rightarrow \infty$$

1.2 MODELOS DE VECTORES AUTORREGRESIVOS

La propuesta de estos modelos consiste en el planteamiento de un modelo débilmente restringido, en el que no hay que imponer a priori ninguna condición sobre las características de exogeneidad o endogeneidad de las variables, ni sobre los efectos concretos de unas variables sobre otras.

En cuanto a la dinamicidad del modelo, y en la misma línea de restringirlo en la menor medida posible, se debe determinar el número óptimo de rezagos con el que intervienen las variables, y dejar que sean los propios datos los que hablen por ellos mismos, sin que exista necesariamente una teoría económica que guíe o limite la estructura del modelo.

Las variables se estructuran como un sistema dinámico de ecuaciones simultáneas, en la que cada variable se encuentra establecida tanto por sus propios rezagos como por los rezagos de las demás variables del sistema.

El vector autorregresivo de orden p se define:

$$\underline{y}_t = \underline{m} + A_1 \underline{y}_{t-1} + A_2 \underline{y}_{t-2} + \dots + A_p \underline{y}_{t-p} + \underline{\varepsilon}_t$$

Siendo:

A_i : Matriz de coeficientes autorregresivos ($k \times k$)

\underline{m} : Vector de constantes ($k \times 1$)

$\underline{\varepsilon}_t$: Vector de procesos ruido blanco ($k \times 1$) con las siguientes propiedades:

$$E(\underline{\varepsilon}_t) = \underline{0}$$
$$E(\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t') = \begin{cases} \Omega & t = s \\ 0 & t \neq s \end{cases}$$



donde se asume que la matriz de varianzas y covarianzas, Ω , es positiva definida. De esta forma, los errores están no correlacionados, pero pueden estar correlacionados en el mismo tiempo¹⁹.

Dado que \underline{y}_t es estacionario, sus momentos son independientes del tiempo.

El $VAR(p)$ también puede ser escrito como un $VAR(1)$:

$$\underline{\xi}_t = F \underline{\xi}_{t-1} + \underline{v}_t$$

Siendo:

$$\underline{\xi}_t = \begin{bmatrix} y_t - \mu \\ \dots \\ y_{t-p-1} - \mu \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_p \\ I_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_k & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\xi}_{t-1} = \begin{bmatrix} y_{t-1} - \mu \\ \dots \\ y_{t-p} - \mu \end{bmatrix} \quad \underline{v}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

El $VAR(p)$ será estacionario si las raíces características de la matriz F , λ_i , son menores que la unidad.

1.2.1 Estimación del VAR

La estimación de los *vectores autorregresivos* se hace mediante la función de verosimilitud condicional:

$$f(y_T, y_{T-1}, \dots, y_1 \mid y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}; \theta)$$

¹⁹ Dada esta situación, la matriz Ω no es necesariamente diagonal.

Maximizando con respecto a θ , siendo éste el vector que contiene los elementos de m, A_1, A_2, \dots, A_p , y Ω .

Si se condiciona a los valores de y_t observados hasta el período $t-1$, el valor de y en el tiempo t es igual a una constante más un término aleatorio que se distribuye $N \sim (0, \Omega)$, así:

$$y_t \setminus y_{t-1}, \dots, y_{-p+1} \sim N((m + A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p}) + 0, \Omega)$$

Para hacer más compacta la expresión de la media condicional, ésta será denotada por $\Pi' \underline{x}_t$, donde:

$$\underline{x}_t \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} \quad \Pi' = [m \quad A_1 \quad \dots \quad A_p]$$

\underline{x}_t es el vector $[(kp-1) \times 1]$ que contiene el término constante y los p rezagos de cada uno de los elementos de y ; Π' es el vector $[k \times (kp+1)]$ de los coeficientes.

Usando esta notación, se puede escribir que:

$$y_t \setminus y_{t-1}, \dots, y_{-p+1} \sim N(\Pi' \underline{x}_t, \Omega)$$

Así, la función de densidad condicional para la observación t será:

$$f(y_t \setminus y_{t-1}, \dots, y_{-p+1}; \theta) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} |\Omega|^{-\frac{1}{2}} \exp^{-\frac{1}{2}(y_t - \Pi' \underline{x}_t)' \Omega^{-1} (y_t - \Pi' \underline{x}_t)}$$

La función de verosimilitud para el total de la muestra y_t, \dots, y_1 condicionada en y_0, \dots, y_{-p+1} será:

$$f(y_T, \dots, y_1 \mid y_{t-1}, \dots, y_{-p+1}; \theta) = (2\pi)^{-\frac{Tk}{2}} |\Omega^{-1}|^{\frac{T}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T [(y_t - \Pi' x_t)' \Omega^{-1} (y_t - \Pi' x_t)] \right\}$$

Tomando logaritmos:

$$L(\theta) = -\frac{Tk}{2} \ln(2\pi) + \frac{T}{2} \ln |\Omega^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T [(y_t - \Pi' x_t)' \Omega^{-1} (y_t - \Pi' x_t)]$$

donde el estimador de máxima verosimilitud será:

$$\hat{\Pi}'_{[k \times (kp+1)]} = \left[\sum_{t=1}^T y_t x_t' \right] \left[\sum_{t=1}^T x_t x_t' \right]^{-1}$$

Se puede notar que la fila j de $\hat{\Pi}'$:

$$\hat{\pi}'_{j[1 \times (kp+1)]} = \left[\sum_{t=1}^T y_{jt} x_t' \right] \left[\sum_{t=1}^T x_t x_t' \right]^{-1}$$

es justamente el vector de coeficientes estimados por una regresión de Mínimos Cuadrados Ordinarios de y_{jt} en x_t . Así, los coeficientes estimados por Máxima Verosimilitud vienen dados por una regresión MCO entre y_{jt} y los p rezagos de las demás variables del sistema.



1.2.2 Selección del Orden del VAR

Lo que se busca con esta selección es que se pueda trabajar con el menor número de rezagos, ya que de lo contrario, existiría un gran número de parámetros que no son estadísticamente distintos de cero, lo que supondría que el modelo tiene algunos parámetros innecesarios, por lo que se concluiría que los estimadores y predicciones obtenidas en el modelo serán ineficientes.

Existen algunas herramientas útiles para solucionar este problema:

El *Test de Razón de Verosimilitud (LR)* es una prueba en la que se desea testear si el orden del VAR es $p_0 < p_1$. Bajo la hipótesis nula se estima un conjunto de k regresiones MCO de cada variable sobre p_0 rezagos de ella y todas las demás.

El test LR se construye de la siguiente forma:

$$LR = 2(L_1^* - L_0^*) = 2\left(\frac{T}{2} \ln|\hat{\Omega}_1|^{-1} - \frac{T}{2} \ln|\hat{\Omega}_0|^{-1}\right) = T\left(\ln|\hat{\Omega}_0| - \ln|\hat{\Omega}_1|\right)$$

el cual se distribuye como una $\chi^2[k^2(p_1 - p_0)]$ grados de libertad.

Los modelos de orden distinto son directamente comparables si tienen igual número de observaciones.

Un procedimiento alternativo para determinar el número óptimo de rezagos es hacer uso del *Modelo de selección de rezagos* como por ejemplo los criterios:

Akaike Info Criterion:

$$AIC = -\frac{2L^*}{T} + \frac{2P_\theta}{T}$$

Bayesian Info Criterion (Schwarz):

$$BIC = -\frac{2L^*}{T} + \frac{P_\theta \ln T}{T}$$

Hannan-Quinn Criterion:

$$H - Q = -\frac{2L^*}{T} + \frac{2P_\theta \ln(\ln T)}{T}$$

donde:

L^* : es la función de verosimilitud en el máximo

P_θ : es el número de parámetros estimados sin los de Ω

1.2.3 Predicción del VAR

Los modelos VAR se utilizan generalmente para realizar predicciones en el corto plazo. Este enfoque atóxico se apoya en la idea de que las variables económicas se mueven de manera conjunta, además de estar correlacionadas.

Suponer un VAR (1):

$$\underline{y}_t = A\underline{y}_{t-1} + \underline{\varepsilon}_t$$

en el que se han usado los datos para estimar $\hat{A}, \hat{\Omega}$.

Haciendo predicción a futuro se tendrá:

$$\hat{y}_{T+1} = E_T y_{T+1} = E_T (A y_T + \varepsilon_{T+1}) = A y_T$$

$$\hat{y}_{T+2} = E_T y_{T+2} = E_T (A y_{T+1} + \varepsilon_{T+2}) = A y_{T+1} = A^2 y_T$$

.....

$$\hat{y}_{T+s} = E_T y_{T+s} = A^s y_T$$

$$e_{T+s} = \varepsilon_{T+s} + A \varepsilon_{T+s-1} + \dots + A^{s-1} \varepsilon_{T+1}$$

$$V(e_{T+s}) = \Omega + A \Omega A' + \dots + A^{s-1} \Omega A^{s-1}$$

Si el sistema es estacionario, el efecto tiene que diluirse en el tiempo.

CAPÍTULO II

ANÁLISIS DE LAS VARIABLES

Para evaluar el desempeño de distintos modelos econométricos en la generación de predicciones de corto y mediano plazo, se utilizarán tres variables: El Producto Interno Bruto (PIB), las Importaciones y la Inversión²⁰, las cuales han sido escogidas por ser relevantes para describir el funcionamiento de la economía ecuatoriana.

Las variables tienen una frecuencia trimestral, dado que en una economía en la que se registran cambios rápidos, es indispensable conocer su evolución dentro de intervalos de tiempo menores a un año.

El periodo de estudio se comprende desde el primer trimestre de 1965 hasta el segundo trimestre del año 2002.

El análisis de series de tiempo se basa en el estudio de series que cumplen con la condición de ser estacionarias²¹, por lo cual es necesario establecer si las variables tienen esa característica. De no ser así, se deben hacer las transformaciones necesarias para obtener una serie que efectivamente sí lo sea.

Se utilizarán dos métodos para determinar la estacionariedad de las series en estudio. El primero es la observación de las funciones de autocorrelación; y el segundo, los contrastes de estacionariedad de Dicky-Fuller Aumentado (ADF), Phillips-Perron (PP), Zivot y Andrews (ZA), y Bai - Perron (BP).

²⁰ Todas las variables están en términos reales, expresadas a precios de 1975, en millones de sucres.

²¹ Cuando la serie presente no estacionariedad en media, se suele aplicar el proceso de diferenciación. Pero, a veces, la toma de diferencias no es suficiente para obtener series estacionarias en media y en varianza. Una solución consiste en fijar logaritmos de la serie, teniendo en cuenta que posteriormente hay que deshacer el cambio de variable.

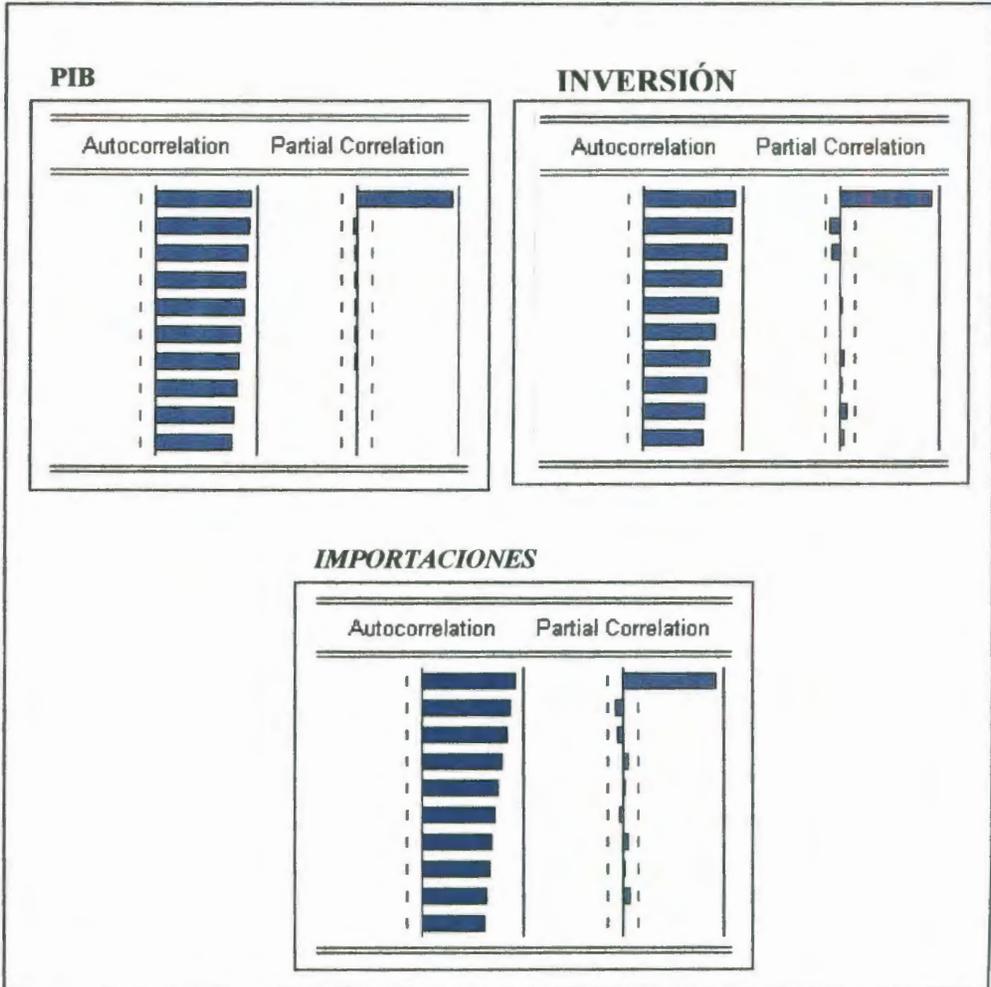


2.1 Funciones de Autocorrelación

Cuando la serie es no estacionaria, los valores de la función de autocorrelación parcial (FAP) son muy altos, mientras que los valores de la función de autocorrelación simple (FAS) decaen lentamente hasta hacerse cero.

En el Gráfico N° 1, los correlogramas muestran las funciones de autocorrelación parcial y simple de las tres variables, pudiendo decirse a simple inspección que se tratan de procesos no estacionarios, sin embargo, esto no es evidencia suficiente para asegurar que dichas series presentan una raíz unitaria.

GRAFICO N°1: Correlogramas de las series



2.2 Contrastes de Estacionariedad

Los resultados obtenidos de la aplicación del contraste de **Dickey-Fuller**, expuestos en el *Cuadro N° 1*, sugieren que no hay evidencia suficiente para el rechazo de la hipótesis nula de existencia de una raíz unitaria para las tres variables en logaritmos, por lo que siguiendo la metodología de *ADF* deberían ser diferenciadas.

Puede observarse en el mismo cuadro que, efectivamente, al realizar dicha diferenciación, los valores del estadístico “t” son menores a los valores críticos propuestos por *ADF*, con lo que se rechazaría la hipótesis nula y se tendrían ya series estacionarias.

Sin embargo, como fue señalado en el capítulo anterior, este test carece de potencia por lo que es necesario realizar un análisis más exhaustivo con el fin de determinar si las series en estudio tienen realmente una raíz unitaria y fue acertada la diferenciación, o son estacionarias en tendencia.

CUADRO N°1: Resultados del ADF test al 1%

Serie	ADF	Valor Crítico	Ho: Existe raíz unitaria		
			Rechazo Ho	No Rechazo Ho	
PIB	Logaritmo	-1.30530896	-4.023663209		x
	Diferencias	-5.15190221	-4.024094704	x	
IMP	Logaritmo	-2.37407467	-4.023663209		x
	Diferencias	-5.26803689	-4.024094704	x	
INV	Logaritmo	-2.27095473	-4.023663209		x
	Diferencias	-4.91853863	-4.024094704	x	

Fuente: *Elaboración propia en base a datos del BCE*

Adicionalmente, se realizó el contraste no paramétrico de **Phillips-Perron**, el mismo que arrojó resultados mostrados en el cuadro N° 2, similares a los del test anterior, es decir, que todas las series tienen raíz unitaria en logaritmos, mientras que al ser diferenciadas se rechaza la existencia de las mismas y son estacionarias.

CUADRO N°2: Resultados del PP test al 1%

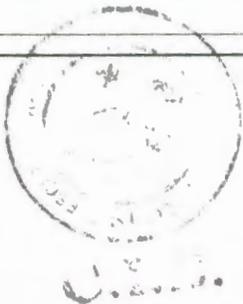
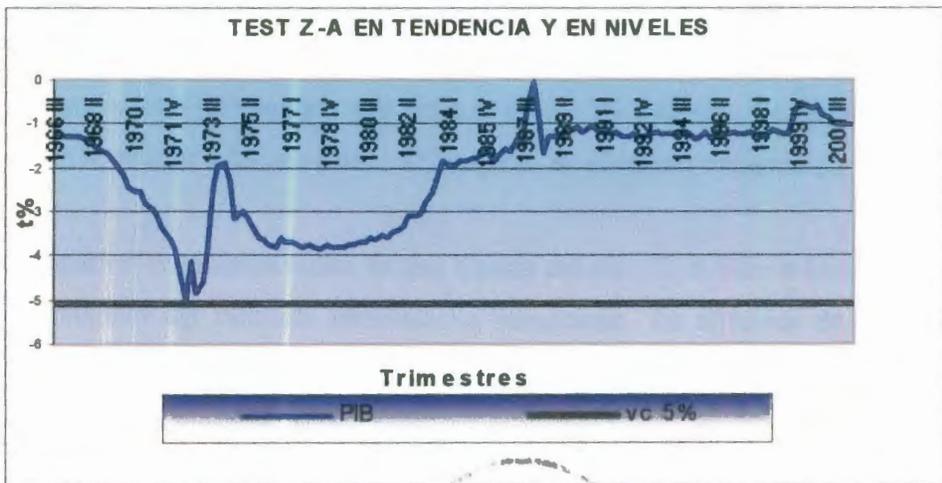
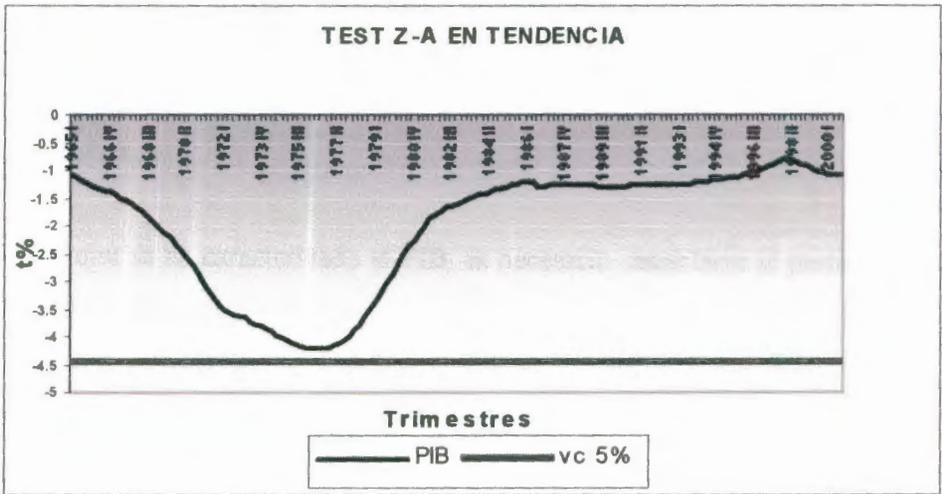
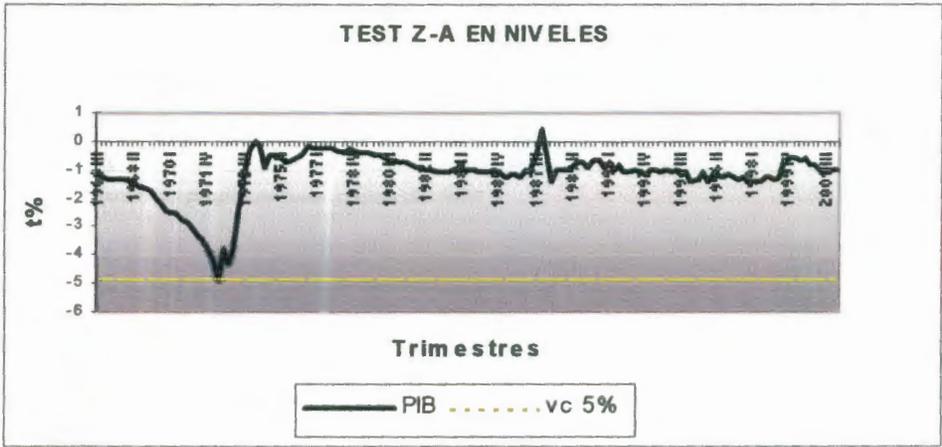
Serie	PP	Valor Crítico	Ho: Serie no estacionaria		
			Rechazo Ho	No Rechazo Ho	
PIB	Logaritmo	-0.89704339	-4.021997195		x
	Diferencias	-8.52816992	-4.022404955	x	
IMP	Logaritmo	-2.37522573	-4.021997195		x
	Diferencias	-10.110363	-4.022404955	x	
INV	Logaritmo	-2.14059694	-4.021997195		x
	Diferencias	-7.30134276	-4.022404955	x	

Fuente: *Elaboración propia en base a datos del BCE*

En el contraste de **Zivot y Andrews** se testea la presencia de raíz unitaria luego de correr una regresión anidada considerando la posibilidad de quiebre en el nivel y/o en la tendencia trimestre a trimestre. Dado que el test reporta valores t, estos deben luego compararse con los valores críticos obtenidos en Zivot y Andrews (1992). Un valor bajo (en valor absoluto) constituye, por ende, evidencia a favor de la nula y en contra de la alternativa.

En el caso del PIB, los resultados fueron los siguientes:

GRÁFICO N°2: Test Secuencial Zivot y Andrews



CUADRO N° 3: Resultados del ZA test al 5%

Test de Zivot y Andrews	Valor "t" computado	Valores críticos al 5%
Quiebre en el nivel	-4.8727302	-4.80
Quiebre en la tendencia	-4.1396842	-4.42
Quiebre en nivel y tendencia	-5.0361231	-5.08

Fuente: *Elaboración propia en base a datos del BCE*

Observando tanto en el *Gráfico N° 2* como en el *Cuadro N° 3*, el contraste de Zivot y Andrews demuestra que el PIB es efectivamente una serie estacionaria en tendencia con quiebre en el nivel al 5% de significancia. Dado que el PIB es estacionario al no poseer una raíz unitaria, los factores exógenos o perturbaciones aleatorias observadas en la serie del producto, no tendrían un impacto permanente en la serie o lo que es lo mismo, tendrían efectos transitorios o de corto plazo. Estos quiebres habrían afectado solamente el nivel, mientras que, de acuerdo a la evidencia hallada, la tendencia no ha sufrido cambios.

Una vez que se ha caracterizado al PIB, es necesario establecer el período en el que ocurrió dicho quiebre.

Para esto, se utilizó el test de **Bai-Perron** (1998), el cual dio unos intervalos de posibles fechas de quiebre ubicados entre el dato 32 y 40 con un nivel de significancia del 5%. Para escoger la fecha exacta del quiebre, se corrieron las regresiones que incluían una variable ficticia (DU), la cual tomaba el valor de cero antes de la posible fecha de quiebre, y el valor de uno a partir de la fecha de quiebre en adelante y se eligió aquella que tenía el mayor R-cuadrado. La fecha de quiebre para el PIB, resultó estar en el dato 32, es decir, en el cuarto trimestre del año 72.

La explicación económica radica en que a partir del año 72, debido al boom petrolero, las condiciones del mercado internacional mejoraron los términos de intercambio dado el incremento del precio del crudo en el mercado mundial. Paralela a esta

situación, se dio, además, un inusitado aumento en los volúmenes de exportación. Este contexto fue favorable a la economía ecuatoriana, ya que el país pudo disponer de una gran cantidad de recursos que le permitieron aumentar la producción.

Por otra parte, este quiebre derivado del aumento en los ingresos petroleros del país se tradujo en el consumo produciéndose expectativas por lo que se creía sería un ingreso constante. De esta manera se produjo un *efecto de renta permanente*,²² es decir, la tendencia elevada en el consumo estaba basada en la estimación de la renta a largo plazo.

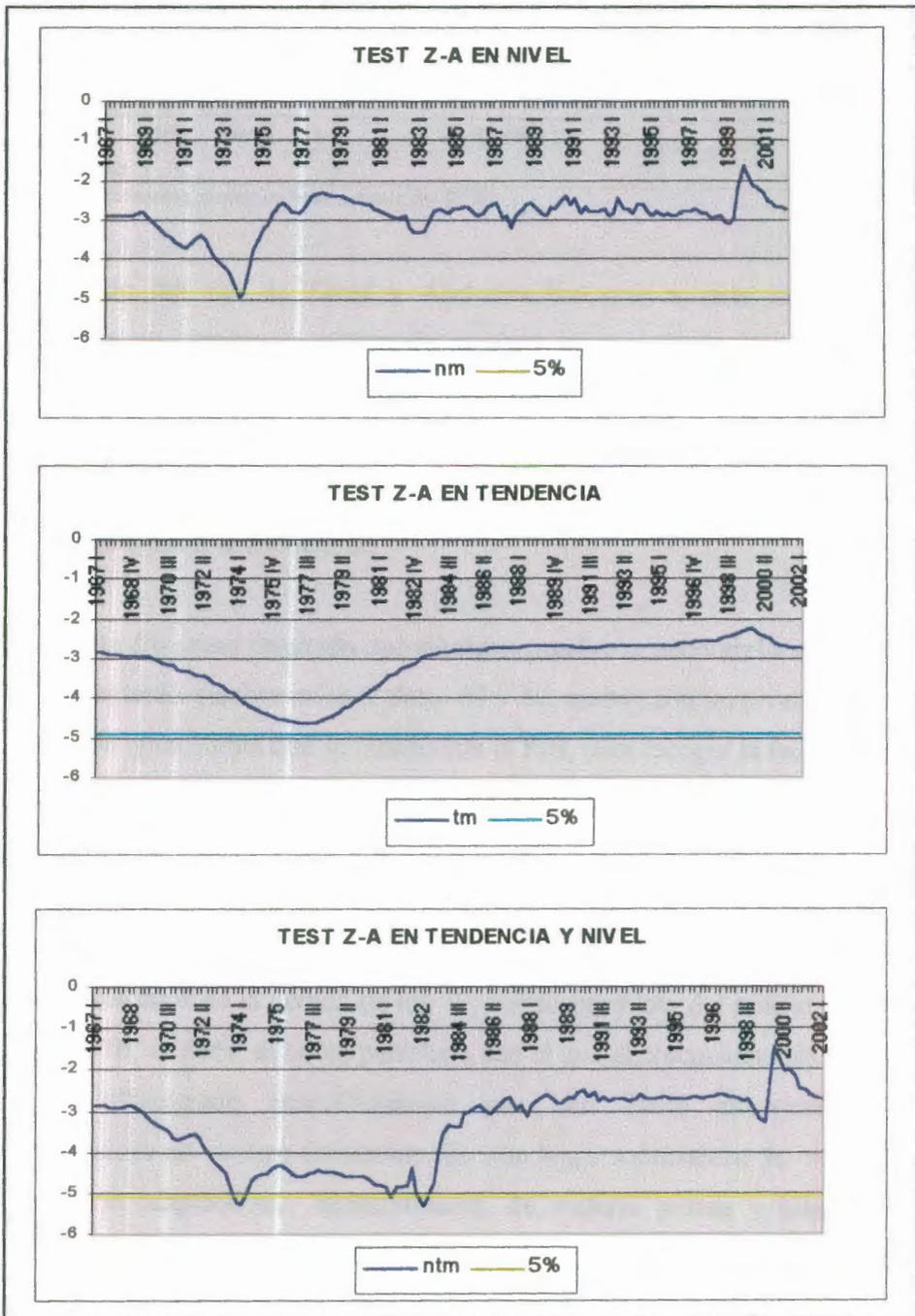
Siguiendo la misma metodología se hicieron los contrastes de Zivot-Andrews y Bai-Perron para las importaciones y la inversión.

En el caso de las importaciones, los resultados se muestran en el *Gráfico N° 3* y en el *Cuadro N° 4*:



²² Milton Friedman, *A Theory of Consumption Function*, N. J., Princeton University Press, 1957.

GRAFICO N° 3 : Test Secuencial Zivot y Andrews



CUADRO N° 4: Resultados del Test ZA al 5%

Test de Zivot y Andrews	Valor "t" computado	Valores críticos al 5%
Quiebre en el nivel	-4.943232	-4.80
Quiebre en la tendencia	-4.37832	-4.42
Quiebre en nivel y tendencia	-5.326891	-5.08

Fuente: *Elaboración propia en base a datos del BCE*

El resultado del test de **Zivot y Andrews** fue que la serie Importaciones es estacionaria en tendencia existiendo quiebre en el nivel de ésta al presentarse la evidencia necesaria para rechazar la nula que hay raíz unitaria. Al igual que en el caso del PIB, se procedió a realizar el contraste de **Bai y Perron**, el mismo que calcula el número de quiebres que tiene la serie así como los intervalos en que posiblemente estos se encuentran.

El contraste dio como resultado que el primer quiebre se encontraba entre el dato 33 y 40 y el segundo quiebre entre el dato 67 y 80, ambos con un nivel de significancia del 5%. De igual forma que se realizó con el PIB, para escoger la fecha exacta de los quiebres, se corrieron las regresiones que incluían, en este caso, dos variables ficticias (Q_1 y Q_2).

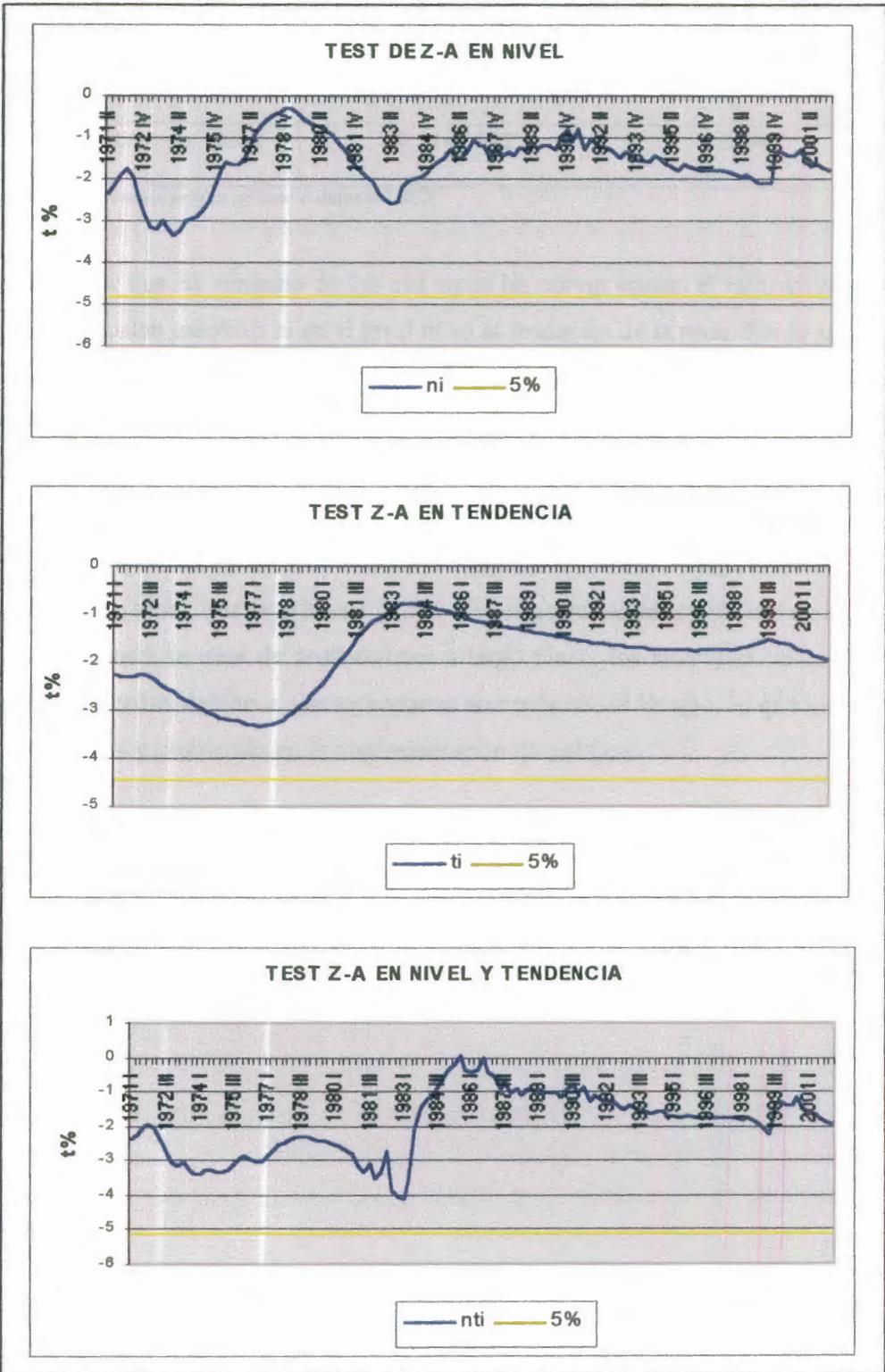
En definitiva, el primer quiebre que se presenta en las Importaciones es alrededor de los primeros años de la década de los 70, siendo producto del mismo fenómeno que afectó al PIB, es decir, el boom petrolero, con el que el crecimiento las importaciones se vio influenciado específicamente por una fuerte afluencia de divisas, manteniéndose así un tipo de cambio fijo que logró sobrevalorar la moneda, lo que incentivó la adquisición, especialmente, de materia primas y bienes de capital importados, que, como característica de la estrategia de industrialización basada en la sustitución de importaciones, mantenían niveles arancelarios bajos; y, en lo que a

bienes de consumo se refería, sus importaciones estaban restringidas a través de niveles arancelarios elevados.

El test de Bai y Perron indica además la existencia de un segundo quiebre en el nivel de la serie, el mismo que, como se muestra en el intervalo, se habría dado en los años 80. Efectivamente, la tendencia creciente de las importaciones se mantuvo hasta 1980, año en el que éstas comienzan a declinar dado el cierre de importantes fuentes de financiamiento y a la aplicación de una medida de la contracción de la demanda interna a fin de ayudar al mejoramiento del sector externo. En 1983 las exportaciones declinaron fuertemente por lo que se aplicó una devaluación seguida de continuas minidevaluaciones que dieron como resultado una caída de las importaciones dada las restricciones cuantitativas que se impusieron.

Por último, se hace el análisis anterior para la serie de la inversión, cuyos resultados se exponen en el *Gráfico N° 4* y en el *cuadro N°5*.

GRAFICO N°4 : Test Secuencial Zivot y Andrews



CUADRO N° 5: Resultados del test ZA al 5%

Test de Zivot y Andrews	Valor "t" computado	Valores críticos al 5%
Con quiebre en nivel	-3.3511548	-4.80
Con quiebre en la tendencia	-3.3300092	-4.42
Con quiebre en nivel y tendencia	-4.1142492	-5.08

Fuente: *Elaboración propia en base a datos del BCE*

Se puede ver que en ninguno de los tres casos las curvas cruzan el valor crítico, por lo que no existen quiebres ni en el nivel ni en la tendencia de la serie. Por lo tanto, el comportamiento errático de la misma, se debería a la presencia de **raíz unitaria**. El *Cuadro N° 5* presenta los resultados de los "t" calculados por el test de **Zivot y Andrews**, siendo evidente que para este caso no se puede rechazar la hipótesis nula de existencia de raíz unitaria, por lo que esta serie debe ser diferenciada para que sea estacionaria, es decir se trata de una serie integrada de orden 1. Este hecho implica que cualquier shock que se presente tendrá efectos permanentes en el nivel de la serie; además, cuando se trata de proyecciones a largo plazo, los intervalos de confianza serán no acotados debido a que su varianza aumenta con el tiempo, lo que generaría incertidumbre y problemas en la implementación de políticas.

CAPITULO III

RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al aplicar la metodología descrita en el capítulo anterior a las series PIB, Importaciones e Inversión trimestrales.

3.1 Modelos ARIMA

La forma tradicional de generar y aplicar modelos ARIMA es utilizando la metodología elaborada por Box y Jenkins, explicada en el capítulo uno. La forma más general de aplicarla, es dividir el proceso en cuatro pasos: identificación, estimación del modelo, validación, y la posterior predicción. En esta sección, entonces, se seguirá esa estructura para generar las predicciones de las variables en estudio.

3.1.1 Identificación

Se trató de buscar un proceso ARMA que de forma verosímil haya podido generar la serie temporal, es decir, que se adapte mejor a las características de la misma, sin recurrir a variables explicativas externas. Pero esos procesos deben ser estacionarios, condición que ya fue analizada en el apartado anterior.

Una vez estacionarias, se determinaron los rezagos de las variables, es decir, encontrar el orden del componente autorregresivo (p) y los errores estocásticos o componente de medias móviles (q) del proceso ARMA, que se considere haya podido

generar la serie estacionaria. Para tal fin, se utilizaron los correlogramas estimados tanto de la función de autocorrelación simple como de la función de autocorrelación parcial estimada.

Posteriormente se procedió a elaborar las distintas especificaciones que luego fueron evaluadas de acuerdo a su bondad de ajuste y a la significancia de parámetros. Se ha seguido el mismo orden anterior para el tratamiento de las series (PIB, IMP, INV).

En el caso del PIB, los resultados se pueden observar en el Cuadro N°6:

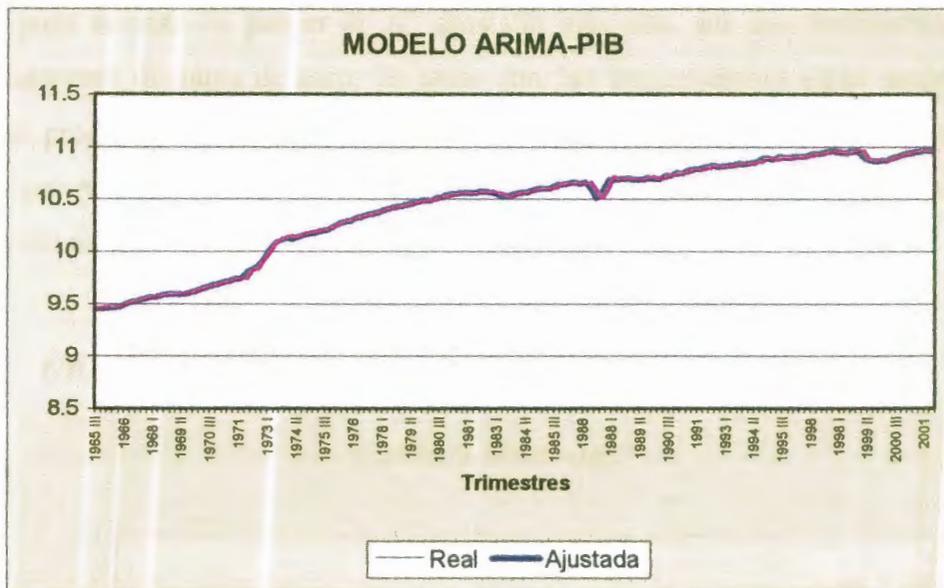
CUADRO N° 6: Elección de modelo ARIMA para la variable PIB

Modelo ARIMA	R^2 Ajustado	Otras características
AR(6) MA(6)	0.998303943	Componentes MA(1,5) no significativos al 95% .
AR(6) MA(2) MA(3) MA(4) MA(6)	0.998310948	R^2 más bajo que los otros.
AR(6) MA(2) MA(3) MA(4)	0.998279671	Solo componentes AR (1,2) y MA(3) son significativos al 95%.
AR(6)	0.998265287	Componentes no significativos desde el rezago 3
AR(3) MA(3)	0.998442604	R^2 más bajo que los otros.
AR(3)	0.998425695	Tercer rezago no significativo.
AR(2) MA(1)	0.998458164	Componentes AR(2) y MA(1) no significativos.
AR(2) MA (3)	0.998435263	Componente MA(3) no significativo
AR(2)	0.998444719	ELEGIDO
AR(1) MA(4)	0.998475765	Componentes no significativos desde el rezago 2

Fuente: *Elaboración propia en base a datos del BCE*

La serie puede ser mejor caracterizada como un proceso **ARIMA(2,0,0)** con tendencia y constante, además de una variable ficticia que captura el quiebre en el nivel ocurrido en los años 70. El gráfico N° 5 muestra el ajuste del modelo:

GRAFICO N°5: Ajuste del Modelo ARIMA para el PIB



Ahora corresponde la elección de los componentes autorregresivos y de medias móviles para las importaciones, los resultados se resumen en el Cuadro N°7:

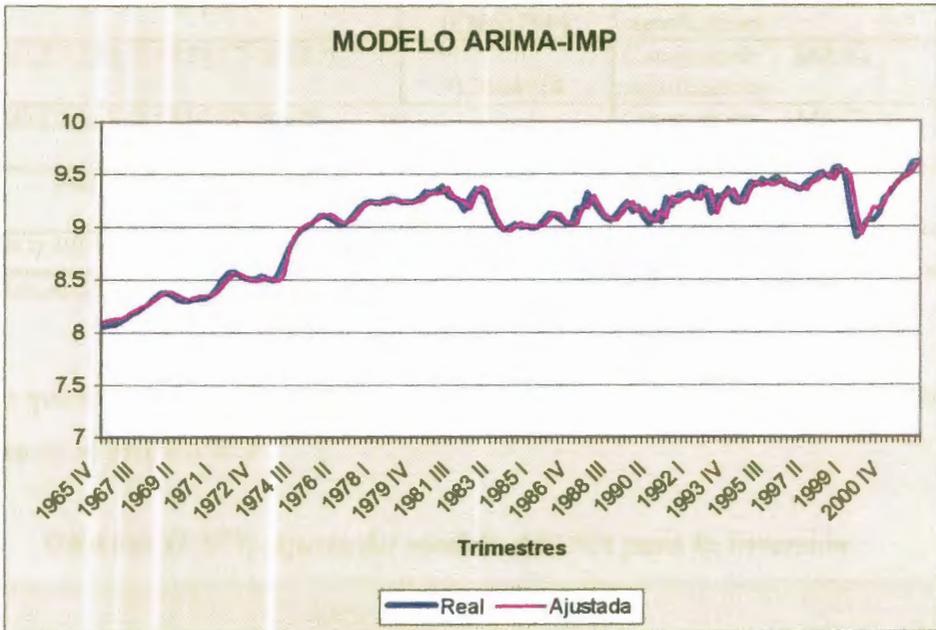
CUADRO N° 7: Elección de modelo ARIMA para la variable IMP

MODELO ARIMA	R^2 AJUSTADO	OTRAS CARACTERÍSTICAS
AR(6) MA(6)	0.96984037	Solo componentes AR(1) y MA(4) significativos.
AR(6) MA(4)	0.97019237	Solo componentes AR(1) y MA(4) significativos.
AR(6) MA(3)	0.96993486	Componentes AR(3,4,6) y MA(1) no significativos
AR(1) AR(2) AR(3) AR(5) AR(6) MA(1) MA(2) MA(3)	0.96838597	Componentes AR(6) y MA(1,3) no significativos
AR(1) AR(2) AR(3) AR(5) AR(6) MA(1) MA(2)	0.96861822	Componentes AR(6) y MA(1) no significativos
AR(1) AR(2) AR(3) AR(5) AR(6) MA(2)	0.96840432	Solo el componente AR(1) es significativo.
AR(1) AR(2) AR(3) AR(5) AR(6)	0.96864	Solo el componente AR(1) es significativo.
AR(1) AR(3) AR(5) AR(6)	0.96881443	Solo componentes AR(1,3) significativos.
AR(1) AR(3) AR(5)	0.96976179	Solo componentes AR(1,3) significativos.
AR(1) AR(3)	0.97212294	ELEGIDO

Fuente: *Elaboración propia en base a datos del BCE*

Es evidente que, para esta serie, el modelo con mejor desempeño es el último del cuadro, pues además de poseer el R^2 ajustado más alto, sus dos coeficientes son estadísticamente distintos de cero. Es decir que, las importaciones están modeladas como un proceso *ARIMA (3,0,0)* con componente tendencial, más dos variables ficticias que recogen el impacto de los quiebres en el nivel. El *gráfico N°6* muestra el ajuste del modelo:

GRAFICO N°6: Ajuste del modelo ARIMA para las Importaciones



A continuación, se determinará el modelo que mejor se ajuste a la serie de la Inversión.

Es válido recordar que, debido a la presencia de una raíz unitaria en la serie, se ha realizado una diferenciación de primer orden, $d = 1$, a fin de que la serie cumpla con la condición de estacionariedad.



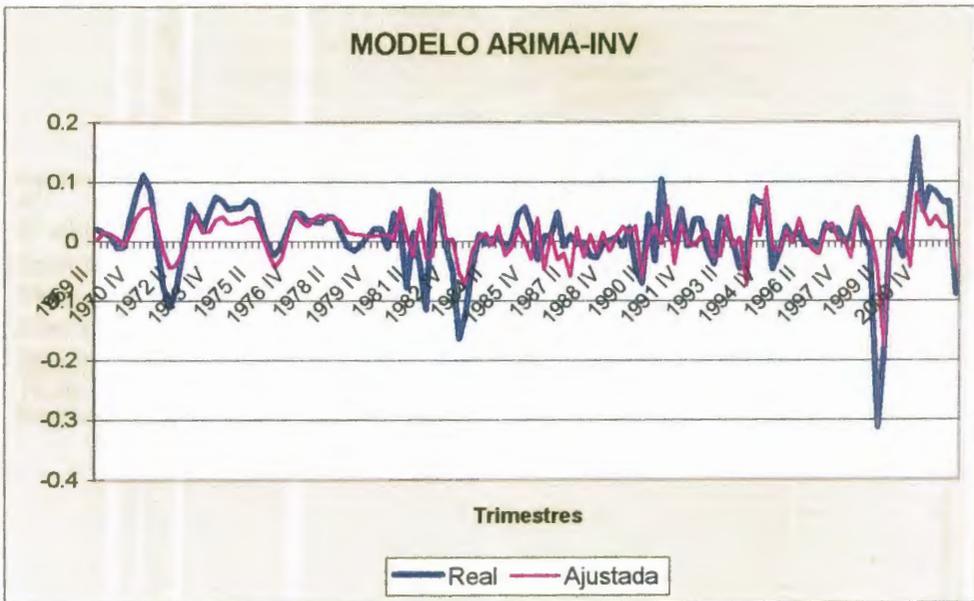
CUADRO N° 8: Elección de modelo ARIMA para la variable INV

MODELO ARIMA	R ² AJUSTADO	OTRAS CARACTERÍSTICAS
AR(20) MA(10)	0.33572158	Solo componente AR(12) significativo.
AR(1,2,3,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,19,20) MA(9)	0.36976738	Solo componente AR(16) significativo.
AR(1,2,3,7,8,9,11,12,13,15,16,17,19,20) MA(9)	0.37502432	Solo componente AR(13) significativo.
AR(1,2,3,7,8,9,11,12,13,15,16,17,19,20) MA(1,4,5,6,7,8,9)	0.38747544	Solo componentes AR(16) AR(17) y significativos.
AR(1,2,3,7,8,9,11,12,13,16,17,19,20) MA(1,4,5,6,7,9)	0.39417536	Componentes MA(5) MA(9) no significativos
AR(1,2,3,7,8,11,12,13,16,17) MA(1,4,6,7)	0.38617944	Componentes MA(1) MA(4) no significativos
AR(1,2,3,7,11,12,13,16,17) MA(6,7)	0.3164914	Componente MA(6) no significativos
AR(1,2,3,11,12,13,16,17) MA(7)	0.3402818	Componente MA(7) no significativo
AR(1,2,12,13,16,17)	0.3358352	Componente AR(2) no significativo.
AR(1) AR(12) AR(13) AR(16) AR(17)	0.302003	ELEGIDO

Fuente: *Elaboración propia en base a datos del BCE*

Esta serie quedó determinada como un proceso **ARIMA (17,1,0)**. El ajuste del modelo se muestra en el *gráfico N°7*:

GRAFICO N°7: Ajuste del modelo ARIMA para la Inversión



3.1.2 Estimación

Una vez realizada la identificación de los modelos ARIMA (p,d,q) se procedió a estimar sus parámetros. El Cuadro N°9, muestra las estimaciones para cada uno de los modelos determinados.

CUADRO N°9: Estimación de los modelos ARIMA

<i>Variable</i>	<i>LPIB</i>	<i>LIMP</i>	<i>DLINV</i>
AR(1)	1.203851 (14.7898)	0.922225 (15.28481)	0.499760 (6.456815)
AR(2)	-0.285327 (-3.726084)		
AR(3)		-0.160231 (-3.078592)	
AR(12)			0.251442 (2.640791)
AR(13)			-0.283683 (-2.851790)
AR(16)			0.544209 (4.760946)
AR(17)			-0.427497 (-3.556368)
C	0.784878 (3.796544)	1.968824 (5.303498)	
TEND	0.000491 (2.889973)	0.00164 (3.895662)	
DU	0.043068 (3.666235)		
Q1		0.134526 (3.993388)	
Q2		-0.081951 (-3.198636)	
R ²	0.998487	0.973084	0.323316
R ² Ajustado	0.998445	0.972123	0.302003
Suma de residuos al cuadrado	0.048854	0.621	0.315050
Media de la var. dep.	10.4292	9.027952	0.008672
Error estándar de la var. dep.	0.470326	0.398895	0.059616
Estadístico de Durbin-Watson	1.891997	1.882134	1.844125

Fuente: *Elaboración propia en base a datos del BCE, utilizando E-views 3.1. Los valores del Estadístico "t" están entre paréntesis.*

En definitiva, los modelos que van a ser utilizados para generar las predicciones son los siguientes:

$$LPIB = 0.784878 + 0.000491 * @TREND + 0.043068 * DU + 1.203851 * LPIB(-1) - 0.285327 * LPIB(-2)$$

$$LIMP = 1.968824 + 0.001640 * @TREND + 0.134526 * Q1 - 0.081951 * Q2 + 0.922225 * LIMP(-1) - 0.1602309744 * LIMP(-3)$$

$$DLINV = 0.499760 * DLINV(-1) + 0.251442 * DLINV(-12) - 0.283683 * DLINV(-13) + 0.544209 * DLINV(-16) - 0.427497 * DLINV(-17)$$

3.1.3 Diagnóstico

Antes de generar las predicciones, es relevante llevar a cabo un diagnóstico general de los modelos obtenidos.

En primer lugar se evaluó la **estabilidad de los parámetros**, utilizando como herramienta el estadístico *CUSUM*. En los *Gráficos* del anexo **A1**, **A2** y **A3**, se muestra, al 5% de significancia, una estructura paramétrica razonablemente constante en cada uno de los modelos identificados. Esta propiedad es necesaria para asegurar que los modelos sean adecuados para la generación de predicciones.

Luego, se analizó la **significatividad individual de los residuos** utilizando sus correlogramas. Estos muestran en los *Gráficos* del anexo **A4**, **A5** y **A6**, que los residuos caen dentro de las bandas, por lo cual se puede asumir que estos valores son estadísticamente significativos.



Se verificó, por otro lado, la ausencia de autocorrelación en los residuos de orden mayor a uno, utilizándose el *estadístico Q de Box-Pierce*, rechazando su hipótesis nula al 5% de significancia.

3.1.4 Predicción

Por último se efectuaron las *predicciones* basándose en los modelos estimados para cada una de las variables.

Para este fin, se tomó una submuestra hasta el cuarto trimestre del año noventa y nueve (1999:04) y, utilizando las estructuras determinadas por los ARIMA elegidos, se estimaron los nuevos coeficientes (incluyendo los quiebres en niveles y los componentes tendenciales), se obtuvieron las nuevas ecuaciones y, con los datos de esta submuestra, se generaron los valores correspondientes al trimestre 2000:1.

Luego, se repitió este proceso incluyendo cada vez un trimestre adicional, con lo cual se consiguió una serie de predicciones “*one step*” (es decir, predicciones de $t+1$ utilizando sólo información hasta t) para el período 2000:1-2002:2. Así, se obtuvo una serie para cada variable de estudio. Los gráficos se encuentran en el **Anexo A7, A8, A9**.

Una vez realizadas las predicciones, se utilizaron básicamente dos medidas para poder comparar los resultados de las predicciones: el promedio del error absoluto medio de predicción (EAMP) en porcentajes. Este es, probablemente, el más natural de elaborar: teniendo la serie de valores reales, se puede determinar el porcentaje de variación con respecto al valor pronosticado y obtener el promedio de estos porcentajes a lo largo de todo el horizonte de predicción.

Por otro lado, el indicador alternativo que se utiliza es la raíz del error cuadrático medio (RECM), que promedia las raíces de los errores cuadráticos medios de las

distintas variables. De este modo, esta última medida penaliza aquellas predicciones que –aun teniendo el mismo EAMP- cometen errores más grandes.

El resumen de estos indicadores, para los modelos que se han estudiado, se encuentra en el *Cuadro N° 10*:

CUADRO N° 10: Errores de predicción

MODELO	EAMP %	RECM
PIB	1.04053076	711.211532
INVERSIÓN	6.411971	625.7102
IMPORTACIONES	7.05188929	1127.43919

Más adelante se efectuará la comparación de los resultados una vez que se hayan obtenido las predicciones para el modelo VAR; sin embargo, es importante señalar que bajo el primer indicador de evaluación, el PIB es el que tiene las mejores predicciones, mientras que para el segundo indicador, las predicciones que se obtuvieron para la Inversión, son las mejores.

3.2 Modelos VAR

3.2.1 Identificación

Antes de realizar la estimación de los parámetros del modelo VAR, es necesario tener en cuenta dos aspectos importantes:

En primer lugar, el sistema debe ser estacionario. Conociendo que dos de las series son estacionarias en tendencia con quiebres en el nivel, lo que se hizo fue incorporar tanto la tendencia como las tres variables ficticias que representan los quiebres como

variables exógenas, la última variable fue puesta en niveles sujeta a que las raíces del sistema sean estacionarias.

El segundo aspecto consiste en determinar el número de rezagos óptimo para llevar a cabo dicha estimación, tomando en cuenta la pérdida de grados de libertad que se daría si la cantidad de coeficientes a estimar fuera muy grande. Es así, que se procedió a estimar el modelo con diferente número de rezagos para luego, comparar los valores resultantes en el criterio Akaike.

Los resultados se presentan en el *Cuadro N° 11*:

CUADRO N° 11: Criterio Akaike

# Rezagos	Criterio Akaike
1	-11.51033622
2	-11.70160031
3	-11.69429398
4	-11.61366996

Entonces, el número de rezagos necesarios para llevar a cabo la estimación y posterior predicción es 2.

3.2.2 Estimación

Una vez aclarado estos dos aspectos, se obtuvieron las estimaciones de los parámetros del modelo.

Los resultados se muestran en el *Cuadro N° 12*:

CUADRO N° 12: Estimación del modelo VAR

<i>Variable</i>	<i>LPIB</i>	<i>LM</i>	<i>LINV</i>
<i>LPIB(-1)</i>	1.170837 (13.202)	-0.160328 (-0.51939)	0.1214 (0.50277)
<i>LPIB(-2)</i>	-0.275695 (-2.99634)	0.402739 (1.25755)	-0.032075 (-0.12804)
<i>LM(-1)</i>	0.035327 (0.93868)	0.626646 (4.78384)	0.010133 (0.09889)
<i>LM(-2)</i>	0.022571 (0.5939)	0.010475 (0.07919)	0.023748 (0.2295)
<i>LINV(-1)</i>	-0.047705 (-0.95170)	0.599361 (3.4353)	1.236304 (9.05881)
<i>LINV(-2)</i>	0.020414 (0.41688)	-0.526271 (-3.08767)	-0.439959 (-3.29992)
<i>C</i>	0.748772 (2.39016)	0.107642 (0.09872)	0.498605 (0.58458)
<i>@TREND</i>	0.000509 (2.0145)	0.00035 (2.398)	0.000509 (0.74028)
<i>DU</i>	0.051314 (3.58034)	-0.010735 (-0.21520)	0.010456 (0.26795)
<i>Q1</i>	-0.018372 (-1.46994)	0.058065 (2.3347)	0.041409 (1.21686)
<i>Q2</i>	0.002729 (0.30768)	-0.092268 (-2.98837)	-0.077876 (-3.22447)
<i>R-squared</i>	0.998565	0.97685	0.982395
<i>Adj. R-squared</i>	0.99846	0.975161	0.98111
<i>Sum sq. resids</i>	0.046795	0.566917	0.346881
<i>S.E. equation</i>	0.018482	0.064328	0.050319
<i>F-statistic</i>	9532.537	578.1052	764.4982
<i>Log likelihood</i>	386.3775	201.789	238.1402
<i>Akaike AIC</i>	-5.072669	-2.578229	-3.069462
<i>Schwarz SC</i>	-4.849903	-2.355464	-2.846696
<i>Mean dependent</i>	10.43298	9.025825	8.684341
<i>S.D. dependent</i>	0.470973	0.40816	0.366114

Fuente: *Elaboración propia en base a datos del BCE, utilizando E-views 3.1. Los valores del Estadístico "t" están entre paréntesis.*

El sistema de ecuaciones para generar las predicciones, son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 LPIB = & 1.170837 * LPIB(-1) - 0.275695 * LPIB(-2) + 0.035327 * LM(-1) + \\
 & 0.022571 * LM(-2) - 0.047705 * LINV(-1) + 0.020414 * LINV(-2) + 0.748772 \\
 & + 0.000509 * @TREND + 0.051314 * DU - 0.01837246015 * Q1 + \\
 & 0.002729 * Q2
 \end{aligned}$$

$$LM = - 0.160328*LPiB(-1) + 0.402739*LPiB(-2) + 0.62665*LM(-1) + 0.0104754*LM(-2) + 0.599360*LINV(-1) - 0.526271*LINV(-2) + 0.107641 + 0.000349788*(@TREND) - 0.0107354*DU + 0.0580647*Q1 - 0.0922675*Q2$$

$$LINV = 0.12139*LPiB(-1) - 0.0320745*LPiB(-2) + 0.0101326*LM(-1) + 0.023747*LM(-2) + 1.236303*LINV(-1) - 0.439959*LINV(-2) + 0.498605 + 0.000508917*(@TREND) + 0.0104558*DU + 0.0414091*Q1 - 0.0778758*Q2$$

Luego, se comprobó la estacionariedad del sistema²³, para después realizar las predicciones.

3.2.3 Predicción

La mecánica de generación de predicciones con los modelos VAR es idéntica a la utilizada con los ARIMA. Para cada uno de los ejercicios realizados, entonces, se tiene una serie de predicciones: *one step* (Gráficos A10, A11 y A12) para el modelo VAR. El Cuadro N°13 resume los errores resultantes a partir de las predicciones.

CUADRO N°13: Errores de predicción

MODELO	EAMP %	RECM
PIB	0.99960426	700.192593
INVERSION	7.71307821	794.587718
IMPORTACIONES	6.68737706	1246.47449

Ahora, lo que corresponde hacer es la comparación de los diagnósticos de las predicciones por medio de sus errores y establecer las conclusiones que se desprendan de ese análisis. El Cuadro N°14 muestra los dos indicadores de evaluación para ambos modelos.

²³ Se obtuvo que todas las raíces características de la matriz F, son menores a la unidad por lo que el VAR es estacionario.

CUADRO N° 14: Errores de predicción de todos los modelos

	MODELO	PIB	INVERSION	IMPORTACIONES
EAMP%	ARIMA	1.04053076	6.411971	7.051889289
	VAR	0.99960426	7.713078	6.687377058
RECM	ARIMA	711.211532	625.7102	1127.439194
	VAR	700.192593	794.5877	1246.474489

A primera vista se puede apreciar que, en forma bastante general, casi todas las metodologías generan las mejores predicciones para el PIB. Utilizando el primer indicador, que permite comparar fácilmente resultados entre distintas variables, se ve que mientras los errores en el *PIB* son en promedio de alrededor de tan sólo 1% tanto para los ARIMA como para el VAR, las *Importaciones* presentan diferencias cercanas al 6% y 7% y la *Inversión* muestra que los errores oscilan entre el 6% y 8%.

En el caso del PIB, se observa que los modelos VAR presentan un EAM_p de 0.99%, es decir que este tipo de modelos presenta una mejor representación del comportamiento histórico de la variable en cuestión, respecto a los modelos univariantes. Pudiéndose decir que la inclusión de las variables: Importaciones e Inversión, aportan información relevante al momento realizar predicciones.

El desempeño de las Importaciones y la Inversión, por otro lado, es bastante similar, cosa que es remarcable –al menos, teniendo en cuenta las dificultades de ajuste de los modelos ARIMA para la segunda de éstas.

Sin embargo, es válido recalcar que utilizando la segunda medida (RECM) que penaliza las predicciones con errores más grandes son las importaciones las que tienen los indicadores más altos con lo que tendría las predicciones menos buenas.



En definitiva, se ha elegido al indicador *RECM* para evaluar la capacidad predictiva de los modelos, ya que es más riguroso con las predicciones.

Entonces, bajo esta guía, los modelos *VAR* predicen mejor al *PIB*, mientras que los *ARIMA* dan mejores predicciones para las *Importaciones* y la *Inversión*.

3.3 Proyecciones

Por último, basándose en los dos modelos desarrollados en este documento, se realizaron las proyecciones para el año 2003, con el fin de obtener la tasa de crecimiento anual para cada una de las variables.

Los resultados de esta operación se resumen en el *Cuadro N° 15*:

CUADRO N° 15: Tasas anuales de crecimiento proyectadas

Modelo	PIB %	Importaciones %	Inversión %
ARIMA	4.6520961	-5.755999344	1.96829075
VAR	2.1931474	-10.60382411	-2.92508575

Como es evidente, las dos metodologías arrojan resultados diferentes, ya que las tasas de crecimiento varían de un modelo a otro. Sin embargo, para el caso de las dos primeras variables se da la misma tendencia, es decir, que el Producto Interno Bruto crecerá en el año 2003; al mismo tiempo que, para las Importaciones, se da el caso contrario. Mientras que, para la variable Inversión, los resultados son contradictorios en los dos modelos.

Dado que se escogió al indicador *RECM* para evaluar las predicciones, se observa que:

Las proyecciones hechas sobre la base del modelo *VAR* para el *PIB*, muestran que la tasa de crecimiento sería del 2.19%.

Los resultados de las proyecciones para la *Importaciones*, utilizando el modelo *ARIMA*, indican que la tasa de crecimiento anual decrecerá en un 5.76%.

Por último, la proyección de la variable *Inversión* realizada utilizando el modelo *ARIMA*, indica que habría un crecimiento de casi 2% en este año.



CONCLUSIONES

En este trabajo se han modelado tres variables macroeconómicas reales de interés: el PIB, las importaciones y la inversión. El primer paso de gran importancia antes de llevar a cabo la modelación ha sido, el determinar la estacionariedad de cada una de las series para lo que se usaron varios contrastes. Habiendo sido evidentes la fallas de los estadísticos de *Dickey-Fuller* y *Phillips-Perron* en esta tarea, se utilizaron los tests secuenciales de *Zivot y Andrews*. De este último hecho se desprende la conclusión de que a pesar de lo que se cree no todas las variables presentan raíz unitaria; de hecho, dos de las variables de estudio son estacionarias alrededor de la tendencia y presentan quiebres en el nivel, por lo que los shocks que las afectan son de carácter transitorio. Este es el caso del *PIB* y las *Importaciones*, las mismas que fueron fuertemente afectadas por el boom petrolero en los años 70. La otra variable, *Inversión*, sí posee raíz unitaria por lo que los shocks que pudieran perturbarla son permanentes.

Los distintos modelos econométricos se han elaborado con el objetivo de generar predicciones un paso hacia adelante. Las técnicas econométricas utilizadas fueron la de *Box-Jenkins*, para la estimación de modelos *ARIMA*, que utiliza como variables explicativas el pasado de la misma variable dependiente así como los rezagos de sus residuos y la metodología *VAR*.

Probablemente el resultado más interesante es que, al utilizar dos indicadores de evaluación para las predicciones, se obtuvieron resultados distintos en el sentido de que cuál de los dos modelos funciona mejor para generar predicciones, ya que, con la primera medida de evaluación, *el error absoluto medio*, resulta que el **VAR** es mejor en dos de las tres series predichas (*PIB* e *Importaciones*); en cambio, sucede lo contrario cuando se evalúa las predicciones con la *ratz del error cuadrático medio*,

pues dos de las tres predicciones se presentan mejor para los modelos *ARIMA* (*Importaciones e Inversión*).

Sin embargo, se decidió utilizar a la *raíz del error cuadrático medio de predicción* por penalizar más la capacidad predictiva de los modelos, dando como resultado que, el modelo **VAR** genera mejores predicciones para el *PIB*, mientras que los modelos **ARIMA** lo hacen para las *Importaciones* y la *Inversión*. Este resultado no es evidencia suficiente para asegurar que el desempeño predictivo de los *Modelos Univariantes* es mejor que los *Modelos de Vectores Autorregresivos*.

Por último, y en base a este indicador, se realizaron las proyecciones para obtener la tasa de crecimiento anual de las variables estudiadas, resultando que la tasa de crecimiento proyectada al 2003 para el *PIB* es de 2.19%, para las *Importaciones* es de -5.76%, y para la *Inversión* de 1.96%. Es importante aclarar que estos resultados han sido obtenidos en base a las propiedades estadísticas de los datos, es decir, que éstos no han estado sujetos a la teoría económica.

RECOMENDACIONES

Las limitaciones de este trabajo están vinculadas a la falta de intervalos de confianza para las predicciones, pues es muy complejo establecerlos cuando se trabaja con modelos explicados por variables rezagadas no consecutivas.

Otro punto que merece atención es la posibilidad de realizar el mismo ejercicio de predicción de este trabajo pero dos pasos hacia delante y luego hacer la misma evaluación de los errores de predicción para determinar la eficacia de los modelos *ARIMA* y *VAR*.

Asimismo, existe un amplio campo de investigación por estudiar -no realizado en este trabajo- que podría derivar en resultados más precisos. Algunas de las posibles vías de futuro análisis son:

- *Introducción de nuevas variables.* Tanto en los modelos especificados en este trabajo como en otras modelizaciones alternativas, se podrían agregar nuevas variables económicas que aporten información relevante al realizar predicciones.
- *Utilización de leading indicators.* Este tipo de indicadores son muy útiles en la generación de predicciones, ya que brindan señales tempranas de potenciales recesiones o expansiones de la actividad económica agregada.

BIBLIOGRAFÍA

- Atkins, Frank. (2002) **“Multiple Structural Breaks in the Nominal Interest Rate and Inflation in Canada and The United States** . Working Paper, Department of Economics of the The University of Calgary.
- Cuadrado, Elena, Fernando Lorenzo y Virginia Queijo.(2002) **“ Prediciendo El PIB: ¿Qué Aportan Los Métodos Cuantitativos?”**, Documento de Trabajo del Centro de Investigaciones Económicas (CINVE), Universidad de Uruguay.
- Chumacero, Rómulo.(2000) **“Testing for Unit Roots using Economics”**, Documento de Trabajo. Chile
- Chumacero, Rómulo y Jorge Quiroz.(1996) **“La Tasa Natural de Crecimiento de la Economía Chilena: 1985-1996”**. Documento de Trabajo. Chile
- Enders, Walter.(1995) **“Applied Econometric Times Series”**, John Wiley and Sons Inc., pp. 166 – 173, 211- 265
- Greene, William H.(1999) **“Análisis Econométrico”**, 3era Edición, Prentice Hall, pp.709-729
- Grubisic, Elena y Marilina Manteiga. (2000) **“Modelos de Predicción de Agregados Monetarios”** Nota Técnica del Banco Central de Argentina # 9..
- Hamilton, James D. (1994) **“Time Series Analysis”**, Princeton University Press, pp.291-314



- Johnston, Jack y John DiNardo.(1997) **“Econometric Methods”**, 4ta Edición, Mc.Graw-Hill, pp. 204 – 243 , 287 - 301
- Mc.Candless, George, Ma. Florencia Gabrielli y Thomas Murphy. (2001) **“Modelos Económicos de Predicción Macroeconómica en la Argentina”** Documento de Trabajo del Banco Central de Argentina #19.
- Mahía, Ramón.(1999) **“Revisión De Los Procedimientos de Análisis de la Estacionariedad de Las Series Temporales”** . Documento de Trabajo. España.
- Martín Rodríguez, Gloria. (2002) **“Modelos Estructurales en el Contexto de las Series Temporales Económicas”** Documento de Trabajo del Departamento de Economía de las Instituciones, Estadística Económica y Econometría. Facultad de CC. EE. y Empresariales. Universidad de La Laguna.
- Novalés, Alfonso(1993) **“Econometría”**,2da Edición, Mc Graw-Hill, pp. 413 - 469
- Pulido San Roman, Antonio y Julián Pérez García. (2001) **“Modelos Económicos”**, Ediciones Pirámide, pp. 137-383
- Utrera, Ezequiel Gastón. (2001) **“Raíces unitarias y quiebres estructurales: un análisis econométrico del PIB argentino”** Departamento de Economía – Universidad Empresarial Siglo 21 Instituto de Economía y Finanzas

ANEXOS

GRAFICO A1.- CUSUM de los parámetros del modelo del PIB

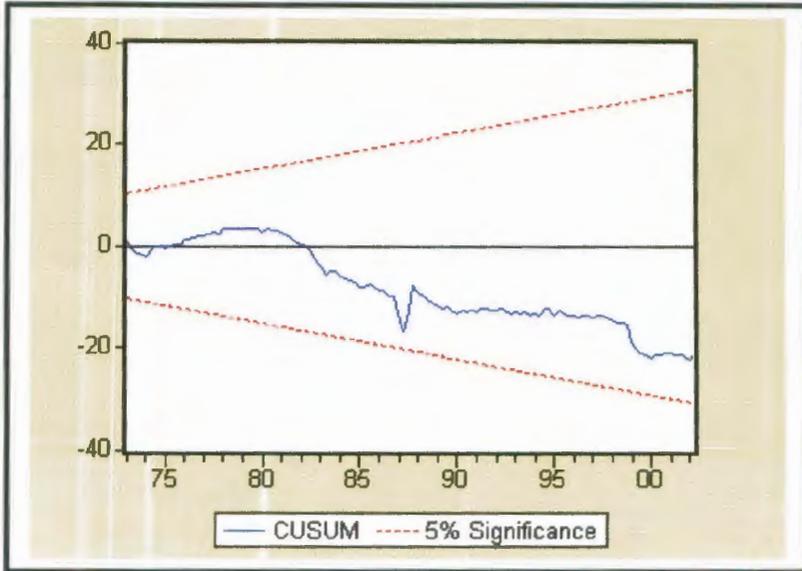


GRAFICO A2.- CUSUM de los parámetros del modelo de las Importaciones

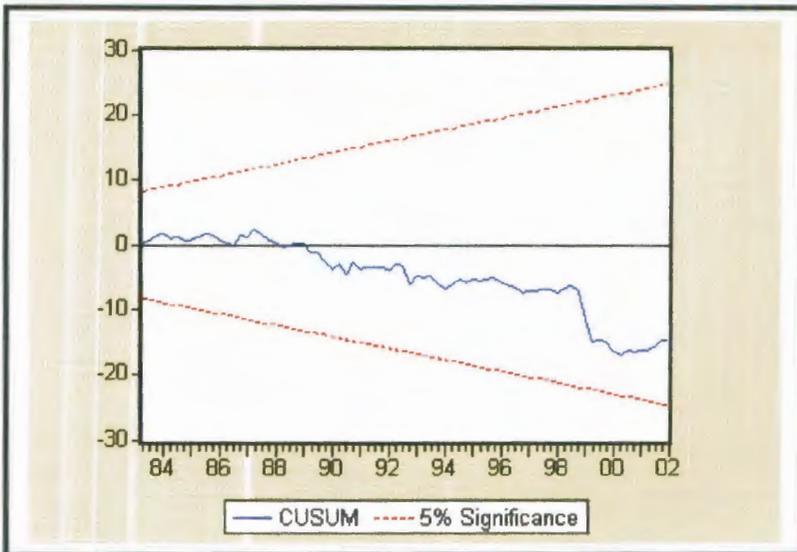
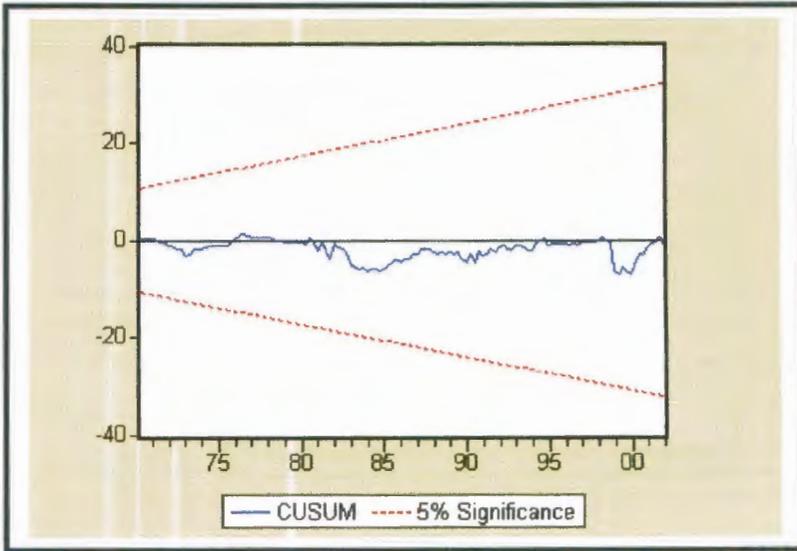


GRAFICO A3.- CUSUM de los parámetros del modelo de las Inversión



Correlogramas de los Residuos-validación del ARIMA

GRAFICO A4. Residuos PIB

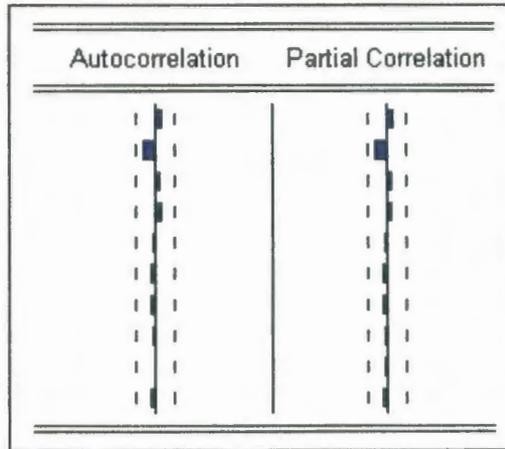


GRAFICO A5. Residuos IMP

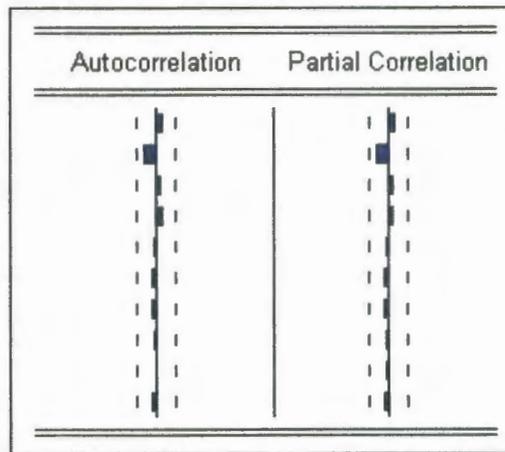


GRAFICO A6. Residuos INV

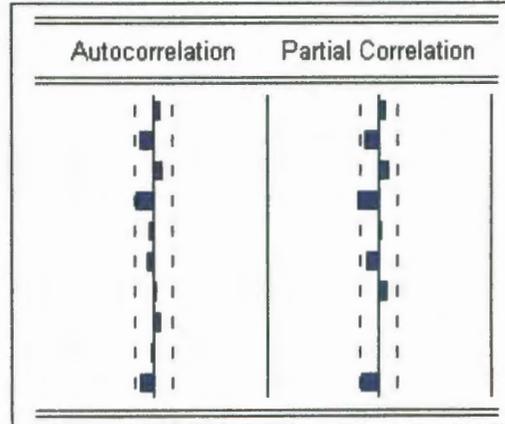


GRAFICO A7.- Predicciones ARIMA – PIB niveles

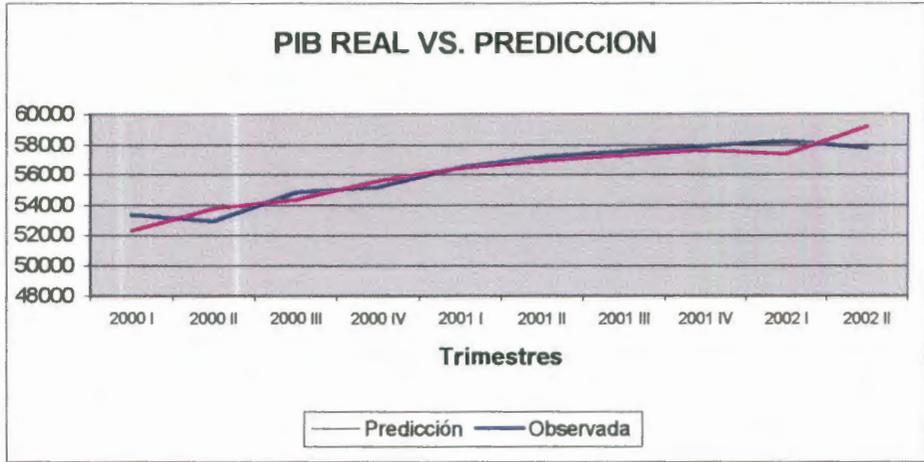


GRAFICO A8.- Predicciones ARIMA – IMP niveles

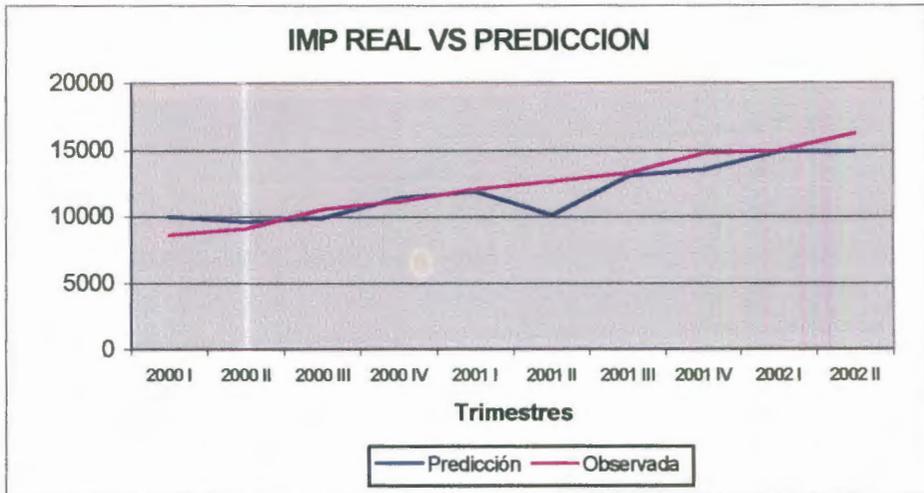


GRAFICO A9.- Predicciones ARIMA – INV niveles

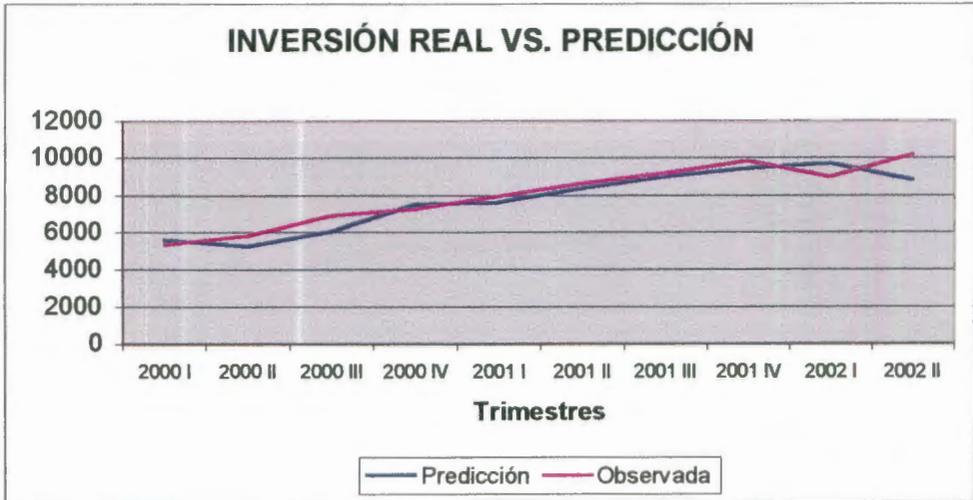
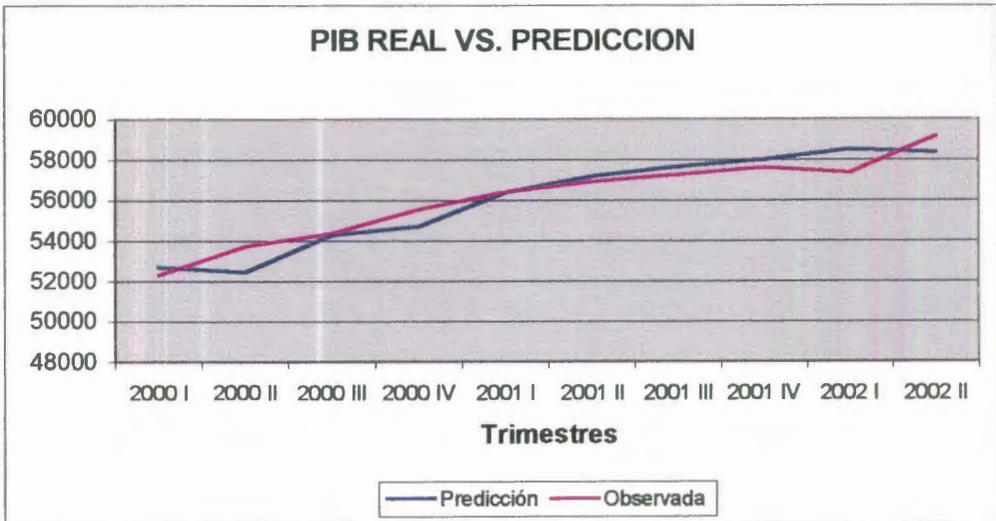


GRAFICO A10.- Predicciones VAR– PIB niveles



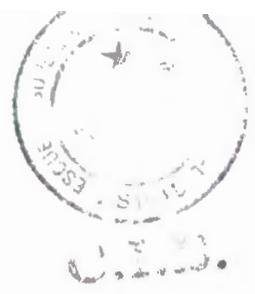


GRAFICO A11.- Predicciones VAR- IMP niveles

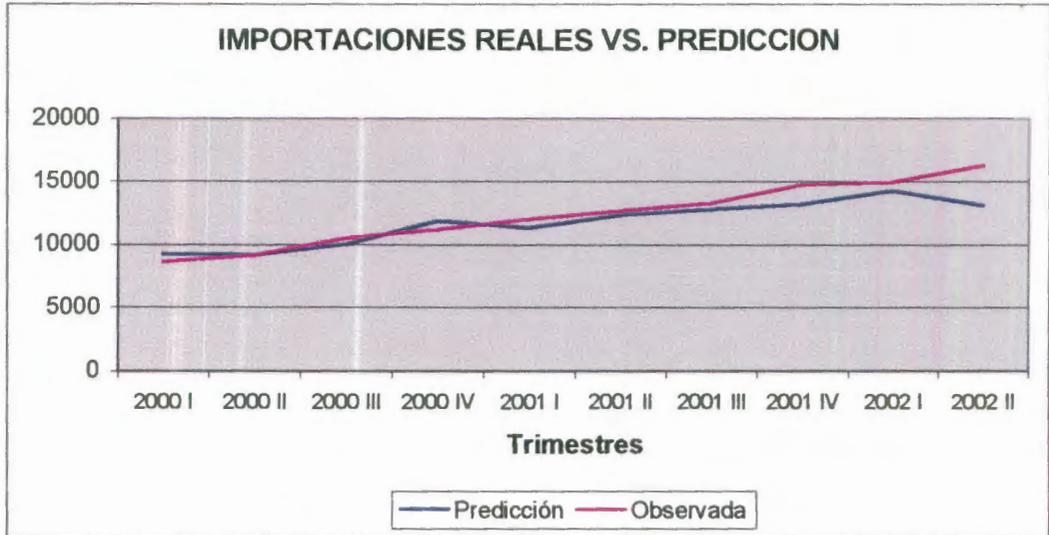


GRAFICO A12.- Predicciones VAR- INV niveles

