ESCUELA SUPERIOR
POLITECNICA DEL LITORAL

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS

"ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERNO"

Monografía previa a la obtencion del título de

MAGISTER EN EDUCACION MATEMATICA
APLICADA AL NIVEL MEDIO

Presentada por:

Jhony Rodriguez Orozco

GUAYAQUIL - ECUADOR

1994

AGRADECIMIENTO

A las personas e instituciones del país, forjadoras del mejoramiento de la Educación, que facilitaron la realización de este Postgrado.

En especial al Master Gaudencio Zurita H. mentalizador y director del mismo, por su titánica labor; y a todos los profesores del Instituto de Matemática de la ESPOL, por que supieron guiarme por el camino del mejoramiento cotidiano.

DEDICATORIA

A mis queridos padres y hermanos,

por su apoyo incondicional.

INDICE DE ABREVIATURAS

$\mathbb{N}$	Conjunto de los números Naturales
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números Reales
$\mathbb{C}$	Conjunto de los números Complejos
$\in$	Pertenece a
$\subset$	Subconjunto
$\exists$	Existe al menos uno
$\cap$	Intersección de conjuntos
$\forall$	Para todo
$\wedge$	Conjunción (y)
$\neg$	Negación (no)
$\sim$	Equivalente a
Σ	Sumatoria
A^t	Matriz Transpuesta
Q	Matriz Ortogonal
$H^\perp$	Complemento Ortogonal
tr(A)	Traza de una matriz cuadrada
B_1	Base de un espacio vectorial
dim(v)	Dimensión de un espacio vectorial
$A\underline{x}=\underline{b}$	Forma matricial de un sistema de ecuaciones
P_n	Conjunto de polinomios de grado menor o igual a n
$M_{mxn}(R)$	Conjunto de las matrices reales de orden mxn.
$M_{nxn}(R)$	Conjunto de las matrices reales cuadradas de orden nxn.

R^n	Conjunto de las e-niadas reales.
R^2	Conjunto de los pares ordenados reales
R^3	Conjunto de las ternas ordenadas reales
$M_{2\times2}(R)$	Conjunto de las matrices reales cuadradas de orden 2x2.
$M_{3\times3}(R)$	Conjunto de las matrices reales cuadradas de orden 3x3.
P_2	Conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 2.
P_3	Conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 3.

INDICE GENERAL

INTRODUCCION

A finales del siglo 20, es imperioso el estudio del
ra Lineal; por cuanto es una magnífica introducción
comprender la precisión de un argumento matemático y
para iniciarse en la construcción de demostraciones,
tiendo impulsar y combinar de modo satisfactorio dos
ntos de la Matemática: la abstracción y la aplicación.
ricamente el estudio de los vectores se originó con la
ción de Hamilton de los cuaterniones, luego sería
h Willard Gibbs (1 839-1 903 New York) quien
rolló el estudio del Análisis Vectorial, publicando su
Vector Analysis (1 881).

Gibbs definió el producto escalar al principio solo
los vectores i,j,k $\in R^3$: siendo: i=(1,0,0), j=(0,1,0),
0,1).

$$\langle i,i\rangle=\langle j,j\rangle=\langle k,k\rangle= 1$$

$$\langle i,j\rangle=\langle j,i\rangle=\langle i,k\rangle=\langle k,i\rangle=\langle j,k\rangle=\langle k,j\rangle=0.$$

La definición más general llegó muy poco tiempo
ués, por cuanto **Gibbs** explicó el producto escalar en un
lema relativo a fuerzas. Tanto el producto escalar como
roducto cruz aparecen primeramente en las aplicaciones
cas, en las que intervienen el cálculo de muchas
ables, entre tales aplicaciones se encuentran las
sas ecuaciones de Maxwell de electromagnetismo.

El trabajo que presentamos es un estudio de los spacios vectoriales con producto interno, para lo cual es cesario iniciar con un análisis de las matrices, spacios vectoriales reales, independencia lineal, espacio nerado, bases y dimensión.

Nótese que hablamos de espacios vectoriales reales, es cir que los escalares son números reales, también existen pacios vectoriales complejos, donde los escalares son meros complejos los mismos que no serán tratados en este abajo.

Es importante anotar el tratamiento de la función oducto interno sobre un espacio vectorial V:

Φ:VxV--->R, tal que $\Phi(v_1,v_2)= \langle v_1,v_2\rangle \in R$, es decir una función que asigna a cada par ordenado de vectores VxV un número real.

Como se podrá observar el producto interno ya no es clusividad de los vectores bidimensionales y idimensionales, sino también de otros vectores como trices, polinomios, funciones, etc., definiremos e ustraremos la norma de estos vectores que dependerá clusivamente de la función producto interno, como una las incipales propiedades de la norma de un vector tenemos la sigualdad de Cauchy(1 789-1 857)-Schwarz(1 843-1 921).

Además aplicando la función **producto interno** ajaremos en conjuntos de vectores ortonormales (bases), ices ortogonales y complemento ortogonal.

Las definiciones serán afirmaciones de tipo "si y solo las mismas que serán enunciadas e ilustradas. Los emas en su mayoría serán demostrados, caso contrario se cará el texto en el cual constan las demostraciones.

amos que este trabajo sirva de motivación en el estudio Algebra Lineal y la Matemática en general.

CAPITULO 1.

CONCEPTOS PRELIMINARES

. MATRICES

Iniciamos este trabajo definiendo matrices que serán mucho interés en el desarrollo posterior de nuestros as, tales como espacios vectoriales con producto erno, norma de un vector, etc.

inición 1.1.1.

riz.-

Sea N el conjunto de los múmeros naturales; los juntos A y B $\subset$ N siendo A $=\{i/i = 1,2,...,m\}$ y $j/j=1,2,...,n\}$, la función ϕ de AxB a R se denomina riz, si y solo si a cada par ordenado $(i,j) \in$ AxB se le gna un número real o complejo a_{ij}; en nuestro caso nos traremos en el estudio de las matrices reales cuya ación será: $M_{m\times n}(R)$.

Lo usual es representar esta matriz por un arreglo tangular de m filas y n columnas como se describe a tinuación:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

viamente $A \in M_{m \times n}(R)$

Si en particular $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3,2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & -5 \end{bmatrix} \in M_{3\times4}(R)$.

tonces observamos que:

$\phi\,(1,1) = 1$; $\phi\,(2,1) = 4$; $\phi\,(3,1) = 7$

$\phi\,(1,2) = 2$; $\phi\,(2,2) = 5$; $\phi\,(3,2) = 8$

$\phi\,(1,3) = 3,2$; $\phi\,(2,3) = 6$; $\phi\,(3,3) = 9$

$\phi\,(1,4) = 1$; $\phi\,(2,4) = 1$; $\phi\,(3,4) = -5$

finición 1.1.2.

riz Cuadrada.-

Una matriz $A \in M_{m\times n}(R)$, es cuadrada si y solo si $m =$
siendo $m, n \geq 1$ y $m, n \in N$.

ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

cual indica que A es una matriz cuadrada 3x3 finición 1.1.3.

triz Transpuesta.-

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(R)$, la matriz transpuesta de A es

si y solo si $B = (a_{ji}) \in M_{n\times m}(R)$, B es representada por

stración 1.1.3

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0,5 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(R); A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0,5 \end{bmatrix} \in M_{3\times 2}(R)$$

inición 1.1.4. **Traza de una Matriz cuadrada.-**

Sea $A=(a_{ij}) \in M_{n\times n}(R)$, decimos que la traza de la

riz A, es una función:

$_{n\times n}(R) \Longrightarrow R$, Si y solo si $\phi(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

ación: $\phi(A) = tr(A)$.

stración. 1.1.4.

rmine la traza de la siguiente matriz

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 9,2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \phi(A)=tr(A)=\sum_{i=1}^{3} a_{ii}=1+5+9,2= 15,2$$

Propiedades de la traza de una matriz cuadrada.

Se puede probar que para cualquier matriz $A \in M_{n\times n}(R)$ y $\forall \alpha \in R$; se cumple:

$tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$,

$tr(AB)=tr(BA)$

$tr(\alpha A)=\alpha tr(A)$

ESPACIOS VECTORIALES:

En la mayoría de los casos se trabaja con "vectores étricos" en el espacio físico, en las próximas líneas entaremos un concepto globalizante, que es el de cio vectorial, para lo cual necesitamos definir una ación binaria.

1. OPERACION BINARIA

nición.- Sea A un conjunto no vacío, una función ϕ es operación binaria sobre A si y solamente si la función A ==» A, tal que $\phi(a,b)$ se denota por $a*b$, para todo) $\in A\times A$

Es decir esta función asigna a cada par ordenado $(a,b) \in A\times A$ un elemento $a*b$ en A.

o 1.2.1.a

onsideremos el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$, definamos una ión binaria $*$ en A:

$\phi : A\times A \Longrightarrow A$ tal que:

*	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

Por definición:

$\phi(1,1) = 1*1 = 2 \in A$

$\phi(1,2) = 1*2 = \phi(2,1) = 2*1 = 3 \in A$

$\phi(1,3) = 1*3 = \phi(3,1) = 3*1 = 1 \in A$

$\phi(2,2) = 2*2 = 1 \in A$

$\phi(2,3) = 2*3 = \phi(3,2) = 3*2 = 2 \in A$

$\phi(3,3) = 3*3 = 3 \in A$

Nótese que 3 es el elemento neutro de la operación o que:

$\phi(1,3) = 1*3 = 1$

$\phi(2,3) = 2*3 = 2$

$\phi(3,3) = 3*3 = 3$

A continuación detallamos las propiedades que cumple operación binaria:

La operación es binaria, pues es cerrada; esto es:

$\phi(a,b) = a*b \in A$ (Propiedad clausurativa)

$\forall$ a,b,c $\in$ A se cumple:

$\phi((a*b),c) = \phi(a,(b*c))$

$(a*b)*c = a*(b*c)$ (Propiedad asociativa)

) $\exists!\ 3 \in A\ \forall\ a \in A$ tal que:

$\phi(3,a) = \phi(a,3)$

$3*a = a*3 = a$

3 es elemento neutro o idéntico de la operación $*$.

$\forall\ a \in A \quad \exists\, a^{-1} \in A$ tal que:

$\phi\ (a,a^{-1}) = \phi\ (a^{-1},a)$

$a*a^{-1} = a^{-1}*a = 3$

a^{-1} es elemento inverso de a. Nótese:

$\phi(1,2) = 1*2 = 3$; 2 es el elemento inverso de 1

$\phi(2,1) = 2*1 = 3$; 1 es el elemento inverso de 2

$\phi(3,3) = 3*3 = 3$; 3 es el elemento inverso de 3

plo 1.2.1.b.

Defínase en R, las operaciones binarias clásicas; suma

ltiplicación de números reales:

Operación binaria suma (+): ϕ:RxR ==» R, talque

$\phi(a,b) = a+b$; para todo $a,b \in R$.

$\phi(67,6) = 67 + 6 = 73$

$\phi(1,-5) = 1 + (-5) = -4$

Operación binaria multiplicación (*): ϕ:RxR==»R, tal que $\phi(a,b) = a*b$; para todo $a,b \in R$.

$\phi(9, 5) = 9 * 5 = 45$

$\phi(-4,8) = (-4)*8 = -32$

Toda operación binaria cumple con la propiedad usurativa, es decir:

$\forall\ a,b \in A;\ \phi\ (a,b) = a*b \in A$.

No toda operación definida sobre un conjunto no vacío es binaria, como es el caso de la <u>operación tiplicación por escalar $\alpha.A$</u>, que a cada par ordenado a) en RxA le asigna un elemento $(\alpha.a)$ en A

Nótese que $(\alpha,a) \in RxA$, más no $(\alpha,a) \in AxA$ como es el so de una operación binaria.

Por lo expuesto esta operación también posee la piedad clausurativa; es decir:

$\forall\ a \in A,\ \forall\ \alpha \in R;\ ==>(\alpha.a) \in A$.

Definiremos un espacio vectorial de tal modo que se ejen propiedades esenciales y comunes para todos los s.

nición 1.2.2

Un conjunto no vacío V, es un espacio vecto-ial sobre un espacio vectorial real, cuando y solamente cuando:

Existe una operación binaria denominada adición, que a cada par ordenado (v_1, v_2) en $V \times V$, le asigna un elemento (v_1+v_2) en V talque las siguientes propiedades se cumplen:

$v_1+v_2 = v_2 + v_1$; para todo v_1, $v_2 \in V$; denominada propiedad conmutativa.

$v_1+(v_2+v_3) = (v_1+v_2) + v_3$, para todo v_1, v_2, $v_3 \in V$; conocida como propiedad asociativa.

Existe en V un único elemento 0_v, que es el neutro de la adición, esto es:

$$v_1 + 0_v = v_1, \text{ para todo } v_1 \in V.$$

Para todo v_1 en V, existe un opuesto $(-v_1)$, tal que: $v_1+(-v_1) = 0_v$ (propiedad del inverso aditivo).

Está definida una operación llamada multiplicación por escalar, que a cada par ordenado (α,v_1) en RxV, le asigna un elemento (αv_1) en V, talque las siguientes propiedades se cumplen:

$\alpha(\beta v_1) = (\alpha\beta)v_1; \quad \forall\ \alpha,\beta \in R,\ \forall\ v_1 \in V.$

$(\alpha+\beta)v_1 = \alpha v_1+\beta v_1 \ ; \ \forall\ \alpha,\beta \in R,\ \forall\ v_1 \in V.$

$\alpha(v_1+v_2) = \alpha v_1+\alpha v_2 \ ; \ \forall\ \alpha \in R$ y $\forall\ v_1,\ v_2 \in V.$

$1v_1 = v_1 \ ; \ \forall\ v_1 \in V.$

espacios vectoriales son también llamados espacios ales

nición 1.2.3.

or.- Sea V un espacio vectorial real sobre R, cualquier s un vector si solo si $v_1 \in V$.

De ahora en adelante cuando hablemos de espacios toriales nos referimos a espacios vectoriales reales.

ILUSTRACIONES DEL CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL

mplo 1.2.3.a

El conjunto $V=R^n$, donde R^n, es el conjunto de todas e-niadas reales, sobre R, además para $\forall\ v_1,\ v_2$ en V y $\in$ R, se definen las operaciones:

Adición:

$v_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$v_2 = (y_1, y_2, \ldots, yn)$

$v_1 + v_2 = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \in R^n$

Multiplicación por escalar:

$\alpha v_1 = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) \in R^n$

Es posible probar que: R^n junto con las dos
ciones previamente definidas: $[R^n(+,.)]$, constituye un
io vectorial real .

A continuación ilustramos algunos casos que prueban
afirmación: R sobre R, R^2 sobre R, R^3 sobre R, junto
as operaciones: adición y multiplicación por escalar
espacios vectoriales. Los elementos de los mismos
n ser representados respectivamente en la recta real,
plano cartesiano de dos dimensiones y en el espacio
mensional.

A continuación verificamos que R^3, junto a las
aciones definidas para las ternas reales, es un espacio
rial.

$[R^3(+,.)]$

Sean $v_1, v_2, v_3 \in R^3$, donde $v_1=(x_1,x_2,x_3)$, $v_2=(y_1,y_2,y_3)$
$=(z_1,z_2,z_3)$ y $\alpha, \beta \in R$.

$(v_1+v_2) \in V \; ; \quad \forall \; v_1, \; v_2 \in R^3$

Se cumple por definición de operación binaria.

$v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \; ; \; \forall \; v_1, \; v_2 \in R^3$

$$\begin{aligned} v_1+v_2 &= (x_1,x_2,x_3) + (y_1,y_2,y_3) \\ &= (x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3) \\ &= (y_1+x_1,y_2+x_2,y_3+x_3) \\ &= v_2 + v_1 \end{aligned}$$

$v_1 + (v_2+v_3) = (v_1+v_2) + v_3 \; ; \; \forall \; v_1, \; v_2, \; v_3 \in R^3$

$$\begin{aligned} v_1 + (v_2+v_3) &= (x_1,x_2,x_3) + [(y_1,y_2,y_3) + (z_1,z_2,z_3)] \\ &= (x_1,x_2,x_3) + (y_1+z_1,y_2+z_2,y_3+z_3) \\ &= (x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2,x_3+y_3+z_3) \\ &= (x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3) + (z_1,z_2,z_3) \\ &= [(x_1,x_2,x_3) + (y_1,y_2,y_3)] + (z_1,z_2,z_3) \\ &= (v_1+v_2) + v_3 \end{aligned}$$

Existe $0_v \in R^3$, para todo $v_1 \in R^3$. Talque $v_1 + 0_v = v_1$

$$\begin{aligned} v_1 + 0_v &= (x_1,x_2,x_3) + (0,0,0) \\ &= (x_1+0,x_2+0,x_3+0) \\ &= (x_1,x_2,x_3) \\ &= v_1 \end{aligned}$$

Para todo $v_1 \in R^3$, existe un único $(-v_1) \in R^3$, tal que

$v_1+(-v_1) = 0_v$

$$\begin{aligned} v_1+(-v_1) &= (x_1,x_2,x_3) + (-x_1,-x_2,-x_3) \\ &= (x_1-x_1,x_2-y_2,x_3-y_3) \\ &= (0,0,0) \\ &= 0_v \end{aligned}$$

$(\alpha v_1) \in R^3$; $\forall\ \alpha \in R$, $\forall\ v_1 \in R^3$; se cumple por definición

$\alpha(\beta v_1) = (\alpha\beta)v_1$; $\forall\ \alpha,\beta \in R$ y $\forall\ v_1 \in R^3$

$$\begin{aligned} \alpha(\beta v_1) &= \alpha(\beta x_1,\beta x_2,\beta x_3) \\ &= (\alpha\beta)(x_1,x_2,x_3) \\ &= (\alpha\beta)v_1 \end{aligned}$$

$(\alpha+\beta)v_1 = \alpha v_1 + \beta v_1$; $\forall\ \alpha,\beta \in R$ y $\forall\ v_1 \in R^3$

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)v_1 &= (\alpha+\beta)(x_1,x_2,x_3) \\ &= [(\alpha+\beta)x_1,(\alpha+\beta)x_2,(\alpha+\beta)x_3] \\ &= (\alpha x_1+\beta x_1,\alpha x_2+\beta x_2,\alpha x_3+\beta x_3) \\ &= \alpha(x_1,x_2,x_3) + \beta(x_1,x_2,x_3) \\ &= \alpha v_1 + \beta v_1 \end{aligned}$$

$\alpha(v_1+v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$; $\forall\ \alpha \in R$ y $\forall\ v_1,v_2 \in R^3$

$$\begin{aligned} \alpha(v_1+v_2) &= \alpha(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3) \\ &= (\alpha x_1+\alpha y_1,\alpha x_2+\alpha y_2,\alpha x_3+\alpha y_3) \\ &= \alpha(x_1,x_2,x_3) + \alpha(y_1,y_2,y_3) \\ &= \alpha v_1 + \alpha v_2 \end{aligned}$$

$1v_1 = v_1;\ \forall\ v_1 \in R^3$

$1v_1 = 1(x_1,x_2,x_3)$

$= (1x_1,1x_2,1x_3)$

$= (x_1,x_2,x_3)$

$= v_1$

En consecuencia $[R^3(+,.)]$ sobre R es un espacio
torial.

ción: V = $[V(+,.)]$; espacio vectorial real con los
pectivas operaciones: adición y multiplicación por
alar.

mplo 1.2.3.b

Sea V = P_n, el conjunto de los polinomios de grado
or o igual a n, con coeficientes reales;

Si $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x+a_0$, y

$q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x+b_0$

Son dos polinomios cualesquiera y $\alpha \in R$, se define las
raciones:

Adición

$p(x)+q(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\ldots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$

Multiplicación por escalar

$\alpha.p(x)= \alpha a_nx^n+\alpha a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+ \alpha a_1x+ \alpha a_0$

A $[P_n(+,.)]$ junto con estas operaciones definidas, se
de probar que tiene la estructura de un espacio
torial.

Probaremos en particular que $[P_2(+,.)]$, con las
raciones anteriormente definidas tiene la estructura de
espacio vectorial.

Prueba:

$\forall\ p_1,p_2,p_3 \in P_2\ ,\ \forall\ \alpha,\beta \in R$ y $\forall\ a_i,b_i,c_i \in R$

donde:

$p_1=v_1\ =\ a_2x^2+a_1x+a_0$

$p_2=v_2\ =\ b_2x^2+b_1x+b_0$

$p_3=v_3\ =\ c_2x^2+c_1x+c_0$

$\forall\ v_1,v_2 \in P_2\ ;\ (v_1,v_2) \in P_2$. Se cumple por definición de operación binaria.

$\forall\ v_1,v_2 \in P_2\ ;\ v_1+v_2\ =\ v_2+v_1$

$$\begin{aligned}
v_1+v_2 &= (a_2x^2+a_1x+a_0)\ +\ (b_2x^2+b_1x+b_0)\\
&= (a_2+b_2)x^2\ +\ (a_1+b_1)x\ +\ (a_0+b_0)\\
&= (b_2+a_2)x^2\ +\ (b_1+a_1)x\ +\ (b_0+a_0)\\
&= (b_2x^2+b_1x+b_0)\ +\ (a_2x^2+a_1x+a_0)\\
&= v_2\ +\ v_1
\end{aligned}$$

$\forall\ v_1, v_2, v_3 \in P_2\ ;\ v_1+(v_2+v_3) = (v_1+v_2) + v_3$

$$+(v_2+v_3) = (a_2x^2+a_1x+a_0)+[(b_2x^2+b_1x+b_0)+(c_2x^2+c_1x+c_0)]$$

$$= (a_2x^2+a_1x+a_0)+[(b_2+c_2)x^2+(b_1+c_1)x+(b_0+c_0)]$$

$$= (a_2+b_2+c_2)x^2+(a_1+b_1+c_1)x+(a_0+b_0+c_0)$$

$$= [(a_2+b_2)x^2+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)]+(c_2x^2+c_1x+c_0)$$

$$= [(a_2x^2+a_1x+a_0)+(b_2x^2+b_1+b_0)]+(c_2x^2+c_1x+c_0)$$

$$= (v_1+v_2)+v_3$$

Existe $0p_2 \in P_2$. $\forall\ v \in P_2$, tal que: $v_1+0p_2 = v_1$

$$v_1+ 0p_2 = (a_2x^2+a_1x+a_0) + (0x^2+0x+0)$$

$$= (a_2+0)x^2 + (a_1+0)x + (a_0+0)$$

$$= a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$= v_1$$

$\forall\ v_1 \in P_2$ Existe un único $(-v_1) \in P_2$, tal que:

$v_1 + (-v_1) = 0p_2$

$$v_1 +(-v_1) = (a_2x^2+a_1x+a_0) + (-a_2x^2-a_1x-a_0)$$

$$= (a_2-a_2)x^2 + (a_1-a_1)x + (a_0-a_0)$$

$$= 0x^2 + 0x + 0$$

$$= 0p_2$$

$\forall\ v_1 \in P_2,\ \forall\ \alpha \in R;\ (\alpha.V_1) \in P_2$ por definición

$\forall\ v_1 \in P_2,\ \forall\ \alpha, \beta \in R;\ \alpha(\beta v_1) = (\alpha\beta)v_1$

$$\alpha(\beta v_1) = \alpha[\beta(a_2x^2+a_1x+a_0)]$$

$$= \alpha(\beta a_2x^2+\beta a_1x+\beta a_0)$$

$$= (\alpha\beta)(a_2x^2+a_1x+a_0)$$

$$= (\alpha\beta)v_1$$

$\forall\ v_1 \in P_2,\ \forall\ \alpha,\beta \in R:\ (\alpha+\beta)v_1 = \alpha v_1+\beta v_1$

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)v_1 &= (\alpha+\beta)(a_2x^2+a_1x+a_0)\\ &= (\alpha+\beta)a_2x^2+(\alpha+\beta)a_1x+(\alpha+\beta)a_0]\\ &= (\alpha a_2x^2+\alpha a_1x+\alpha a_0)+(\beta a_2x^2+\beta a_1+\beta a_0)\\ &= \alpha(a_2x^2+a_1x+a_0)+\beta(a_2x^2+a_1x+a_0)\\ &= \alpha v_1 + \beta v_1\end{aligned}$$

$\forall\ v_1,v_2 \in P_2,\ \forall\ \alpha \in R:\ \alpha(v_1+v_2) = \alpha v_1+\alpha v_2$

$$\begin{aligned}\alpha(v_1+v_2) &= \alpha[(a_2x^2+a_1x+a_0)+(b_2x^2+b_1x+b_0)]\\ &= \alpha[(a_2+b_2)x^2+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)]\\ &= \alpha(a_2+b_2)x^2+\alpha(a_1+b_1)x+\alpha(a_0+b_0)\\ &= (\alpha a_2x^2+\alpha a_1x+\alpha a_0)+(\alpha b_2x^2+\alpha b_1x+\alpha b_0)\\ &= \alpha(a_2x^2+a_1x+a_0)+\alpha(b_2x^2+b_1+b_0)\\ &= \alpha v_1+\alpha v_2\end{aligned}$$

$\forall\ v_1 \in P_2 :\ 1v_1 = v_1$

$$\begin{aligned}1v_1 &= 1\ (a_2x^2+a_1x+a_0)\\ &= (1a_2x^2+1a_1x+1a_0)\\ &= a_2x^2 + a_1x + a_0\\ &= v_1\end{aligned}$$

plo 1.2.3.c

Sea el conjunto $V=[M_{m\times n}(R)]$ de todas las matrices es de orden mxn esto es de m filas y n columnas, junto las operaciones de adición matricial y multiplicación atrices por un escalar, se puede probar que V, con las aciones enunciadas es un espacio vectorial.

A continuación se prueba que en particular el conjunto $_{\times 2}(R)(x,.)]$ de las matrices cuadradas 2x2 con las raciones indicadas forman un espacio vectorial:

ificación:

$\forall \ v_1, v_2 \ \in \ M_{2\times 2}(R) \ \text{y} \ \forall \ \alpha, \beta \in R.$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$\forall \ v_1, v_2 \ \in \ M_{2\times 2}(R), \ (v_1+v_2) \ \in \ M_{2\times 2}(R)$ por definición de operación binaria.

$\forall \ v_1, v_2 \in \ M_{2\times 2}(R); \ v_1+v_2 = v_2+v_1$

$$v_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \quad v_2 + v_1$$

$\forall \; v_1, v_2, v_3 \; \in M_{2\times 2}(R); \quad v_1 + (v_2+v_3) = (v_1+v_2) + v_3$

$$+(v_2+v_3) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} \\ a_{21}+b_{21}+c_{21} & a_{22}+b_{22}+c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (v_1+v_2) + v_3$$

Existe $0_m \in M_{2\times 2}(R)$, $\forall\ v_1 \in M_{2\times 2}(R)$, tal que: $v_1+0_m=v_1$

$$+ 0_m = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= v_1$$

$\forall\ v_1 \in M_{2\times 2}(R)$ Existe un único $(-v_1) \in M_{2\times 2}(R)$, tal que: $v_1+(-v_1) = 0_m$

$$+(-v_1)= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}-a_{11} & a_{12}-a_{12} \\ a_{21}-a_{21} & a_{22}-a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_m$$

$\forall\ v_1 \in M_{2\times 2}(R)$ y $\forall\ \alpha \in R$: $(\alpha v_1) \in M_{2\times 2}(R)$ por definición.

$\forall\ v_1, \in M_{2\times 2}(R)$, $\forall\ \alpha,\beta \in R$; $\alpha(\beta v_1) = (\alpha\beta)v_1$

$$v_1) = \alpha \begin{bmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha\beta) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha\beta)\ v_1$$

$\forall\ v_1 \in M_{2\times2}(R),\ \forall\ \alpha,\beta \in R:\ (\alpha+\beta)v_1 = \alpha v_1 + \beta v_1$

$$\beta)\ v_1 = (\alpha+\beta)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\alpha+\beta)a_{11} & (\alpha+\beta)a_{12} \\ (\alpha+\beta)a_{21} & (\alpha+\beta)a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \alpha v_1 + \beta v_1$$

$\forall\ v_1,\ v_2 \in M_{2\times2}(R)\ \alpha \in R:\ \alpha(v_1+v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

$$_1+v_2) = \alpha \left[\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right]$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_{11}+\alpha b_{11} & \alpha a_{12}+\alpha b_{12} \\ \alpha a_{21}+\alpha b_{21} & \alpha a_{22}+\alpha b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha b_{11} & \alpha b_{12} \\ \alpha b_{21} & \alpha b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \alpha v_1 + \alpha v_2$$

$\forall\, v_1 \in M_{2\times 2}(R):\ 1v_1 = v_1$

$${}_1 = 1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.a_{11} & 1.a_{12} \\ 1.a_{21} & 1.a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= v_1$$

3 INDEPENDENCIA LINEAL Y ESPACIO GENERADO

finición 1.3.1.

mbinación Lineal.-

Sean $v_1,v_2,\ldots,v_n$ vectores en un espacio vectorial V y $,c_2,\ldots,c_n$ constantes reales, el vector $v \in V$ es una mbinación lineal de los vectores $v_1,v_2,\ldots,v_n$, si y solo , v puede ser expresado de la forma $v=c_1v_1+c_2v_2+\ldots+c_nv_n$.

DEPENDENCIA LINEAL

finición 1.3.2.

Sean $v_1,v_2,\ldots,v_n$, n vectores de un espacio vectorial y $c_1,c_2,\ldots,c_n$ constantes reales; $v_1,v_2,\ldots,v_n$, son ctores linealmente independientes en V si y solo si la ica solución de la igualdad: $c_1v_1+c_2v_2+\ldots+c_nv_n=0_v$ es: $=c_2=\ldots=c_n= 0$

Si los vectores no son linealmente independientes, se ce que son linealmente dependientes.

Ilustración. 1.3.2.a

- Veamos si los vectores v_1 y $v_2 \in R^2$ son linealmente independientes, donde $v_1 = (1,1)$ y $v_2 = (3,3)$, para esto debemos igualar a cero la combinación lineal $c_1v_2+c_2v_2 =\underline{0}$ en este caso: $c_1(1,1) +c_2(3,3) = \underline{0}$, lo cual origina el sistema.

$$\begin{cases} p_1(c_1,c_2) : c_1+3c_2 = 0 \\ p_2(c_1,c_2) : c_1+3c_2 = 0 \end{cases}$$

Que es la conjunción de los predicados $p_1(c_1,c_2)$ y
$c_1,c_2)$, consecuentemente lo que buscamos al resolver
e sistema es el conjunto solución: $A p_1(c_1,c_2) \wedge p_2(c_1,c_2)$.

La forma matricial del sistema es: $A\underline{c} = \underline{0}$ tal que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in R^2$$

La matriz aumentada del sistema es:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

olvemos el sistema utilizando el método de GAUSS-JORDAN.

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nótese que existe una variable libre, puesto que el
tema original es equivalente a $c_1+3c_2=0$; a continuación
ribiremos el conjunto solución de la conjunción de
dicados $p_1(c_1,c_2) \wedge p_2(c_1,c_2)$, esto es

$Ap_1(c_1,c_2) \wedge p_2(c_1,c_2) = \{(c_1,c_2)/c_1 = -3c_2,\ c_2 \in R\}$

lo tanto existen infinitas soluciones para c_1 y c_2, lo

l implica que los vectores son linealmente dependientes.

stración. 1.3.2.b

Verifiquemos si los vectores: $v_1=1-x$, $v_2=5+3x-2x^2$ y

$1+3x-2x^2$ son linealmente independientes en el espacio

torial P_2:

$_1+c_2v_2+c_3v_3 = \underline{0}$ equivale a

$1-x)+c_2(5+3x-2x^2)+c_3(1+3x-2x^2)=\underline{0}=0+0x+0x^2$;

ginando los predicados p_1, p_2 y p_3, tales que:

$$\begin{cases} p_1(c_1,\ c_2,\ c_3) : c_1 + 5c_2 + c_3 = 0 \\ p_2(c_1,\ c_2,\ c_3) : -c_1 + 3c_2 + 3c_3 = 0 \\ p_3(c_1,\ c_2,\ c_3) : -2c_2 - 2c_3 = 0 \end{cases}$$

La conjunción de los predicados:

$$p_1(c_1,c_2,c_3) \wedge p_2(c_1,c_2,c_3) \wedge p_3(c_1,c_2,c_3)$$

es el sistema de ecuaciones

Expresemos el sistema en su forma matricial: $A\underline{c} = 0_{P2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada y resolución del sistema $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

El conjunto solución de

$p_1(c_1,c_2,c_3) \wedge p_2(c_1,c_2,c_3) \wedge p_3(c_1,c_2,c_3)$ es:

$Ap_1(c_1,c_2,c_3) \wedge p_2(c_1,c_2,c_3) \wedge p_3(c_1,c_2,c_3) =$

$\{(c_1,c_2,c_3)/c_1=c_2=c_3=0\}$

Consecuentemente los vectores: $v_1=1-x$, $v_2=5+3x-2x^2$ y $=1+3x-2x^2$ son linealmente independientes por que la única ución del sistema es: $c_1=c_2=c_3=0$

finición 1.3.3.-

pacio Generado.- Un conjunto de vectores $v_1,v_2,...,V_k$, en espacio vectorial V, generan a V, si solamente si, lquier vector en V, puede ser expresado como una nbinación lineal de $v_1,v_2,...,V_k$, en otras palabras, a todo v en V y $c_1,c_2,...,c_n \in R$, se cumple que:

$$v = c_1v_1+c_2v_2+....+c_kV_k$$

stración: Determine si el conjunto de vectores

$$\left\{\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right\}$$

generan a las matrices cuadradas reales $2\times2(M_{2\times2}(R))$

$$\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

Esta igualdad origina los predicados p_1, p_2, p_3 y p_4
es que:

$$\begin{cases} p_1(c_1,c_2,c_3,c_4) : 2c_1 = x \\ p_2(c_1,c_2,c_3,c_4) : 2c_2 = y \\ p_3(c_1,c_2,c_3,c_4) : 2c_3 = z \\ p_4(c_1,c_2,c_3,c_4) : 2c_4 = w \end{cases}$$

$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4$ es el sistema de ecuaciones

Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss,
a lo cual requerimos la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 2 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 2 & w \end{array}\right]$$

El conjunto solución de

$p_1(c_1,c_2,c_3,c_4) \wedge p_2(c_1,c_2,c_3,c_4) \wedge p_3(c_1,c_2,c_3,c_4)$

$\wedge p_4(c_1,c_2,c_3,c_4)$ es:

$A p_1(c_1,c_2,c_3,c_4) \wedge p_2(c_1,c_2,c_3,c_4) \wedge p_3(c_1,c_2,c_3,c_4)$

$\wedge p_4(c_1,c_2,c_3,c_4)=\{(c_1,c_2,c_3,c_4)/c_1=x/2, c_2=y/2, c_3=z/2,$

$c_4=w/2,\ x,y,z,w \in R\}$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \frac{x}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{y}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{z}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \frac{w}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

S genera a las $(M_{2\times 2}(R))$, ya que toda matriz:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(R)$$

Puede ser expresada como una combinación lineal de:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>emplo</u>:

$$\begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 16 & 26 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 13\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Y así cualquier matriz A en $M_{2\times 2}(R)$

. BASE Y DIMENSION

Definición 1.4.1.

Un conjunto de vectores $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ es una base a un espacio vectorial V, si y solo si:

$\{v_1,v_2,...,v_n\}$ es linealmente independiente en V y

$\{v_1,v_2,...,v_n\}$ genera a V.

stración 1.4.1.a

Se puede probar que cada uno de los siguientes juntos de vectores son linealmente independientes en V y más generan al espacio vectorial V correspondiente, por tanto constituyen una base para V.

ESPACIO VECTORIAL (V)	BASE
R	$B_1 = \{1\}$
R^2	$B_2 = \{(2,0),(0,2)\}$
) P_3	$B_3 = \{1,x,x^2,x^3\}$
$M_{2\times 2}(R)$	$B_4 = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\3 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}\right\}$

Verifiquemos que el conjunto $B_3=\{1,x,x^2,x^3\}$ es una e del espacio vectorial de los polinomios de grado menor gual a 3 (P_3).

Independencia lineal de los vectores $1,x,x^2,x^3 \in P_3$

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 = 0_v \;;\; c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4 \in R$$

$$c_1(1) + c_2(x) + c_3(x^2) + c_4(x^3) = 0+0x+0x^2+0x^3$$

Conjunto solución de $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4$ es:

$c_1,c_2,c_3,c_4) \wedge p_2(c_1,c_2,c_3,c_4) \wedge p_3(c_1,c_2,c_3,c_4)$

$c_1,c_2,c_3,c_4)=\{(c_1,c_2,c_3,c_4)/c_1=c_2=c_3=c_4=0\}$

Los vectores $1,x,x^2,x^3$ son linealmente independientes en P_3

Verificaremos si $\{1,x,x^2,x^3\}$ genera a P_3

$c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 = a+bx+cx^2+dx^3$

Conjunto solución de $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4$ es:

$c_1,c_2,c_3,c_4) \wedge p_2(c_1,c_2,c_3,c_4) \wedge p_3(c_1,c_2,c_3,c_4)$

$c_1,c_2,c_3,c_4)=\{(c_1,c_2,c_3,c_4)/c_1=a,c_2=b,c_3=c,c_4=d;$

$c,d \in R\}$, entonces $\{1,x,x^2,x^3\}$ genera a p_3, porque todo nomio de p_3 se puede escribir como una combinación eal de $\{1,x,x^2,x^3\}$.

Por ejemplo $7x^3+8x^2+7x+12 = 7(x^3)+8(x^2)+7(x)+12$.

Siendo $a=7$, $b=8$, $c=7$ y $d=12$.

Por i), ii) nos permite concluir que el conjunto de tores $\{1,x,x^2,x^3\}$ es una base del espacio vectorial P_3.

efinición 1.4.2.

Se puede probar que el número de vectores de cualquier ase de un espacio vectorial es único, lo que se hace por método de contradicción, suponiendo que existen dos ases B_1 y B_2, la una con m vectores y la otra con n ectores, y se concluye que m=n.

imensión.

Un número entero n no negativo es la Dimensión de un spacio vectorial V. (dim v), si y solo si n es el número e vectores en una base del espacio vectorial.

Dado un espacio vectorial V se puede probar que $\{0_v\}$ on sus correspondientes operaciones es un subespacio ectorial de V, se dice que $\{0_v\}$ es un espacio vectorial de imensión cero.

lustración 1.4.2.b.- La dimensión de los espacios ectoriales de la ilustración 1.4.1.a. es:

dim (R) = 1

dim (R^2) = 2

dim (P_3) = 4

dim $M_{2\times 2}(R)$ = 4

CAPITULO 2.

ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERNO

El estudio de los vectores se inició con la invención
Hamilton de los cuaterniones, para explorar el campo fí-
:o. Josiah Willard Gibbs (1839-1903) definió el producto
:alar en un principio sólo para los vectores $i=(1,0,0)$,
$(0,1,0), k=(0,0,1)$, siendo $i,j,k \in R^3$, de la siguiente
iera:

$$\langle i,i\rangle = \langle j,j\rangle = \langle k,k\rangle = 1$$

) $$\langle i,j\rangle = \langle j,i\rangle = \langle i,k\rangle = \langle k,i\rangle = \langle j,k\rangle = \langle k,j\rangle = 0$$

La definición general llegó poco tiempo después,
ando Gibbs explicó el producto escalar en un problema
lativo a fuerzas. Como hemos anotado se ha definido el
oducto interno en $R^2, R^3, \ldots, R^n$ con fines de aplicación.

En R^2 y R^3 se explica geométricamente y con facilidad
concepto de Vector y norma de un vector. En este capítulo
introduce la definición de una función ϕ a la que
amaremos producto interno sobre un espacio vectorial
bitrario.

A continuación desarrollaremos los fundamentos de la unción llamada producto interno" sobre un espacio ctorial V, cuyo dominio es el producto cartesiano VxV y conjunto de llegada es R o C (reales o complejos); en estro caso el conjunto de llegada será R.

1. DEFINICION, PROPIEDADES E ILUSTRACIONES

finición 2.1.1.

Sea V un espacio vectorial y v_1, v_2 $v_3 \in V$, decimos que es un espacio vectorial con producto interno, si y solo si ene definida una función ϕ de VxV a R, (ϕ:VxV-->R), tal que $v_1,v_2)=\langle v_1,v_2\rangle \in R$, a la función ϕ la llamaremos producto terno; su valor será denotado $\phi(v_1,v_2)=\langle v_1,v_2\rangle \in R$ y mple las siguientes propiedades:

$\phi(v_1+v_2,v_3) = \phi(v_1,v_3)+\phi(v_2,v_3)$; $\forall\ v_1,v_2,v_3 \in V$

) $\phi(\alpha v_1,v_2) = \alpha\phi(v_1,v_2)$; $\forall\ v_1,v_2 \in V$, $\forall\ \alpha \in R$

i) $\phi(v_1,v_2) = \phi(v_2,v_1)$; $\forall\ v_1,v_2 \in V$.

) $\phi(v_1,v_1) \geq 0$; $\forall\ v_1 \in V$

Con los vectores $i=(1,0,0)$, $j=(0,1,0)$ y $k=(0,0,1) \in$, definió Gibbs un producto escalar:

$\phi(i,i) = 1$

$\phi(j,j) = 1$

$\phi(k,k) = 1$

$\phi(i,j) = \phi(j,i) = 0$

$\phi(i,k) = \phi(k,i) = 0$

$\phi(j,k) = \phi(k,j) = 0$

Suponemos que Gibbs quizo definir un producto interno e la siguiente manera:

$$\phi(v_1,v_2) = \phi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \in R$$

efinición 2.1.2.

pacio Euclidiano.

Sea V un espacio vectorial; V es un espacio Euclidiano y solo si tiene definida una función producto interno bre él.

Los teoremas que a continuación detallamos y emostramos se deducen a partir de los cuatro axiomas que finen la función producto interno:

eorema 2.1.1.

$$\langle 0_v,v_1\rangle = \langle v_1,0_v\rangle = 0; \quad \forall\ v_1,\ 0_v \in V$$

$$\begin{aligned}\langle 0_v,v_1\rangle = \langle v_1,0_v\rangle &= \langle 0v_2,v_1\rangle \\ &= 0\langle v_2,v_1\rangle \\ &= 0 \in R\end{aligned}$$

eorema 2.1.2.

) $\langle v_1,v_2+v_3\rangle = \langle v_1,v_2\rangle + \langle v_1,v_3\rangle; \ \forall\ v_1,\ v_2,\ v_3 \in V$

$$\begin{aligned}\langle v_1,v_2+v_3\rangle &= \langle v_2+v_3,v_1\rangle \\ &= \langle v_2,v_1\rangle + \langle v_3,v_1\rangle \\ &= \langle v_1,v_2\rangle + \langle v_1,v_3\rangle\end{aligned}$$

eorema 2.1.3.

ii) $\langle v_1,\alpha v_2\rangle = \alpha\langle v_1,v_2\rangle$; $\forall\ v_1,v_2 \in V.\ \alpha \in R$

$$\langle v_1,\alpha v_2\rangle = \langle \alpha v_2,v_1\rangle$$

$$= \alpha\langle v_2,v_1\rangle = \alpha\langle v_1,v_2\rangle$$

ILUSTRACIONES DEL CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL CON PRODUCTO INTERNO

jemplo 2.1.1.a.

Sean $v_1=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ y $v_2=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, dos ectores en R^n, defínase:

$(v_1,v_2)=\langle v_1,v_2\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)$, puede probarse que $:R^n x R^n \text{-->} R$ es un producto interno ya que satisface los xiomas correspondientes a la definición 2.1.1.

En particular si $v_1=(x_1,x_2,x_3)$ y $v_2=(y_1,y_2,y_3)$, dos ectores en R^3, verificaremos que el producto definido por $(v_1,v_2)=\langle v_1,v_2\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ es un producto interno.

) $\langle v_1,v_2\rangle = \langle v_2,v_1\rangle$; $\forall\ v_1,v_2 \in R^3$

$$\langle v_1,v_2\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$$= y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3$$

$$= \langle v_2,v_1\rangle$$

$\langle v_1, v_2+v_3\rangle \;=\; \langle v_1, v_3\rangle + \langle v_2, v_3\rangle; \;\forall\; v_1,\; v_2,\; v_3 \in R^3$

$$\begin{aligned}\langle v_1+v_2, v_3\rangle &= (x_1+y_1)z_1 + (x_2+y_2)z_2 + (x_3+y_3)z_3\\ &= x_1z_1+y_1z_1+x_2z_2+y_2z_2+x_3z_3+y_3z_3\\ &= (x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3) + (y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)\\ &= \langle v_1, v_3\rangle + \langle v_2, v_3\rangle\end{aligned}$$

$\langle \alpha v_1, v_2\rangle = \alpha\langle v_1, v_2\rangle \;;\; \forall\; v_1,\; v_2 \in R^3.\; \forall\; \alpha \in R$

$$\begin{aligned}\langle \alpha v_1, v_2\rangle &= \alpha x_1y_1 + \alpha x_2y_2 + \alpha x_3y_3\\ &= \alpha(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)\\ &= \alpha\langle v_1, v_2\rangle\end{aligned}$$

$\langle v_1, v_1\rangle \geq 0 \;;\; \forall\; v_1 \in V$

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_1\rangle &= x_1x_1+x_2x_2+x_3x_3\\ &= x^2{}_1 + x^2{}_2 + x^2{}_3 \geq 0 \;;\; \forall\; x^2{}_i \geq 0\end{aligned}$$

Si por ejemplo $v_1 = (1,4,6)$ y $v_2 = (0,2,-2)$, entonces

,4,6),(0,2,-2)) = 1(0)+4(2)+6(-2) = 0+8(-12)= -4

Nótese que éste es el producto punto definido en
ca, y como veremos a continuación es uno de los tantos
luctos internos que puede definirse sobre R^3.

<u>mplo 2.1.1.b.</u>

Defínase $\phi(v_1,v_2)=\langle v_1, v_2\rangle = 3x_1y_1+2x_2y_2+x_3y_3$, un
lucto interno sobre R^3.

Verificación:

) $\langle v_1,v_2\rangle = \langle v_2,v_1\rangle$; $\forall\ v_1, v_2 \in R^3$

$\langle v_1,v_2\rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$

$= 3y_1x_1 + 2y_2x_2 + y_3x_3$

$= \langle v_2,v_1\rangle$

) $\langle v_1+v_2,v_3\rangle = \langle v_1,v_3\rangle + \langle v_2,v_3\rangle$; $\forall\ v_1,\ v_2,\ v_3 \in R^3$

$\langle v_1+v_2,v_3\rangle = 3(x_1+y_1)z_1 + 2(x_2+y_2)z_2 + (x_3+y_3)z_3$

$= 3x_1z_1+3y_1z_1+2x_2z_2+2y_2z_2+x_3z_3+y_3z_3$

$= (3x_1z_1+2x_2z_2+x_3z_3) + (3y_1z_1+2y_2z_2+y_3z_3)$

$= \langle v_1,v_3\rangle + \langle v_2,v_3\rangle$

ii) $\langle \alpha v_1,v_2\rangle = \alpha\langle v_1,v_2\rangle$; $\forall\ v_1,\ v_2 \in R^3 \quad \alpha \in R$

$\langle \alpha v_1,v_2\rangle = \alpha 3x_1y_1 + \alpha 2x_2y_2 + \alpha x_3y_3$

$= \alpha(3x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)$

$= \alpha\langle v_1,v_2\rangle$

v) $\langle v_1,v_1\rangle \geq 0$; $\forall\ v_1 \in R^3$

$\langle v_1,v_1\rangle = 3x_1x_1+2x_2x_2+x_3x_3$

$= 3x^2{}_1 + 2x^2{}_2 + x^2{}_3$

≥ 0

Hemos probado que la función: $\phi(v_1,v_2)=\langle v_1,v_2\rangle =$ $x_1y_1+2x_2y_2+x_3y_3$ define un producto interno sobre R^3.

Si por ejemplo $v_1=(\frac{1}{2},4,3)$ y $v_2=(4,3,-1)$, entonces $((\frac{1}{2},4,3),(4,3,-1)) = 3(\frac{1}{2})4+2(4)3+3(-1)=6+24-3 = 27$.

Si en la función producto interno anterior, se ustituye por la siguiente:

$\phi(v_1,v_2)=\langle v_1,v_2\rangle=3x_1y_1+2x_2y_2-x_3y_3$, entonces:

v) $\langle v_1,v_1\rangle = 3x^2{}_1+2x^2{}_1-x^2{}_1 \geq 0$; no se cumple para todos los valores de x, por ejemplo si $v_1=(0,0,2)$, entonces: $\langle v_1,v_1\rangle=0+0+0-4=-4$, no es mayor 0, por consiguiente la función $\phi(v_1,v_2)=\langle v_1,v_2\rangle=3x_1y_1+2x_2y_2-x_3y_3$, no define un producto interno sobre R^3.

Nótese que sobre un mismo espacio vectorial V, pueden efinirse diferentes funciones que son producto interno, demás no todas las funciones de VxV a R definen un roducto interno en V.

Ejemplo 2.1.1.c.

Sea V el espacio vectorial de las matrices cuadradas eales nxn($M_{n\times n}(R)$), si A,B están en V, definimos $(A,B)=\langle A,B\rangle=tr(B^tA)$, donde tr(A) es la función traza de na matriz cuadrada definida anteriormente.

Demostración:

) $\langle A,B\rangle = \langle B,A\rangle$; $\forall$ $A,B \in M_{n\times n}(R)$

$\langle A,B\rangle = tr(B^tA)$

$= tr(A^tB)$

$= \langle B,A\rangle$

) $\langle A+B,C\rangle = \langle A,C\rangle + \langle B,C\rangle$; $\forall\ A,B,C \in M_{n\times n}(R)$

$$\begin{aligned}\langle A+B,C\rangle &= tr((C^t)(A+B)) \\ &= tr(C^tA+C^tB) \\ &= tr(C^tA)+tr(C^tB) \\ &= \langle A,C\rangle+\langle B,C\rangle\end{aligned}$$

i) $\langle \alpha A,B\rangle = \alpha\langle A,B\rangle$: $\forall\ A,B \in M_{n\times n}(R)$, $\alpha \in R$

$$\begin{aligned}\langle \alpha A,B\rangle &= tr(B^t\alpha A) \\ &= tr(\alpha A)\ tr(B^t) \\ &= \alpha tr(A)\ tr(B^t) \\ &= \alpha tr(B^tA) \\ &= \alpha\langle A,B\rangle\end{aligned}$$

v) $\langle A,A\rangle \geq 0$; $\forall\ A \in M_{n\times n}(R)$

$$\langle A,A\rangle = tr(A^tA)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\right) \geq 0$$

En consecuencia la función $\phi(A,B)=\langle A,B\rangle=tr(B^tA)$ define n producto interno sobre $M_{n\times n}(R)$.

or ejemplo si $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & -1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 8 \\ -1 & 6 & -1 \end{bmatrix} \; ; \; B^tA = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 16 \\ 21 & 11 & 26 \\ 2 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

alcule $\langle A,B\rangle = tr\ (B^tA) \ = \ \sum_{i=1}^{3} (C_{ii}) \ ; \ C_{ii} \in (B^tA)$

$= 10+11+8$

$= 29$

<u>jemplo 2.1.1.d.</u>

$$1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} ; v_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} ; v_3 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Son matrices cualesquiera del espacio vectorial $=M_{2\times 2}(R)$ entonces la expresión que sigue define un roducto interno sobre las matrices reales $2\times 2(M_{2\times 2}(R))$.

$$\phi(v_1,v_2)=\langle v_1,\ v_2\rangle = a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}$$

Demostración:

) $\langle v_1,v_2\rangle = \langle v_2,v_1\rangle \quad ; \quad \forall\ v_1,\ v_2 \in M_{2\times 2}(R)$

$\langle v_1,v_2\rangle = b_{11}a_{11}+b_{12}a_{12}+b_{21}a_{21}+b_{22}a_{22}$

$= \langle v_2,v_1\rangle$

i) $\langle v_1+v_2,v_3\rangle = \langle v_1,v_3\rangle + \langle v_2+v_3\rangle$; $\forall\ v_1,v_2,v_3 \in M_{2\times 2}(R)$

$$\langle v_1+v_2,v_3\rangle = (a_{11}+b_{11})c_{11}+(a_{12}+b_{12})c_{12}+(a_{21}+b_{21})c_{21}+(a_{22}+b_{22})c_{22}$$

$$= a_{11}c_{11}+b_{11}c_{11}+a_{12}c_{12}+b_{12}c_{12}+a_{21}c_{21}+b_{21}c_{21}+a_{22}c_{22}+b_{22}c_{22}$$

$$= (a_{11}c_{11}+a_{12}c_{12}+a_{21}c_{21}+a_{22}c_{22})+(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{12}+b_{21}c_{21}+b_{22}c_{22})$$

$$= \langle v_1,v_3\rangle + \langle v_2,v_3\rangle$$

ii) $\langle \alpha v_1,v_2\rangle = \alpha\langle v_1,v_2\rangle$; $\forall\ v_1,\ v_2 \in M_{2\times 2}(R)$. $\forall\ \alpha \in R$

$$\langle \alpha v_1,v_2\rangle = \alpha a_{11}b_{11} + \alpha a_{12}b_{12} + \alpha a_{21}b_{21} + \alpha a_{22}b_{22}$$

$$= \alpha(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22})$$

$$= \alpha\langle v_1,v_2\rangle$$

v) $\langle v_1,v_1\rangle \geq 0$; $\forall\ v_1 \in M_{2\times 2}(R)$

$$\langle v_1,v_1\rangle = a^2{}_{11} + a^2{}_{12} + a^2{}_{21} + a^2{}_{22} \geq 0,$$

Entonces la función:

$(v_1,v_2)=\langle v_1,v_2\rangle=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}$, define un producto interno sobre el espacio vectorial de las matrices reales 2x2($M_{2\times 2}(R)$).

Por ejemplo si $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

ntonces $\langle v_1,v_2\rangle = 1(-1)+2(0)+3(3)+4(2)$

$= -1+0+9+8$

$= 16$

jemplo 2.1.1.e.

ean $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

etermine si la función:

$(v_1,v_2)=\langle v_1,v_2\rangle = a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}$, es un roducto interno sobre las matrices cuadradas $2x2(M_{2x2}(R))$.

) $\langle v_1,v_2\rangle = \langle v_2,v_1\rangle$;$\forall$ v_1, $v_2 \in M_{2x2}(R)$

$\langle v_1,v_2\rangle = a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}$

$= b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}$

$= \langle v_2,v_1\rangle$

i) $\langle v_1+v_2,v_3\rangle = \langle v_1,v_3\rangle + \langle v_2,v_3\rangle$; $\forall$ $v_1,v_2,v_3 \in M_{2x2}(R)$

$\langle v_1+v_2,v_3\rangle = (a_{11}+b_{11})c_{11}+(a_{12}+b_{12})c_{21}+(a_{21}+c_{21})c_{12}$
$+(a_{22}+b_{22})c_{22}$

$= a_{11}c_{11}+b_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}+b_{12}c_{21}+a_{21}c_{12}+b_{21}c_{12}$
$+a_{22}c_{22}+b_{22}c_{22}$

$= (a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}+a_{21}c_{12}+a_{22}b_{22})$ +
$(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21}+b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22})$

$= \langle v_1,v_3\rangle + \langle v_2,v_3\rangle$

ii) $\langle \alpha v_1, v_2\rangle = \alpha\langle v_1, v_2\rangle$: $\forall$ $v_1, v_2 \in M_{2\times 2}(R)$, $\alpha \in R$

$$\langle \alpha v_1, v_2\rangle = \alpha a_{11}b_{11}+\alpha a_{12}b_{21}+\alpha a_{21}b_{12}+\alpha a_{22}b_{22}$$

$$= \alpha(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})$$

$$= \alpha\langle v_1, v_2\rangle$$

v) $\langle v_1, v_1\rangle \geq 0$: $\forall$ $v_1 \in M_{2\times 2}(R)$

$$\langle v_1, v_1\rangle = a_{11}a_{11}+a_{12}a_{21}+a_{21}a_{12}+a_{22}a_{22}$$

$$= a^2{}_{11}+2a_{12}a_{21}+a^2{}_{22} \geq 0,$$

Nótese que esta desigualdad no se cumple para todos os números reales X_{ij} $\in R$

i $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces

$$\langle v_1, v_1\rangle = 1(1)+2(-1)+(-1)2+1(1)$$

$$= 1-2-2+1$$

$$= -2$$

En consecuencia la función:

$$\phi(v_1, v_2)=\langle v_1, v_2\rangle=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}$$

No define un producto interno sobre el espacio vectorial de las matrices cuadradas reales 2x2($M_{2\times 2}(R)$).

emplo 2.1.1.f.

Si $p=a_0+a_1x+a_2x^2$ y $q=b_0+b_1x+b_2x^2$, son dos vectores alquiera en $P_2(a_i, b_i \in R,\ i=0,1,2)$, entonces la siguiente nción define un producto interno sobre polinomios de ado menor o igual a 2 (P_2). $\phi(p,q)=\langle p,q\rangle=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$

rificación:

$\langle p,q\rangle = \langle q,p\rangle \quad ; \quad \forall\ p,q \in P_2$

$\langle p,q\rangle = a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$

$= b_0a_0+b_1a_1+b_2a_2$

$= \langle q,p\rangle$

.) $\langle p+q,r\rangle = \langle p,r\rangle + \langle q,r\rangle \ ; \ \forall\ p,q,r \in p_2$

$\langle p+q,r\rangle = (a_0+b_0)c_0+ (a_1+b_1)c_1 + (a_2+b_2)c_2$

$= a_0c_0+b_0c_0+a_1c_1+b_1c_1+a_2c_2+b_2c_2$

$= (a_0c_0+a_1c_1+a_2c_2) + (b_0c_0+b_1c_1+b_2c_2)$

$= \langle p,r\rangle \ \langle q,r\rangle$

ii) $\langle \alpha p,q\rangle = \alpha\langle p,q\rangle \ ; \ \forall \ p,q \in p_2$ y $\alpha \in R$

$\langle \alpha p,q\rangle = \alpha a_0b_0+\alpha a_1b_1+\alpha a_2b_2$

$= \alpha(a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$

$= \alpha\langle p,q\rangle$

v) $\langle p,q\rangle \ \geq 0 : \forall\ p \in P_2$

$\langle p,p\rangle = a_0a_0+a_1a_1+a_2a_2$

$= a^2{}_0 + a^2{}_1 + a^2{}_2$

$\geq 0 \quad : a^2{}_i \geq 0$

Por lo tanto la función $\phi(p,q)=\langle p,q\rangle=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$ fine un producto interno sobre el espacio vectorial de s polinomios de grado menor o igual a 2 (P_2).

Si por ejemplo $p = 4+1x+5x^2$ y $q=2+2x-3x^2$.

Encontrar $\langle p,q\rangle$

$$\begin{aligned}\phi(p,q)=\langle p,q\rangle &= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2\\ &= 4(2) + 1(2) + 5(-3)\\ &= 8 + 2 - 15\\ &= -5\end{aligned}$$

jemplo 2.1.1.q.

Sean $p=p(x)$ y $q=q(x)$, dos polinomios en P_n, donde a,b R fijos cualquiera tales $a<b$, defínase:

$$\phi(p,q)=\langle p,q\rangle = \int_b^a p(x)q(x)dx$$

A continuación demostraremos que esta función define un producto interno sobre los polinomios de grado menor o igual a n (P_n).

i) $\langle p,q\rangle = \langle p,q\rangle$; $\forall$ $p, q \in P_n$

$$\begin{aligned}\langle p,q\rangle &= \int_b^a p(x)q(x)dx\\ &= \int_b^a q(x)p(x)dx\\ &= \langle q,p\rangle\end{aligned}$$

i) $\langle p+q,r\rangle = \langle p,r\rangle + \langle q,r\rangle \;;\; \forall\; p,q,r \in P_n$

$$\langle p+q,r\rangle = \int_b^a (p+q)(x)r(x)dx$$
$$= \int_b^a (p(x)+q(x))r(x)dx$$
$$= \int_b^a p(x)r(x)dx + \int_b^a q(x)r(x)dx$$
$$= \langle p,r\rangle + \langle q,r\rangle$$

ii) $\langle \alpha p,q\rangle = \alpha\langle q,r\rangle \;:\; \forall\; p,q \in P_n \;\; \forall\; \alpha \in R$

$$\langle \alpha p,q\rangle = \int_b^a (\alpha p(x))q(x)dx$$
$$= \alpha \int_b^a p(x)q(x)dx$$
$$= \alpha\langle p,q\rangle$$

v) $\langle p,p\rangle \geq 0 \;;\; \forall\; p \in P_n$

$$\langle p,p\rangle = \int_b^a p(x)p(x)dx$$
$$= \int_b^a p^2(x)dx$$
$$\geq 0$$

Además, dado que $p^2(x)\geq 0$ y los polinomios son funcio-
es continuas, $\int_b^a p^2(x)dx=0$, si y solo si $p(x)=0$, para toda
$\in R$ satisface $a \leq x \leq b$. Por tanto, $\langle p,p\rangle= \int_b^a p^2(x)dx = 0$,
i y solo si $p = 0_v$.

Por ejemplo $p(x)=x^2+x+1$ y $q(x)=x$, polinomios en P_2,
ncuentre $\phi(p,q)$ en el intervalo [0,1].

$$\phi(p,q)=\langle p,q\rangle = \int_b^a p(x)q(x)dx$$
$$= \int_0^1 (x^2+x+1)xdx$$
$$= \int_0^1 (x^3+x^2+x)dx$$

$$= \left[(x^4/4+x^3/3+x^2/2) \right] \Bigg|_0^1$$

$$= 1/4 + 1/3 + 1/2$$

$$= 13/12$$

jemplo 2.1.1.h.

Sean $a,b,c \in R$, supóngase que p y q están en P_2 y efínase $\phi(p,q)=\langle p,q\rangle=p(a)q(a)+p(b)+q(b)+p(c)q(c)$: robaremos que $\langle p,q\rangle$ es un producto interno sobre los olinomios de grado menor o igual a 2 (P_2).

) $\langle p,q\rangle = \langle q,p\rangle$: $\forall\ p,q \in P_2$

$$\begin{aligned}\langle p,q\rangle &= p(a)q(a)+p(b)q(b)+p(c)q(c)\\ &= q(a)p(a)+q(b)p(b)+q(c)p(c)\\ &= \langle q,p\rangle\end{aligned}$$

i) $\langle p+q,r\rangle = \langle p,r\rangle + \langle q,r\rangle \quad \forall\ p,q,r \in P_2$

$$\begin{aligned}\langle p+q,r\rangle &= (p+q)(a)r(a)+(p+q)(b)r(b)+(p+q)(c)r(c)\\ &= p(a)r(a)+q(a)r(a)+p(b)r(b)+q(b)r(b)\\ &\quad +p(c)r(c)+q(c)r(c)\\ &= (p(a)r(a)+p(b)r(b)+p(c)r(c))\\ &\quad +(q(a)r(a)+q(b)r(b)+q(c)r(c))\\ &= \langle p,r\rangle+\langle q,r\rangle\end{aligned}$$

ii) $\langle \alpha p,q\rangle = \alpha\langle p, q\rangle, \quad \forall\ p,q \in P_2,\ \alpha \in R$

$$\begin{aligned}\langle \alpha p,q\rangle &= (\alpha p(a))q(a)+(\alpha p(b))q(b)+(\alpha p(c))q(c)\\ &= \alpha(p(a)q(a)+p(b)q(b)+p(c)q(c))\\ &= \alpha\langle p,q\rangle\end{aligned}$$

iv) $\langle p,p\rangle \geq 0 \quad : \forall\, p \in P_2$

$\langle p,p\rangle = p(a)p(a)+p(b)p(b)+p(c)p(c)$

$= p^2(a)+p^2(b)+p^2(c). \geq 0$

Cabe destacar que una ecuación cuadrática tiene a lo más dos raíces, p(x)=0, para toda x, recíprocamente si p=0, entonces p(a)=p(b)=p(c)=0, así que $\langle p,p\rangle = 0$.

¿Define la función $\phi(p,q)=\langle p,q\rangle=p(a)q(a)+p(b)q(b)$ un producto interno sobre el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 (P_2)?

Debemos verificar los axiomas corespondientes:

i) $\langle p,q\rangle = \langle q,p\rangle: \forall\, p,q \in P_2$

$\langle p,q\rangle = p(a)q(a)+p(b)q(b)$

$= q(a)p(a)+q(b)p(b)$

$= \langle q,p\rangle$

ii) $\langle p+q,r\rangle = \langle p,r\rangle + \langle q,r\rangle \quad \forall\, p,q,r \in P_2$

$\langle p+q,r\rangle = (p(a)+q(a))r(a)+(p(b)+q(b))r(b)$

$= p(a)r(a)+q(a)r(a)+p(b)r(b)+q(b)r(b)$

$= (p(a)r(a)+p(b)r(b))+(q(a)r(a)+q(b)r(b))$

$= \langle p,r\rangle + \langle q,r\rangle$

iii) $\langle \alpha p,q\rangle = \alpha\langle p,q\rangle \quad \forall\, p,q \in p_2 \quad \forall\, \alpha \in R$

$\langle \alpha p,q\rangle = (\alpha p(a))q(a)+(\alpha p(b))q(b)$

$= \alpha(p(a)q(a)+\alpha p(b)q(b)$

$= \alpha\langle p,q\rangle$

v) $\langle p,p\rangle \geq 0 \;:\; \forall\, p \in P_2$

$\langle p,p\rangle = p^2(a)+p^2(b)$;

Nótese que $p(x)=(x-1)(x+1)= \neq 0v$

$\langle p,p\rangle = p^2(1)+p^2(-1)= 0 \Longrightarrow p(a)=p(b)=0 \Longrightarrow$

La función $\phi(p,q)=\langle p,q\rangle=p(a)q(a)+p(b)q(b)$ no define un roducto interno sobre los polinomios de grado menor o gual a 2 (P_2), porque $\langle p,p\rangle=0$, aun cuando $P \neq 0v$.

.2.2. NORMA DE UN VECTOR

En Física es importante la norma de los vectores en R^2 R^3, pues con el producto interno "clásico" la norma de un ector en estos dos espacios vectoriales es conocida como la noción geométrica de "longitud", a continuación se generalizará este concepto, para espacios vectoriales arbitrarios.

Definición 2.2.1.

Sea V un espacio vectorial con producto interno, LA NORMA DE UN VECTOR es una función **f** de V en R(**f**:V -->R) si y solo si $f(v)=\|v\| = +\sqrt{\langle v,v\rangle}$

.2.1. ILUSTRACIONES Y PROPIEDADES DE LA NORMA DE UN VECTOR

Ejemplo 2.2.1.a.

En R^2 se demostró que la función

$$\phi(v_1,v_2)=\langle v_1,v_2\rangle = x_1y_1+x_2y_2,$$

define un producto interno, encuentre la norma del ector $v_1=(5,6)$:

$$f(v_1) = \|v_1\| = +\sqrt{x^2+y^2} = +\sqrt{25 + 36} = +\sqrt{61} = 7{,}81$$

Determine la norma del vector anterior si la función roducto interno es: $\phi(v_1,v_2)=\langle v_1,v_2\rangle= 3x_1y_1+2x_2y_2$:

$$f(v_1) = \|v_1\| = +\sqrt{3x^2+2y^2} = +\sqrt{3(25)+2(36)} = +\sqrt{127} = 12{,}12$$

Nótese que la norma de un vector depende del producto nterno definido sobre el espacio vectorial, en los ejemlos anteriores, observamos que en un espacio euclidiano, xiste una norma para cada función producto interno.

jemplo 2.2.1.b.

En los polinomios de grado menor o igual a 2 (P_2), emos probado que la función $\phi(p,q) = \langle p,q\rangle = \int_b^a p(x)q(x)dx$ lefine un producto interno y sean $p=x$ y $q=x^2$, entonces; letermine $f(p)$ y $f(q)$ en el intervalo $[-1,1]$.

$$f(p) = \|p\| = +\sqrt{\langle p,p\rangle} = +\sqrt{\int_1^{-1} x^2\,dx} = +\sqrt{\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}} = +\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$q) = \|q\| = +\sqrt{\langle q,q\rangle} = +\sqrt{\int_{1}^{-1} x4dx} = +\sqrt{\left.\frac{x5}{5}\right|_{-1}^{1}} = +\sqrt{\frac{2}{5}}$$

emplo 2.2.1.c.

Hemos probado anteriormente que la función A,B)=<A,B> = $a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}$ define un oducto interno sobre las matrices reales 2x2($M_{2\times2}(R)$). lle $\|A\|$ cuando:

$$) \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \text{ y b) } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(A) = \|A\| &= +\sqrt{\langle A,A\rangle} \\ &= +\sqrt{a^2{}_{11}+a^2{}_{12}+a^2{}_{21}+a^2{}_{22}} \\ &= +\sqrt{1+49+36+4} \\ &= +\sqrt{90} \\ &= 3\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(A) = \|A\| &= +\sqrt{\langle A,A\rangle} \\ &= +\sqrt{0+0+0+0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

OPIEDADES

A continuación discutiremos acerca de algunas de las opiedades de la norma de un vector.

Sean V un espacio vectorial con producto interno y
v)=$\|v\|$, la norma de un vector cualquiera en V, entonces
cumplen los siguientes teoremas:

orema 2.2.1:

$$\|v_1\| \geq 0 \qquad \forall \quad v_1 \in V$$

ueba:

$$\|v_1\| = +\sqrt{\langle v_1,v_1\rangle} \geq 0 \;;$$

r definición de producto interno $\langle v_1,v_1\rangle \geq 0$

orema 2.2.2:

$$\|v_1\| = 0 \text{ si y solo si } v_1 = 0_v \;; \quad \forall \quad v_1 \in V$$

ueba:

$\|v_1\| = 0 \Longrightarrow \quad V = 0_v$

$$\|v_1\| = +\sqrt{\langle v_1,v_1\rangle}$$
$$= 0$$

$\Longrightarrow V = 0_v$

) $\quad V = 0_v \Longrightarrow \|v\| = 0$

$$\|v_1\| = +\sqrt{\langle v_1,v_1\rangle}$$
$$= \sqrt{0}$$
$$= 0$$

orema 2.2.3:

$v\| = |\alpha|\,\|v\| \quad ; \forall \quad v \in V \quad ; \quad \forall \quad \alpha \in R$

ueba:

$v\| = + \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v \rangle}$

$= + \sqrt{\alpha^2 \langle v, v \rangle}$

$= |\alpha| \sqrt{\langle v, v \rangle}$

$= |\alpha| \; \|v\|$

2.2 Teorema 4. Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Si v_1, v_2 son vectores en un espacio vectorial V, con oducto interno, entonces:

$\langle v_1, v_2 \rangle^2 \leq \langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle$

expresiones equivalentes:

$\langle v_1, v_2 \rangle^2 \leq \|v_1\|^2 \; \|v_2\|^2$

) $|\langle v_1, v_2 \rangle| \leq \|v_1\| \; \|v_2\|$

Prueba:

Si $v_1 = 0_v$, entonces $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle = 0$, por lo tanto evidente que la igualdad se cumple.

Supongamos:

Sean: $a = \langle v_1, v_1 \rangle$

$b = \langle v_1, v_2 \rangle$

$c = \langle v_2, v_2 \rangle$

$y \; t \in R$

Por definición $\langle v_1,v_1\rangle \geq 0$ (positivo), por lo tanto.

$$0 \leq \langle (tv_1+v_2), (tv_1+v_2)\rangle$$

$$0 \leq \langle (tv_1+v_2),tv_1\rangle + \langle (tv_1+v_2),v_2\rangle$$

$$0 \leq \langle tv_1,tv_1\rangle + \langle v_2,tv_1\rangle + \langle tv_1,v_2\rangle + \langle v_2,v_2\rangle$$

$$0 \leq t^2\langle v_1,v_1\rangle + t\langle v_1,v_2\rangle + t\langle v_1,v_2\rangle + \langle v_2,v_2\rangle$$

$$0 \leq t^2\langle v_1,v_1\rangle + 2t\langle v_1,v_2\rangle + \langle v_2,v_2\rangle$$

$$0 \leq at^2+2bt+C \; ; \; a,c \geq 0$$

Este polinomio cuadrático tiene a lo sumo una raíz
al repetida o bien son raíces complejas, por lo tanto
be satisfacer:

$$(2b)^2 - 4ac \leq 0 \implies b^2 - ac \leq 0$$

$$\implies b^2 \leq ac$$

$$\implies \langle v_1, v_2\rangle^2 \leq \langle v_1, v_1\rangle \langle v_2, v_2\rangle$$

rolario 2.2.4.1. Desigualdad Triangular

Este corolario es consecuencia del teorema anterior.

$$\|v_1+v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\| \; ; \; \forall \; v_1,v_2 \in V$$

Demostración:

$$\|v_1+v_2\|^2 = \langle (v_1+v_2),(v_1+v_2)\rangle$$

$$= \langle (v_1+v_2),v_1\rangle + \langle (v_1+v_2),v_2\rangle$$

$$= \langle v_1,v_1\rangle + \langle v_2,v_1\rangle + \langle v_1,v_2\rangle + \langle v_2,v_2\rangle$$

$$= \langle v_1,v_1\rangle + 2\langle v_1,v_2\rangle + \langle v_2,v_2\rangle$$

$\Rightarrow \quad \|v_1+v_2\|^2 \le \langle v_1,v_1\rangle + 2|\langle v_1, v_2\rangle| + \langle v_2,v_2\rangle$

$\Rightarrow \quad \|v_1+v_2\|^2 \le \langle v_1,v_1\rangle + 2\|v_1\| \, \|v_2\| + \langle v_2,v_2\rangle$

$\Rightarrow \quad \|v_1+v_2\|^2 \le \|v_1\|^2 + 2\|v_1\| \, \|v_2\| + \|v_2\|^2$

$\Rightarrow \quad \|v_1+v_2\|^2 \le [\|v_1\| + \|v_2\|]^2$

$\Rightarrow \quad \|v_1+v_2\| \le \|v_1\| + \|v_2\|$

Ilustraciones: De las Desigualdades de Cauchy-Schwarz y Triangular.

jemplo 2.2.2.a.

Si $v_1 = (4,6,1)$ y $v_2 = (2,1,6) \in R^3$, verificar las esigualdades de Cauchy-Schwarz y triangular, utilizando el roducto interno clásico.

) $\quad \langle v_1,v_2\rangle^2 \le \langle v_1,v_1\rangle \langle v_2,v_2\rangle$

$4(2)+6(1)+1(6)]^2 \le (16+36+1)\,(4+1+36)$

$400 < 2173$

) $\quad \|v_1+v_2\| \le \|v_1\| + \|v_2\|$

$\|(6,7,7)\| < \sqrt{53} + \sqrt{41}$

$11,58 < 13,68$

jemplo 2.2.2.b.

Verifique las desigualdades de Cauchy-Schwarz y riangular en el espacio vectorial de las matrices uadradas 2x2($M_{2\times 2}(R)$), con el producto interno definido en jercicios anteriores.

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$\langle A,B\rangle^2 \leq \langle A,A\rangle \langle B,B\rangle$

$(-1+0+18+3)^2 < (1+4+36+1)\ (1+0+9+9)$

$400 < 798$

b) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \right\| \leq \sqrt{42} + \sqrt{19}$

$\sqrt{(0+4+81+16)} < 10,84$

$10,04 < 10,84$

<u>Ejemplo 2.2.2.c.</u>

Sean $p=1+2x+x^2$, $q= 2-4x^2$, y el producto interno definido sobre el espacio de los polinomios del grado menor o igual a 2 (P_2) $\phi(p,q)=\langle p,q\rangle=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$, verifique las desigualdades:

a) $\langle p,q\rangle^2 \leq \langle p,p\rangle \langle q,q\rangle$

$(2+0-4)^2 \leq (1+4+1)\ (4+0+16)$

$(-2)^2 < 6(20)$

$4 < 120$

b) $\|p,q\| \leq \|p\| + \|q\|$

$$+\sqrt{3^2+2^2-3^2} < \sqrt{6}+\sqrt{20}$$

$$+\sqrt{9+4+9} < 6,92$$

$$4,69 < 6,92$$

Definición 2.2.

Un espacio vectorial con producto interno es normado si y solo si está definida la norma de sus vectores.

Comentario: De conformidad con lo desarrollado existen:

Espacios Vectoriales

Espacios Vectoriales Euclidianos

Espacios Vectoriales Normados

2.3 VECTOR UNITARIO

Definición 2.3.

Sea V un espacio vectorial con producto interno y v cualquier vector en V; v es un vector unitario si y solamente si:

$$f(v) = \|v\| = 1$$

Ilustración 2.3

a) $v_1 = (1,0,0)$; $\|v_1\| =+ \sqrt{x^2{}_1+x^2{}_2+x^2{}_3} =+ \sqrt{1+0+0} = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \|A\| = +\sqrt{a^2_{11}+a^2_{12}+a^2_{21}+a^2_{22}} = +\sqrt{0+0+0+1} = 1$$

$$p(x) = x \qquad ; \|p\| = +\sqrt{a^2_1} = +\sqrt{1} = 1$$

eorema 2.3.

Si v_1 es un vector diferente del vector 0 en un spacio vectorial con producto interno, entonces el vector $_1/\|v_1\|$ es unitario.

Prueba:

$$\left\|\frac{v_1}{\|v_1\|}\right\| = +\sqrt{\left\langle\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_1}{\|v_1\|}\right\rangle} = +\sqrt{\frac{1}{\|v_1\|^2}\langle v_1,v_1\rangle} = +\sqrt{\frac{1}{\|v_1\|^2}\|v_1\|^2} = 1$$

Este proceso de multiplicar un vector v_1 diferente del ector 0, por el recíproco de su norma, para obtener un ector de norma 1, se denomina normalización de v_1.

.4. VECTORES OTONORMALES

efinición 2.4.1.

Sea V un espacio vectorial sobre el cual se ha efinido un producto interno, los vectores v_1, $v_2 \in V$, son rtogonales si y solamente si $\langle v_1,v_2\rangle = 0$

efinición 2.4.1.

Los Vectores $v_1,v_2 \in V$ son ORTONORMALES, si y solo si:

$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

) $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$

ustración 2.4.2.

Supóngase que las matrices cuadradas 2x2($M_{2\times 2}(R)$ tiene finido el producto interno:

$A,B) = \langle A,B \rangle = a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}$, y sea:

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$ entonces:

$\phi(A,B) = \langle A,B \rangle = 0+0+0+0 = 0$

) $f(A) = \|A\| = +\sqrt{1+0+0+0} = 1$

$f(B) = \|B\| = +\sqrt{0+1+0+0} = 1$

Los vectores $A,B \in M_{2\times 2}(R)$ son ortonormales en elación con el producto interno dado.

.5 RELACION DE ORTOGONALIDAD E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

Un resultado importante que nos permite trabajar con onjuntos ortogonales de vectores, en un espacio con roducto interno es el siguiente:

Teorema 2.5.

Si $S = \{v_1, v_2, \ldots, V_n\}$ un conjunto ortogonal de vectores distintos del vector 0_v, de un espacio vectorial con producto interno, entonces S es linealmente independiente en V

Para la demostración de este teorema se aplicará la prueba por inducción matemática.

Inducción Matemática.- Es un principio fundamental de la matemática que puede ser empleado para demostrar cierto tipo de enunciados matemáticos.

Para probar por inducción se necesitan dos pasos:

i) (B) Base. probar que se cumple para algún $n \in N$

ii) (I) Paso Inductivo. Probar que si p(n) es verdadero entonces P(n+1) también es verdadero.

i) $p(1)= 1$

ii) $[p(k) \Longrightarrow p(k+1)] \equiv 1$

Prueba:

Sea $\langle v_i, v_j\rangle = 0, \forall \quad i \neq j$

Debemos probar que $p(c): c_1v_1+c_2v_2+\ldots+c_nv_n = 0_v$, tiene como única solución:

$c_1=c_2=\ldots=c_n=0$ donde $c_i \in R$; $i=1,2,\ldots,n)$

) Base P(1): $\langle v_1, c_1v_1+c_2v_2+...+c_nV_n\rangle = \langle v_1, 0_v\rangle = 0$

$\Longrightarrow c_1\langle v_1,v_1\rangle + c_2\langle v_1,v_2\rangle + \dots + c_n\langle v_1,v_n\rangle = 0$

$\Longrightarrow c_1\langle v_1,v_1\rangle = 0 \Longrightarrow c_1=0$ dado que $(\langle v_1,v_1\rangle) > 0$

) Paso Inductivo:

P(k): $\langle v_k, c_1v_1+c_2v_2+...+c_kv_k+...c_nv_n\rangle = 0$

$\Longrightarrow c_1\langle v_k,v_1\rangle + c_2\langle v_k,v_2\rangle + \dots\ c_k\langle v_k,v_k\rangle + \dots +$

$Cn\langle v_k,v_n\rangle = 0$

$\Longrightarrow c_k\langle v_k,v_k\rangle = 0 \Longrightarrow c_k=0$ dado que $\langle v_k,v_k\rangle > 0$

P(k+1): $\langle v_{k+1}, c_1v_1+c_2v_2+...+c_kv_k+c_{k+1}v_{k+1}...c_nV_n\rangle = 0$

$\Longrightarrow c_1\langle v_{k+1},v_1\rangle + c_2\langle v_{k+1},v_2\rangle + \dots\ c_k\langle v_k,v_{k+1}\rangle +$

$c_{k+1}\langle v_{k+1},v_{k+1}\rangle + \dots c_n\langle v_{k+1},v_n\rangle = 0$

$\Longrightarrow c_{k+1}\langle v_{k+1},v_{k+1}\rangle=0 \Longrightarrow c_{k+1}=0$ dado que

$\langle v_{k+1},v_{k+1}\rangle > 0$

$Ap(c) = \{(c_1,c,\dots,c_n)/\ c_1=c_2=\dots=c_n = 0\}$

$\Longrightarrow$ S es linealmente independiente

Podemos señalar con certeza que ortogonalidad de vectores garantiza independencia lineal de los mismos.

Ilustración 2.5.a.

Sea el conjunto de vectores Ortogonales en R^3:

S = {(0,1,-1),(0,1,1),(2,0,0)}, verificar si son linealmente independientes:

Igualamos a cero la combinación lineal:

$c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3=\underline{0}$

$c_1(0,1,-1)+c_2(0,1,1)+c_3(2,0,0)=0_v$; genera los predicados p_1,p_2,p_3, tales que:

$$\begin{cases} p_1(c_1,c_2,c_3) : \quad 2c_3 = 0 \\ p_2(c_1,c_2,c_3) : \quad c_1+c_2 = 0 \\ p_3(c_1,c_2,c_3) : \quad -c_1+c_2 = 0 \end{cases};$$

$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4$ es el sistema de ecuaciones

Expresamos el sistema en su forma matricial $A\underline{c}=0_v$==>

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

resolvemos el sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

El conjunto solución del sistema es:

$Ap_1(c_1,c_2,c_3 \wedge p_2(c_1,c_2,c_3) \wedge p_3(c_1,c_2,c_3)=$

$\{(c_1,c_2,c_3)/c_1=c_2=c_3=0\}$

ntonces S es linealmente independiente en R^3.

El recíproco del teorema 2.5 no siempre es verdadero;
s decir independencia lineal de vectores no garantiza
rtogonalidad de los mismos.

ustración 2.5.b.

Sean $v_1=(1,3)$ y $v_2=(2,5)$, vectores linealmente inde-
ndientes en R^2; verificar si estos vectores son
togonales:

$$\phi((x_1y_1),(x_2y_2))= x_1y_1 + x_2y_2$$

$$\phi((1,3),(2,5)) = 1(2) + 3(5)$$

$$= 17$$

$\neg(\langle v_1,v_2\rangle) = 0 \Longrightarrow v_1,\ v_2$ no son vectores ortogonales.

6 BASES ORTONORMALES

En muchos problemas referentes a espacios vectoriales,
selección de una base para el espacio se hace según
nvenga al que lo resuelve, una de las ventajas que tienen
s bases ortonormales sobre las bases arbitrarias es que
s cálculos son más simples, por lo que a continuación
finiremos e ilustraremos.

finición 2.6.

se Ortonormal.

Sea V un espacio vectorial con producto interno y
$\{v_1, v_2,v_3,...,v_n\}$ una base cualquiera de V, B es una
se ortonormal de V, si y solo si:

) $\langle V_i, V_j\rangle = 0 \quad ; \quad \forall \quad i \neq j$

i) $f(v_i) = \|v_i\| = 1 \qquad$ para $i,j = 1,2,\ldots,n$

Si cumple solamente la condición i, se dice que

$=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base ortogonal de V.

ustraciones:

<u>iemplo 2.6.1.</u>

Se puede probar que el conjunto de polinomios

$$=\left\{\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2\right), \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x^2\right), \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x^2\right)\right\}$$

una base para el espacio vectorial (P_2) de los polinomios grado menor o igual a 2 con la función producto interno: $p,q)=\langle p,q\rangle=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$, determinemos si B es una base togonal para P_2.

$$\langle p,q\rangle = a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$$

$$\langle p,q\rangle = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\langle p,r\rangle = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0$$

$$\langle q,r\rangle = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0$$

Los polinomios p,q y r son mutuamente ortogonales.

) $f(p) = \|p\| = +\sqrt{\langle p,p\rangle}$

$$= +\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= 1$$

$$f(q) = \|q\| = +\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= 1$$

$$f(r) = \|r\| = +\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= 1$$

Puesto que se cumplen las condiciones i,ii, de la
finición previa, B es una base ortonormal para el espacio
torial P_2.

emplo 2.6.2.

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Es una base para ($M_{2\times2}(R)$) y sabemos que la función:

ϕ(A,B)=<A,B>=$a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}$ es un producto interno sobre las matrices cuadradas $2\times2(M_{2\times2}(R))$, verifiquemos si B es ortonormal.

$$\phi(A,B) = \langle A,B\rangle = a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}$$

$$= 0+0+0+0 = 0$$

$$\langle A,C\rangle = \langle A,D\rangle = \langle B,C\rangle = \langle B,D\rangle = \langle C,D\rangle = 0$$

)

$$f(A) = \|A\| = +\sqrt{9+0+0+0} = 3$$

$$f(B) = \|B\| = 3$$

$$f(C) = \|C\| = 2$$

$$f(D) = \|D\| = 2$$

En conclusión B es una base ortogonal de $M_{2\times2}(R)$, más no ortonormal, pues $\neg(\|A\| = \|B\| = \|C\| = \|D\| = 1)$

Dada una base o un conjunto generador S para un espacio vectorial con producto interno V, se puede encontrar una base ortogonal u ortonormal para el espacio; el Método que se usa para esta construcción se llama el proceso de Gram-Schmidt, el mismo que no será discutido en nuestro trabajo.

.7. MATRICES ORTOGONALES

A continuación se define una nueva clase de matriz, que es muy útil sobre todo en lo relacionado con diagonalización de matrices, formas cuadráticas, etc.

efinición 2.7.1.

Una matriz $Q_{n \times n}(R)$ se llama **ortogonal**, si y solo si Q

s invertible y $Q^{-1} = Q^t$

Nótese que:

$^{-1} = Q^t \Longrightarrow Q^{-1}Q = Q^tQ \Longrightarrow Q^tQ = I$

ustraciones:

emplo 2.7.1.

Toda matriz identidad es ortogonal

Prueba:

$Q=I \;;\; Q^t=I \Longrightarrow Q^tI=II \Longrightarrow Q^t=I$

emplo 2.7.2.

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \;; Q^t = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow Q^tQ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$\Longrightarrow$ Q es una matriz ortogonal

emplo 2.7.3.

pongamos $Q = \begin{bmatrix} \text{Sen } \theta & \text{Cos } \theta \\ \text{Cos } \theta & -\text{Sen } \theta \end{bmatrix} \;;\; Q^t = \begin{bmatrix} \text{Sen } \theta & \text{Cos } \theta \\ \text{Cos } \theta & -\text{Sen } \theta \end{bmatrix}$

$$Q^tQ = \begin{bmatrix} Sen^2\theta + Cos^2\theta & Sen\,\theta\,Cos\,\theta - Sen\,\theta\,Cos\,\theta \\ Sen\,\theta\,Cos\,\theta - Sen\,\theta\,Cos\,\theta & Sen^2\theta + Cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \implies Q \text{ es ortogonal}$$

Es factible hallar matrices ortogonales, utilizando el siguiente Teorema, cuya demostración se encuentra en el libro ALGEBRA LINEAL de Staley Grosman, página 303, Edit. Mac-Graw-Hill - 4 edición 1992.

Teorema 2.7.1.

La matriz $Q_{n\times n}(R)$ es ortogonal si y solo si las columnas de Q forman una base ortogonal de R^n.

Consideremos la matriz:

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Siendo $v1 = (1/\sqrt{2},\ 0\ ,\ 1/\sqrt{2})$

$v2 = (1/\sqrt{2},\ 0,\ -1/\sqrt{2})$

$v3 = (0,\ 1,\ 0)$ vectores columnas de A.

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

=> A es una matriz ortogonal.

Según condición del Teorema 2.7.1:

Si A es ortogonal, entonces los vectores columna v1 = 1/√2,0,1/√2); v2=(1/√2,0,-1/√2); v3=(0,1,0) forman una ase ortogonal de R^3.

erificación:

) $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad ; \forall\ i \neq j$

$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\langle v_1,v_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0+0+0 = 0$$

$$\langle v_1,v_3\rangle = 0+0+0 = 0$$

$\Longrightarrow B_1 = \{v_1,v_2,v_3\}$ es una base ortogonal para R^3

Además en este caso:

) $f(v_1) = \|v1\| = +\sqrt{\langle v1,v1\rangle}$

$$= +\sqrt{\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}} = 1$$

$$f(v_2) = \|v2\| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$f(v3) = \|v2\| = \sqrt{0+1+0} = 1$$

> B1 = {v1,v2,v3} es una base ortonormal en R^3.

8. COMPLEMENTO ORTOGONAL

A continuación definiremos el conjunto denominado mplemento Ortogonal en los espacios vectoriales con oducto interno.

finición 2.8.1.

Sea H un subespacio del espacio vectorial V con oducto interno, $H\perp$ es el complemento ortogonal de H, si y lo si: $H\perp = \{x \in V \,/\, \langle x,h\rangle = 0,\ \forall\ h \in H\}$

lustraciones:

jemplo 2.8.1.

Encontraremos el complemento ortogonal del plano enerado por los vectores: $v_1 = (1,1,2)$ y $v_2 = (1,2,3)$. onsiderando como filas de la Matriz A y resolviendo $A\underline{x}=0_v$.

H es el subespacio de R^3 generado por los vectores: ,1,2) y (1,2,3), según el problema formemos la Matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Estructuremos el sistema de ecuaciones homogéneo.

$$\begin{cases} p_1\ (x_1,x_2,x_3) : & x_1+x_2+2x_3 = 0 \\ p_2\ (x_1,x_2,x_3) : & x_1+2x_2+3x_3 = 0 \end{cases}$$

Siendo $p_1 \wedge p_2$ es el sistema de ecuaciones.

continuación la representación matricial del sistema:

$A\underline{x} = 0_v$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Trabajaremos con la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

==> Conjunto solución:

$A_{p_1}\wedge p_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \ / \ x_1=-x_3, \ x_2=-x_3, \ x_3 \in R\}$

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = -x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

En consecuencia $H\perp$ (complemento ortogonal) es el
onjunto generado por $\{(1,1,-1)\}$

emplo 2.8.2

En P_3 $[0,1]$, sea H un subespacio generado por el onjunto $\{1,x^2\}$, determine el complemento ortogonal $H\perp$ de n $\{1,x^2\}$.

$H = \text{gen } \{1,x^2\}$

$H\perp = \{x \in V : \langle x,h\rangle \ 0 \ ; \ \forall \ h \in H\}$

ean $p(x) = a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$; donde $p(x) \in p_3$

$\langle p,q\rangle = \int_b^a p(x)q(x)dx$

) $\int_0^1 p(x)q(x)dx = \int_0^1 (a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)1dx = 0$

$$==> p_1(a_3,a_2,a_1,a_0) \quad \frac{a_3}{4} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0$$

i) $\int_0^1 p(x)q(x)dx = \int_0^1 (a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)x^2 \ dx = 0$

$$p_2(a_3,a_2,a_1,a_0) \quad \frac{a_3}{6} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_0}{3} = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} p_1(a_3,a_2,a_1,a_0): \dfrac{a_3}{4} + \dfrac{a_2}{3} + \dfrac{a_1}{2} + a_0 = 0 \\[2ex] p_2(a_3,a_2,a_1,a_0): \dfrac{a_3}{6} + \dfrac{a_2}{5} + \dfrac{a_1}{4} + \dfrac{a_0}{3} = 0 \ ; \end{cases}$$

$p_1 \wedge p_2$ es el sistema.

Forma Matricial del Sistema $M\underline{a} = \underline{0}$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Aumentada

$$\left[\begin{array}{cccc:c} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 3 & 4 & 6 & 12 & 0 \\ 10 & 12 & 15 & 20 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 3 & 4 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & 4 & 15 & 60 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc:c} 3 & 0 & -9 & -48 & 0 \\ 0 & 4 & 15 & 60 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -3 & -16 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{15}{4} & 15 & 0 \end{array}\right]$$

Conjunto solución de $p_1 \wedge p_2$ es:

$A_{p_1}(c_3,c_2,c_1,c_0) \wedge p_2(a_3,a_2,a_1,a_0) = \{(a_3,a_2,a_1,a_0) / c_3 = 3a_1 + 16a_0$

$c_2 = -\frac{15}{4} a_1 - 15a_0 \ ; \ c_1, c_0 \in R\}$

$\perp = gen\{12x^3-15x^2+4x),(16x^3-15x^2+1)\}$

TEOREMA 2.8.1.- Si H es un subespacio del espacio con producto interno V, entonces:

i) $H\perp \cap H = 0_V$

ii) $H\perp$ es un subespacio de V

i) $H\perp \cap H = 0_V$

Prueba:

$x \in H\perp \cap H \implies \langle x,x\rangle = 0 \implies x = 0_V$

ii) H es un subespacio de V.

a) Por condición anterior $0_V \in {}_H\perp$

b) Sean x_1, $x_2 \in H$, $\implies \langle x_1,h\rangle = 0$

$$\langle x_2,h\rangle = 0 \quad \forall h \in H$$

$$\implies \langle x_1+x_2,h\rangle = \langle x_1,h\rangle + \langle x_2,h\rangle$$

$$= 0 + 0$$

$$= 0$$

en consecuencia: $(x_1+x_2) \in H\perp$

c) $x_1 \in H$, $\alpha \in R$, : $(\alpha x_1) \in H\perp$

$$\langle \alpha x_1,h\rangle = \alpha\langle x_1,h\rangle = \alpha 0 = 0$$

$$\implies (\alpha x_1) \in H\perp$$

Por a,b,c, $H\perp$ es un subespacio de V.

En la ilustración 2.8.1.- H = gen $\{(1,1,2), (1,2,3)\}$ es un subespacio de R^3, como también $H\perp$ = gen $\{(1,1,-1)\}$ es un subespacio de R^3.

CONCLUSIONES

1. El concepto de función ha tenido trascendental importancia en el desarrollo de nuestro trabajo, pues con ella hemos definido e ilustrado: matriz, traza de una matriz cuadrada, operación binaria, espacio vectorial con producto interno y norma de un vector.

2. Se han introducido definiciones de la función producto interno sobre un espacio vectorial real arbitrario y la función norma de un vector, destacándose para ello los vectores: polinomios de grado menor o igual a n, matrices reales de orden mxn y las e-niadas reales. En este contexto se ilustra con ejemplos que cumplen con las definiciones y otros denominados contraejemplos que no cumplen con al menos uno de los axiomas establecidos.

3. Destacaremos que la norma de un vector depende exclusivamente de la función producto interno, definida sobre un espacio vectorial real, por lo cual podemos determinar diferentes normas de un mismo vector; cabe anotar que la desigualdad de Cauchy-Schwarz relaciona el producto interno de dos vectores con sus normas.

4. Hemos enunciado e ilustradó las definiciones de: vector unitario, bases ortonormales, matrices ortonormales y complemento ortogonal; para lo cual aplicamos la función llamada producto interno definida sobre espacios vectoriales reales.

BIBLIOGRAFIA

NTON, H. (1991) Introducción al Algebra Lineal. Grupo Noriega Editores, Editorial Limusa, quinta reimpresión. México D.F.

ERBER, H. (1992) Algebra Lineal. Grupo Editorial Iberoamé-rica. México D.F.

ROSSMAN, S.(1991) Algebra Lineal con aplicaciones. Editorial Mc-Graw-Hill. Cuarta edición. México D.F.

ERSTEIN, I.(1991) Algebra Lineal y Teoría de Matrices. Grupo Editorial Iberoamérica. México D.F.

OFFMAN, K.(1991) Algebra Lineal.Editorial Prentice Hall, Bogotá Colombia.
UNZE, R.

OLMAN, B.(1977) Algebra Lineal. Fondo Educativo Interamericano S.A. Segunda Edición. México D.F.

NG, S. (1976) Algebra Lineal. Fondo Educativo Interamericano México D.F.

OBLE, B. (1989)
ANIEL, J. Algebra Lineal Aplicada. Prentice-Hall Hispanoamericana S. A., Tercera Edición México D.F.

AVIS, H. (1992)
NIDER, A. Introducción al Análisis Vectorial. Editorial Mc-Graw-Hill, Sexta edición México D.F.