

ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL



Facultad De Ingeniería En Electricidad Y Computación

***“Métodos de scattering inverso
electromagnético para pruebas y evaluaciones
no destructivas”***

TESIS DE GRADO

Previa a la obtención del Título de:

**INGENIERO EN ELECTRÓNICA Y
TELECOMUNICACIONES**

Presentada por:

JULIO JOFFRE BARZOLA MONTESES

GUAYAQUIL - ECUADOR

2007

DEDICATORIA

ESTE PROYECTO ESTÁ DEDICADO A
DIOS POR DARME VIDA Y MUCHA
SALUD, A MI MADRE, QUIEN FUE MI
PUNTO DE APOYO PARA SEGUIR LA
UNIVERSIDAD Y OBTENER ESTE LOGRO
QUE ELLA NO PUDO CONSEGUIR., PERO
LO HA VISTO CRISTALIZADO EN SU HIJO.

AGRADECIMIENTO

DESEO AGRADECER PRIMERAMENTE A DIOS, QUIEN ME HA MOTIVADO PARA TERMINAR ESTA TESIS Y HABER PUESTO DELANTE DE MÍ AL RELATOR, CHIARMO PROF. MATTEO PASTORINO, AL CUAL VA MI AGRADECIMIENTO POR LA DISPONIBILIDAD Y LA PROFESIONALIDAD DEMOSTRADA DURANTE TODO EL TIEMPO DEDICADO AL DESARROLLO DE ESTE TRABAJO, SOBRETUDO POR LA PACIENCIA Y LA GENTILEZA CON LA CUAL ME HA AYUDADO.

AGRADEZCO AL ING. DR. GIOVANNI BOZZA, QUE HA SIDO UN PUNTO DE REFERENCIA IMPORTANTE PARA EL CUMPLIMIENTO DE ESTE TRABAJO, DEMOSTRANDO SU GENTILEZA Y PACIENCIA EN AYUDARME TANTO A ESCRIBIR Y CORREGIR EL TEXTO Y LOS CÓDIGOS UTILIZADOS.

AGRADEZCO AL ING. FRANCESCO CAPRILE, QUE ME HA AYUDADO CON LA INVESTIGACIÓN DE LOS MODELOS Y AL ING. DR. ANDREA RANDAZZO, POR HABER RESPONDIDO A MIS FRECUENTES PREGUNTAS.

AGRADEZCO DE TODO CORAZÓN, A MIS PADRES Y MIS HERMANOS, CONJUNTAMENTE A TODOS MIS PROFESORES, COLEGAS Y AMIGOS, QUIENES ME HAN BRINDADO SU APRECIADA AYUDA

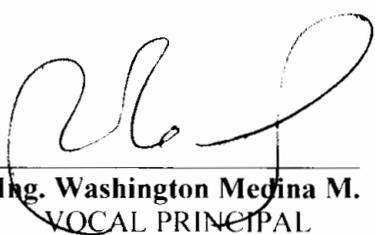
TRIBUNAL DE GRADUACIÓN



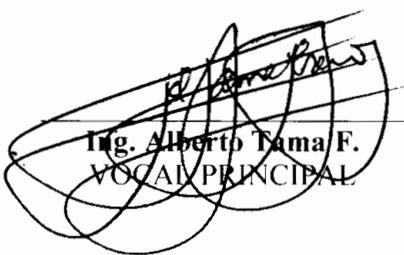
Ing. Holger Cevallos U.
PRESIDENTE SUB-DECANO FIEC



Ing. Pedro Vargas G.
DIRECTOR DE TESIS



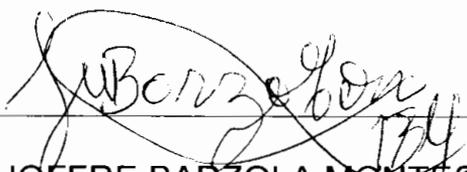
Ing. Washington Medina M.
VOCAL PRINCIPAL



Ing. Alberto Tama F.
VOCAL PRINCIPAL

DECLARATORIA EXPRESA

“La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestas en esta tesis me corresponden exclusivamente; y, el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL”



JULIO JOFFRE BARZOLA MONTESES

RESUMEN

La tesis presentará dos métodos de solución del problema inverso de scattering electromagnético basados sobre un nuevo algoritmo de tipo Inexact-Newton.

El problema a afrontar consiste en la determinación de las características electromagnéticas tal como la permitividad dieléctrica $\varepsilon(\vec{r})$ de una región de forma dada e irradiada por una o mas fuentes dadas, partiendo del conocimiento del campo eléctrico obtenido a lo externo de Ω . Además, se supone que la región Ω está inmersa en un medio homogéneo, lineal, no dispersivo y tiempo invariante, dicho background (para nuestro caso será el vacío), con permitividad dieléctrica ε_0 y permeabilidad magnética μ_0 .

En este trabajo se hará siempre la hipótesis de régimen sinusoidal permanente a la pulsación ω puesto que, gracias a la teoría de Fourier, si se emplean medios lineales, esta elección no constituye una limitación. Con tal asunción, el campo electromagnético resulta completamente caracterizado de la pareja de vectores complejos $(\vec{E}(\vec{r}), \vec{H}(\vec{r}))$.

En nuestro caso de mayor interés práctico donde la región Ω no tenga materiales magnéticos, las ecuaciones de resolver serían las siguientes:

$$\vec{E}^{(ext)}(\vec{r}) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}') \vec{E}^{(int)}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}|\vec{r}') d\vec{r}' + \vec{E}^{inc}(\vec{r}), \dots \vec{r} \notin \Omega$$

$$\vec{E}^{(int)}(\vec{r}) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}') \vec{E}^{(int)}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}|\vec{r}') d\vec{r}' + \vec{E}^{inc}(\vec{r}), \dots \vec{r} \in \Omega$$

Donde $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ es el número de ondas en el vacío, $\vec{E}^{inc}(\vec{r})$ es el campo eléctrico incidente irradiado desde la fuente y $\vec{E}^{(ext)}(\vec{r})$ y $\vec{E}^{(int)}(\vec{r})$ denotan, respectivamente, el campo eléctrico externo e interno de Ω ; \vec{G} es el tensor de Green para el espacio libre.

Es importante observar que para resolver el problema es necesario determinar no solamente la función contraste $\chi(\vec{r}) = \frac{\tilde{\epsilon}(\vec{r})}{\epsilon_0} - 1$, sino que también el campo eléctrico $\vec{E}^{(int)}(\vec{r})$ interno a Ω . Para obviar este problema es posible adoptar la aproximación de Born [23], que expresa el campo eléctrico bajo el signo de la integral en términos de la función contraste y del campo eléctrico incidente, quedándonos así solo por determinar la primera ecuación.

La resolución del problema resulta después complicada por el hecho de que no es lineal, puesto que aparece el producto entre las incógnitas, y porque es mal puesto (ill-posed) según la definición de Hadamard [16]. Esta última característica nos impone la adopción de estrategias de regularización con el fin de obtener soluciones estables en presencia de datos corrompidos por ruido.

Dada la notoriedad del problema, en el curso de los años han sido propuesto algoritmos siguiendo diferentes acercamientos y persiguiendo objetivos particulares (velocidad, precisión, estabilidad) [28].

Por esto, es posible tener una clasificación entre algoritmos estocásticos y determinísticos. A la primera categoría pertenecen los métodos que buscan una solución al problema minimizando una función con algoritmos estocásticos de optimización global, aquellos como el *simulated annealing* y los algoritmos genéticos y evolucionarios [29]; en la segunda entran al contrario aquellos que emplean estrategias de solución determinísticas. La primera clase de métodos da buenos resultados, pero en tiempos hasta ahora inaceptables para una aplicación real.

Los algoritmos pueden todavía ser subdivididos en métodos que se basan sobre una formulación "exacta" del problema y en aquellos que al contrario aprovechan una aproximación del modelo (por ejemplo, aproximación de Born, de Rytov, de Rayleigh). Tales aproximaciones consisten de transformar el problema, en uno lineal o simplificado, pero su validez es subordinada al respecto de particulares condiciones, tales como la reducida frecuencia de trabajo y el contraste limitado respecto al *background*.

En el ámbito de la tesis serán reportados algunos resultados fundamentales de la teoría de los problemas mal puestos (Ill-posed) para introducir el método adoptado, que es un nuevo algoritmo de tipo Inexact-Newton obtenido mediante la generalización del método de Landweber para operadores no lineales. Se trata de un método determinístico formulado en el dominio espacial que será aplicado tanto en el modelo aprovechado por la aproximación de Born como en el modelo exacto en el caso de configuración cilíndrica.

Para poner en aplicación este nuevo algoritmo, se plantearán dos modelos que actualmente son muy difundidos a nivel industrial como son la madera y el hormigón.

La validación de este algoritmo de tipo Inexact-Newton con los modelos propuestos se la hará mediante simulaciones numéricas, utilizando software de programación en lenguaje C++ y Gnuplot.

INDICE GENERAL

DEDICATORIA	III
AGRADECIMIENTOS	IV
TRIBUNAL DE GRADUACIÓN	V
DECLARATORIA EXPRESA	VI
RESUMEN	VII
INDICE GENERAL	X
INDICES DE FIGURAS	XIV
INDICE DE TABLAS	XIX
INTRODUCCION	1

CAPITULO 1. EL PROBLEMA DEL SCATTERING ELECTROMAGNÉTICO

1.1	Introducción al problema del Scattering Electromagnético	
	Directo	3
1.1.1	Formulación matemática del problema	4
1.1.2	Configuración cilíndrica	9
1.2	Introducción al problema del Scattering Electromagnético	
	Inverso	13
1.2.1	Formulación matemática del problema	13

CAPITULO 2. LA APROXIMACIÓN DE BORN

2.1	Características de la Aproximación de Born	16
2.2	Aproximación de Born de primer orden	18
2.3	Aproximación de Born de orden superior	19

CAPITULO 3. MÉTODOS “INEXACT-NEWTON”

3.1	El método Newton-Raphson	22
3.2	El método Newton-Raphson para ecuaciones funcionales	23
3.3	Métodos del tipo “Inexact-Newton”	26
3.4	El método Landweber	28
3.4.1	Método de las potencias para el cálculo del autovalor máximo de una matriz	36
3.5	Aplicación del método ‘Inexact-Newton’ al problema de Scattering Inverso cilíndrico con la Aproximación de Born	44
3.5.1	Formulación multivista	46
3.5.2	Discretización del problema	47
3.6	Aplicación del método ‘Inexact-Newton’ al problema de Scattering Inverso con la formulación exacta	60
3.6.1	Discretización del problema	63
3.6.2	Formulación multivista	67
3.6.3	Análisis de los recursos requeridos	69
3.6.4	Soluciones Propuestas	70

CAPITULO 4. MODELOS DE MATERIALES UTILIZADOS EN LAS APLICACIONES

4.1	Modelos con la madera	73
4.1.1	Características físicas, mecánicas y químicas de la madera	73
4.1.2	Características Electromagnéticas de la madera.	74
4.1.3	Técnicas para la medición de permitividad Dieléctrica en la madera	74
4.1.4	Valores de permitividad_dieléctrica al variar sus principales parámetros	77
4.1.5	Madera seca del Pino	77
4.1.6	Madera húmeda del Pino	78
4.2	Modelos con Pilares de Hormigón	79

4.2.1	Clasificación de pilares de Hormigón basado en su tipo de agregado	80
4.2.2	Clasificación de pilares de Hormigón basado por la relación W/C	81
4.2.3	Clasificación de pilares de Hormigón basado en su tipo de aditivo	82
4.2.4	Clasificación de pilares de Hormigón basado en el efecto de cloruros (sales)	83

CAPITULO 5. RESULTADOS NUMÉRICOS

5.1	Descripción de la configuración simulada	86
5.1.1	Disposición de las fuentes y de los puntos de medición	86
5.1.2	Dominio de indagación	89
5.2	Parámetros de error	90
5.3	Reconstrucción de los modelos con la Aproximación de Born	91
5.3.1	Reconstrucción en ausencia de ruido	93
5.3.1.1	Modelos con Pilares de Hormigón	93
5.3.1.2	Modelos con la madera	97
5.3.2	Reconstrucción en presencia de ruido	125
5.3.2.1	Modelos con Pilares de Hormigón	126
5.3.2.2	Modelos con la madera	133
5.4	Reconstrucción de los modelos con la formulación exacta	163
5.4.1	Reconstrucción en ausencia de ruido	164
5.4.1.1	Modelos con Pilares de Hormigón	165
5.4.2	Reconstrucción en presencia de ruido	172
5.4.2.1	Modelos con Pilares de Hormigón	173

Conclusiones y futuros desarrollos	180
Apéndice	
A Problemas mal puesto (Ill-posed)	183
B Descomposición en valores singulares	200
Bibliografía	206

INDICE DE FIGURAS

Figura 1.1: Esquema del problema de "scattering" electromagnético directo	4
Figura 1.2: Interpretación de las fuentes equivalentes	6
Figura 1.3: Cilindro dieléctrico infinito	9
Figura 1.4: Esquema del problema de "scattering" electrogmanético inverso	13
Figura 3.1: Método de Newton-Raphson	23
Figura 4.2: Principales ejes de la madera	75
Figura 4.3: Ejes ortogonales de la madera	76
Figura 5.1: Disposición de las fuentes para $S = 8$	87
Figura 5.2: Disposición de los puntos de medición	88
Figura 5.3: Dominio de indagación	89

5.3.1 Reconstrucción en ausencia de ruido

Modelos con Pilares de Hormigón

Figura 5.4: Objeto a reconstruir	93
Figura 5.5: Simulación bidimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.48$ y $a = 0.06m$	94
Figura 5.6: Simulación bidimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.48$ y $a = 0.06m$	94
Figura 5.7: Simulación tridimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.48$ y $a = 0.06m$	95
Figura 5.8: Simulación tridimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.48$ y $a = 0.06m$	95
Figura 5.9: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico tota	96
Figura 5.10: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	96

Modelos con la madera

Figura 5.11: Objeto a reconstruir	98
--	----

Débiles dispersadores: cilindro con $\varepsilon(\vec{r}) = 1.8$

Figura 5.12: Simulación bidimensional del <i>objeto a reconstruir</i> $a = 0.1m$	98
Figura 5.13: Simulación bidimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.1m$	99
Figura 5.14: Simulación tridimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.1m$	99
Figura 5.15: Simulación tridimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.1m$	100
Figura 5.16: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	100
Figura 5.17: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	101

Débiles dispersadores: cilindro con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$

Figura 5.18: Simulación bidimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.1m$	101
Figura 5.19: Simulación bidimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.1m$	102
Figura 5.20: Simulación tridimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.1m$	102
Figura 5.21: Simulación tridimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.1m$	103
Figura 5.22: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	103
Figura 5.23: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	104
Figura 5.24: Objeto a reconstruir	105

Débiles dispersadores: prisma cuadrático $\varepsilon(\vec{r}) = 1.8$

Figura 5.25: Simulación bidimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.1m$	105
Figura 5.26: Simulación bidimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.1m$	106
Figura 5.27: Simulación tridimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.1m$	106
Figura 5.28: Simulación tridimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.1m$	107
Figura 5.29: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	107
Figura 5.30: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	108

Débiles dispersadores: prisma cuadrático $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$

Figura 5.31: Simulación bidimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.1m$	108
Figura 5.32: Simulación bidimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.1m$	109
Figura 5.33: Simulación tridimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.1m$	109
Figura 5.34: Simulación tridimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.1m$	110
Figura 5.35: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	110
Figura 5.36: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	111

Modelo de la madera con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.11$

Figura 5.38: Simulación bidimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.06m$	113
Figura 5.39: Simulación bidimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.06m$	113
Figura 5.40: Simulación tridimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.06m$	114
Figura 5.41: Simulación tridimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.06m$	114
Figura 5.42: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	115
Figura 5.43: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	115

Modelo de la madera con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.79$

Figura 5.44: Simulación bidimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.06m$	116
Figura 5.45: Simulación bidimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.06m$	116
Figura 5.46: Simulación tridimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.06m$	117
Figura 5.47: Simulación tridimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.06m$	117
Figura 5.48: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	118
Figura 5.49: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	118

Modelo de la madera con $\varepsilon(\vec{r}) = 3.59$

Figura 5.50: Simulación bidimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.06m$	119
Figura 5.51: Simulación bidimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.06m$	119
Figura 5.52: Simulación tridimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.06m$	120
Figura 5.53: Simulación tridimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.06m$	120
Figura 5.54: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	121
Figura 5.55: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	121

Modelo de la madera con $\varepsilon(\vec{r}) = 6.18$

Figura 5.56: Simulación bidimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.06m$	122
Figura 5.57: Simulación bidimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.06m$	122
Figura 5.58: Simulación tridimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.06m$	123
Figura 5.59: Simulación tridimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.06m$	123
Figura 5.60: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	124
Figura 5.61: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	124

5.3.2 Reconstrucción en presencia de ruido**Modelos con Pilares de Hormigón****Modelo de Hormigón con SNR = 15 dB Y $\varepsilon(\vec{r}) = 2.48$**

Figura 5.62: Simulación bidimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.06m$	126
Figura 5.63: Simulación bidimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.06m$	127
Figura 5.64: Simulación tridimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.06m$	127
Figura 5.65: Simulación tridimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.06m$	128
Figura 5.66: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	128
Figura 5.67: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	128

Modelo de Hormigón con SNR = 25 dB

Figura 5.68: Simulación bidimensional del <i>objeto a reconstruir</i> $a = 0.06m$	129
--	-----

Figura 5.69: Simulación bidimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0,06m$	130
Figura 5.70: Simulación tridimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0,06m$	130
Figura 5.71: Simulación tridimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0,06m$	131
Figura 5.72: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	131
Figura 5.73: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	132
Modelos con la madera	
Figura 5.74: Objeto a reconstruir	131
Débiles dispersadores: cilindro con $\varepsilon(\vec{r}) = 1.8$ y $SNR = 15dB$	
Figura 5.75: Simulación bidimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0,1m$	134
Figura 5.76: Simulación bidimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0,1m$	134
Figura 5.77: Simulación tridimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0,1m$	135
Figura 5.78: Simulación tridimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0,1m$	135
Figura 5.79: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	136
Figura 5.80: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	136
Débiles dispersadores: cilindro con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$ y $SNR = 15dB$	
Figura 5.81: Simulación bidimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0,1m$	137
Figura 5.82: Simulación bidimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0,1m$	137
Figura 5.83: Simulación tridimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0,1m$	138
Figura 5.84: Simulación tridimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0,1m$	138
Figura 5.85: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	139
Figura 5.86: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	139
Débiles dispersadores: cilindro con $\varepsilon(\vec{r}) = 1.8$ y $SNR = 25dB$	
Figura 5.87: Simulación bidimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0,1m$	140
Figura 5.88: Simulación bidimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0,1m$	140
Figura 5.89: Simulación tridimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0,1m$	141
Figura 5.90: Simulación tridimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0,1m$	141
Figura 5.91: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	142
Figura 5.92: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	142
Débiles dispersadores: cilindro con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$ y $SNR = 25dB$	
Figura 5.93: Simulación bidimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0,1m$	143
Figura 5.94: Simulación bidimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0,1m$	143
Figura 5.95: Simulación tridimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0,1m$	144
Figura 5.96: Simulación tridimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0,1m$	144
Figura 5.97: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	145
Figura 5.98: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	145
Figura 5.99: Objeto a reconstruir	147
Figura 5.100: Simulación bidimensional de los <i>objetos a reconstruir</i>	147
Figura 5.101: Simulación bidimensional de los <i>objetos reconstruidos</i>	148
Figura 5.102: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	148
Figura 5.103: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	149
Modelo de la madera con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.11$ y $SNR = 20dB$	
Figura 5.104: Simulación bidimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0,06m$	150
Figura 5.105: Simulación bidimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0,06m$	151
Figura 5.106: Simulación tridimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con, $a = 0,06m$	151
Figura 5.107: Simulación tridimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0,06m$	152
Figura 5.108: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	152
Figura 5.109: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	153

Modelo de la madera con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.79$ y $SNR = 20dB$

Figura 5.110: Simulación bidimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.06m$	153
Figura 5.111: Simulación bidimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.06m$	154
Figura 5.112: Simulación tridimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con, $a = 0.06m$	154
Figura 5.113: Simulación tridimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.06m$	155
Figura 5.114: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	155
Figura 5.115: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	156

Modelo de la madera con $\varepsilon(\vec{r}) = 3.59$ y $SNR = 20dB$

Figura 5.116: Simulación bidimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.06m$	156
Figura 5.117: Simulación bidimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.06m$	157
Figura 5.118: Simulación tridimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con, $a = 0.06m$	157
Figura 5.119: Simulación tridimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.06m$	158
Figura 5.120: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	158
Figura 5.121: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	159

Modelo de la madera con $\varepsilon(\vec{r}) = 6.18$ y $SNR = 20dB$

Figura 5.122: Simulación bidimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con $a = 0.06m$	159
Figura 5.123: Simulación bidimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.06m$	160
Figura 5.124: Simulación tridimensional del <i>objeto a reconstruir</i> con, $a = 0.06m$	160
Figura 5.125: Simulación tridimensional del <i>objeto reconstruido</i> con $a = 0.06m$	161
Figura 5.126: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	161
Figura 5.127: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones	162

Reconstrucción de los modelos con la formulación exacta**Reconstrucción en ausencia de ruido****Modelos con Pilares de Hormigón**

Figura 5.128: Objeto a reconstruir	165
Figura 5.129: Simulación bidimensional del <i>objeto con defecto a reconstruir</i>	166
Figura 5.130: Simulación bidimensional del <i>objeto con defecto reconstruido</i>	166
Figura 5.131: Simulación tridimensional del <i>objeto con defecto a reconstruir</i>	167
Figura 5.132: Simulación tridimensional del <i>objeto con defecto reconstruido</i>	167
Figura 5.133: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	168
Figura 5.134: Error normalizado con $f_H = 0.9GHz$	168
Figura 5.135: Error normalizado con $f_H = 1.0GHz$	169
Figura 5.136: Error normalizado con $f_H = 1.1GHz$	169
Figura 5.137: Error normalizado con $f_H = 1.2GHz$	170
Figura 5.138: Error normalizado con $f_H = 1.3GHz$	170
Figura 5.139: Error normalizado con $f_H = 1.4GHz$	171
Figura 5.140: Error normalizado con $f_H = 1.5GHz$	171

Reconstrucción en presencia de ruido**Modelos con Pilares de Hormigón $SNR = 20dB$**

Figura 5.141: Simulación bidimensional del <i>objeto con defecto a reconstruir</i>	173
Figura 5.142: Simulación bidimensional del <i>objeto con defecto reconstruido</i>	174
Figura 5.143: Simulación tridimensional del <i>objeto con defecto a reconstruir</i>	174
Figura 5.144: Simulación tridimensional del <i>objeto con defecto reconstruido</i>	175
Figura 5.145: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total	175

Figura 5.146: Error normalizado con $f_H = 0.9GHz$	176
Figura 5.147: Error normalizado con $f_H = 1.0GHz$	176
Figura 5.148: Error normalizado con $f_H = 1.1GHz$	177
Figura 5.149: Error normalizado con $f_H = 1.2GHz$	177
Figura 5.150: Error normalizado con $f_H = 1.3GHz$	178
Figura 5.151: Error normalizado con $f_H = 1.4GHz$	178
Figura 5.152: Error normalizado con $f_H = 1.5GHz$	179

INDICE DE TABLAS

Tabla I. Estima brindada por el método de las potencias al variar el número de iteraciones efectuada	42
Tabla II: Propiedades Dieléctricas de la madera	77
Tabla III: Características del modelo de pino seco.	78
Tabla IV: Características del modelo de pino húmedo.	78
Tabla V Principales datos del modelo basado en su tipo de agregado.	80
Tabla VI: Principales datos sobre el modelo basado en la relación w/c	82
Tabla VII: Principales datos del modelo basado en el tipo de aditivo	83
Tabla VIII Valores experimentales de la constante dieléctrica del PCC con microsilicón	83
Tabla IX: Principales datos sobre el modelo basado en el efecto de cloruros	85
Tabla X : Parámetros de instrumentación	92
Tabla XI : Parámetros de instrumentación	163

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha tenido un creciente interés enfocado a las técnicas de la diagnóstica electromagnéticas no invasivas, que van desde el ámbito industrial, de la ingeniería civil, hasta la diagnóstica médica [8] [6] [28].

En el ámbito industrial, la diagnóstica a microondas consiste en efectuar pruebas no destructivas para el control de productos y estructuras; en el contexto de la ingeniería civil, ésta es utilizada para obtener información sobre la integridad de estructuras en cemento y madera no de otras maneras disponibles. En ámbito médico [14], instrumentos basados en *inverse scattering* a microondas nos brindan técnicas de diagnóstica no invasivas alternativas o complementarias a aquellas de los rayos X, potencialmente dañinos en dosis elevadas para el paciente y para los operadores.

La diagnóstica a microondas encuentra aplicación también en las imágenes superficiales, para la individualización de objetos sepultados como minas o restos arqueológicos.

Esta tesis ha sido desarrollada en el ámbito de investigación de los Problemas Inversos en electromagnetismo. Específicamente en el chequeo de estructuras dieléctricas. En fin, se han estudiado dos métodos de solución del problema *inverse scattering* basados sobre un nuevo algoritmo de tipo Inexact-Newton.

Se profundizará en particular al *inverse scattering* en el rango de las microondas por relevantes motivaciones de carácter técnico. La teoría y la tecnología de las antenas y de los circuitos a microondas son, en efecto, actualmente maduros y consolidados en el mercado, pues son disponibles numerosos componentes que

operan en esta banda de frecuencias, permitiendo el desarrollo de eficientes sistemas de imágenes.

Sin embargo, la elección de la banda de las microondas percute en la adopción de aproximaciones que permitan una resolución simplificada del problema, así como sucede en la óptica geométrica o en la teoría clásica de los circuitos. Por este motivo es necesario utilizar las ecuaciones de Maxwell o relaciones derivadas de las mismas.

Este nuevo algoritmo de tipo Inexact-Newton ha sido validado mediante la ejecución de numerosas simulaciones numéricas, cuyos resultados son mostrados en este trabajo. El mismo requiere también el uso de los códigos de cálculos referentes a la simulación del problema 'directo', que consiste en la generación de los datos sintéticos, siendo éstos usados como 'entrada' en los programas de cálculo utilizados para la solución del problema 'inverso' que, a su vez, a través de un procedimiento iterativo, reconstruye las características geométricas y dieléctricas del objeto incógnito.

Las actividades concernientes a la tesis han sido desarrolladas en el laboratorio de Electromagnetismo Aplicado del Departamento de Ingeniería en Biofísica y Electrónica (DIBE) de la Universidad de Génova, Italia.

CAPITULO 1

EL PROBLEMA DEL SCATTERING ELECTROMAGNETICO

1.1 Introducción al problema del Scattering Electromagnético Directo

Se considera un objeto (dicho también obstáculo) de forma, permitividad dieléctrica y permeabilidad magnética dada, iluminado por una fuente electromagnética conocida $\vec{J}^{inc}(\vec{r})$.

La onda incidente, irradiada desde la fuente, colisiona con el objeto generando varios fenómenos: reflexión, transmisión, absorbimiento, difusión.

El termino "*scattering*" comprende todos estos fenómenos [1]; la importancia del uno respecto al otro depende de la relación entre la longitud de onda del campo electromagnético irradiado y las dimensiones del objeto.

El problema de la dispersión electromagnética *directo* consiste en determinar el *campo electromagnético* producido por la fuente en todo el espacio in presencia del objeto.

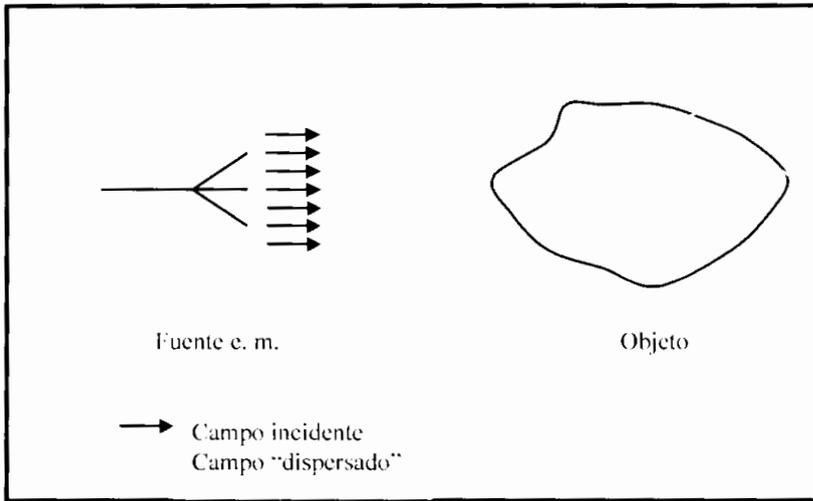


Figura 1.1: Esquema del problema de "scattering" electromagnético directo

1.1.1 Formulación matemática del problema

Se hipotetiza que el objeto y el material en el cual el mismo está inmerso (background) sean lineales, isotrópico, tiempo-invariante y espacialmente no dispersivo.

Se trabaja en régimen sinusoidal a la pulsación ω .

Se hace referencia también a las siguientes hipótesis:

- ✓ **Desacoplamiento electromagnético entre fuente y objeto.-** Se hace la asunción de que el obstáculo reacciona al campo electromagnético emitido por la fuente, irradiando, a su vez, un campo electromagnético que no modifica a la fuente significativamente. Tal hipótesis es verificada también en zona de campo cercano y aún más todavía en zona de campo lejano [1].
- ✓ **Fuente.-** genera en ausencia del objeto, el campo incidente $\vec{E}^{inc}(\vec{r})$ y $\vec{H}^{inc}(\vec{r})$, dados en todos los puntos del espacio.

- ✓ **Objeto (“dispersador”).**- esta caracterizado por una permeabilidad magnética igual a aquella del background.
- ✓ **Medio de propagación.**- se asume, sin pérdida de generalidad, como background al vacío ($\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$).

En estas hipótesis, la permitividad dieléctrica

$$\tilde{\varepsilon}(\vec{r}) = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{para } \vec{r} \notin \Omega \\ \varepsilon(\vec{r}) & \text{para } \vec{r} \in \Omega \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Describe las características electromagnéticas de todo el espacio, siendo Ω la región ocupada por el objeto.

Los campos vectoriales incógnitos $\vec{E}(\vec{r})$ y $\vec{H}(\vec{r})$ satisfacen entonces las ecuaciones de Maxwell [15]

$$\int_{\gamma} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = -j\omega\mu_0 \int_S \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad (1.1.2a)$$

$$\int_{\gamma} \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = j\omega \int_S \tilde{\varepsilon}(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{J}^{inc}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad (1.1.2b)$$

Donde S es *cualquier* superficie abierta, teniendo como borde la curva cerrada γ .

Sean $\vec{E}^{inc}(\vec{r})$ y $\vec{H}^{inc}(\vec{r})$ los vectores que describen el campo electromagnético producido por la fuente en ausencia del obstáculo. Ellos satisfacen las ecuaciones de Maxwell

$$\int_{\gamma} \vec{E}^{inc}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = -j\omega\mu_0 \int_S \vec{H}^{inc}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad (1.1.3a)$$

$$\int_{\gamma} \vec{H}^{inc}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = j\omega\varepsilon_0 \int_S \vec{E}^{inc}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{J}^{inc}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad (1.1.3b)$$

Sustrayendo miembro a miembro la (1.1.3a) de la (1.1.2a) y la (1.1.3b) de la (1.1.2b), se obtiene

$$\int_{\gamma} [\vec{E}(\vec{r}) - \vec{E}^{inc}(\vec{r})] \cdot d\vec{l} = -j\omega\mu_0 \int_S [\vec{H}(\vec{r}) - \vec{H}^{inc}(\vec{r})] \cdot d\vec{S} \quad (1.4a)$$

$$\int_{\gamma} [\vec{H}(\vec{r}) - \vec{H}^{inc}(\vec{r})] \cdot d\vec{l} = j\omega \int_S [\tilde{\epsilon}(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) - \epsilon_0\vec{E}^{inc}(\vec{r})] \cdot d\vec{S} \quad (1.4b)$$

Definiendo

$$\vec{E}^{scatt}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) - \vec{E}^{inc}(\vec{r}) \quad (1.1.5a)$$

$$\vec{H}^{scatt}(\vec{r}) = \vec{H}(\vec{r}) - \vec{H}^{inc}(\vec{r}) \quad (1.1.5b)$$

y sustituyendo en las (1.1.4), se obtienen las ecuaciones

$$\int_{\gamma} \vec{E}^{scatt}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = -j\omega\mu_0 \int_S \vec{H}^{scatt}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad (1.1.6a)$$

$$\int_{\gamma} \vec{H}^{scatt}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = j\omega \int_S \left\{ \tilde{\epsilon}(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) - \epsilon_0 [\vec{E}(\vec{r}) - \vec{E}^{scatt}(\vec{r})] \right\} \cdot d\vec{S} \quad (1.1.6b)$$

que pueden ser rescritas en la forma

$$\int_{\gamma} \vec{E}^{scatt}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = -j\omega\mu_0 \int_S \vec{H}^{scatt}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad (1.1.7a)$$

$$\int_{\gamma} \vec{H}^{scatt}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = j\omega\epsilon_0 \int_S \vec{E}^{scatt}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{J}^{eq}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad (1.1.7b)$$

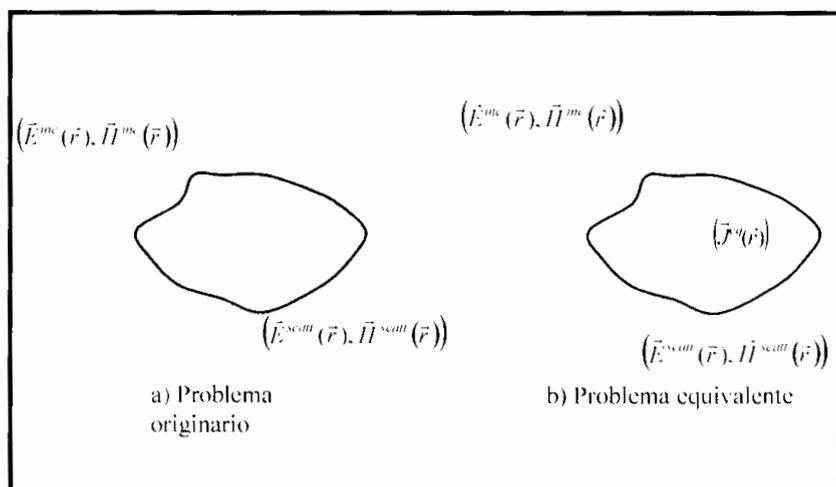


Figura 1.2: Interpretación de las fuentes equivalentes

donde

$$\vec{J}^{eq}(\vec{r}) = j\omega [\tilde{\varepsilon}(\vec{r}) - \varepsilon_0] \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.1.8)$$

$\vec{J}^{eq}(\vec{r})$ toma el nombre de fuente *equivalente* y es una cantidad *incógnita*, porque depende de los campos $\vec{E}(\vec{r})$ y $\vec{H}(\vec{r})$ que no son dados.

Como resulta evidente de la (1.1.1), $\vec{J}^{eq}(\vec{r})$ es nula para $\vec{r} \notin \Omega$.

Las (1.1.7) son las ecuaciones que permiten interpretar $(\vec{E}^{scatt}(\vec{r}), \vec{H}^{scatt}(\vec{r}))$ como el campo generado de la fuente $|\vec{J}^{eq}(\vec{r}')|$ que irradia en espacio *libre*: el problema original es por lo tanto transformado en un problema equivalente en espacio libre en el cual, sin embargo, las fuentes son incógnitas (véase en la figura 1.2).

Puesto que la fuente $|\vec{J}^{eq}(\vec{r}')|$ es inducida por el campo incidente $(\vec{E}^{inc}(\vec{r}), \vec{H}^{inc}(\vec{r}))$, ella toma el nombre de *fente secundaria*.

Como es dado en [1], el campo eléctrico $\vec{E}^{scatt}(\vec{r})$ vale entonces

$$\vec{E}^{scatt}(\vec{r}) = -j\omega\mu_0 \int_{\Omega} \vec{J}^{eq}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}|\vec{r}') d\vec{r}' \quad \dots \quad (1.1.9)$$

Donde

$$\vec{G}(\vec{r}|\vec{r}') = \left[\mathbf{I} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla \right] G(\vec{r}|\vec{r}') \quad \dots \quad (1.1.10)$$

es el tensor de *Green* y

$$G(\vec{r}|\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 \|\vec{r}-\vec{r}'\|}}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} \quad \dots \quad (1.1.11)$$

es la función de *Green* para el espacio libre, siendo $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ el número de ondas en el vacío y $\|\cdot\|$ la usual norma euclidiana.

Sustituyendo en la (1.1.9) la (1.1.8a), se obtiene

$$\vec{E}^{scat}(\vec{r}) = -j\omega\mu_0 \int_{\Omega} j\omega [\tilde{\epsilon}(\vec{r}') - \epsilon_0] \vec{E}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}|\vec{r}') d\vec{r}' \quad (1.1.12)$$

Definida la *función potencial de dispersión*

$$\tau(\vec{r}) = j\omega [\tilde{\epsilon}(\vec{r}) - \epsilon_0] \quad (1.1.13)$$

que es una función conocida, y recordando la (1.1.5a), se obtiene la ecuación integral

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu_0 \int_{\Omega} \tau(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}|\vec{r}') d\vec{r}' + \vec{E}^{inc}(\vec{r}) \quad (1.1.14)$$

que permite determinar el campo eléctrico en el problema original. La ecuación integral (1.1.14) resulta ser una ecuación de *Lippmann-Schwinger*.

En lugar de la función potencial expuesta anteriormente se utiliza frecuentemente la *función contraste*, así definida

$$\chi(\vec{r}) = \frac{\tilde{\epsilon}(\vec{r}) - \epsilon_0}{\epsilon_0} = \frac{\tilde{\epsilon}(\vec{r})}{\epsilon_0} - 1 \quad (1.1.15)$$

Como τ , también χ es en general un soporte compacto y entre ellas interviene una relación de directa proporcionalidad; en efecto, resulta

$$\tau(\vec{r}) = j\omega\epsilon_0\chi(\vec{r}) \quad (1.1.16)$$

Sobre la base de esta relación, la (1.1.14) puede ser escrita en términos de la función contraste en el siguiente modo

$$\vec{E}(\vec{r}) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}|\vec{r}') d\vec{r}' + \vec{E}^{inc}(\vec{r}) \quad (1.1.17)$$

En general, esta ecuación integral no puede ser resuelta analíticamente, por lo cual es necesario utilizar métodos numéricos.

1.1.2 Configuración cilíndrica

Si hacemos la suposición de que el obstáculo sea un objeto cilíndrico con sección arbitraria \mathcal{D} y se escoge un sistema de referencia cilíndrico con eje z paralelo al eje del objeto mismo.

Se hipotetiza además que las características electromagnéticas del obstáculo sean independientes de z , es decir se tenga que

$$\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r}_t) \quad (1.1.18)$$

donde \vec{r}_t es un vector en el cual cuya componente a lo largo del eje del cilindro es nulo. Resulta por lo tanto

$$\vec{r} = \vec{r}_t + z\hat{z}$$

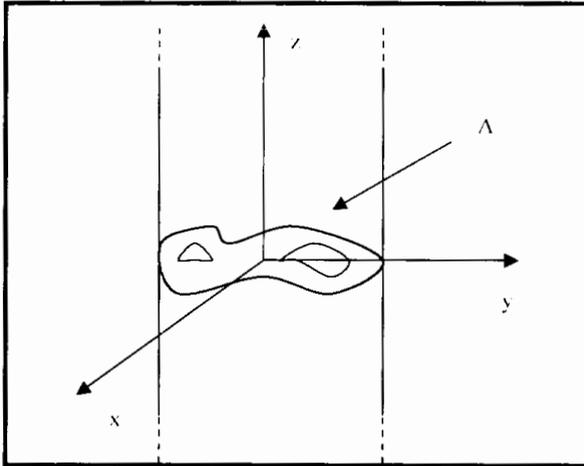


Figura 1.3: Cilindro dieléctrico infinito

Sea después el campo incidente $(\vec{E}^{inc}(\vec{r}), \vec{H}^{inc}(\vec{r}))$ una onda TM^z independiente de la coordenada z y polarizada a lo largo de \hat{z} , o bien sea

$$\vec{E}^{inc}(\vec{r}) = E_z^{inc}(\vec{r}_t)\hat{z} \quad (1.1.19)$$

En estas hipótesis, basándonos en consideraciones de simetría, también el campo $\vec{E}(\vec{r})$ - y por lo tanto el campo $\vec{E}^{scat}(\vec{r})$ - resultan independiente de la coordenada z . La ecuación (1.1.14) se escribe entonces

$$E(\vec{r}_i) = j\omega\mu_0 \int_{\mathcal{D}=-\infty}^{\infty} \int \tau(\vec{r}_i') E(\vec{r}_i') \cdot \left(\mathbf{I} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla \right) G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') dz' d\vec{r}_i' + E^{inc}(\vec{r}_i) \quad (1.1.20)$$

o bien

$$E(\vec{r}_i) = j\omega\mu_0 \int_{\mathcal{D}} \tau(\vec{r}_i') E(\vec{r}_i') \cdot \left(\mathbf{I} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') dz' \right) d\vec{r}_i' + E^{inc}(\vec{r}_i) \quad (1.1.21)$$

Además, con un cambio de variables, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') dz' = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk_0 \sqrt{\|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|^2 + z'^2}}}{\sqrt{\|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|^2 + z'^2}} dz' \quad (1.1.22)$$

El segundo miembro de la (1.1.22) resulta expresable en el modo siguiente [1]

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk_0 \sqrt{\|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|^2 + z'^2}}}{\sqrt{\|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|^2 + z'^2}} dz' = \frac{j}{4} H_0^{(2)}(k_0 \|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|) \quad (1.1.23)$$

Siendo $H_0^{(2)}$ la función de Hankel de segunda especie de orden cero y $\|\cdot\|$ la norma euclidiana.

En coordenadas cartesianas, el operador $\mathbf{I} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla$ es representado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & 1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & 1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (1.1.24)$$

Aplicando el operador representado en la matriz (1.1.24) a la función

$$\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k_0 \|\vec{r}' - \vec{r}_i'\|) = \frac{j}{4} H_0^{(2)}\left(k_0 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}\right), \text{ se obtiene}$$

$$\frac{j}{4} \begin{pmatrix} H_0^{(2)} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 H_0^{(2)}}{\partial x^2} & \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 H_0^{(2)}}{\partial x \partial y} & 0 \\ \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 H_0^{(2)}}{\partial y \partial x} & H_0^{(2)} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 H_0^{(2)}}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & H_0^{(2)} \end{pmatrix} \quad (1.1.25)$$

Sobre la base de la (1.1.25), la (1.1.21) puede ser escrita en el siguiente modo

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z - E_z^{inc} \end{pmatrix} = -\frac{\omega \mu_0}{4} \int_{\mathcal{S}} \begin{pmatrix} H_0^{(2)} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 H_0^{(2)}}{\partial x^2} & \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 H_0^{(2)}}{\partial x \partial y} & 0 \\ \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 H_0^{(2)}}{\partial y \partial x} & H_0^{(2)} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 H_0^{(2)}}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & H_0^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} dx' dy' \quad (1.1.26)$$

Se observa que la (1.1.26) puede ser considerada como un problema *bidimensional* con condiciones de radiación al infinito, en lugar de cómo un problema tridimensional independiente de la altura.

Puesto que la (1.1.26) admite una única solución, es evidente que debe ser $E_x(x, y) = 0$ y $E_y(x, y) = 0$. La ecuación a resolver se reduce entonces a la siguiente ecuación escalar.

$$E_z^{scatt}(\vec{r}_i) = -\frac{\omega\mu_0}{4} \int_{\mathcal{D}} \tau(\vec{r}_i') H_0^{(2)}(k_0 \|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|) E_z(\vec{r}_i') d\vec{r}_i' \quad (1.1.27)$$

En términos de función contraste la misma ecuación se convierte en

$$E_z^{scatt}(\vec{r}_i) = -\frac{j}{4} k_0^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i') H_0^{(2)}(k_0 \|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|) E_z(\vec{r}_i') d\vec{r}_i' \quad (1.1.28)$$

Ya que $-\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k_0 \|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|)$ es la función de Green $G^{(2D)}(\vec{r}_i' | \vec{r}_i)$ de la ecuación de Helmholtz bidimensional, la ecuación precedente puede ser escrita del siguiente modo

$$E_z^{scatt}(\vec{r}_i) = -k_0^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i') E_z(\vec{r}_i') G^{(2D)}(\vec{r}_i' | \vec{r}_i) d\vec{r}_i' \quad (1.1.29)$$

Debido a que de ahora en adelante se hará referencia muy frecuentemente a la configuración cilíndrica, se omitirá el superíndice $2D$ y la (1.1.29) se escribirá

$$E_z^{scatt}(\vec{r}_i) = -k_0^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i') E_z(\vec{r}_i') G(\vec{r}_i' | \vec{r}_i) d\vec{r}_i' \quad (1.1.30)$$

no siéndonos, gracias al contexto, posibilidad de confusión.

1.2 Introducción al problema del Scattering Electromagnético Inverso

El problema del *scattering* electromagnético *inverso* consiste en determinar de las características electromagnéticas de un obstáculo basándonos en el conocimiento del campo electromagnético externo al objeto que una fuente $\vec{J}^{inc}(\vec{r})$ *dada* produce al iluminar al obstáculo mismo.

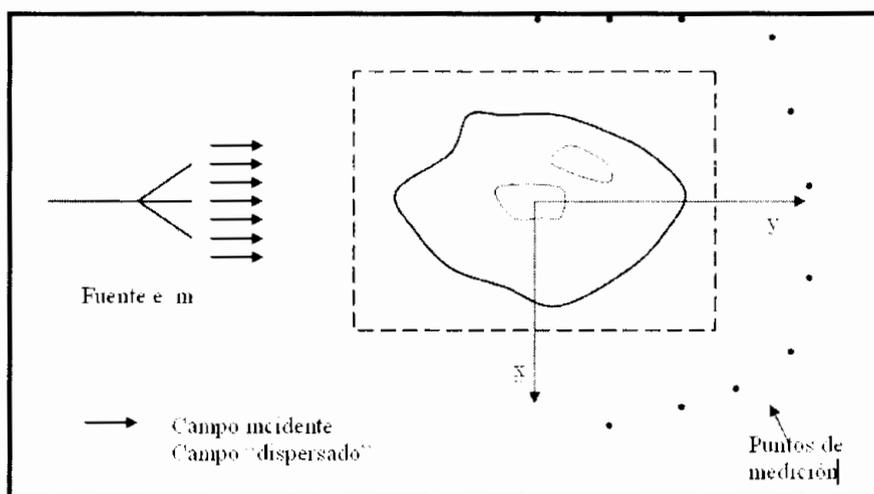


Figura 1.4: Esquema del problema de "scattering" electrogmagnético inverso

1.2.1 Formulación matemática del problema

En el caso de objetos *no magnéticos*, para los cuales $\mu(\vec{r}) = \mu_0$, la ecuación que describe el fenómeno es todavía la (1.1.17), que viene reinscrita para comodidad

$$\vec{E}(\vec{r}) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}|\vec{r}') d\vec{r}' + \vec{E}^{inc}(\vec{r})$$

Es importante sin embargo observar que el campo eléctrico es dado solo al exterior de la región Ω ocupada por el obstáculo y por lo tanto el campo eléctrico al interior de Ω es una incógnita del problema así como lo es la función de constante. Para una mejor claridad se indica con $\vec{E}^{(ext)}(\vec{r})$ el

campo eléctrico externo y con $\vec{E}^{(int)}(\vec{r})$ el interno. La (1.1.17) se reinscribe entonces como

$$\vec{E}^{(ext)}(\vec{r}) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}') \vec{E}^{(int)}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}|\vec{r}') d\vec{r}' + \vec{E}^{inc}(\vec{r}) \quad \vec{r} \notin \Omega \quad (1.2.1)$$

Puesto que las incógnitas del problema son dos, el campo eléctrico interno y la función contraste, es necesario disponer de otra ecuación para resolver el problema. Para tal fin, se observa que la (1.1.17) es válida en cualquier punto del espacio, y por lo tanto también al interior de Ω , así que se puede escribir

$$\vec{E}^{(int)}(\vec{r}) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}') \vec{E}^{(int)}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}|\vec{r}') d\vec{r}' + \vec{E}^{inc}(\vec{r}) \quad \vec{r} \in \Omega \quad (1.2.2)$$

El problema inverso puede por lo tanto ser expresado mediante la pareja de ecuaciones integrales

$$\vec{E}^{(ext)}(\vec{r}) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}') \vec{E}^{(int)}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}|\vec{r}') d\vec{r}' + \vec{E}^{inc}(\vec{r}) \quad \vec{r} \notin \Omega \quad (1.2.3a)$$

$$\vec{E}^{(int)}(\vec{r}) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}') \vec{E}^{(int)}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}|\vec{r}') d\vec{r}' + \vec{E}^{inc}(\vec{r}) \quad \vec{r} \in \Omega \quad (1.2.3b)$$

Las (1.2.3) resultan además *no lineales*, porque en ellas aparece el producto de las incógnitas. A bien analizar, las (1.2.3) contienen además una *tercera* incógnita: la región Ω ocupada por el objeto incógnito, que aparece como dominio de integración. No obstante, ya que no se ha hecho alguna hipótesis sobre el objeto, es siempre posible pensar que la región Ω sea, por ejemplo, un paralelepípedo de dimensiones dadas, que contiene el objeto incógnito. Si las (1.2.3) son resueltas correctamente, dentro del dominio Ω así escogido será posible reconstruir al objeto original inmerso en el *vacío*.

En el caso de configuración cilíndrica de sección \mathcal{D} , las (1.2.3) se reducen a las siguientes ecuaciones

$$E_z^{(ext)}(\vec{r}_i) = -\frac{jk_0^2}{4} \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i') H_0^{(2)}(k_0 \|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|) E_z^{(int)}(\vec{r}_i') d\vec{r}_i' + E_z^{inc}(\vec{r}_i) \quad \vec{r}_i \notin \mathcal{D} \quad (1.2.4a)$$

$$E_z^{(int)}(\vec{r}_i) = -\frac{jk_0^2}{4} \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i') H_0^{(2)}(k_0 \|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|) E_z^{(int)}(\vec{r}_i') d\vec{r}_i' + E_z^{inc}(\vec{r}_i) \quad \vec{r}_i \in \mathcal{D} \quad (1.2.4b)$$

Naturalmente para \mathcal{D} valen las mismas consideraciones hechas para Ω .

La solución del problema inverso es complicada por el hecho de que el resulta *mal puesto* [apéndice A].

CAPÍTULO 2

LA APROXIMACIÓN DE BORN

2.1 Características de la Aproximación de Born

Como ya es conocido del capítulo anterior, el campo eléctrico generado desde una fuente dada que irradia en presencia de un obstáculo que ocupa una región de espacio Ω , puede ser determinado resolviendo la ecuación integral

$$\vec{E}(\vec{r}) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}|\vec{r}') d\vec{r}' + \vec{E}^{inc}(\vec{r}) \quad (2.1.1)$$

La aproximación de Born permite expresar el campo eléctrico que aparece bajo el signo de la integral en la ecuación (2.1.1) en términos de la función contraste, o sea, en términos formales

$$\vec{E}(\vec{r}') \approx \mathcal{B}(\chi)(\vec{r}') \quad (2.1.2)$$

Donde \mathcal{B} es el operador que expresa la aproximación de Born, por el momento aun no especificado.

Con esta aproximación el problema directo se vuelve

$$\vec{E}(\vec{r}) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}') \mathcal{B}(\chi)(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}|\vec{r}') d\vec{r}' + \vec{E}^{inc}(\vec{r}) \quad (2.1.3)$$

La (2.1.3) permite determinar inmediatamente el campo eléctrico total $\vec{E}(\vec{r})$: a diferencia de la formulación exacta (2.1.1), la función integrando del segundo miembro es en efecto, completamente conocida.

También para el problema inverso la aproximación de Born permite una notable simplificación. En efecto, si el campo eléctrico interno que aparece bajo el signo de la integral es expresable en términos de la función contraste y del campo incidente, que es conocido, la única incógnita del problema sería la función contraste. De este modo, de las dos ecuaciones (1.2.3)

$$\begin{aligned}\vec{E}^{(ext)}(\vec{r}) &= -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}') \vec{E}^{(int)}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}|\vec{r}') d\vec{r}' + \vec{E}^{inc}(\vec{r}) & \vec{r} \notin \Omega \\ \vec{E}^{(int)}(\vec{r}) &= -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}') \vec{E}^{(int)}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}|\vec{r}') d\vec{r}' + \vec{E}^{inc}(\vec{r}) & \vec{r} \in \Omega\end{aligned}$$

es suficiente la primera, que con la aproximación de Born coincide con la (2.1.3).

Si entonces se adopta la aproximación de Born, la formulación del problema directo es exactamente el mismo que aquel del inverso.

Ahora que son evidenciadas las principales ventajas de la aproximación de Born es necesario explicitar la forma del operador \mathcal{B} .

2.2 Aproximación de Born de primer orden

Se distinguen aproximaciones de Born de diferentes órdenes; por este motivo se le pone al operador χ un superíndice el cual especifica el orden.

La aproximación de Born de primer orden consiste en expresar el campo eléctrico que aparece bajo el signo integral en la (2.1.3) en el modo siguiente

$$\vec{E}(\vec{r}') \approx \chi(\vec{r}') \vec{E}^{inc}(\vec{r}') \quad (2.2.1)$$

Así que, la ecuación (2.1.3) se vuelve

$$\vec{E}(\vec{r}) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}') \vec{E}^{inc}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r} | \vec{r}') d\vec{r}' + \vec{E}^{inc}(\vec{r}) \quad (2.2.2)$$

En el caso de configuración cilíndrica al contrario se tiene

$$E_z(\vec{r}_t) = -k_0^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_t') E_z^{inc}(\vec{r}_t') G(\vec{r}_t | \vec{r}_t') d\vec{r}_t' + E_z^{inc}(\vec{r}_t) \quad (2.2.3)$$

Desde el punto de vista físico, la aproximación de Born de primer orden permite hacer despreciable la '*dispersión múltiple*' entre las varias partes del objeto. La bondad de la aproximación depende de cuanto el obstáculo modifica el campo eléctrico en la región por él ocupada, respecto a la situación de espacio libre. Un obstáculo dotado de tal característica se dice débil '*dispersador*' (weak scatterer). Es intuitivo observar que un obstáculo es un débil '*dispersador*' si su permitividad dieléctrica no se aleja mucho de aquella del background y si sus dimensiones no son grandes respecto a la longitud de onda del campo incidente.

Es fácil introducir los operadores $\bar{B}^{(1)}(\chi)$ y $B^{(1)}(\chi)$, definidos en el modo siguiente

$$\vec{B}^{(1)}(\chi) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}') \vec{E}^{inc}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}|\vec{r}') d\vec{r}' \quad (2.2.4)$$

$$B_z^{(1)}(\chi) = -k_0^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i') E_z^{inc}(\vec{r}_i') G(\vec{r}_i|\vec{r}_i') d\vec{r}_i' \quad (2.2.5)$$

La (2.2.2) y la (2.2.3) se pueden entonces escribir

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}^{inc}(\vec{r}) + \vec{B}^{(1)}(\chi)(\vec{r}) \quad (2.2.6)$$

$$E_z(\vec{r}_i) = E_z^{inc}(\vec{r}_i) + B^{(1)}(\chi)(\vec{r}_i) \quad (2.2.7)$$

Es importante observar que, empleando la aproximación de Born de primer orden, el problema inverso se vuelve lineal.

2.3 Aproximación de Born de orden superior

La aproximación de orden superior se obtiene a partir de aquellos de orden inferior mediante una relación recursiva. Por ejemplo, la aproximación del segundo orden consiste en expresar el campo eléctrico que aparece bajo el signo integral de la (2.1.3) en el modo siguiente

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \vec{E}^{(2)}(\vec{r}) = \chi_2(\chi)(\vec{r}) = \vec{E}^{inc}(\vec{r}) + \vec{B}^{(1)}(\vec{\chi})(\vec{r}) \quad (2.3.1)$$

O bien, mas explícitamente

$$\chi_2(\chi)(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) \approx \vec{E}^{inc}(\vec{r}) - k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}') \vec{E}^{inc}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}|\vec{r}') d\vec{r}' \quad (2.3.2)$$

La aproximación de Born de segundo orden asume por lo tanto que el campo eléctrico 'dispersado' internamente en el obstáculo sea igual al campo 'dispersado' previsto por la aproximación de Born de primer orden.

Consecuentemente, la (1.1.3) se vuelve

$$\vec{E}(\vec{r}) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}') \left[\vec{E}^{mc}(\vec{r}') - k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}'') \vec{E}^{mc}(\vec{r}'') \cdot \vec{G}(\vec{r}' | \vec{r}'') d\vec{r}'' \right] \cdot \vec{G}(\vec{r} | \vec{r}') d\vec{r}' + \vec{E}^{mc}(\vec{r}) \quad (2.3.3)$$

Razonando en modo análogo, se encuentra que para una configuración cilíndrica la ecuación que gobierna el *scattering* es

$$E_z(\vec{r}_i) = -k_0^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}'_i) \left[E_z^{mc}(\vec{r}'_i) - k_0^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}''_i) E_z^{mc}(\vec{r}''_i) G(\vec{r}'_i | \vec{r}''_i) d\vec{r}''_i \right] G(\vec{r}_i | \vec{r}'_i) d\vec{r}'_i + E_z^{mc}(\vec{r}_i) \quad (2.3.4)$$

En analogía como lo hecho en la aproximación de primer orden, introducimos los operadores $\vec{B}^{(2)}(\chi)$ y $B^{(2)}(\chi)$, en el modo siguiente

$$\vec{B}^{(2)}(\chi) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}') \left[\vec{E}^{mc}(\vec{r}') - k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}'') \vec{E}^{mc}(\vec{r}'') \cdot \vec{G}(\vec{r}' | \vec{r}'') d\vec{r}'' \right] \cdot \vec{G}(\vec{r} | \vec{r}') d\vec{r}' \quad (2.3.5)$$

$$B^{(2)}(\chi) = -k_0^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}'_i) \left[E_z^{mc}(\vec{r}'_i) - k_0^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}''_i) E_z^{mc}(\vec{r}''_i) G(\vec{r}'_i | \vec{r}''_i) d\vec{r}''_i \right] G(\vec{r}_i | \vec{r}'_i) d\vec{r}'_i \quad (2.3.6)$$

La (2.3.3) y la (2.3.4) se pueden entonces escribir

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}^{mc}(\vec{r}) + \vec{B}^{(2)}(\chi)(\vec{r}) \quad (2.3.7)$$

$$E_z(\vec{r}_i) = E_z^{mc}(\vec{r}_i) + B^{(2)}(\chi)(\vec{r}_i) \quad (2.3.8)$$

Se observa que resulta

$$\vec{B}^{(2)}(\chi) = \vec{B}^{(1)}(\chi + \vec{B}^{(1)}(\chi)) \quad (2.3.9)$$

y

$$B^{(2)}(\chi) = B^{(1)}(\chi + B^{(1)}(\chi)) \quad (2.3.10)$$

Generalizando las definiciones y los razonamientos desarrollados hasta este momento, la aproximación de Born de orden p permite aproximar el campo eléctrico que aparece bajo el signo integral según la siguiente relación

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \vec{E}^{(p)}(\vec{r}) = \chi_p(\chi)(\vec{r}) = \vec{E}^{inc}(\vec{r}) + \vec{B}^{(p-1)}(\chi)(\vec{r}) \quad (2.3.11)$$

Entonces la ecuación (2.1.3) asume la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}') \left[\vec{E}^{inc}(\vec{r}') + \vec{B}^{(p-1)}(\chi)(\vec{r}') \right] \cdot \vec{G}(\vec{r} | \vec{r}') d\vec{r}' + \vec{E}^{inc}(\vec{r}) \quad (2.3.12)$$

Para la configuración cilíndrica se tiene

$$E_z(\vec{r}_i) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\vec{r}'_i) \left[E_z^{inc}(\vec{r}'_i) + B^{(p-1)}(\chi)(\vec{r}'_i) \right] G(\vec{r}_i | \vec{r}'_i) d\vec{r}'_i + E_z^{inc}(\vec{r}_i) \quad (2.3.13)$$

donde los operadores $\vec{B}^{(p-1)}(\chi)$ y $B^{(p-1)}(\chi)$ representan, respectivamente, el campo 'dispersado' en el caso tridimensional y en el caso bidimensional.

El operador $\vec{B}^{(p)}(\chi)$ resulta expresable mediante la composición de $\vec{B}^{(1)}(\chi)$ consigo misma por p veces, como mostrada en la formula

$$\vec{B}^{(p)}(\chi) = \vec{B}^{(1)}(\chi + \vec{B}^{(1)}(\chi + \vec{B}^{(1)}(\chi \dots \vec{B}^{(1)}(\chi)))) \quad (2.3.14)$$

Vale además la siguiente propiedad

$$\vec{B}^{(p)}(\chi) = \vec{B}^{(1)}(\chi + \vec{B}^{(p-1)}(\chi)) \quad (2.3.15)$$

Es importante notar que, adoptando una aproximación de Born de orden mayor a la primera, el problema inverso vuelve a ser *no lineal*.

CAPÍTULO 3

MÉTODOS 'INEXACT-NEWTON'

3.1 El método Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson es un clásico algoritmo *iterativo* para la búsqueda de *ceros* en funciones. Dada una función $f(x)$, el objetivo del algoritmo es por lo tanto determinar x^* tal que

$$f(x^*) = 0 \quad (3.1.1)$$

En cada iteración se lineariza la función $f(x)$ mediante un desarrollo en serie de Taylor centrado en x_n el cual es truncado en su primer orden y se encuentra el cero de la ecuación linearizada

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \quad (3.1.2)$$

que vale $x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Se pone por eso

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.1.3)$$

Bajo las hipótesis específicas del teorema siguiente, se demuestra [33] que la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0}$ converge a la solución x^* .

Teorema. Sea f una función definida en el intervalo $[a,b]$ y siempre continua, tal que $f(a)f(b) < 0$ y dotada de primera y segunda derivada diferentes de cero y de signo constante en todo (a,b) . Denominado x_0 un punto de (a,b) tal que $f(x_0)f''(x_0) > 0$, entonces la sucesión definida en la (3.1.3) a partir de x_0 , converge al único cero de f en (a,b)

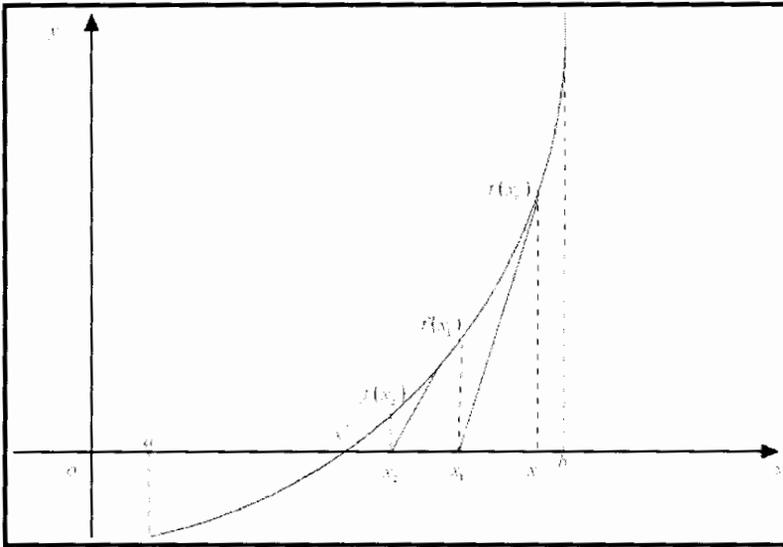


Figura 3.1: Método de Newton-Raphson

3.2 El método Newton-Raphson para ecuaciones funcionales

El método de Newton-Raphson puede ser ampliado también a ecuaciones no lineales en espacios normados, o sea el mismo puede ser empleado para resolver problemas del tipo

$$A(\varphi) = 0 \quad (3.2.1)$$

donde $A: X \rightarrow Y$ es un operador (en general no lineal) entre los dos espacios normados X e Y , $\varphi \in X$ y 0 es el elemento nulo de Y .

En analogía al caso escalar arriba ilustrado, se procede linearizando el operador A a través del cálculo del operador que mejor aproxima al operador A , denominado derivada de Fréchet.

Definición. *Dados los dos espacios vectoriales normados X y Y , se considera un abierto $D \subset X$. Un operador $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$ se denomina Fréchet – diferenciable en $\varphi \in D$ si existe un operador lineal y limitado*

$$\mathcal{A}'_{\varphi}: X \rightarrow Y \quad (3.2.2)$$

tal que

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{A}(\varphi + h) - \mathcal{A}(\varphi) - \mathcal{A}'_{\varphi} h\|}{\|h\|} = 0 \quad (3.2.3)$$

El operador \mathcal{A}'_{φ} se denomina derivada de Fréchet de \mathcal{A} en φ .

Luego, para cada iteración se resuelve la ecuación lineal

$$A\varphi_n + A'_{\varphi_n}(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = 0 \quad (3.2.4)$$

Determinando así $\varphi_{n+1} = \varphi_n - A'_{\varphi_n}^{-1} A\varphi_n$. Bajo oportunas condiciones, especificadas en el teorema siguiente, la sucesión de funciones $\{\varphi_n\}$ converge a la solución exacta del problema (3.2.1).

Un resultado clásico sobre la convergencia del método de Newton es el siguiente [18].

Teorema (Newton - Kantorovich). *Sean X y Y dos espacios de Banach, $D \subset X$ un subconjunto convexo y se suponga que $A: D \subset X \rightarrow Y$ sea continuamente Fréchet – diferenciable en D con una derivada de Fréchet*

A'_{φ_0} invertible para cualquier punto inicial $\varphi_0 \in D$. Sean además verificadas las siguientes condiciones

$$\left\| (A'_{\varphi_0})^{-1} A(\varphi) \right\| \leq \alpha \quad (3.2.5)$$

$$\|A'_\psi - A'_\varphi\| \leq \gamma \|\psi - \varphi\| \quad \varphi, \psi \in D \quad (3.2.6)$$

$$h_0 := \alpha \gamma \left\| (A'_{\varphi_0})^{-1} \right\| < \frac{1}{2} \quad (3.2.7)$$

$$\bar{B}(\varphi_0, \rho_0) \subset D, \quad \rho_0 := \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{\gamma \left\| (A'_{\varphi_0})^{-1} \right\|} \quad (3.2.8)$$

Entonces, introducida la sucesión $\{\varphi_k\}$ de Newton

$$\begin{aligned} A'_{\varphi_k} \Delta \varphi_k &= -A(\varphi_k) \\ \varphi_{k+1} &= \varphi_k + \Delta \varphi_k \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

se verifica que

(i) $(A'_{\varphi_k})^{-1}$ es invertible para cada $k \in \mathbb{N}$.

(ii) La sucesión $\{\varphi_k\}$ es bien definida con $\varphi_k \in \bar{B}(\varphi_0, \rho_0)$ y

$$\lim_{\|k\| \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi^*$$

con $\varphi^* \in \bar{B}(\varphi_0, \rho_0)$ e $A(\varphi^*) = 0$.

(iii) La convergencia a φ^* de la sucesión $\{\varphi_k\}$ es cuadrática.

(iv) La solución φ^* de $A(\varphi) = 0$ es única en

$$\bar{B}(\varphi_0, \rho_0) \cup (D \cap \bar{B}(\varphi_0, \bar{\rho}_0)), \quad \bar{\rho}_0 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h_0}}{\gamma \left\| (A'_{\varphi_0})^{-1} \right\|}$$

3.3 Métodos del tipo “Inexact-Newton”

Es conocido del apéndice A que, bajo oportunas hipótesis, la linearización de una ecuación mal puesta es todavía mal puesta. En consecuencia, no es posible resolver un problema mal puesto con el método de Newton, que *no* es un método de regularización.

Para obviar este problema es posible emplear un método de la clase ‘Inexact-Newton’, el cual está en grado de encontrar soluciones *regularizadas* de una dada ecuación.

Los métodos del tipo ‘Inexact-Newton’ difieren del método de Newton anteriormente expuesto por el hecho de que a cada iteración la ecuación linearizada *no* es resuelta de manera exacta, como lo sugiere el término ‘inexact’, por lo cual es solamente *aproximada*.

Para resolver la ecuación linearizada en modo ‘inexacto’ es posible emplear diferentes algoritmos de regularización, entre los cuales los más conocidos son el Tikhonov y los métodos basados sobre la descomposición en valores singulares (SVD).

Por ejemplo, el basado en el método de Tikhonov es el algoritmo de *Levenberg-Marquardt* que consiste en la sucesión

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - [A'_{\varphi_n} A'_{\varphi_n} + \alpha_n I]^{-1} A'_{\varphi_n} A \varphi_n \quad (3.3.1)$$

siendo α_n el parámetro de regularización a la iteración n -ésima e I el operador identidad.

Otro método del tipo Inexact-Newton es el método de *Landweber para operadores no lineales*, en el cual

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - A'_{\varphi_n} A \varphi_n \quad (3.3.2)$$

En esta tesis se hará uso de una *generalización* del método de *Landweber* que permite resolver la ecuación linealizada $A\varphi_n + A'_{\varphi_n}(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = 0$ con el método de *Landweber para operadores lineales* con un número *finito* de pasos.

El algoritmo de Landweber¹ es un método iterativo que converge, cuando el número de iteraciones tiende al infinito, a la solución exacta de una ecuación lineal. Si el número de iteración es *finito*, el método encuentra una solución aproximada y *regularizada* de la ecuación.

El método de Landweber es particularmente apropiado para sistemas lineales con un elevado número de ecuaciones y nos brinda también óptimos resultados en términos de filtraje del ruido.

El algoritmo de tipo Inexact-Newton para la solución de la ecuación no lineal (3.2.1) se puede resumir en la siguiente secuencia de pasos

1. $n \leftarrow 0$;
2. Se escoge un valor inicial φ_n ;
3. Se calcula la derivada de Fréchet A'_{φ_n} del operador A en φ_n ;
4. Se aproxima la solución de la ecuación lineal $A\varphi_n + A'_{\varphi_n}(h) = 0$, por medio de un número finito de pasos del método de Landweber en la incógnita h ;
5. $\varphi_{n+1} \leftarrow \varphi_n + h$;
6. $n \leftarrow n + 1$;
7. Si la *condición de parada* es verificada se termina el algoritmo, de otro modo se retorna al paso 3.

¹ De aquí en adelante, si no se especifica lo contrario, cuando se trate del método de Landweber, se lo hará con aquel *generalizado* para operadores lineales.

La condición de parada (*stopping rule*) es un criterio, necesario para cualquier algoritmo iterativo, el cual establece cuando interrumpir al algoritmo una vez que se ha logrado un resultado satisfactorio. Aunque existan posibles elecciones más sofisticadas, en esta tesis el algoritmo se interrumpirá cuando se logra un número de iteraciones prefijado n_{\max} o cuando, fijado un número τ , se tiene

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| < \tau \quad (3.3.3)$$

Puesto que se había explicado anteriormente de que Landweber es un método iterativo, el algoritmo del tipo Inexact-Newton propuesto es compuesto de dos ciclos: un ciclo *externo*, a cada iteración del cual se lineariza el operador A , y un ciclo *interno*, mediante el cual se determina una solución regularizada de la ecuación linearizada.

3.4 El método Landweber

El método de Landweber fue introducido en 1951 [19] para resolver ecuaciones con integrales. El mismo resuelve *iterativamente* una ecuación lineal del tipo

$$\mathcal{L}x = y \quad (3.4.1)$$

donde $\mathcal{L} : X \rightarrow Y$ es un operador lineal compacto entre dos espacios de Hilbert X y Y , individuándoles la *pseudo-solución* x^\mp , que, como es dado, si $y \in R(\mathcal{L}) \oplus R(\mathcal{L})^\perp$, satisface la así llamada *forma normal* de la (3.4.1)

$$\mathcal{L}^* \mathcal{L} x = \mathcal{L}^* y \quad (3.4.2)$$

Al método de Landweber se le puede sacar provecho transformando la (3.4.2) en un problema de búsqueda de *punto fijo* de un oportuno operador. Es inmediato entonces reconocer que el problema

$$x = T(x) = x + \beta \mathcal{L}^*(y - \mathcal{L}x) \quad (3.4.3)$$

con $\beta \in \mathbb{R}$, es equivalente al problema expresado de la (3.4.2).

Aplicando la clásica iteración para la búsqueda del punto fijo de la (3.4.3), escogiendo $x_0 \in X$ arbitrariamente, se construye la sucesión

$$x_{k+1} = T(x_k) = x_k + \beta \mathcal{L}^*(y - \mathcal{L}x_k) \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.4.4)$$

Es de fundamental importancia establecer si y bajo que hipótesis la sucesión (3.4.4) converge a la pseudo-solución x^\mp . A tal fin, se recuerda que, dado el sistema singular $\{\mu_n; \varphi_n; \nu_n\}$ del operador compacto \mathcal{L} , la pseudo-solución, en el caso de que exista, es expresable como una combinación lineal de los autovalores $\{\varphi_n\}$ del operador $\mathcal{L}^* \mathcal{L}$

$$x^\mp = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (y, \nu_n) \varphi_n \quad (3.4.5)$$

La (B.9) del apéndice nos brinda

$$\mathcal{L} \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (\varphi, \varphi_n) \nu_n$$

$\forall \varphi \in X$ y por consiguiente

$$\mathcal{L}^* \mathcal{L} x_k = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (x_k, \varphi_n) \mathcal{L}^* \nu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 (x_k, \varphi_n) \varphi_n \quad (3.4.6)$$

Además, ya que los $\{\nu_n\}$ son una base para $N(A^*)^\perp$, se puede escribir

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(y, v_n) v_n \quad (3.4.7)$$

Y por consiguiente

$$\mathcal{J}^* y = \sum_{n=1}^{\infty} (y, v_n) \mathcal{J}^* v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(y, v_n) \varphi_n \quad (3.4.8)$$

Sustituyendo la (3.4.6) y la (3.4.8) en la (3.4.4), se obtiene

$$x_{k+1} = x_k + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2(x_k, \varphi_n) \varphi_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(y, v_n) \varphi_n \quad (3.4.9)$$

Multiplicando escalarmente para $\varphi_j, j = 1, 2, \dots$, la (3.4.9), se obtiene, siendo

$$(\varphi_n, \varphi_j) = \delta_{n,j},$$

$$(x_{k+1}, \varphi_j) = (x_k, \varphi_j) (1 - \beta \mu_j^2) + \beta \mu_j (y, v_j) \quad (3.4.10)$$

Observando que, para $j = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} (x_1, \varphi_j) &= (x_0, \varphi_j) (1 - \beta \mu_j^2) + \beta \mu_j (y, v_j) \\ (x_2, \varphi_j) &= (x_1, \varphi_j) (1 - \beta \mu_j^2) + \beta \mu_j (y, v_j) = \\ &= (x_0, \varphi_j) (1 - \beta \mu_j^2)^2 + \beta \mu_j (y, v_j) (1 - \beta \mu_j^2) + \beta \mu_j (y, v_j) \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

$$\begin{aligned} (x_k, \varphi_j) &= (x_0, \varphi_j) (1 - \beta \mu_j^2)^k + \beta \mu_j (y, v_j) \frac{1 - (1 - \beta \mu_j^2)^k}{1 - (1 - \beta \mu_j^2)} = \\ &= (x_0, \varphi_j) (1 - \beta \mu_j^2)^k + \frac{1}{\mu_j} (y, v_j) [1 - (1 - \beta \mu_j^2)^k] \end{aligned}$$

Con el fin de que la sucesión (x_k, φ_j) sea *no divergente*, debe ser

$$|1 - \beta\mu_j^2| < 1 \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.4.12)$$

O sea

$$-1 < 1 - \beta\mu_j^2 < 1 \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.4.13)$$

De la (3.4.13) sigue inmediatamente, para los j tales que $\mu_j^2 \neq 0$

$$0 < \beta < \frac{2}{\mu_j^2} \quad (3.4.14)$$

y por lo cual debe ser

$$0 < \beta < \frac{2}{\sup_j \{\mu_j^2\}} \quad (3.4.15)$$

Para los valores de j en correspondencia de los cuales $\mu_j^2 = 0$, con el fin de garantizar la convergencia es suficiente escoger x_0 de modo que para tales valores resulte

$$(x_0, \varphi_j) = 0 \quad (3.4.16)$$

Ya que la elección de $x_0 = 0$ garantiza el cumplimiento de estas condiciones y simplifica el método, será siempre adoptada. Se observa después que $\sup_j \{\mu_j^2\} = \|\mathcal{A}\|_s^2$, siendo $\|\cdot\|_s$ la *norma espectral*.

Entonces, si $0 < \beta < \frac{2}{\|\mathcal{A}\|_s^2}$ y $x_0 = 0$, se tiene

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} (x_k, \varphi_j) = \frac{1}{\mu_j} (y, v_j) \quad (3.4.17)$$

Confrontando este resultado con la (3.4.5), se concluye entonces que, bajo las hipótesis vistas, el método de Landweber converge a la pseudo-solución de la ecuación (3.4.1).

Es útil considerar el caso en el cual el número de iteraciones \tilde{k} sea *finito*. A tal fin se considera (3.4.11), asumiendo para la simplicidad que sea $x_0 = 0$.

Se tiene

$$(x_{\tilde{k}}, \varphi_j) = \frac{1}{\mu_j} (y, v_j) \left[1 - (1 - \beta \mu_j^2)^{\tilde{k}} \right] \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.4.18)$$

Se considera el efecto de tal truncamiento sobre los términos para los cuales μ_j^2 es ‘cercano’ a cero, responsables de la mal posición del problema. Para μ_j^2 ‘pequeño’ se puede escribir

$$(1 - \beta \mu_j^2)^{\tilde{k}} \approx (1 - \tilde{k} \beta \mu_j^2) \quad (3.4.19)$$

y por consiguiente

$$(x_{\tilde{k}}, \varphi_j) \approx \tilde{k} \beta \mu_j (y, v_j) \quad (3.4.20)$$

La (3.4.20) nos dice que, empleando solamente un número finito de pasos, el peso de las componentes de la solución a lo largo de los autovectores con μ_j ‘pequeño’ no viene amplificado.

Por este motivo el algoritmo de Landweber truncado a la iteración \tilde{k} -ésima es un algoritmo de regularización. Además la cantidad $\alpha = \frac{1}{\tilde{k}}$ juega el rol de *parámetro de regularización*. En efecto si $\tilde{k} \rightarrow \infty$ ($\alpha \rightarrow 0$), no se tiene atenuación de las componentes a lo largo de los autovectores asociados a los valores singulares más pequeños; viceversa, si \tilde{k} es bajo se tiene una solución regularizada, pero más distante de la pseudo-solución exacta.

A la luz de las observaciones hechas, es posible interpretar el algoritmo de Landweber truncado (al igual que otros algoritmos de regularización) como

un *filtro* en el espacio de los autovectores $\{\varphi_n\}$, que atenúa las componentes a lo largo de los autovectores correspondientes a valores singulares 'pequeños'.

Observando que la solución a la iteración $(k+1)$ del método se puede escribir como un polinomio en el modo siguiente

$$x_k = \beta \sum_{n=1}^{\infty} (I - \beta \mathcal{L}^* \mathcal{L})^i \mathcal{L}^* y + (I - \beta \mathcal{L}^* \mathcal{L})^{k+1} x_0 \quad (3.4.21)$$

se deduce que el algoritmo de Landweber pertenece a la clase de los *métodos de Krylov*. En efecto si se escoge para simplicidad $x_0 = 0$, x_k es expresable mediante un polinomio de grado k respecto a $\mathcal{L}^* \mathcal{L}$, o bien

$$x_k = \mathcal{V}_k y \quad (3.4.22)$$

con $\mathcal{V}_k = \beta \sum_{n=1}^{\infty} (I - \beta \mathcal{L}^* \mathcal{L})^i \mathcal{L}^*$. La (3.4.22) permite además de concluir que el método de Landweber es un *método lineal de regularización*.

El método de Landweber puede ser visto también como un método para individuar el punto mínimo del operador convexo

$$H(x) = \frac{1}{2} \|\mathcal{L} x - y\|_2^2 \quad (3.4.23)$$

considerando que $\mathcal{L}^* y - \mathcal{L}^* \mathcal{L} x_k = -\nabla H(x_k)$, siendo $\|\cdot\|_2$ la norma euclidiana.

Es interesante hacer notar que, sobre la base de la (4.4.21), la sucesión que define al método Inexact-Newton con $(k+1)$ iteraciones internas, puede escribirse en la forma

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \beta \sum_{i=1}^k \left(I - \beta A_{\varphi_n}^* A_{\varphi_n} \right)^i A_{\varphi_n}^* A(\varphi_n) \quad (3.4.24)$$

Teniendo seleccionado el elemento nulo como primer término de la sucesión de Landweber.

La sucesión (3.4.24) define el método de Landweber generalizado que será estudiado en esta tesis.

El mismo goza de las siguientes propiedades [12]

- En ausencia de ruido, para $n \rightarrow \infty$, la sucesión (3.4.24) converge a la solución exacta (*convergencia*);
- En presencia de ruido de entidad inferior a δ , hasta a la iteración externa $n(\delta)$ -ésima, la sucesión (3.4.24) se 'acerca' a la solución exacta (*semiconvergencia*);
- El método de Landweber generalizado es un método de regularización.

Es particularmente interesante el resultado relativo a la *semiconvergencia*: él mismo afirma que en presencia de ruido es posible que la sucesión inicialmente tienda a acercarse a la solución exacta, para después divergir. Este fenómeno es fundamental para definir una *stopping rule* eficaz para el método.

La ventaja del método (3.4.24) respecto al método de Landweber para operadores no lineales consiste en el hecho de que el mismo converge más rápidamente (en términos de iteraciones *externas*). Esta propiedad tiene una importancia práctica notable, puesto que frecuentemente el cálculo de la derivada de Fréchet de un operador es una operación tediosa, se tiene sin embargo que el método de Landweber puede ser aplicado en modo eficiente.

El número de iteraciones internas depende del nivel del ruido y del grado de no linealidad del operador A^2 . En particular se demuestra que k debe disminuir al aumentar del nivel de no linealidad y de la entidad de ruido. Esta afirmación es del todo razonable si se piensa que k juega el rol de parámetro de regularización en el método de Landweber para operadores lineales.

Observación

Para utilizar el método de Landweber es requerido conocer el máximo valor singular de \mathcal{L} , con el fin de determinar el intervalo de valores que el parámetro β puede asumir a fin de que sea garantizada la convergencia.

El uso del método dentro de un programa de cálculo requiere obviamente la discretización de la (3.4.1), así que el operador \mathcal{L} resulta representado de una matriz L , y x y y de dos valores x y y .

Para conocer el máximo valor singular $\mu_{\max} = \max_n \{\mu_n\}$ de la matriz L es necesario determinar el autovalor máximo $\lambda_{\max} = \max_n \{\lambda_n\}$ de la matriz L^*L , ya que

$$\mu_n = \sqrt{\lambda_n} \quad (3.4.26)$$

Para aplicar con éxito el método de Landweber tiene crucial importancia la capacidad de calcular de manera más eficiente el posible autovalor máximo de una matriz.

² El grado de no linealidad de un operador A en D es ligado a la distancia entre A y su linealización. El nivel de no linealidad puede ser medido evaluando la cantidad $\eta > 0$ tal que

$$\|A(\varphi_2) - A(\varphi_1) - A'_{\varphi}(\varphi_2 - \varphi_1)\| \leq \eta \|A(\varphi_2) - A(\varphi_1)\| \quad (3.4.25)$$

$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D$. Si η es 'pequeño', A se dice 'débilmente' no lineal, 'fuertemente' no lineal de otro modo.

3.4.1 Método de las potencias para el cálculo del autovalor máximo de una matriz

El cálculo de los autovalores $\{\lambda_i\}$ de una matriz A , $n \times n$, es generalmente un problema complejo. Si, no obstante se desea conocer solamente el autovalor de modulo máximo (o mínimo), se tendrá a un problema notablemente simplificado.

El *método de las potencias*, ilustrado en el siguiente teorema, es un método iterativo para el cálculo del modulo del autovalor máximo de una matriz.

Teorema (Método de las potencias). *Sea A una matriz $n \times n$ dotada de un sistema completo de autovectores x_1, x_2, \dots, x_n . Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ los correspondientes autovalores y sean r los autovalores de modulo máximo $|\lambda|$, o sea se tenga*

$$|\lambda| = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad (3.4.27)$$

Bajo tales hipótesis, escogido un cualquier vector $z_0 \in \mathfrak{R}^n$ que tenga componente no nula en el auto espacio de $\lambda_i, i \in \{1, 2, \dots, r\}$, la sucesión $\{I_k\}$, definida en el modo siguiente

$$z_k = Az_{k-1}$$

$$I_k = \frac{z_k^T A z_k}{z_k^T z_k} \quad (3.4.28)$$

para $k \rightarrow \infty$, converge a $|\lambda|$.

Demostración. Ya que, por hipótesis, los autovectores x_1, x_2, \dots, x_n constituyen un conjunto completo, el vector z_0 puede ser expresado como una combinación lineal por medio de los coeficientes $\{\alpha_i\}$, o sea

$$z_0 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r + \alpha_{r+1} x_{r+1} + \dots + \alpha_n x_n \quad (3.4.29)$$

La hipótesis que z_0 tenga una componente no nula en el auto espacio de $\lambda_i, i \in \{1, 2, \dots, r\}$, implica que sea

$$v = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r \neq 0 \quad (3.4.30)$$

Observando que, para $k = 1, 2, \dots$, resulta

$$z_k = Az_{k-1} = A^2 z_{k-2} = \dots = A^k z_0 \quad (3.4.31)$$

usando la (3.4.29) y la (3.4.30), se obtiene

$$\begin{aligned} z_k &= A^k (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r + \alpha_{r+1} x_{r+1} + \dots + \alpha_n x_n) = \\ &= A^k (v + \alpha_{r+1} x_{r+1} + \dots + \alpha_n x_n) \end{aligned} \quad (3.4.32)$$

y, por la propiedad distributiva del producto entre matrices y vectores, se tiene

$$z_k = A^k v + \alpha_{r+1} A^k x_{r+1} + \dots + \alpha_n A^k x_n \quad (3.4.33)$$

Ya que después $Ax_j = \lambda_j x_j \Rightarrow A^k x_j = \lambda_j^k x_j \quad j = 1, 2, \dots, n$, sigue que

$$z_k = A^k v + \alpha_{r+1} \lambda_{r+1}^k x_{r+1} + \dots + \alpha_n \lambda_n^k x_n \quad (3.4.34)$$

y

$$\begin{aligned} A^k v &= \alpha_1 A^k x_1 + \dots + \alpha_r A^k x_r = \\ &= \alpha_1 \lambda_1^k x_1 + \dots + \alpha_r \lambda_r^k x_r = \\ &= |\lambda|^k \left[\alpha_1 \left(\frac{\lambda_1}{|\lambda|} \right)^k x_1 + \dots + \alpha_r \left(\frac{\lambda_r}{|\lambda|} \right)^k x_r \right] \end{aligned} \quad (3.4.35)$$

o sea, puesto

$$w = \alpha_1 \left(\frac{\lambda_1}{|\lambda|} \right)^k x_1 + \dots + \alpha_r \left(\frac{\lambda_r}{|\lambda|} \right)^k x_r \quad (3.4.36)$$

Se tiene

$$A^k v = |\lambda|^k w \quad (3.4.37)$$

se observa que

$$v \neq 0 \Rightarrow w \neq 0 \quad (3.4.38)$$

Metiendo junto los valores obtenidos, se obtiene

$$z_k = |\lambda|^k \left(w + \alpha_{r+1} \left(\frac{\lambda_{r+1}}{|\lambda|} \right)^k x_{r+1} + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{|\lambda|} \right)^k x_n \right) \quad (3.4.39)$$

Multiplicando a la izquierda de la (3.4.39) para z_k^T , se obtiene

$$z_k^T z_k = |\lambda|^{2k} \left(z_k^T w + \alpha_{r+1} \left(\frac{\lambda_{r+1}}{|\lambda|} \right)^k z_k^T x_{r+1} + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{|\lambda|} \right)^k z_k^T x_n \right) \quad (3.4.40)$$

Además, observando que

$$Az_k = z_{k+1} \quad (3.4.41)$$

por la (3.4.39), se saca provecho que

$$Az_k = z_{k+1} = |\lambda|^{k+1} \left(w + \alpha_{r+1} \left(\frac{\lambda_{r+1}}{|\lambda|} \right)^{k+1} x_{r+1} + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{|\lambda|} \right)^{k+1} x_n \right) \quad (3.4.42)$$

y, multiplicando a la izquierda de la (3.4.42) por z_k^T , se obtiene

$$z_k^T Az_k = |\lambda|^{2k+1} \left(z_k^T w + \alpha_{r+1} \left(\frac{\lambda_{r+1}}{|\lambda|} \right)^{k+1} z_k^T x_{r+1} + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{|\lambda|} \right)^{k+1} z_k^T x_n \right) \quad (3.4.43)$$

La sucesión

$$l_k = \frac{z_k^T A z_k}{z_k^T z_k} = |\lambda| \frac{z_k^T w + \alpha_{r+1} \left(\frac{\lambda_{r+1}}{|\lambda|} \right)^{k+1} z_k^T x_{r+1} + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{|\lambda|} \right)^{k+1} z_k^T x_n}{z_k^T w + \alpha_{r+1} \left(\frac{\lambda_{r+1}}{|\lambda|} \right)^k z_k^T x_{r+1} + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{|\lambda|} \right)^k z_k^T x_n} \quad (3.4.44)$$

siendo $\left| \frac{\lambda_{r+1}}{|\lambda|} \right| < 1$, converge, cuando $k \rightarrow \infty$, a $|\lambda|$. La velocidad de la

convergencia depende de la rapidez de las $\left(\frac{\lambda_{r+1}}{|\lambda|} \right)^k$ con las cuales tiende a cero para $k \rightarrow \infty$.

Si acaso, como en el caso en examen, la matriz A sea *hermetiana*, o sea se tenga $A^* = A$, el método de las potencias converge más rápidamente en comparación a una matriz genérica.

Se observa antes que nada que, del algebra lineal, se sabe que los autovalores de una matriz hermetiana son todos reales y sus autovectores son ortogonales y constituyen por lo tanto siempre un conjunto completo. Escogiendo por lo tanto una base completa de autovectores ortogonales, resulta

$$\begin{aligned} z_k^T z_k &= |\lambda|^{2k} \left(w^T + \sum_{j=r+1}^n \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{|\lambda|} \right)^k x_j^T \right) \left(w + \sum_{j=r+1}^n \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{|\lambda|} \right)^k x_j \right) = \\ &= |\lambda|^{2k} \left(w^T w + \sum_{j=r+1}^n \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{|\lambda|} \right)^{2k} x_j^T x_j \right) \end{aligned} \quad (3.4.45)$$

y

$$z_k^T A z_k = z_k^T z_{k+1} = \lambda^{2k+1} \left(w^T + \sum_{j=r+1}^n \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{|\lambda|} \right)^k x_j^T \right) \left(w + \sum_{j=r+1}^n \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{|\lambda|} \right)^{k+1} x_j \right) =$$

$$= |\lambda|^{2k+1} \left(\mathbf{w}^T \mathbf{w} + \sum_{j=r+1}^n \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{|\lambda|} \right)^{2k+1} \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_j \right) \quad (3.4.46)$$

De consecuencia, la rapidez de convergencia, para $k \rightarrow \infty$, de la sucesión

$$l_k = \frac{\mathbf{z}_k^T \mathbf{A} \mathbf{z}_k}{\mathbf{z}_k^T \mathbf{z}_k} = |\lambda| \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{w} + \alpha_{r+1} \left(\frac{\lambda_{r+1}}{|\lambda|} \right)^{2k+1} \mathbf{x}_{r+1}^T \mathbf{x}_{r+1} + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{|\lambda|} \right)^{2k+1} \mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n}{\mathbf{w}^T \mathbf{w} + \alpha_{r+1} \left(\frac{\lambda_{r+1}}{|\lambda|} \right)^{2k} \mathbf{x}_{r+1}^T \mathbf{x}_{r+1} + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{|\lambda|} \right)^{2k} \mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n} \quad (3.4.47)$$

es gobernada por el término $\left(\frac{\lambda_{r+1}}{|\lambda|} \right)^{2k}$, en lugar del término $\left(\frac{\lambda_{r+1}}{|\lambda|} \right)^k$.

Un punto de fuerza del método de las potencias es seguramente la *simplicidad*: el mismo requiere en efecto solamente productos matriz vector y, siendo recursivo, puede ser utilizado en modo eficiente dentro de un programa de cálculo.

Esto se le suma entonces al método de Landweber el cual requiere la determinación del máximo modulo de los autovalores de una matriz hermetiana, así que la rapidez de convergencia del algoritmo resulta notablemente elevada.

El teorema requiere sin embargo que el vector de partida z_0 tenga una componente no nula sobre el auto espacio del autovalor λ_1 , cosa que no puede ser garantizada en modo simple. Este problema pierde, sin embargo importancia por el hecho de que los inevitables errores de truncamiento de

las computadoras llevan, en el curso de las iteraciones, de todas maneras al algoritmo a converger a $|\lambda|$.

Con el fin de evaluar la bondad y la rapidez de convergencia del método para la estima del autovalor máximo, han sido ejecutados algunos ejemplos numéricos, reportados en seguida.

En todos los casos se ha escogido $z_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n e_i$, donde e_i es el i -ésimo elemento de la base canónica de \mathfrak{R}^n .

Se considera la matriz hermetiana de elementos complejos

$$A = \begin{pmatrix} 2.6575 & 1.3514 + 1.0719i & 2.8018 + 0.3276i & 1.4661 + 0.7490i \\ 1.3514 - 1.0719i & 2.1457 & 2.2245 - 1.2796i & 1.7986 - 0.6747i \\ 2.8018 - 0.3276i & 2.2245 + 1.2796i & 3.9123 & 2.3531 + 0.1610i \\ 1.4661 - 0.7490i & 1.7986 + 0.6747i & 2.3531 - 0.1610i & 2.1897 \end{pmatrix} \quad (3.4.48)$$

Los autovalores de tales matrices encontrados por el algoritmo utilizado en Matlab, son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 9.4579851482303 \\ \lambda_2 &= 1.0656479261945 \\ \lambda_3 &= 0.0066703835680 \\ \lambda_4 &= 0.3748389856856 \end{aligned} \quad (3.4.49)$$

La tabla siguiente muestra la estima brindada por el método de las potencias al variar del número de iteraciones efectuadas

#iter	λ_{iter}
1	9.4564247590890
2	9.4579712259072
3	9.4579849807410
4	9.4579851461186
5	9.4579851482035
6	9.4579851482300
7	9.4579851482303
8	9.4579851482303
9	9.4579851482303
10	9.4579851482303

Tabla I. Estima brindada por el método de las potencias al variar el número de iteraciones efectuadas

Como se puede observar, la aproximación es óptima ya después de pocas iteraciones: a la séptima iteración, el error absoluto es inferior a 10^{-14} .

Han sido efectuadas numerosas otras pruebas, en particular con matrices de grandes dimensiones. Por ejemplo, se ha aplicado el método a una matriz 500×500 con autovalor de modulo máximo $\lambda_1 = 1.252718488074431 \cdot 10^5$; la estima brindada por el método de las potencias después de 10 iteraciones es $\lambda_{10} = 1.252718488074431 \cdot 10^5 - j5.459646538661149 \cdot 10^{-14}$ en óptimo acuerdo con el resultado 'correcto'.

Además se ha probado a aplicar el método a una matriz hermetiana con más autovalores de modulo máximo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.7 \end{pmatrix} \quad (3.4.50)$$

En los cuales los autovalores son, obviamente

$$\lambda_1 = 3.5$$

$$\lambda_2 = 3.5$$

$$\lambda_3 = -3.5$$

$$\lambda_4 = -2.7$$

$$\lambda_5 = 1 \quad (3.4.49)$$

Los autovalores de orden máximo son tres. Después de 10 iteraciones, el método de las potencias ha dado como resultado

$$I_{10} = 3.49868643193286$$

Si bien levemente peor de los otros casos, para nuestros fines el resultado es del todo satisfactorio. Por este motivo en el código de cálculo se ha escogido para la aplicación del método Inexact-Newton con la aproximación de Born 5 iteraciones y para la aplicación del método Inexact-Newton con la formulación exacta 30 iteraciones. Las cuales serán revisadas a continuación.

3.5 Aplicación del método 'Inexact-Newton' al problema de Scattering Inverso cilíndrico con la Aproximación de Born

Como es de conocimiento del capítulo precedente, empleando la aproximación de Born de orden p , el problema de la *dispersión* puede ser expresado en forma compacta mediante la siguiente ecuación

$$B^{(p)}(\chi, E_z^{inc}) = E_z^{scatt} \quad (3.5.1)$$

donde el operador $B^{(p)}$ puede ser escrito, para $p \geq 2$

$$B^{(p)}(\chi, E_z^{inc})(\vec{r}_i) = B^{(1)}(\chi, E_z^{inc})(\vec{r}_i) - k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i') B^{(p-1)}(\chi, E_z^{inc})(\vec{r}_i') G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') d\vec{r}_i' \quad (3.5.2)$$

Para poder aplicar el método 'Inexact Newton' es necesario disponer de la derivada de Fréchet del operador $B^{(p)}$ respecto a la función χ .

Para $p = 1$, por la linealidad de $B^{(1)}(\chi, E_z^{inc})$ respecto a χ , se tiene

$$B^{(1)}(\chi + h, E_z^{inc})(\vec{r}_i) - B^{(1)}(\chi, E_z^{inc})(\vec{r}_i) = B^{(1)}(h, E_z^{inc})(\vec{r}_i) \quad (3.5.3)$$

y por lo tanto

$$B_{\chi}^{(1)}(h, E_z^{inc})(\vec{r}_i) = B^{(1)}(h, E_z^{inc})(\vec{r}_i) = -k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}_i') E_z^{inc}(\vec{r}_i') G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') d\vec{r}_i' \quad (3.5.4)$$

Para $p \geq 2$ al contrario se tiene

$$B^{(p)}(\chi + h, E_z^{inc})(\vec{r}_i) = B^{(1)}(\chi + h, E_z^{inc})(\vec{r}_i) - k_b^2 \int_{\mathcal{D}} (\chi + h)(\vec{r}_i') B^{(p-1)}(\chi + h, E_z^{inc})(\vec{r}_i') G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') d\vec{r}_i' \quad (3.5.5)$$

Ya que

$$-k_b^2 \int_{\mathcal{D}} (\chi + h)(\vec{r}_i') B^{(p-1)}(\chi + h, E_z^{inc})(\vec{r}_i') G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') d\vec{r}_i' =$$

$$\begin{aligned}
&= -k_b^2 \int_{\mathcal{D}} (\chi + h)(\vec{r}_i') \left[B^{(p-1)}(\chi, E_z^{inc})(\vec{r}_i') + B_\chi^{(p-1)}(h)(\vec{r}_i') + O(\|h\|^2) \right] G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') d\vec{r}_i' = \\
&= -k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i') \left[B^{(p-1)}(\chi, E_z^{inc})(\vec{r}_i') + B_\chi^{(p-1)}(h, E_z^{inc})(\vec{r}_i') \right] G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') d\vec{r}_i' + \\
&- k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}_i') \left[B^{(p-1)}(\chi, E_z^{inc})(\vec{r}_i') + B_\chi^{(p-1)}(h, E_z^{inc})(\vec{r}_i') \right] G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') d\vec{r}_i' + O(\|h\|^2) = \\
&= -k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i') \left[B^{(p-1)}(\chi, E_z^{inc})(\vec{r}_i') + B_\chi^{(p-1)}(h, E_z^{inc})(\vec{r}_i') \right] G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') d\vec{r}_i' + \\
&- k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}_i') B^{(p-1)}(\chi, E_z^{inc})(\vec{r}_i') G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') d\vec{r}_i' + O(\|h\|^2) \tag{3.5.6}
\end{aligned}$$

sigue que

$$\begin{aligned}
&B^{(p)}(\chi + h, E_z^{inc})(\vec{r}_i) = B^{(1)}(\chi, E_z^{inc})(\vec{r}_i) + B^{(1)}(h, E_z^{inc})(\vec{r}_i) + \\
&- k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i') \left[B^{(p-1)}(\chi, E_z^{inc})(\vec{r}_i') + B_\chi^{(p-1)}(h, E_z^{inc})(\vec{r}_i') \right] G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') d\vec{r}_i' + \\
&- k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}_i') B^{(p-1)}(\chi, E_z^{inc})(\vec{r}_i') G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') d\vec{r}_i' + O(\|h\|^2) \tag{3.5.9}
\end{aligned}$$

y, por la (3.5.2),

$$\begin{aligned}
&B^{(p)}(\chi + h, E_z^{inc})(\vec{r}_i) = B^{(1)}(h, E_z^{inc})(\vec{r}_i) + B^{(p)}(\chi, E_z^{inc})(\vec{r}_i) + \\
&- k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i') B_\chi^{(p-1)}(h, E_z^{inc})(\vec{r}_i') G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') d\vec{r}_i' + \\
&- k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}_i') B^{(p-1)}(\chi, E_z^{inc})(\vec{r}_i') G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') d\vec{r}_i' + O(\|h\|^2) \tag{3.5.8}
\end{aligned}$$

Se concluye por lo tanto

$$\begin{aligned}
&B_\chi^{(p-1)}(h, E_z^{inc})(\vec{r}_i) = B^{(1)}(h, E_z^{inc})(\vec{r}_i) - k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i') B_\chi^{(p-1)}(h, E_z^{inc})(\vec{r}_i') G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') d\vec{r}_i' + \\
&- k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}_i') B^{(p-1)}(\chi, E_z^{inc})(\vec{r}_i') G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') d\vec{r}_i' \tag{3.5.9}
\end{aligned}$$

En la iteración j -ésima del método, se requiere por lo tanto resolver la ecuación *mal puesta*

$$B_{\chi_j}^{(p)}(h, E_z^{inc}) = E_z^{scat} - B^{(p)}(\chi_j, E_z^{inc}) \quad (3.5.10)$$

mediante el método de Landweber, donde la incógnita es la función h .

3.5.1 Formulación multivista

En la práctica, con el fin de disponer de una mayor información, se ilumina al objeto con más fuentes y se calcula después la solución teniendo en cuenta todos los datos obtenidos contemporánea-mente.

Suponga ahora de iluminar la región \mathcal{D} con S diversas fuentes y sea $E_z^{(s)}$ el campo eléctrico al exterior del objeto producido por la fuente s -ésima. Denominado $E_z^{i,(s)}$ el campo eléctrico incidente debido a la fuente s -ésima, empleando una aproximación de Born de orden p , subsisten obviamente las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} B^{(p)}(\chi, E_z^{i,1}) &= E_z^{(1)} - E_z^{i,1} \\ B^{(p)}(\chi, E_z^{i,2}) &= E_z^{(2)} - E_z^{i,2} \\ &\dots \\ B^{(p)}(\chi, E_z^{i,S}) &= E_z^{(S)} - E_z^{i,S} \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

que constituyen un sistema de ecuaciones con integrales 'sobredeterminado' en la *única* incógnita χ . El sistema (3.5.11) puede ser puesto en forma compacta mediante la siguiente escritura

$$B^{(p)} \begin{pmatrix} \chi \\ E_z^{i,1} \\ E_z^{i,2} \\ \vdots \\ E_z^{i,S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_z^{(1)} - E_z^{i,1} \\ E_z^{(2)} - E_z^{i,2} \\ \vdots \\ E_z^{(S)} - E_z^{i,S} \end{pmatrix} \quad (3.5.12)$$

o bien, equivalente

$$\begin{aligned} B^{(p),1}(\chi) &= E_z^{(1)} - E_z^{i,1} \\ B^{(p),2}(\chi) &= E_z^{(2)} - E_z^{i,2} \\ &\dots \\ B^{(p),S}(\chi) &= E_z^{(S)} - E_z^{i,S} \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

habiendo indicado con el superíndice s la dependencia del operador de la fuente.

El método de tipo Inexact-Newton va entonces aplicado a las ecuaciones (3.5.13).

3.5.2 Discretización del problema

Para utilizar el método descrito dentro de un programa de cálculo, es necesario discretizar las ecuaciones del modelo; en particular se necesita determinar la forma discreta de los operadores que aparecen en la (3.5.10).

Se considera el caso en el cual son presentes $S \geq 1$ fuentes y son disponibles los valores del campo producido por cualquier fuente en M puntos.

Sean entonces $\{r_m^s\}, m = 1, \dots, M$, los puntos en los cuales se mide el campo eléctrico producido por la s -ésima fuente. Se particiona después el dominio \mathcal{D} en N subdominios rectangulares \mathcal{D}_n , cada uno con baricentro r_n .

Se considera que resulta

$$\mathbf{B}^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{(p),1} \\ \mathbf{B}^{(p),2} \\ \vdots \\ \mathbf{B}^{(p),S} \end{pmatrix} \quad (3.5.14)$$

para conocer la derivada de Fréchet de $\mathbf{B}^{(p)}$ es suficiente conocer las derivadas de Fréchet de los operadores $\mathbf{B}^{(p),s}$. Ya que los operadores $\mathbf{B}^{(p),s}$ y sus derivadas de Fréchet son definidos en modo recursivo, es oportuno considerar en detalle la discretización del problema del caso de la aproximación de Born de primero y segundo orden.

Para no alterar la notación, de ahora en adelante será sobreentendido el subíndice l del vector posición.

Discretización en el caso $p = 1$

El operador $B_{\chi}^{(1)}$ es tal que

$$B_{\chi}^{(1)}(h)(\vec{r}) = B^{(1)}(h)(\vec{r}) \quad (3.5.15)$$

con

$$B^{(1)}(h)(\vec{r}) = -k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}') E_z^{mc}(\vec{r}') G(\vec{r} | \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.5.16)$$

Por lo tanto, para $s = 1, \dots, S$ y $m = 1, \dots, M$, se tiene

$$B_{\chi}^{(1),s}(h)(\vec{r}_m^s) = -k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}') E_z^{mc,s}(\vec{r}') G_m^s(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.5.17)$$

Si el número de subdominios N en el cual es dividido el número de \mathcal{D} es suficientemente elevado, se puede suponer con buena aproximación que la

función h y el campo eléctrico incidente que aparecen en el segundo miembro de la (3.5.17) sean constantes al interior de cada subdominio y que sea

$$\begin{aligned}\chi(\mathbf{r}) &= \chi(\mathbf{r}_n) \quad \mathbf{r} \in \mathcal{D}_n \quad n = 1, \dots, N \\ E^{inc,s}(\mathbf{r}) &= E^{inc,s}(\mathbf{r}_n) \quad \mathbf{r} \in \mathcal{D}_n \quad n = 1, \dots, N\end{aligned}\quad (3.5.18)$$

con $s = 1, \dots, S$. En esta hipótesis la (3.5.17) se convierte en

$$B_{\chi}^{(1),s}(h)(\vec{r}_m) = -k_b^2 \sum_{n=1}^N h(\vec{r}_n) E_z^{inc,s}(\vec{r}_n) \int_{\mathcal{D}_n} G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.5.19)$$

con $m = 1, \dots, M$ y $s = 1, \dots, S$.

Se definen $G^{s,ext}$, $s = 1, \dots, S$ las matrices de $M \times N$ elementos

$$\mathbf{g}_{m,n}^{s,ext} = -k_b^2 \int_{\mathcal{D}_n} G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.5.20)$$

Se observa que la integral que aparece en el segundo miembro de la (3.5.20) puede ser calculado *analíticamente* suponiendo que el subdominio \mathcal{D}_n sea no

rectangular sino *circular* de radio $a = \sqrt{\frac{A_n}{\pi}}$ y por lo tanto de la misma área A_n

del subdominio \mathcal{D}_n [32]. Se tiene, para $m = 1, \dots, M$, $n = 1, \dots, N$, $s = 1, \dots, S$

$$-k_b^2 \int_{\mathcal{D}_n} G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}' \approx -\frac{J}{2} \pi k_b a J_1(k_b a) H_0^{(2)}(k_b \|\vec{r}_m^s - \vec{r}_n\|) \quad (3.5.21)$$

donde J_1 es la función de Bessel de la primer especie y de primer orden y

$H_0^{(2)}$ es la función de Hankel de la segunda especie de orden cero.

La (3.5.19) se escribe entonces

$$B_{\chi}^{(1),s}(h)(\vec{r}_m^s) = -k_b^2 \sum_{n=1}^N g_{m,n}^{s,ext} E_z^{inc,s}(\vec{r}_n) h(\vec{r}_n) \quad (3.5.22)$$

con $m = 1, \dots, M$ y $s = 1, \dots, S$.

Introduciendo el vector numérico

$$h = \begin{pmatrix} h(\vec{r}_1) \\ \vdots \\ h(\vec{r}_N) \end{pmatrix} \quad (3.5.23)$$

y S diferentes matrices diagonales $N \times N$ dadas

$$E_{diag}^{s,inc} = \begin{pmatrix} E_z^{i,s}(\vec{r}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_z^{i,s}(\vec{r}_2) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & E_z^{i,s}(\vec{r}_N) \end{pmatrix} \quad s = 1, \dots, S \quad (3.5.24)$$

es inmediato concluir que la matriz $B_{\chi}^{(1),s,ext}$ que representa al operador $B_{\chi}^{(1)}$ cuando el campo es generado por la fuente s -ésima, vale

$$B_{\chi}^{(1),s,ext} = G^{s,ext} E_{diag}^{s,inc} \quad s = 1, \dots, S \quad (3.5.25)$$

La (3.5.25) permite deducir inmediatamente la forma discreta del operador $B^{(1)}$. Denominada $B^{(1),s,ext}$ la matriz que representa al operador $B^{(1)}$ cuando el obstáculo es irradiado por la fuente s -ésima y se desea evaluar el campo 'dispersado' en los puntos de medición, resulta

$$B^{(1),s,ext} = G^{s,ext} E_{diag}^{s,inc} \quad s = 1, \dots, S \quad (3.5.26)$$

Discretización en el caso $p = 2$

El operador $B_{\chi}^{(2)}$ es tal que

$$B_{\chi}^{(2)}(h)(\vec{r}) = B^{(1)}(h)(\vec{r}) - k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}') B^{(1)}(h)(\vec{r}') G(\vec{r} | \vec{r}') d\vec{r}' + \\ - k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}') B^{(1)}(\chi)(\vec{r}') G(\vec{r} | \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.5.27)$$

o sea, más explícitamente

$$B_{\chi}^{(2)}(h)(\vec{r}) = -k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}') E_z^{inc,s}(\vec{r}') G(\vec{r} | \vec{r}') d\vec{r}' + \\ - k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}') \left[-k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}'') E_z^{inc,s}(\vec{r}'') G(\vec{r}' | \vec{r}'') d\vec{r}'' \right] G(\vec{r} | \vec{r}') d\vec{r}' + \\ - k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}') \left[-k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}'') E_z^{inc,s}(\vec{r}'') G(\vec{r}' | \vec{r}'') d\vec{r}'' \right] G(\vec{r} | \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.5.28)$$

Para $\vec{r} = \vec{r}_m^s$ se tiene por consiguiente

$$B_{\chi}^{(2),s}(h)(\vec{r}_m^s) = -k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}') E_z^{inc,s}(\vec{r}') G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}' + \\ - k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}') \left[-k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}'') E_z^{inc,s}(\vec{r}'') G(\vec{r}' | \vec{r}'') d\vec{r}'' \right] G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}' + \\ - k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}') \left[-k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}'') E_z^{inc,s}(\vec{r}'') G(\vec{r}' | \vec{r}'') d\vec{r}'' \right] G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.5.29)$$

$s = 1, \dots, S$ y $m = 1, \dots, M$

Si el número de subdominios N en el cual es dividido el número \mathcal{D} es suficientemente elevado, se puede todavía suponer que la función contraste $\chi(\vec{r})$ y el campo incidente $E_z^{inc,s}(\vec{r}'')$ sean constantes en cada subdominio y que sea

$$\begin{aligned}\chi(\mathbf{r}) &= \chi(\mathbf{r}_n) \quad \mathbf{r} \in \mathcal{D}_n \quad n = 1, \dots, N \\ E_z^{mc,s}(\mathbf{r}) &= E_z^{mc,s}(\mathbf{r}_n) \quad \mathbf{r} \in \mathcal{D}_n \quad n = 1, \dots, N\end{aligned}\quad (3.5.30)$$

con $s = 1, \dots, S$. Con estas asunciones se puede escribir

$$\begin{aligned}B_{\chi}^{(2),s}(h)(\vec{r}_m^s) &= -k_b^2 \sum_{n=1}^N h(\vec{r}_n) E_z^{mc,s}(\vec{r}_n) \int_{\mathcal{D}_n} G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}' + \\ &- k_b^2 \sum_{n=1}^N \chi(\vec{r}_n) \int_{\mathcal{D}_n} \left[-k_b^2 \sum_{k=1}^N h(\vec{r}_k) E_z^{mc,s}(\vec{r}_k) \int_{\mathcal{A}} G(\vec{r}' | \vec{r}'') d\vec{r}'' \right] G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}' + \\ &- k_b^2 \sum_{n=1}^N h(\vec{r}_n) \int_{\mathcal{D}_n} \left[-k_b^2 \sum_{k=1}^N \chi(\vec{r}_k) E_z^{mc,s}(\vec{r}_k) \int_{\mathcal{A}} G(\vec{r}' | \vec{r}'') d\vec{r}'' \right] G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}'\end{aligned}\quad (3.5.31)$$

con $s = 1, \dots, S$ y $m = 1, \dots, M$

Haciendo además la aproximación

$$\int_{\mathcal{A}} G(\vec{r}' | \vec{r}'') d\vec{r}'' \approx \int_{\mathcal{A}} G(\vec{r}_n | \vec{r}'') d\vec{r}'' \quad \mathbf{r} \in \mathcal{D}_n \quad n = 1, \dots, N \quad (3.5.32)$$

se llega a la expresión

$$\begin{aligned}B_{\chi}^{(2),s}(h)(\vec{r}_m^s) &= -k_b^2 \sum_{n=1}^N h(\vec{r}_n) E_z^{mc,s}(\vec{r}_n) \int_{\mathcal{D}_n} G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}' + \\ &- k_b^2 \sum_{n=1}^N \chi(\vec{r}_n) \int_{\mathcal{D}_n} \left[-k_b^2 \sum_{k=1}^N h(\vec{r}_k) E_z^{mc,s}(\vec{r}_k) \int_{\mathcal{A}} G(\vec{r}_n | \vec{r}'') d\vec{r}'' \right] G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}' + \\ &- k_b^2 \sum_{n=1}^N h(\vec{r}_n) \int_{\mathcal{D}_n} \left[-k_b^2 \sum_{k=1}^N \chi(\vec{r}_k) E_z^{mc,s}(\vec{r}_k) \int_{\mathcal{A}} G(\vec{r}_n | \vec{r}'') d\vec{r}'' \right] G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}'\end{aligned}\quad (3.5.33)$$

para $s = 1, \dots, S$ y $m = 1, \dots, M$

Se observa que, también en este caso, las integrales que aparecen en el segundo miembro de la (3.5.33) pueden ser calculados *analíticamente*

mediante integración sobre el dominio circular equivalente de radio $a = \sqrt{\frac{A_n}{\pi}}$

[32]. En analogía a la (3.5.21) se tiene, para $n = 1, \dots, N$,

$$-k_b^2 \int_{\mathcal{A}_k} G(\vec{r}' | \vec{r}'') d\vec{r}'' \approx \begin{cases} -\frac{j}{2} \pi k_b a J_1(k_b a) H_1^{(2)}(k_b a) - 1 & \text{se } k = n \\ -\frac{j}{2} \pi k_b a J_1(k_b a) H_0^{(2)}(k_b \|\vec{r}'_n - \vec{r}'_k\|) & \text{se } k \neq n \end{cases} \quad (3.5.34)$$

donde J_1 es la función de Bessel de primer especie y de primer orden y $H_0^{(2)}$ y $H_1^{(2)}$ son las funciones de Hankel de segunda especie de orden cero y uno respectivamente.

Se definen G^{int} la matriz de $N \times N$ elementos dados de

$$\mathbf{g}_{nk}^{int} = -k_b^2 \int_{\mathcal{A}_k} G(\vec{r}'_n | \vec{r}'') d\vec{r}'' \quad (3.5.35)$$

De la definición, se deduce que la matriz G^{int} es *simétrica*. La (3.5.33) se describe entonces como

$$\begin{aligned} B_{\chi}^{(2),s}(\mathbf{h})(\vec{r}'_m) &= \sum_{n=1}^N h(\vec{r}'_n) E_z^{inc,s} \mathbf{g}_{m,n}^{s,ext} + \sum_{n=1}^N \chi(\vec{r}'_n) \left(\sum_{k=1}^N h(\vec{r}'_k) E_z^{inc,s}(\vec{r}'_k) \mathbf{g}_{n,k}^{int} \right) \mathbf{g}_{m,n}^{s,ext} + \\ &+ \sum_{n=1}^N h(\vec{r}'_n) \left(\sum_{k=1}^N \chi(\vec{r}'_k) E_z^{inc,s}(\vec{r}'_k) \mathbf{g}_{n,k}^{int} \right) \mathbf{g}_{m,n}^{s,ext} \end{aligned} \quad (3.5.36)$$

para $s = 1, \dots, S$ e $m = 1, \dots, M$

Sacar provecho de la forma discreta del operador lineal $B_{\chi}^{(2)}$ significa determinar una matriz $M \times N$ el la cual multiplicada por el vector \mathbf{h} sea igual al segundo miembro de la (3.5.36).

Denominada $B_{\chi}^{(2)s,ext}$ tal matriz y $B_{\chi^{m,n}}^{(2)s,ext}$ sus elementos, debe por lo tanto resultar $s = 1, \dots, S$ y $m = 1, \dots, M$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N B_{\chi^{m,n}}^{(2)s,ext} h(\vec{r}_n) &= \sum_{n=1}^N h(\vec{r}_n) E_z^{inc,s} \mathbf{g}_{m,n}^{s,ext} + \sum_{n=1}^N \chi(\vec{r}_n) \left(\sum_{k=1}^N h(\vec{r}_k) E_z^{inc,s}(\vec{r}_k) \mathbf{g}_{n,k}^{int} \right) \mathbf{g}_{m,n}^{s,ext} + \\ &+ \sum_{n=1}^N h(\vec{r}_n) \left(\sum_{k=1}^N \chi(\vec{r}_k) E_z^{inc,s}(\vec{r}_k) \mathbf{g}_{n,k}^{int} \right) \mathbf{g}_{m,n}^{s,ext} \end{aligned} \quad (3.5.37)$$

Desarrollando el segundo miembro se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N B_{\chi^{m,n}}^{(2)s,ext} h(\vec{r}_n) &= \sum_{n=1}^N \left[E_z^{inc,s} \mathbf{g}_{m,n}^{s,ext} + \sum_{k=1}^N \chi(\vec{r}_k) E_z^{inc,s}(\vec{r}_k) \mathbf{g}_{k,n}^{int} \mathbf{g}_{m,k}^{s,ext} \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^N \chi(\vec{r}_k) E_z^{inc,s}(\vec{r}_k) \mathbf{g}_{n,k}^{int} \mathbf{g}_{m,n}^{s,ext} \right] h(\vec{r}_n) \end{aligned} \quad (3.5.38)$$

Ya que G^{int} es simétrica, se saca provecho

$$\sum_{n=1}^N B_{\chi^{m,n}}^{(2)s,ext} h(\vec{r}_n) = \sum_{n=1}^N \left[E_z^{inc,s}(\vec{r}_n) \mathbf{g}_{m,n}^{s,ext} + \sum_{k=1}^N \chi(\vec{r}_k) \mathbf{g}_{k,n}^{int} \left(E_z^{inc,s}(\vec{r}_n) \mathbf{g}_{m,k}^{s,ext} + E_z^{inc,s}(\vec{r}_k) \mathbf{g}_{m,n}^{s,ext} \right) \right] h(\vec{r}_n) \quad (3.5.39)$$

Se concluye por lo tanto

$$B_{\chi^{m,n}}^{(2)s,ext} = E_z^{inc,s}(\vec{r}_n) \mathbf{g}_{m,n}^{s,ext} + \sum_{k=1}^N \chi(\vec{r}_k) \mathbf{g}_{k,n}^{int} \left[E_z^{inc,s}(\vec{r}_n) \mathbf{g}_{m,k}^{s,ext} + E_z^{inc,s}(\vec{r}_k) \mathbf{g}_{m,n}^{s,ext} \right]$$

para $s = 1, \dots, S$, $m = 1, \dots, M$ y $n = 1, \dots, N$.

A este punto puede ser deducido la forma discreta del operador $B^{(2)}$.

Ya que

$$\begin{aligned} B^{(2)}(\chi, E_z^{inc}) &= -k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i') \left[E_z^{inc}(\vec{r}_i') - k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i'') E_z^{inc}(\vec{r}_i'') G(\vec{r}_i' | \vec{r}_i'') d\vec{r}_i'' \right] G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') d\vec{r}_i' = \\ &= B^{(1)}(\chi, E_z^{inc}) - k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i') \left[-k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i'') E_z^{inc}(\vec{r}_i'') G(\vec{r}_i' | \vec{r}_i'') d\vec{r}_i'' \right] G(\vec{r}_i | \vec{r}_i') d\vec{r}_i' = \end{aligned}$$

$$= B^{(1)}(\chi, E_z^{inc}) B^{(1)}(\chi, B^{(1)}(\chi, E_z^{inc})) \quad (3.5.41)$$

Es suficiente conocer la forma $B^{(1),int}$ del operador $B^{(1)}$ que brinda el campo 'dispersado' dentro del dominio de investigación generado por la fuente s -ésima. Siguiendo el razonamiento desarrollado en el párrafo precedente, es simple concluir que se tiene

$$B^{(1),int} = G^{int} E_{diag}^{s,inc} \quad s = 1, \dots, S \quad (3.5.42)$$

Por lo tanto la matriz $B^{(2),ext}$ que, multiplicada por el vector numérico

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi(\vec{r}_1) \\ \vdots \\ \chi(\vec{r}_N) \end{pmatrix} \quad (3.5.43)$$

Nos da el vector compuesto por los valores del campo 'dispersado' en los puntos de medición

$$B^{(2),ext} = G^{s,ext} E_{diag}^{s,inc} + G^{s,ext} \chi_{diag} G^{int} E_{diag}^{s,inc} \quad s = 1, \dots, S \quad (3.5.44)$$

donde

$$\chi_{diag} = \begin{pmatrix} \chi(\vec{r}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \chi(\vec{r}_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & \chi(\vec{r}_N) \end{pmatrix} \quad (3.5.45)$$

Se observa que, ya que $B^{(2),ext}$ es un operador no lineal, la matriz depende también de la función contraste.

Análogamente, con obvio significado de los símbolos, se deduce

$$B^{(2),int} = G^{s,int} E_{diag}^{s,inc} + G^{int} \chi_{diag} G^{s,int} E_{diag}^{s,inc} \quad s = 1, \dots, S \quad (3.5.46)$$

Discretización en el caso general

El operador $B_\chi^{(\rho)}$ es tal que

$$B_\chi^{(\rho)}(h)(\vec{r}) = B^{(1)}(h)(\vec{r}) - k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}') B^{(\rho-1)}(h)(\vec{r}') G(\vec{r} | \vec{r}') d\vec{r}' + \\ - k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}') B^{(\rho-1)}(\chi)(\vec{r}') G(\vec{r} | \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.5.47)$$

También en este caso nos interesa determinar la forma discreta del operador lineal $B_\chi^{(\rho),s}$. A tal fin se procede como en los casos precedentes. Resulta

$$B_\chi^{(\rho),s}(h)(\vec{r}_m^s) = B^{(1),s}(h)(\vec{r}_m^s) - k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}') B_\chi^{(\rho-1),s}(h)(\vec{r}') G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}' + \\ - k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}') B^{(\rho-1),s}(\chi)(\vec{r}') G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.5.48)$$

$s = 1, \dots, S$ y $m = 1, \dots, M$

Si el número de subdominios N el cual es dividido el número \mathcal{D} es suficientemente elevado, son validas las aproximaciones (3.5.30). El equivalente discreto del término $B^{(1),s}(h)(\vec{r}_m^s)$ es además ya conocido (3.5.25).

En estas hipótesis podemos además desarrollar las dos integrales que aparecen en el segundo miembro de la (3.5.48). Por cuanto resguarda la primera se tiene

$$-k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}') B_\chi^{(\rho-1),s}(h)(\vec{r}') G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}' = -k_b^2 \sum_{n=1}^N \chi(\vec{r}_n) B_\chi^{(\rho-1),s}(h)(\vec{r}_n) \int_{\mathcal{D}_n} G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.5.49)$$

ya, poniendo $\mathfrak{g}_{m,n}^{s,ext} = -k_b^2 \int_{\mathcal{D}_n} G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}'$, se tiene, para $s = 1, \dots, S$ y $m = 1, \dots, M$,

$$-k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}') B_{\chi}^{(p-1),s}(h)(\vec{r}') G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}' = \sum_{n=1}^N \mathbf{g}_{m,n}^{s,ext} \chi(\vec{r}_n) B_{\chi}^{(p-1),s}(h)(\vec{r}_n) \quad (3.5.50)$$

La segunda integral se escribe

$$-k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}') B^{(p-1),s}(\chi)(\vec{r}') G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}' = -k_b^2 \sum_{n=1}^N h(\vec{r}_n) B^{(p-1),s}(\chi)(\vec{r}_n) \int_{\mathcal{D}} G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.5.51)$$

y por lo tanto

$$-k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}') B^{(p-1),s}(\chi)(\vec{r}') G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}' = \sum_{n=1}^N \mathbf{g}_{m,n}^{s,ext} \chi(\vec{r}_n) B_{\chi}^{(p-1),s}(h)(\vec{r}_n) \quad (3.5.52)$$

$s = 1, \dots, S$ y $m = 1, \dots, M$.

Se observa que $B^{(p-1),s}(\chi)(\vec{r}_n)$ es el campo eléctrico 'dispersado' al obstáculo \mathcal{D} con función contraste χ y aproximación de Born de orden $p-1$.

Aprovechando los resultados obtenidos para $p=1$ y $p=2$, el mismo se le puede aprovechar mediante la relación recursiva

$$B^{(p-1),s,int} = G^{int} E_{diag}^{s,int} + G^{int} \chi_{diag} B^{(p-2),s,int} \quad s = 1, \dots, S \quad (3.5.53)$$

Multiplicando la matriz $B^{(p-1),s,int}$ por el vector χ se obtiene el campo deseado.

Para expresar la primer integral es necesario conocer todavía las cantidades

$B^{(p-1),s}(h)(\vec{r}_n)$, que no han sido aún deducidas por $\vec{r}_n \in \mathcal{D}$.

Ya que

$$B^{(1),s}(h)(\vec{r}) = -k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}') E_z^{inc}(\vec{r}) G(\vec{r} | \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.5.54)$$

se tiene

$$B^{(1),s}(h)(\vec{r}_n) = -k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}') E_z^{inc,s}(\vec{r}) G(\vec{r}_n | \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.5.55)$$

y, con las normales aproximaciones,

$$B^{(1),s}(h)(\vec{r}_n) = -k_b^2 \sum_{k=1}^N h(\vec{r}_k) E_z^{inc,s}(\vec{r}_k) \int_{\mathcal{D}} G(\vec{r}_n | \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.5.56)$$

y por lo tanto

$$B^{(1),s}(h)(\vec{r}_n) = \sum_{k=1}^N \mathbf{g}_{m,n}^{s,ext} h(\vec{r}_k) E_z^{inc,s}(\vec{r}_k) \quad (3.5.57)$$

La matriz $B_{\chi}^{(1),s,iml}$ tiene por lo tanto elementos

$$b_{\chi^i, j}^{(1),s,iml} = \mathbf{g}_{i,j}^{iml} E_z^{inc,s}(\vec{r}_j) \quad (3.5.58)$$

Para la aproximación de orden p , la (3.5.48) se escribe

$$\begin{aligned} B_{\chi}^{(p),s}(h)(\vec{r}_n) &= B^{(1),s}(h)(\vec{r}_n) - k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}') B_{\chi}^{(p-1),s}(h)(\vec{r}') G(\vec{r}_n | \vec{r}') d\vec{r}' + \\ &- k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}') B^{(p-1),s}(\chi)(\vec{r}') G(\vec{r}_n | \vec{r}') d\vec{r}' \end{aligned} \quad (3.5.59)$$

Para la primera de las dos integrales en el segundo miembro

$$-k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}') B_{\chi}^{(p-1),s}(h)(\vec{r}') G(\vec{r}_n | \vec{r}') d\vec{r}' = -k_b^2 \sum_{k=1}^N \chi(\vec{r}_k) B_{\chi}^{(p-1),s}(h)(\vec{r}_k) \int_{\mathcal{A}} G(\vec{r}_n | \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.5.60)$$

y, siendo $\mathbf{g}_{n,k}^{iml} = -k_b^2 \int_{\mathcal{A}} G(\vec{r}_n | \vec{r}') d\vec{r}'$, se tiene, para $s = 1, \dots, S$ y $m = 1, \dots, M$

$$-k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}') B_{\chi}^{(p-1),s}(h)(\vec{r}') G(\vec{r}_n | \vec{r}') d\vec{r}' = \sum_{k=1}^N \mathbf{g}_{n,k}^{iml} \chi(\vec{r}_k) B_{\chi}^{(p-1),s}(h)(\vec{r}_k) \quad (3.5.61)$$

Además se tiene

$$-k_b^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}') B^{(p-1),s}(\chi)(\vec{r}') G(\vec{r}_n | \vec{r}') d\vec{r}' = -k_b^2 \sum_{k=1}^N \chi(\vec{r}_k) B^{(p-1),s}(\chi)(\vec{r}_k) \int_{\mathcal{A}} G(\vec{r}_n | \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.5.62)$$

y por lo tanto

$$-k_h^2 \int_{\mathcal{D}} h(\vec{r}') B^{(p-1),s}(\chi)(\vec{r}') G(\vec{r}_n | \vec{r}') d\vec{r}' = \sum_{k=1}^N g_{n,k}^{int} h(\vec{r}_k) B^{(p-1),s}(\chi)(\vec{r}_k) \quad (3.5.63)$$

Por la (4.5.16) es inmediato deducir, razonando en modo análogo como ya hecho antes, que

$$B^{(1)}(h)(\vec{r}_n) = \sum_{k=1}^N g_{n,k}^{int} h(\vec{r}_k) E_z^{inc,s}(\vec{r}_k) \quad (3.5.64)$$

Teniendo cuenta de la (4.5.61), de la (4.5.63) y de la (4.5.64), la (4.5.59) se convierte entonces

$$B_{\chi}^{(p),s}(h)(\vec{r}_n) = \sum_{k=1}^N g_{n,k}^{int} \left[h(\vec{r}_k) E_z^{inc,s}(\vec{r}_k) + \chi(\vec{r}_k) B_{\chi}^{(p-1),s}(h)(\vec{r}_k) + h(\vec{r}_k) B^{(p-1),s}(\chi)(\vec{r}_k) \right] \quad (3.5.65)$$

Puesto que, como ya observado, $B^{(p-1),s}(\chi)(\vec{r}_k)$ representa el campo 'dispersado' dentro del subdominio k -ésimo - y es por consiguiente calculable siendo conocidos χ y las características de la fuente - la (3.5.65) permite, junto a la (3.5.57), de escribir la discreta de la derivada discreta de Fréchet dentro del dominio.

La forma discreta $B^{(p),s,ext}$ del operador no lineal $B^{(p)}$ puede ser obtenida también la misma en modo recursivo, mediante la relación

$$B^{(p),s,ext} = G^{ext} E_{diag}^{s,inc} + G^{ext} \chi_{diag} B^{(p-1),s,int} \quad s = 1, \dots, S \quad (3.5.66)$$

De este modo son aprovechadas todas las relaciones que permiten expresar la forma discreta del operador $B^{(p)}$ y su derivada de Fréchet. Son por lo tanto obtenidas las ecuaciones que permiten escribir el código de cálculo que realiza el algoritmo de Inexact-Newton.

3.6 Aplicación del método 'Inexact-Newton' al problema de Scattering Inverso con la formulación exacta

En esta sección es presentado otro método de solución de problema de *dispersión inversa*, todavía basado sobre el algoritmo de Inexact-Newton descrito precedentemente. Tal método no adopta la aproximación de Born, pero aplica el algoritmo de tipo Inexact-Newton directamente a la pareja de ecuaciones de integrales

$$\begin{aligned} E_z^{(ext)}(\vec{r}_i) &= -\frac{jk_0^2}{4} \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i') H_0^{(2)}(k_0 \|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|) E_z^{(int)}(\vec{r}_i') d\vec{r}_i' + E_z^{inc}(\vec{r}_i) \quad \vec{r}_i \notin \mathcal{D} \\ E_z^{(int)}(\vec{r}_i) &= -\frac{jk_0^2}{4} \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i') H_0^{(2)}(k_0 \|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|) E_z^{(int)}(\vec{r}_i') d\vec{r}_i' + E_z^{inc}(\vec{r}_i) \quad \vec{r}_i \in \mathcal{D} \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

Que describen en modo *exacto* el fenómeno de la *dispersión*.

No adoptando la aproximación de Born, el campo eléctrico total en el interior de \mathcal{D} es una *incógnita* del problema. Teniendo presente esta observación, el sistema de ecuaciones precedente puede ser puesto en forma compacta en el modo siguiente

$$\begin{pmatrix} E_z^{(ext)} - E_z^{inc} \\ E_z^{inc} \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} \chi \\ E_z^{(int)} \end{pmatrix} \quad (3.6.2)$$

o bien, evidenciando las 'componentes' del operador $\mathbf{L} \begin{pmatrix} \chi \\ E_z^{(int)} \end{pmatrix}$,

$$E_z^{(ext)} - E_z^{inc} = \mathcal{L}_1 \begin{pmatrix} \chi \\ E_z^{(int)} \end{pmatrix} \quad (3.6.3a)$$

$$E_z^{inc} = \mathcal{L}_2 \begin{pmatrix} \chi \\ E_z^{(int)} \end{pmatrix} \quad (3.6.3b)$$

Esta observación simplifica el cálculo de la derivada de Fréchet del operador

\mathbf{L} . Indicados en efecto con \mathcal{L}_{mc}^{χ} , $\mathcal{L}_{mc}^{E_z^{(int)}}$ las derivadas de Fréchet respecto a χ y respecto a $E_z^{(int)}$ de \mathcal{L}_i , $i=1,2$, la derivada de Fréchet \mathbf{L}' del operador \mathbf{L} se puede escribir

$$\mathbf{L}' = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1^{\chi} & \mathcal{L}_1^{E_z^{(int)}} \\ \mathcal{L}_2^{\chi} & \mathcal{L}_2^{E_z^{(int)}} \end{pmatrix} \quad (3.6.4)$$

El cálculo de las derivadas de Fréchet de \mathcal{L}_1 respecto a χ y respecto a $E_z^{(int)}$ puede determinarse inmediatamente. Siendo en efecto

$$\mathcal{L}_1 \begin{pmatrix} \chi \\ E_z^{(int)} \end{pmatrix} (\vec{r}_i) = -\frac{jk_0^2}{4} \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i') H_0^{(2)}(k_0 \|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|) E_z^{(int)}(\vec{r}_i') d\vec{r}_i' \quad (3.6.5)$$

si se consideran constantes $E_z^{(int)}$ o χ , el operador asume la misma estructura del operador $B^{(1)}$. Las derivadas respecto a χ y a $E_z^{(int)}$, recordando la (3.5.4), valen por tanto

$$\mathcal{L}_1^{\chi} \begin{pmatrix} \cdot \\ E_z^{(int)} \end{pmatrix} (\vec{r}_i) = -\frac{jk_0^2}{4} \int_{\mathcal{D}} (\cdot)(\vec{r}_i') E_z^{(int)}(\vec{r}_i') H_0^{(2)}(k_0 \|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|) d\vec{r}_i' \quad (3.6.6a)$$

$$\mathcal{L}_1^{E_z^{(int)}} \begin{pmatrix} \chi \\ \cdot \end{pmatrix} (\vec{r}_i) = -\frac{jk_0^2}{4} \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i') (\cdot)(\vec{r}_i') H_0^{(2)}(k_0 \|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|) d\vec{r}_i' \quad (3.6.6b)$$

El cálculo de \mathcal{L}_2^{χ} puede basarse todavía sobre el resultado (3.5.4), puesto que en

$$\mathcal{L}_2 \begin{pmatrix} \chi \\ E_z^{(int)} \end{pmatrix} (\vec{r}_i) = E_z^{(int)}(\vec{r}_i) + \frac{jk_0^2}{4} \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i') H_0^{(2)}(k_0 \|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|) E_z^{(int)}(\vec{r}_i') d\vec{r}_i' \quad (3.6.7)$$

$E_z^{(int)}(\vec{r}_i)$ juega un rol de una constante; se concluye por lo tanto

$$\mathcal{L}_2^{\mathcal{X}} \left(\begin{array}{c} \cdot \\ E_z^{(int)} \end{array} \right) (\vec{r}_i) = \frac{jk_0^2}{4} \int_{\mathcal{D}} (\cdot)(\vec{r}_i') E_z^{(int)}(\vec{r}_i') H_0^{(2)}(k_0 \|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|) d\vec{r}_i' \quad (3.6.8)$$

Por cuanto resguarda el cálculo de $\mathcal{L}_2^{E_z^{(int)}}$, se observa que ella, por linealidad, puede ser descompuesta en el cálculo de la derivada de Fréchet respecto a $E_z^{(int)}$ de los singulares términos $E_z^{(int)}$ y

$$\frac{jk_0^2}{4} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{X}(\vec{r}_i') E_z^{(int)}(\vec{r}_i') H_0^{(2)}(k_0 \|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|) d\vec{r}_i'$$

La derivada del segundo término, que tiene la misma estructura de $B^{(1)}$, vale

$$\mathcal{L}_1^{E_z^{(int)}} \left(\begin{array}{c} \mathcal{X} \\ \cdot \end{array} \right) (\vec{r}_i) = (\cdot)(\vec{r}_i) + \frac{jk_0^2}{4} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{X}(\vec{r}_i') (\cdot)(\vec{r}_i') H_0^{(2)}(k_0 \|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|) d\vec{r}_i' \quad (3.6.9)$$

Recurriendo a la definición, es inmediato deducir que la derivada de Fréchet de $E_z^{(int)}$ respecto a $E_z^{(int)}$ es el operador identidad. Concluyendo resulta

$$\mathcal{L}_2^{\mathcal{X}} \left(\begin{array}{c} \mathcal{X} \\ E_z^{(int)} \end{array} \right) (\vec{r}_i) = (\cdot)(\vec{r}_i) + \frac{jk_0^2}{4} \int_{\mathcal{D}} E_z^{(int)}(\vec{r}_i') (\cdot)(\vec{r}_i') H_0^{(2)}(k_0 \|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|) d\vec{r}_i' \quad (3.6.10)$$

Resumiendo los resultados obtenidos, la derivada de Fréchet del operador

Len en el punto $\left(\begin{array}{c} \mathcal{X} \\ E_z^{(int)} \end{array} \right)$, aplicada al elemento $\left(\begin{array}{c} h_x \\ h_E \end{array} \right)$, puesto que $\rho_i = k_0 \|\vec{r}_i - \vec{r}_i'\|$

y $g(\rho_i) = -\frac{jk_0^2}{4} H_0^{(2)}(\rho_i)$, vale

$$\mathbf{L} \left(\begin{array}{c} h_x \\ h_E \end{array} \right) (\vec{r}_i) = \left(\begin{array}{cc} \int_{\mathcal{D}} h_x(\vec{r}_i') E_z^{(int)}(\vec{r}_i') g(\rho_i) d\vec{r}_i' & \int_{\mathcal{D}} \mathcal{X}(\vec{r}_i') h_E(\vec{r}_i') g(\rho_i) d\vec{r}_i' \\ - \int_{\mathcal{D}} h_x(\vec{r}_i') E_z^{(int)}(\vec{r}_i') g(\rho_i) d\vec{r}_i' & h_E(\vec{r}_i) - \int_{\mathcal{D}} \mathcal{X}(\vec{r}_i') h_E(\vec{r}_i') g(\rho_i) d\vec{r}_i' \end{array} \right) \quad (3.6.11)$$

En el caso del acercamiento multivista, la derivada de Fréchet de \mathbf{L} dependerá también de la particular fuente. Para la vista s -ésima, la

derivada en el punto $\begin{pmatrix} \chi \\ E_z^{s,(int)} \end{pmatrix}$, aplicada al elemento $\begin{pmatrix} h_\chi \\ h_{E_s} \end{pmatrix}$, vale

$$\mathbf{L}^s \begin{pmatrix} h_\chi \\ h_{E_s} \end{pmatrix} (\vec{r}_i) = \begin{pmatrix} \int_{\mathcal{D}} h_\chi(\vec{r}_i) E_z^{s,(int)}(\vec{r}_i) g(\rho_i) d\vec{r}_i & \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i) h_{E_s}(\vec{r}_i) g(\rho_i) d\vec{r}_i \\ - \int_{\mathcal{D}} h_\chi(\vec{r}_i) E_z^{s,(int)}(\vec{r}_i) g(\rho_i) d\vec{r}_i & h_{E_s}(\vec{r}_i) - \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}_i) h_{E_s}(\vec{r}_i) g(\rho_i) d\vec{r}_i \end{pmatrix} \quad (3.6.12)$$

3.6.1 Discretización del problema

Como en el caso precedente, para facilitar la notación, el subíndice i del vector posición será sobrentendido.

Es tratado el caso en el cual son presentes $S \geq 1$ fuentes y son disponibles los valores del campo producido por cada una de las fuentes en M puntos.

Sean por lo tanto $\{\vec{r}_m^s\}$, $m = 1, \dots, M$, los puntos en los cuales se mide el campo eléctrico producido por la s -ésima fuente. Se particiona después el dominio \mathcal{D}_n , cada uno de baricentro \vec{r}_n .

Procediendo como en el caso precedente, se desea individuar una matriz \mathbf{L}^s

$$\mathbf{L}^s \begin{pmatrix} h_\chi(\vec{r}_m^s) \\ h_{E_s}(\vec{r}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\mathcal{D}} h_\chi(\vec{r}') E_z^{(int),s}(\vec{r}') g(\rho_m^s) d\vec{r}' & \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}') h_{E_s}(\vec{r}') g(\rho_m^s) d\vec{r}' \\ - \int_{\mathcal{D}} h_\chi(\vec{r}') E_z^{(int),s}(\vec{r}') g(\rho_n) d\vec{r}' & h_{E_s}(\vec{r}_n) - \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}') h_{E_s}(\vec{r}') g(\rho_n) d\vec{r}' \end{pmatrix} \quad (3.6.13)$$

donde $\rho_m^s = k_b \|\vec{r}_m^s - \vec{r}'\|$, $m = 1, \dots, M$, $s = 1, \dots, S$, y $\rho_n = k_b \|\vec{r}_n - \vec{r}'\|$, $n = 1, \dots, N$.

Si el número de subdominios N en el cual es dividido el dominio \mathcal{D} es suficientemente elevado, se puede todavía suponer que la función contraste $\chi(\vec{r})$ y el campo eléctrico incidente $E_z^{(int),s}(\vec{r})$ sean constantes en cada subdominio, y que sea

$$\chi(\vec{r}) = \chi(\vec{r}_n) \quad \vec{r} \in \mathcal{D}_n \quad n = 1, \dots, N \quad (3.6.14)$$

$$E_z^{(int),s}(\vec{r}) = E_z^{(int),s}(\vec{r}_n) \quad \vec{r} \in \mathcal{D}_n \quad n = 1, \dots, N$$

Con $s = 1, \dots, S$,. Hechas estas aproximaciones, es razonable asumir

$$h_\chi(\vec{r}) = h_\chi(\vec{r}_n) \quad \vec{r} \in \mathcal{D}_n \quad n = 1, \dots, N \quad (3.6.15)$$

$$h_E(\vec{r}) = h_E(\vec{r}_n) \quad \vec{r} \in \mathcal{D}_n \quad n = 1, \dots, N$$

Resulta entonces

$$\int_{\mathcal{D}} h_\chi(\vec{r}') E_z^{(int),s}(\vec{r}') g(\rho_m^s) d\vec{r}' \approx \sum_{k=1}^N h_\chi(\vec{r}_k) E_z^{(int),s}(\vec{r}_k) \int_{\mathcal{A}_k} g(\rho_m^s) d\vec{r}' \quad (3.6.16)$$

para $m = 1, \dots, M$, y $s = 1, \dots, S$.

$$\text{Ya que } \int_{\mathcal{A}_k} g(\rho_m^s) d\vec{r}' = -\frac{jK_h^2}{4} \int_{\mathcal{A}_k} H_0^{(2)} \|\vec{r}_m^s - \vec{r}'\| d\vec{r}' = -k_h^2 \int_{\mathcal{A}_k} G(\vec{r}_m^s | \vec{r}') d\vec{r}', \text{ la } \quad (3.6.16),$$

basándonos por la (3.5.20), se puede escribir

$$\int_{\mathcal{D}} h_\chi(\vec{r}') E_z^{(int),s}(\vec{r}') g(\rho_m^s) d\vec{r}' \approx \sum_{k=1}^N h_\chi(\vec{r}_k) E_z^{(int),s}(\vec{r}_k) \mathcal{G}_{m,k}^{s,ext} \quad (3.6.17)$$

para $m = 1, \dots, M$, y $s = 1, \dots, S$.

introducido el vector numérico

$$h_\chi = \begin{pmatrix} h_\chi(\vec{r}_1) \\ \vdots \\ h_\chi(\vec{r}_N) \end{pmatrix} \quad (3.6.18)$$

fijado el índice s , las M ecuaciones (3.6.17) se pueden escribir en forma compacta

$$G^{s,ext} E_{diag}^{s,(int)} h_\chi \quad (3.6.19)$$

siendo $E_{diag}^{s,(int)}$ definida en el modo siguiente

$$E_{diag}^{s,(int)} = \begin{pmatrix} E_z^{(int),s}(\vec{r}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_z^{(int),s}(\vec{r}_2) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & E_z^{(int),s}(\vec{r}_N) \end{pmatrix} \quad (3.6.20)$$

procediendo en modo análogo, se saca provecho de

$$\int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}') h_{E^s}(\vec{r}') g(\rho_m^s) d\vec{r}' \approx \sum_{k=1}^N h_{E^s}(\vec{r}_k) \chi(\vec{r}_k) g_{m,k}^{s,ext} \quad (3.6.21)$$

Introducido el vector numérico

$$h_{E^s} = \begin{pmatrix} h_{E^s}(\vec{r}_1) \\ \vdots \\ h_{E^s}(\vec{r}_N) \end{pmatrix} \quad (3.6.22)$$

fijado el índice s , las M ecuaciones (3.6.21) se pueden escribir en forma compacta

$$G^{s,ext} \chi_{diag} h_{E^s} \quad (3.6.23)$$

Además se tiene

$$\int_{\mathcal{D}} h_{\chi}(\vec{r}') E_z^{s,(int)}(\vec{r}') g(\rho_n) d\vec{r}' \approx \sum_{k=1}^N h_{\chi}(\vec{r}_k) E_z^{s,(int)}(\vec{r}_k) \int_{\mathcal{A}} g(\rho_n) d\vec{r}' \quad (3.6.24)$$

para $n = 1, \dots, N$, y $s = 1, \dots, S$.

puesto que $\int_{\mathcal{D}} g(\rho_n) d\vec{r}' = -\frac{jk_b^2}{4} \int_{\mathcal{A}} H_0^{(2)} \|\vec{r}_n - \vec{r}'\| d\vec{r}' = -k_b^2 \int_{\mathcal{A}} G(\vec{r}_n | \vec{r}') d\vec{r}'$, la (3.6.16),

sobre la base de (3.5.35), se puede escribir

$$\int_{\mathcal{D}} h_{\chi}(\vec{r}') E_z^{s,(int)}(\vec{r}') g(\rho_n) d\vec{r}' \approx \sum_{k=1}^N h_{\chi}(\vec{r}_k) E_z^{s,(int)}(\vec{r}_k) \mathbf{g}_{n,k}^{int} \quad (3.6.25)$$

para $n = 1, \dots, N$, y $s = 1, \dots, S$.

Fijado el índice s , las N ecuaciones (3.6.25) se pueden escribir en forma compacta

$$G^{int} E_{diag}^{s,(int)} h_{\chi} \quad (3.6.26)$$

Sobre la base de los razonamientos hechos hasta ahora, es inmediato reconocer que las n ecuaciones que se obtienen por la discretización del término

$$h_{E^s}(\vec{r}_n) - \int_{\mathcal{D}} \chi(\vec{r}') h_{E^s}(\vec{r}') g(\rho_n) d\vec{r}' \quad (3.6.27)$$

pueden ser puestas, para s fijado, en forma compacta como

$$h_{E^s} - G^{int} \chi_{diag} h_{E^s} \quad (3.6.28)$$

Metiendo junto la (3.6.19), la (3.6.23), la (3.6.26) y la (3.6.28), se puede escribir

$$\mathbf{L}^s \begin{pmatrix} h_{\chi} \\ h_{E^s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^{s,ext} E_{diag}^{(int),s} h_{\chi} & G^{s,ext} \chi_{diag} h_{E^s} \\ -G^{int} E_{diag}^{(int),s} h_{\chi} & h_{E^s} - G^{int} \chi_{diag} h_{E^s} \end{pmatrix} \quad (3.6.29)$$

o sea

$$\mathbf{L}^s \begin{pmatrix} h_\chi \\ h_{E^s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^{s,ext} E_{diag}^{(int),s} & G^{s,ext} \chi_{diag} \\ -G^{int} E_{diag}^{(int),s} & I - G^{int} \chi_{diag} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_\chi \\ h_{E^s} \end{pmatrix} \quad (3.6.30)$$

donde I indica la matriz identidad de dimensión $n \times n$.

A este punto es inmediato observar que la matriz $(M + N) \times 2N$

$$\begin{pmatrix} G^{s,ext} E_{diag}^{(int),s} & G^{s,ext} \chi_{diag} \\ -G^{int} E_{diag}^{(int),s} & I - G^{int} \chi_{diag} \end{pmatrix} \quad (3.6.31)$$

es la representación discreta del operador \mathbf{L}^s , con $s = 1, \dots, S$.

3.6.2 Formulación multivista

Si se utilizan S vistas, a cada iteración *externa* el método Inexact-Newton, se obtienen los S sistemas lineales acoplados.

$$\begin{pmatrix} G^{1,ext} E_{diag}^{1,(int)} & G^{1,ext} \chi_{diag} \\ -G^{int} E_{diag}^{1,(int)} & I - G^{int} \chi_{diag} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_\chi \\ h_{E^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_z^{(ext),1} - E_z^{i,1} \\ E_z^{(int),1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} G^{2,ext} E_{diag}^{2,(int)} & G^{2,ext} \chi_{diag} \\ -G^{int} E_{diag}^{2,(int)} & I - G^{int} \chi_{diag} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_\chi \\ h_{E^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_z^{(ext),2} - E_z^{i,2} \\ E_z^{(int),2} \end{pmatrix} \quad (3.6.32)$$

...

$$\begin{pmatrix} G^{S,ext} E_{diag}^{S,(int)} & G^{S,ext} \chi_{diag} \\ -G^{int} E_{diag}^{S,(int)} & I - G^{int} \chi_{diag} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_\chi \\ h_{E^S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_z^{(ext),S} - E_z^{i,S} \\ E_z^{(int),S} \end{pmatrix}$$

Tales sistemas se pueden recibir en forma compacta en el modo siguiente

$$\begin{pmatrix} G^{1,ext} E_{diag}^{1,(int)} & G^{1,ext} \chi_{diag} & 0 & \dots & 0 \\ -G^{int} \chi_{diag}^{1,(int)} & I - G^{int} \chi_{diag} & 0 & \dots & 0 \\ G^{2,ext} E_{diag}^{2,(int)} & 0 & G^{2,ext} \chi_{diag} & \dots & 0 \\ -G^{int} \chi_{diag}^{2,(int)} & 0 & I - G^{int} \chi_{diag} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G^{S,ext} E_{diag}^{S,(int)} & 0 & 0 & \dots & G^{S,ext} \chi_{diag} \\ -G^{int} \chi_{diag}^{S,(int)} & 0 & 0 & \dots & I - G^{int} \chi_{diag} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_\chi \\ h_{E^1} \\ h_{E^2} \\ \dots \\ h_{E^S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_z^{(Sevr),1} \\ E_z^{(int),1} \\ E_z^{(Sevr),2} \\ E_z^{(int),2} \\ \dots \\ E_z^{(Sevr),S} \\ E_z^{(int),S} \end{pmatrix} \quad (3.6.33)$$

donde $E_z^{(Sevr),S} = E_z^{(ext),S} - E_z^{I,S}$, $s = 1, \dots, S$.

Es interesante observar que la matriz de los coeficientes de la *forma normal* del sistema (3.6.33) es una matriz a flecha de bloques hermetiana. Para agilizar la notación es oportuno poner

$$G^{ext,S} E_{diag}^{S,(int)} = A_S \quad (3.6.34)$$

$$G^{ext,S} \chi_{diag} = B_S \quad (3.6.35)$$

$$-G^{int} E_{diag}^{S,(int)} = C_S \quad (3.6.36)$$

$$I - G^{int} \chi_{diag} = D \quad (3.6.37)$$

Se conoce que la matriz D no depende de la vista.

La matriz de los coeficientes de la forma normal es por lo tanto dada por

$$\begin{pmatrix} \sum_{s=1}^S (A_s^* A_s + C_s^* C_s) & A_1^* B_1 + C_1^* D & A_2^* B_2 + C_2^* D & \dots & A_S^* B_S + C_S^* D \\ B_1^* A_1 + D^* C_1 & B_1^* B_1 + D^* D & 0 & \dots & 0 \\ B_2^* A_2 + D^* C_2 & 0 & B_2^* B_2 + D^* D & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ B_S^* A_S + D^* C_S & 0 & \dots & 0 & B_S^* B_S + D^* D \end{pmatrix} \quad (3.6.38)$$

que tiene bloques no nulos solo sobre la diagonal principal y sobre la primera fila y sobre la primera columna. Se observa que para aplicar el de Landweber

es suficiente conocer la matriz (3.6.38) y el vector de los términos conocidos de la forma normal, que puede ser aprovechado inmediatamente multiplicando la matriz de los coeficientes del sistema (3.6.33) transpuesta y compleja conjugada por el vector de los términos conocidos de la (3.6.33).

3.6.3 Análisis de los recursos requeridos

La utilización del método Inexact-Newton para la solución del problema de *dispersión electrogeométrica inversa* en la formulación exacta requiere de memorizar una cantidad enorme de datos.

El motivo de tal necesidad reside en el hecho de que las incógnitas del problema son $(S+1)N$, número que, si se desea una resolución elevada y se emplea un número significativo de vistas, es muy elevado.

Para estimar la cantidad de memoria requerida se pueden, en primer aproximación, considerar solamente las matrices.

La matriz G^{int} contiene N^2 elementos, mientras las S matrices G^{ext} , contienen complejamente SMN elementos.

Analizando los recursos requeridos por el método de las potencias para obtener el extremo superior del intervalo de valores que β puede asumir para garantizar la convergencia, la matriz de los coeficientes de la forma normal contiene $(S+1)^2 N^2$ elementos.

Si se emplean 8 bytes para representar un número real, considerando que todos los elementos de las matrices son números complejos, son necesarios 16 bytes para memorizar las matrices y por lo tanto

$$16N \left[N + SM + (S+1)^2 N \right] \quad (3.6.39)$$

3.6.4 Soluciones Propuestas

Para reducir la cantidad de memoria requerida es antes que nada posible aprovechar la estructura a *flecha* de la matriz de los coeficientes de la forma normal del sistema por resolver con el método de Landweber, que es también hermetiana.

Razonando estas propiedades, es inmediato deducir que de tal matriz es necesario memorizar solamente los $S+1$ bloques de dimensión $N \times N$ de la primera fila (o de la primera columna) y los restantes S bloques diagonales de dimensión $N \times N$. En este modo son suficiente $(2S+1)N^2$ elementos para caracterizar la matriz.

Además es posible aprovechar el hecho de que la matriz G^{im} es simétrica, así que para ella son suficiente $N^2/2$ elementos.

En este modo el número de Bytes necesario se vuelve

$$16N \left[\frac{N}{2} + SM + (2S+1)N \right] \quad (3.6.40)$$

Ya que tal cantidad es bastante elevada, se puede escoger de renunciar a la posibilidad de usar puntos de medición diferentes para cada vista. En este modo en efecto se mantienen las ventajas del acercamiento multivista, pero la cantidad de memoria disminuye. Si se adopta esta elección, en efecto, no es necesario memorizar S matrices $G^{\text{v,ext}}$ distintas, pero sin embargo nos es suficiente *una sola*.

Además los elementos diagonales de la matriz (3.6.38) llegan a ser, a partir del segundo, todos iguales, así que para caracterizar tal matriz son suficientes $(S+2)N^2$ elementos.

En este modo el número de bytes necesario llega a ser

$$16N \left[\frac{N}{2} + M + (S+2)N \right] \quad (3.6.41)$$

Para $S = 9$, $N = 3600$, $M = 200$ son por lo tanto necesarios aproximadamente 2.4 GBytes.

Considerando que tal cantidad de memoria es todavía demasiado elevada, es posible emplear este método en el ámbito de una técnica de tipo multi-zooming, en la cual se adopta inicialmente una discretización menos fina del dominio, para después volverla más fina si se es identificada la presencia del objeto incógnito.

Otra posibilidad, dada la buena capacidad reconstructiva de este método también para 'fuertes dispersadores', es aquella de emplearlo para encontrar un punto de partida para algoritmos que resuelven el problema minimizando una función costo.

Sin embargo aplicar el método Inexact-Newton a la formulación del *Scattering* presenta también indudosas *ventajas*: antes que nada el modelo *no tiene límites* de validez y brinda las ecuaciones correctas para reconstruir *cualquier escena*.

Basándose sobre estas observaciones es posible emplear un menor número de fuentes y compensar la pérdida de información con la técnica de *frequency hopping*. Tal técnica consiste en efectuar una reconstrucción a la frecuencia f_0 , obteniendo una solución $\chi_0, E_0^{1.(int)}, \dots, E_0^{S.(int)}$. Partiendo de tal solución se determina una nueva solución invirtiendo datos obtenidos a frecuencia f_1 , teniendo como resultado una solución $\chi_1, E_1^{1.(int)}, \dots, E_1^{S.(int)}$.

El procedimiento puede ser repetido un número de veces arbitrario.

Además si se observa la expresión de la derivada de Fréchet L' , se nota que ella es mucho más simple de calcular en comparación de aquella que es necesaria de aplicar en el método Inexact-Newton con la aproximación de Born.

CAPÍTULO 4

MODELOS DE MATERIALES UTILIZADOS EN LAS APLICACIONES

En esta tesis se tomará en consideración algunos modelos de los materiales que actualmente son más difundidos en las aplicaciones industriales: la madera y el hormigón.

4.1 Modelos con la madera

4.1.1 Características físicas, mecánicas y químicas de la madera

La madera es un material sólido, natural, orgánico y celular. Constituido principalmente por un compuesto químico denominado celulosa. Además la madera es muy anisótropa¹.

Durante el crecimiento del árbol influyen el tipo de terreno, la altitud, el clima de la zona; por lo cual el espesor de los anillos no es constante y la sección transversal del tronco no es perfectamente regular. Además la madera presenta irregularidad en las estructuras, que son características de cada árbol.

¹ Material en el cual sus características físicas difieren, si se miden en diferentes ejes de referencia.

Existen dos tipos fundamentales de microestructuras de madera; las maderas duras (ej. eucalipto) y las maderas dulces 'blandas' (ej. Pino) [11].

4.1.2 Características Electromagnéticas de la madera.

Se conoce que las propiedades dieléctricas de la madera son influenciadas por la densidad, contenido de humedad (mc), por la temperatura y por la frecuencia de trabajo. Para muchas aplicaciones, por ejemplo el secamiento, donde es necesario determinar la distribución de densidad o el grado de humedad de la madera. Estos parámetros pueden ser hallados mediante diagnóstica no destructiva usando microondas [17]

La porosidad causa una disminución en la permitividad dieléctrica, puesto que el aire tiene una constante dieléctrica cercana a 1. Al contrario, el agua absorbida causa un aumento de la permitividad dieléctrica.

Además, la frecuencia y la temperatura influyen notablemente las propiedades electromagnéticas de la madera.

4.1.3 Técnicas para la medición de permitividad dieléctrica en la madera

Puesto que la madera es un material dieléctrico anisótropo, las relaciones constitutivas electromagnéticas son expresadas en forma vectorial como sigue [3].

$$\vec{D}(\vec{r}) = [\vec{\epsilon}] \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad (4.1.1)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{H}(\vec{r}) \quad (4.1.2)$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = [\vec{\sigma}] \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad (4.1.3)$$

donde

$\vec{D}(\vec{r})$ es el vector inducción eléctrica

$\vec{B}(\vec{r})$ es el vector inducción magnética

$\vec{J}(\vec{r})$ es el vector densidad de corriente eléctrica

Además, $\vec{\epsilon}$ y $\vec{\sigma}$ son cantidades tensoriales que admiten la siguiente representación matricial:

$$[\vec{\epsilon}] = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_{(LL)} & \epsilon_{(LR)} & \epsilon_{(LT)} \\ \epsilon_{(RL)} & \epsilon_{(RR)} & \epsilon_{(RT)} \\ \epsilon_{(TL)} & \epsilon_{(TR)} & \epsilon_{(TT)} \end{bmatrix} \quad (4.1.4)$$

$$[\vec{\sigma}] = \omega \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_{(LL)}'' & \epsilon_{(LR)}'' & \epsilon_{(LT)}'' \\ \epsilon_{(RL)}'' & \epsilon_{(RR)}'' & \epsilon_{(RT)}'' \\ \epsilon_{(TL)}'' & \epsilon_{(TR)}'' & \epsilon_{(TT)}'' \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

donde los subíndices se refieren a los ejes principales del material anisótropo y han sido indicados en la figura 4.2. la madera se considera muy frecuentemente como material "isótropo ortogonal", es decir que es un material que tiene tres regiones de simetría estructurales recíprocamente perpendiculares.

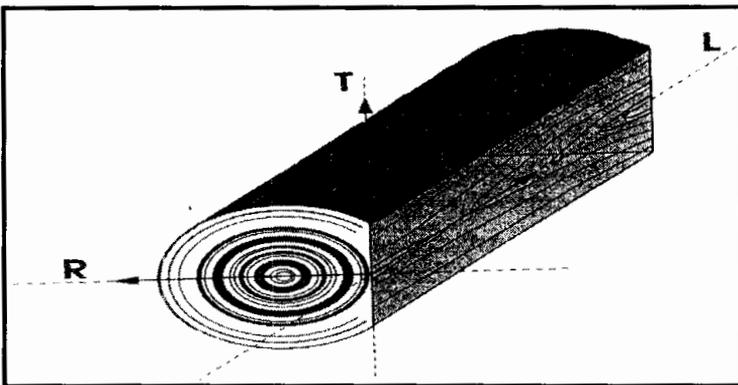


Figura 4.2: Principales ejes de la madera: L, eje longitudinal; R, eje radial; T, eje tangencial

Esto representa un esquema idealizado, ya que, en realidad, las propiedades de la madera varían notablemente en función del radio, largo y también respecto al contenido de humedad (mc).

Es aceptado generalmente que las propiedades dieléctricas de la madera no cambian si se desfasa el $\vec{E}(\vec{r})$ en 180 en los ejes L, R y T que son los principales ejes del campo eléctrico. De consecuencia, la permitividad dieléctrica para las muestras de la madera usados durante los cálculos es de la siguiente forma diagonal simplificada (véase Figura 4.3).

$$[\varepsilon] = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_{\parallel}' & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp}' & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\perp}' \end{bmatrix} \quad (4.1.6)$$

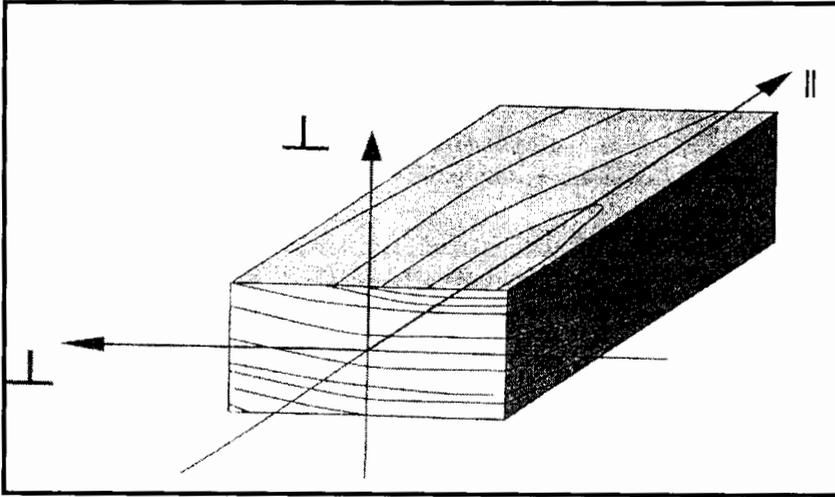


Figura 4.3: Ejes ortogonales de la madera

4.1.4 Valores de permitividad dieléctrica al variar sus principales parámetros

La siguiente tabla muestra como varían las propiedades dieléctricas de la madera in función de la humedad y de la temperatura [34].

(mc) %	10		20		30		60	
T (°C)	ϵ'_{\perp}	ϵ''_{\perp}	ϵ'_{\perp}	ϵ''_{\perp}	ϵ'_{\perp}	ϵ''_{\perp}	ϵ'_{\perp}	ϵ''_{\perp}
5	1.9	0.15	2.5	0.33	3.2	0.54	5.3	0.74
20	2.0	0.16	2.5	0.35	3.2	0.58	5.3	0.80
50	2.1	0.17	2.5	0.33	3.2	0.51	5.3	0.74
90	2.3	0.18	2.6	0.29	3.2	0.45	5.3	0.69
T (°C)	ϵ'_{\parallel}	ϵ''_{\parallel}	ϵ'_{\parallel}	ϵ''_{\parallel}	ϵ'_{\parallel}	ϵ''_{\parallel}	ϵ'_{\parallel}	ϵ''_{\parallel}
5	2.41	0.29	3.63	0.65	5.50	1.21	9.12	1.55
20	2.54	0.30	3.63	0.73	5.50	1.27	9.12	1.64
50	2.67	0.32	3.63	0.65	5.50	1.16	9.12	1.55
90	2.92	0.35	3.77	0.60	5.50	0.99	9.12	1.37

Tabla II: Propiedades Dieléctricas de la madera

4.1.5 Madera seca del Pino

Para este modelo se utilizaran valores experimentales que han sido obtenidos mediante otro método [37], para verificar la eficiencia del método desarrollado en la tesis.

La siguiente tabla reporta las principales características de la muestra de la madera seca del pino considerado.

Forma	paralelogramo
Dimensión	9 cm. x 4.5 cm. x 90 cm
Densidad	441 kg/m ³
Contenido de humedad	12.5%
Frecuencia de trabajo	2.45 GHz
Temperatura	15 °C
Potencia di trabajo	0.5 KW
Permitividad eléctrica	$\epsilon_{r\parallel}=2.79-0.41j$ $\epsilon_{r\perp}=2.11-0.21j$

Tabla III: Características del modelo de pino seco.

4.1.6 Madera húmeda del Pino

Así como en el caso precedente, se consideran los valores experimentales obtenidos en [37], donde la densidad y el contenido de humedad son aumentados, y al contrario la temperatura ha sido disminuida.

Forma	paralelogramo
Dimensión	8.3 cm.x 8.3 cm.x 50 cm
Densidad	567 kg/m ³
Contenido de humedad	35.6%
Frecuencia de trabajo	2.45 GHz
Temperatura	5 °C
Potencia di trabajo	0.5 KW
Permitividad eléctrica	$\epsilon_{r\parallel}=6.18-1.27j$ $\epsilon_{r\perp}=3.59-0.58j$

Tabla IV: Características del modelo de pino húmedo.

4.2 Modelos con Pilares de Hormigón

El hormigón del cemento Pórtland (PCC) es una mezcla de cemento, agua y agregados [4]. Gracias a su durabilidad, su bajo costo y su basta disponibilidad, hace ya aproximadamente ciento cincuenta años es el material de construcción más popular y utilizado en las infraestructuras.

La mayor parte de las carreteras y puentes son hechos de este material. Lamentablemente en la mayoría de los países, tales infraestructuras están actualmente deteriorándose con una rapidez preocupante [4]. Antes de emprender las necesarias reparaciones de una estructura en PCC, es sin embargo fundamental evaluar con precisión sus condiciones de manera efectivas.

Las técnicas de diagnostica no destructiva (NDT) de los materiales se obtienen por lo tanto adaptados para este fin, puesto que son en grado de brindar informaciones útiles sobre la estructura y la composición de los materiales, sin alterar el estado del material en sí.

En este trabajo se consideran métodos de diagnostica no invasiva basadas en el empleo de ondas electromagnéticas; tales técnicas nos dan una reconstrucción (aproximada) de las características electromagnéticas (permitividad dieléctrica y permeabilidad magnética) del material, del cual es posible extraer informaciones útiles, las cuales, tales como en el caso del cemento, la presencia y la localización de defectos, la porosidad y el porcentaje de agua.

4.2.1 Clasificación de pilares de Hormigón basado en su tipo de agregado

En el caso del PCC los agregados son utilizados como relleno y ocupan entre 60 y 80% del volumen total.

Los agregados pueden ser clasificados en base a su tamaño. Los agregados mayores que 4.75 mm se denominan agregados de grano grueso y los menores que 4.75 mm como agregados de granulado fino [21].

Los agregados tienen una significativa influencia en las propiedades físicas del PCC, tales como peso específico, el coeficiente de elasticidad, la capacidad de absorción y la duración.

Además las propiedades del PCC son influenciadas por la estructura y la degradación del agregado [30].

Entre los agregados, la grava es el más utilizado comúnmente que el granito, él mismo ha sido seleccionado para la mayor parte de las mezclas, y es secado en un horno a 100 °C por 24 horas antes de ser mezclado con cemento y agua [2].

Se considerara un pilar con las características descritas en la tabla

Forma	Cilindrico circular
Dimensión total del pilar	d = 0.5 m , h = 5.55 m.
Relación agua/cemento (w/c)	0.35
Tiempo de secado	28 días
Grava (tamaño máximo 10 mm)	60% del volumen de PCC

Tabla V Principales datos del modelo basado en su tipo de agregado.

Según la investigación por la Virginia Tech, es de conocimiento que la grava tiene una constante dieléctrica relativa aproximada de 8, mientras que la del granito es de aproximadamente 4 [31].

Debido a que los agregados ocupan hasta el 60% del volumen del PCC, ellos tienen un efecto significativo sobre las propiedades dieléctricas del PCC.

De esta investigación, se determinó que la parte real de la constante dieléctrica de la grava es significativamente mayor que la del granito dentro del rango de frecuencias consideradas [30].

4.2.2 Clasificación de pilares de hormigón basado por la relación w/c

Uno de los parámetros más importantes que determina la resistencia a la compresión del hormigón, es la relación entre el peso de la agua y cemento (w/c) utilizados.

La resistencia a la compresión del hormigón es generalmente el parámetro fundamental en los proyectos de estructuras en cemento armado y es especificada en conformidad a las normativas de construcción.

En muchas aplicaciones prácticas es de tanto interés conocer la resistencia del hormigón antes de los 28 días prescritos. Y esto se lo puede analizar por ejemplo aplicando fuerzas de precompresión y aplicando cargas sobre una estructura.

La resistencia del hormigón disminuye mientras w/c aumenta. Además la relación w/c tiene efecto sobre la variación de resistencia del hormigón con el tiempo [4].

En general, se consideran modelos con w/c igual a 0.35, 0.42 y 0.5. Para las simulaciones se ha escogido w/c = 0.42 porque en esta relación el cemento sufre la hidratación completa [22].

Los parámetros del modelo utilizado son resumidos en la siguiente tabla

Forma	Cilíndrica
Dimensión total del pilar	d = 0.5 m , h = 5.55 m.
Relación agua/cemento	0.42
Tiempo de secado	28 días
Granito (máximo tamaño 10 mm)	60% del volumen PCC

Tabla VI: Principales datos sobre el modelo basado en la relación w/c

4.2.3 Clasificación de pilares de hormigón basado en su tipo de aditivo

En la actualidad, el uso de aditivos se ha convertido en una práctica obligatoria al momento de diseñar el hormigón. Debido a que la presencia de éstos permite obtener condiciones específicas para el manejo y tratamiento del hormigón. Los aditivos pueden definirse como ingredientes, diferentes al cemento, agua y agregados, que son añadidos a la mezcla inmediatamente antes, durante o después del mezclado para mejorarle alguna característica, contrarrestar posibles deficiencias, lograr mayor economía o desarrollar propiedades especiales [38]

El **microsilicón** es el aditivo más utilizado. El modelo elegido en este contexto es especificado por los parámetros reportados en la siguiente tabla.

Forma	Cilíndrica
Dimensión total del pilar	d = 0.5 m , h = 5.55 m.
Relación w/c	0.42
Tiempo de secado	28 días
Grava (máximo 10 mm de diámetro)	60% del vol. de PCC
Microsilicón	7% por peso de cemento

Tabla VII: Principales datos del modelo basado en el tipo de aditivo

El microsilicon es utilizado con mezclas de w/c muy elevado, puesto que las relaciones w/c más bajas tienen permeabilidad baja y alta resistencia.

La siguiente tabla muestra algunos resultados [30].

Tiempo de secado	ε'		ε''	
28 días	305 MHz	505 MHz	305 MHz	505 MHz
	11.535	9.89	2.915	1.645

Tabla VIII Valores experimentales de la constante dieléctrica del PCC con microsilicón

4.2.4 clasificación de pilares de hormigón basado en el efecto de cloruros (sales)

La corrosión del acero es un proceso electroquímico. Las no uniformidades del acero, debidas a las soldaduras, a las propiedades físicas y químicas del PCC pueden producir diferencias de potenciales y por ende corrosión. Sin

embargo, la corrosión es evitada por una película pasiva de óxido férrico, la cual se forma durante la hidratación del cemento.

La alta alcalinidad del PCC debida al Hidróxido de calcio impide la rotura de esta película. En algunos casos, la presencia de sodio y de óxidos de potasio incrementa el pH aproximadamente a 13.2 [21].

Condicionamiento de las muestras

Ha sido analizado el efecto de los cloruros y del contenido de agua sobre las propiedades dieléctricas del PCC. Los cloruros son introducidos en el PCC añadiendo NaCl al agua de la mezcla. La tasa de NaCl es de 1.65 kg/m^3 . En las muestras de cemento Portland considerados en seguida han sido dejadas a dos niveles 2.38 y 4.76 kg/m^3 de los cloruros, del PCC, usando el granito a w/c de 0.42. El nivel de los cloruros en el PCC en el compartimiento ha sido determinado usando la prueba soluble en agua del cloruro en conformidad con ASTM 1218-92b después de 90 días de secado.

Se adoptara en este modelo un pilar real con una alma de acero donde las especificaciones están en la siguiente tabla.

Forma	Cilíndrica
Dimensión total del pilar	d = 0.5 m , h = 5.55 m.
Dimensión del alma interna de acero	d = 0.08 m , h = 5.55 m
Relación agua/cemento	0.42
Tiempo de secado	90 días
Granito (máximo 10 mm de tamaño)	60% del volumen de PCC
concentración	4.76 kg/m^3 NaCl

Tabla IX: Principales datos sobre el modelo basado en el efecto de cloruros

Además un estudio más reciente [31], ha mostrado los cambios insignificativos ya sea en la parte imaginaria que en la parte real con diferentes concentraciones de cloruros a 28 días de tratamiento.

CAPITULO 5

RISULTADOS NUMÉRICOS

En este capítulo son reportados los resultados obtenidos aplicando los métodos desarrollados en precedencia a la inversión de datos *sintéticos*, con o sin ruido.

5.1 Descripción de la configuración simulada

Antes de presentar los resultados es necesario ilustrar en detalle las características de la situación simulada y definir las cantidades empleadas para medir las prestaciones de los algoritmos.

5.1.1 Disposición de las fuentes y de los puntos de medición

Para obtener los resultados presentados en este capítulo se han empleado como fuentes hilos de corriente ideales (es decir infinitamente largos y de espesor despreciable), dispuestos *paralelamente* al eje del objeto cilíndrico por reconstruir. Desde el momento que es siempre válida la hipótesis de *régimen sinusoidal permanente*, la corriente que atraviesa el hilo es completamente descrita por el *número complejo* $I(\omega)$. Además todas las fuentes son *idénticas* entre ellas y son por lo tanto caracterizadas por la misma corriente $I(\omega)$.

Las antenas transmisoras son uniformemente sobre una circunferencia de radio R_s a una distancia angular de θ_s la una de la otra; seleccionado entonces un sistema referencial *polar* con origen en el centro de la circunferencia, las coordenadas polares (ρ_k, θ_k) de la k -ésima fuente son, como mostrado en la figura 5.1,

$$\rho_k = R_s \quad (5.1.1)$$

$$\theta_k = (k-1)\theta_s$$

Con $k = 1, \dots, S$. Evidentemente

$$\theta_s = \frac{2\pi}{S} \quad (5.1.2)$$

Además el vector posición de la k -ésima fuente se escribe

$$\mathbf{r}_i^{(k)} = \rho_k \cos \theta_k \hat{x} + \rho_k \sin \theta_k \hat{y} = R_s \cos[(k-1)\theta_s] \hat{x} + R_s \sin[(k-1)\theta_s] \hat{y} \quad (5.1.3)$$

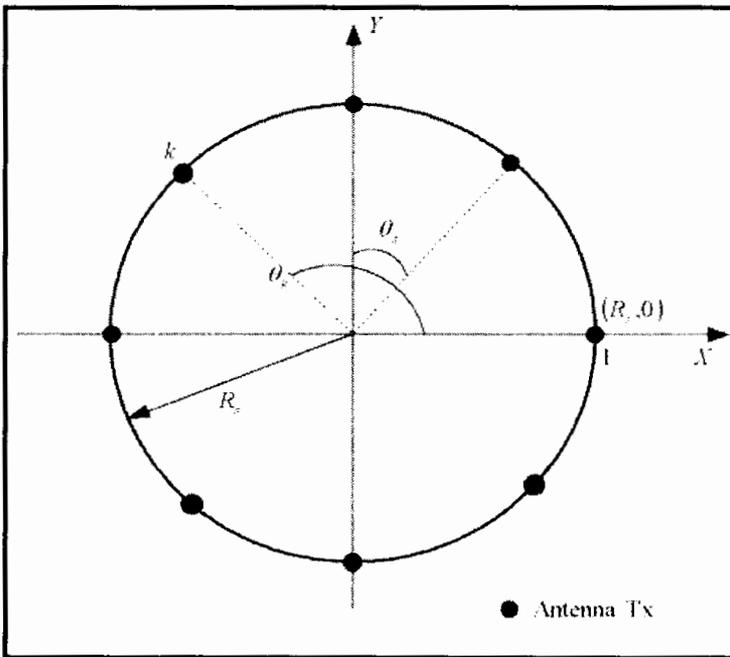


Figura 5.1: Disposición de las fuentes para $S = 8$

El campo eléctrico incidente producido por la fuente k -ésima vale por lo tanto

$$E_z^{i,k}(r_s, \omega) = -\frac{k_b \eta}{4} I(\omega) H_0^{(2)}(k_b \|r_s - r_i^{(k)}\|) \quad (5.1.4)$$

donde $\eta = \sqrt{\frac{\mu_b}{\epsilon_b}}$.

Los M puntos en los cuales se mide el campo eléctrico producido por cada fuente son dispuestos sobre un arco de circunferencia de radio R_r , concéntrica a aquella sobre los cuales son dispuestos los transmisores. Denominado θ_r la distancia angular entre dos puntos de medición adyacentes, la amplitud angular del arco de circunferencia vale

$$\Delta\theta_r = (M-1)\theta_r \quad (5.1.5)$$

Además los M puntos de medición relativos a la fuente s -ésima resultan simétricos respecto al eje pasante por el origen del sistema de referencia y por la fuente s -ésima.

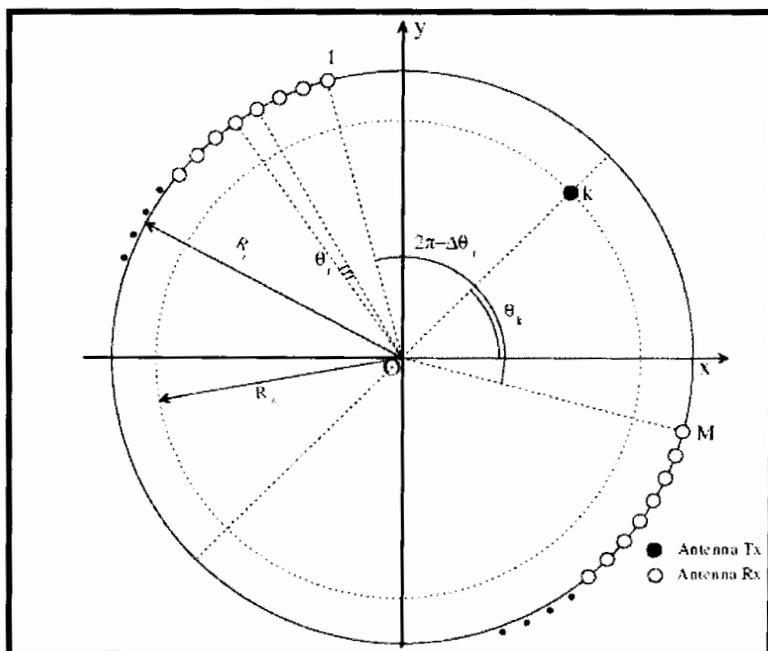


Figura 5.2: Disposición de los puntos de medición

5.1.2 Dominio de indagación

En el párrafo 1.2 se ha explicado como en las ecuaciones (1.2.4) se es oportuno escoger como dominio de los operadores integrales no la región ocupada por el objeto, que es *incógnita*, sino una región de forma *conocida* que contenga, por hipótesis, al objeto.

En todas las simulaciones efectuadas se ha empleado un *dominio de indagación* di forma *rectangular*, con baricentro en el origen del sistema de referencia y con los lados, de longitud L y H , paralelos a los ejes cartesianos, así como es ilustrado en la figura 5.3.

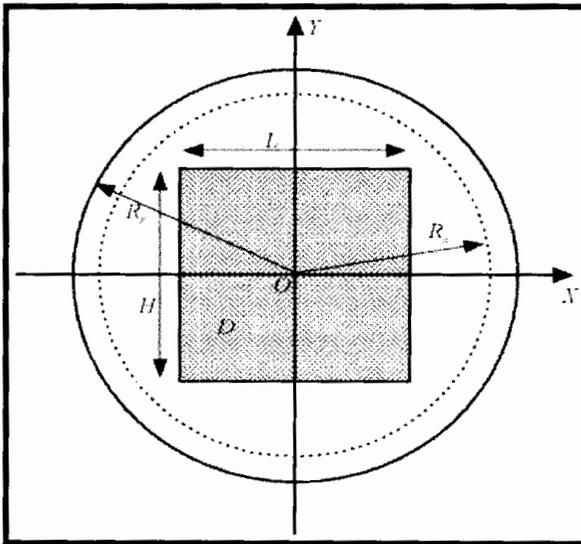


Figura 5.3: Dominio de indagación

El dominio ha sido particionado en $N = N_L N_H$ subdominios rectangulares, siendo N_L y N_H , respectivamente, el número de subdivisiones a lo largo de los lados paralelos al eje x y al eje y .

5.2 Parámetros de error

Con el fin de cuantificar la bondad de una reconstrucción, es necesario definir los *parámetros de error*. Ya que se ha prestado atención principalmente a la reconstrucción de la permitividad dieléctrica, se ha decidido emplear, entre las varias posibilidades, las siguientes cantidades.

$$e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|\varepsilon_{ric}(r'_i) - \varepsilon(r'_i)|}{\varepsilon(r'_i)} \quad (5.2.1)$$

$$e_{bg} = \frac{1}{N_{bg}} \sum_{i \in I_{bg}} \frac{|\varepsilon_{ric}(r'_i) - \varepsilon(r'_i)|}{\varepsilon(r'_i)} \quad (5.2.2)$$

$$e_{obj} = \frac{1}{N_{obj}} \sum_{i \in I_{obj}} \frac{|\varepsilon_{ric}(r'_i) - \varepsilon(r'_i)|}{\varepsilon(r'_i)} \quad (5.2.3)$$

donde $I_{bg} = \{i \in [1, N]: \varepsilon(r'_i) = \varepsilon_b\}$ y $I_{obj} = \{i \in [1, N]: \varepsilon(r'_i) \neq \varepsilon_b\}$; N_{bg} e N_{obj} son, respectivamente, el número de elementos de I_{bg} y de I_{obj} .

Las cantidades definidas en las ecuaciones precedentes representan, como es obvio, el *error relativo medio* complejo sobre la reconstrucción compleja (5.2.1), del *background* (5.2.2) y del objeto (5.2.3).

Para las reconstrucciones de objetos homogéneos es además útil considerar la cantidad

$$\varepsilon_r^m = \frac{1}{N_{obj}} \sum_{i \in I_{obj}} \varepsilon_{ric}(r'_i) \quad (5.2.4)$$

que representa el valor medio de permitividad dieléctrica relativa reconstruida en los subdominios ocupados por el objeto original.

Es fundamental considerar también la siguiente cantidad

$$e_2 = \frac{\sum_{i=1}^N [\varepsilon_{ric}(r_i^i) - \varepsilon(r_i^i)]^2}{\sum_{i=1}^N \varepsilon^2(r_i^i)} \quad (5.2.5)$$

La misma representa en efecto el cuadrado de la norma euclidiana del *error normalizado de reconstrucción*, la cual utilizaremos más adelante en las graficas.

5.3 Reconstrucción de los modelos con la Aproximación de Born

El primer grupo de resultados es referente a la reconstrucción de cilindros circulares homogéneos al variar tanto su permitividad dieléctrica $\varepsilon(r)$ y del radio a , con la aproximación de Born de segundo orden.

Las simulaciones han sido ejecutadas con datos 'exactos' y con 'ruido'. Los datos han sido obtenidos mediante la solución *analítica* del problema de *dispersión* basado sobre el desarrollo del campo eléctrico en autofunciones [3].

Los parámetros que caracterizan al aparato de medición empleado son los siguientes:

Parámetro	Valor
$f = \frac{\omega}{2\pi}$	600 MHz
I	1.25 mA
R_s	1.67 m
R_r	1.67 m
S	8
θ_s	45°
N_l	27
N_H	27
H	0.4 m
L	0.4 m
M	56
$\Delta\theta_r$	300°
θ_r	5.4545°

Tabla X : Parámetros de instrumentación

Es muy importante subrayar el hecho de que, en todos los casos, la reconstrucción viene hecha escogiendo como solución inicial la escena del vacío; en otras palabras se ha puesto $\chi_0 = 0$.

Una de las principales características del método utilizado consiste en la capacidad de determinar una buena solución también si χ_0 está 'lejos' de la solución exacta. Otros métodos de inversión necesitan al contrario de un punto de partida 'cercano' a tal solución.

En todos los casos se han efectuado 20 iteraciones externas. El número de iteraciones internas, al contrario ha sido 5 tanto para datos con ruido y sin ruido.

5.3.1 Reconstrucción en ausencia de ruido

En esta sección están presentes las reconstrucciones de los modelos de pilares de hormigón y de la madera obtenidos con la aproximación de Born de segundo orden, tanto en vistas de trazados bidimensionales y tridimensionales, del campo eléctrico total original y reconstruido, además del error normalizado de reconstrucción; utilizando datos *no* corrompidos por ruido.

5.3.1.1 Modelos con Pilares de Hormigón

Se han reconstruido cilindros homogéneos con centro en el punto de coordenadas $(0.0 \text{ m}, 0.0 \text{ m})$, de radio 0.06 m , y con una permitividad dieléctrica relativa de valor 2.48 (véase en la figura 5.4).

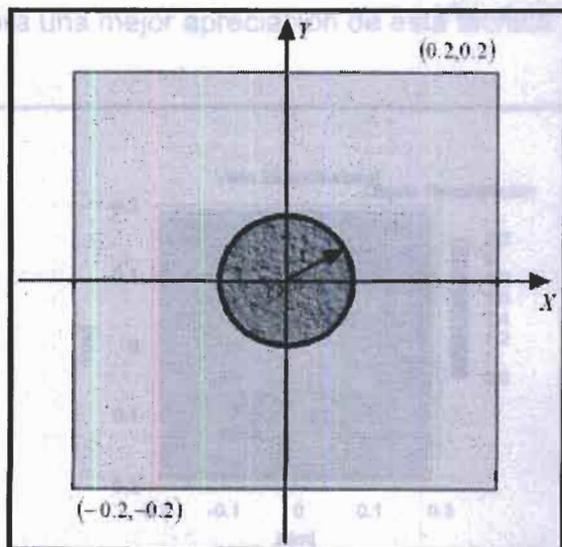


Figura 5.4: Objeto a reconstruir

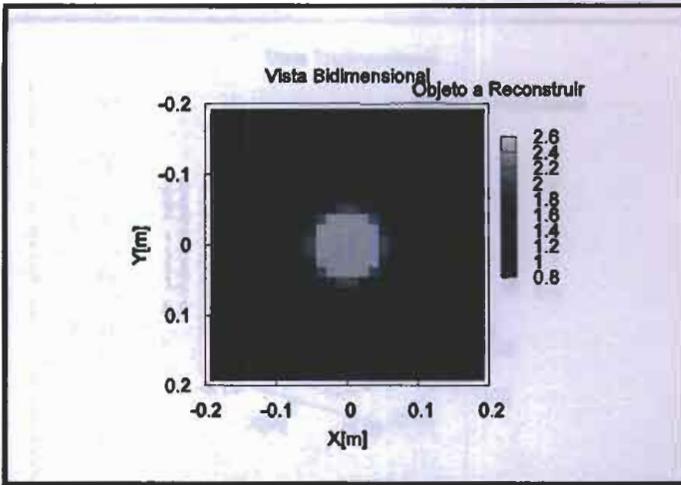


Figura 5.5: Simulación bidimensional del *objeto a reconstruir*

con $\epsilon(\vec{r}) = 2.48$ y $a = 0.06m$

con $\epsilon(\vec{r}) = 2.48$ y $a = 0.06m$

En la figura anterior podemos observar una barra de colores que nos representa los niveles de permitividad dieléctrica del objeto, lo mismo tendremos en las respectivas reconstrucciones tanto bidimensional como tridimensional para una mejor apreciación de esta técnica.

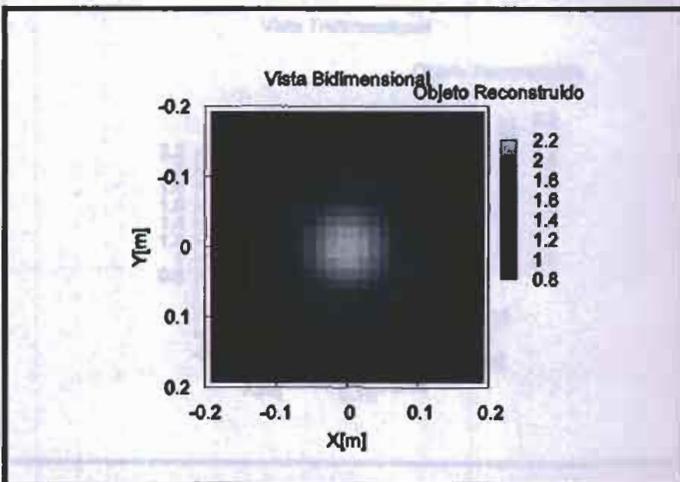


Figura 5.6: Simulación bidimensional del *objeto reconstruido*

con $\epsilon(\vec{r}) = 2.48$ y $a = 0.06m$

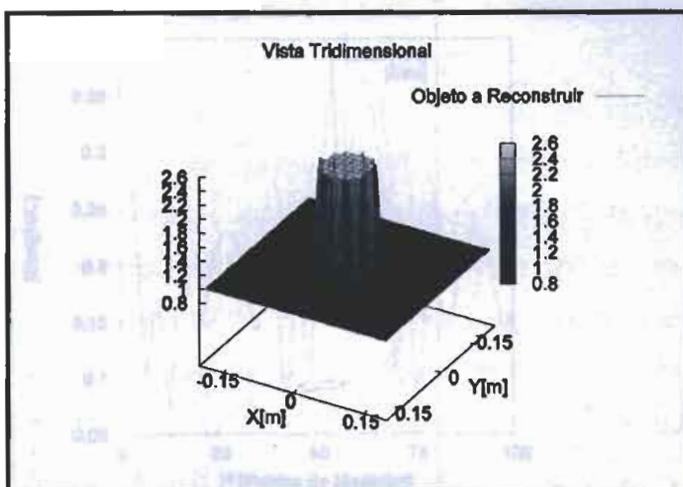


Figura 5.7: Simulación tridimensional del *objeto a reconstruir*

con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.48$ y $a = 0.06m$

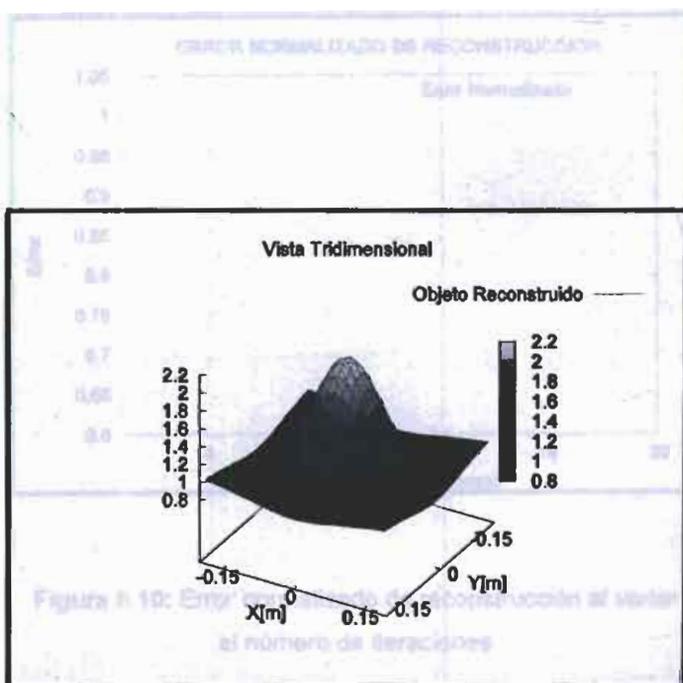


Figura 5.8: Simulación tridimensional del *objeto reconstruido*

con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.48$ y $a = 0.06m$

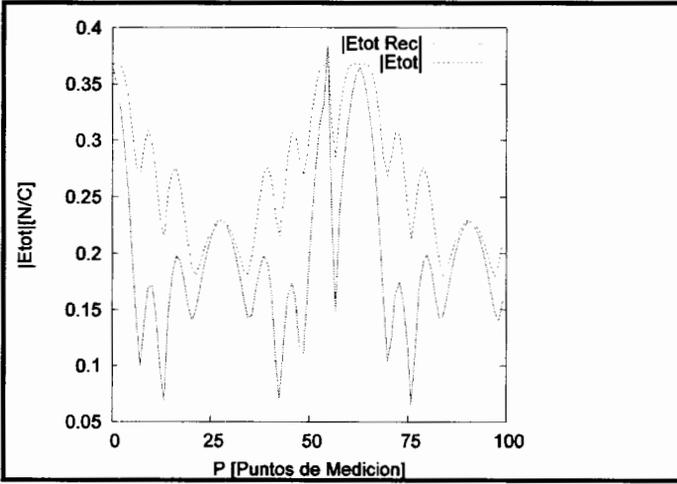


Figura 5.9: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total

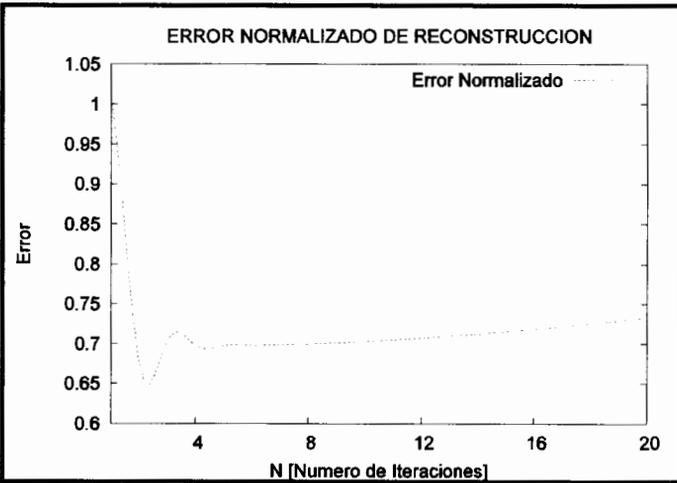


Figura 5.10: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

De las figuras anteriores podemos concluir:

- i. La reconstrucción de la figura 5.6 con su permitividad dieléctrica relativa de 2.48, se obtuvo con una regular aproximación. Sin embargo, el hormigón es un fuerte dispersador y tengamos presente que la aproximación de Born trabaja bien con débiles dispersores.
- ii. A nivel tridimensional se pierde la reconstrucción, pues el algoritmo está desarrollado para reconstrucciones bidimensionales.
- iii. Referente al campo eléctrico total en la fig. 5.9, podemos notar que la reconstrucción se aproxima a la original.
- iv. Sobre el error notamos que la fig. 5.10 comienza a decrecer hasta una cierta iteración luego a crecer hasta llegar un nivel donde nuevamente decrece, después se mantiene con un ligero crecimiento a lo largo de las iteraciones restantes.

5.3.1.2 Modelos con la madera

Se han reconstruido cilindros homogéneos con centro en el punto de coordenadas (-0.25 m, 3.0 m), de radio 0.1 m, y con una permitividad dieléctrica relativa de 1.8 y 2.2 (véase en la figura 5.10).

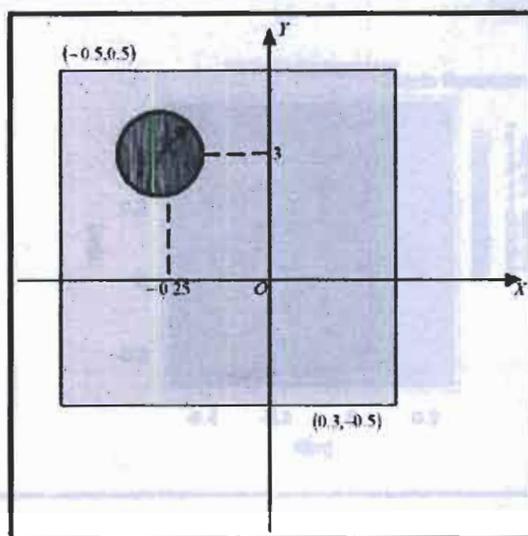


Figura 5.13: Simulación bidimensional del objeto a reconstruir

Figura 5.11: Objeto a reconstruir

Débiles dispersadores: cilindro con $\varepsilon(\vec{r}) = 1.8$

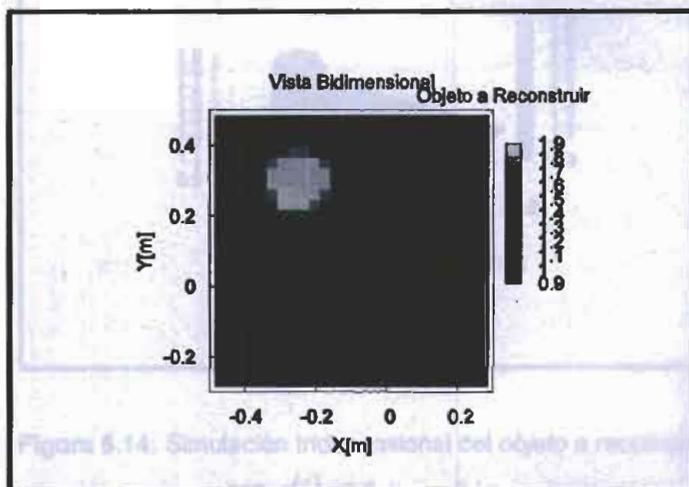


Figura 5.12: Simulación bidimensional del objeto a reconstruir con $\varepsilon(\vec{r}) = 1.8$ y $a = 0.1m$

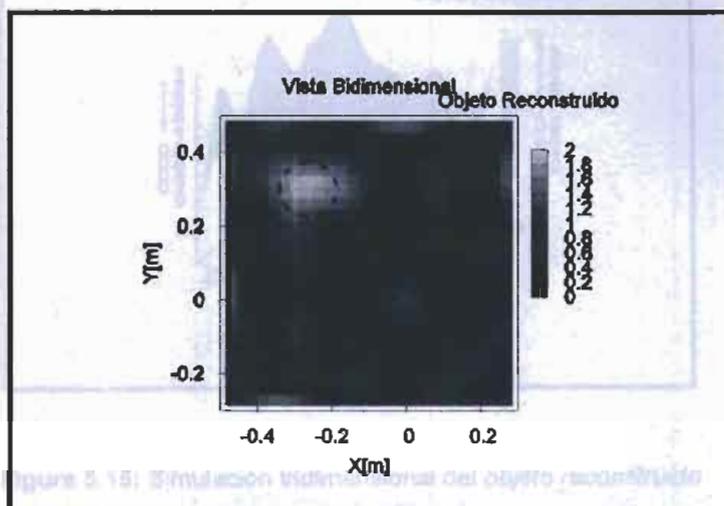


Figura 5.13: Simulación bidimensional del *objeto reconstruido*

con $\varepsilon(\vec{r}) = 1.8$ y $a = 0.1m$

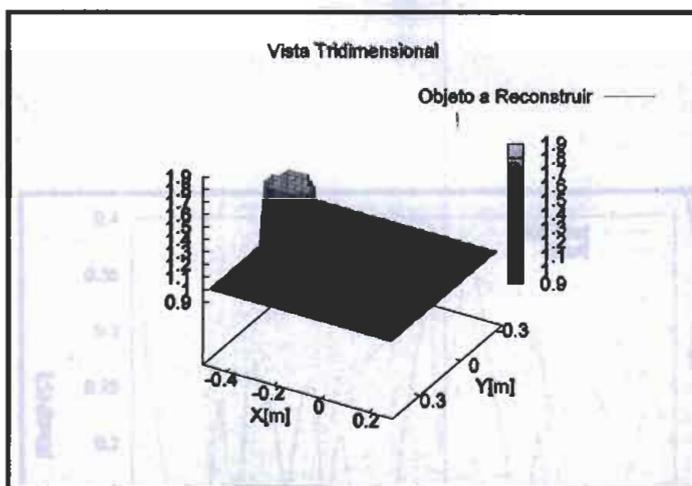


Figura 5.14: Simulación tridimensional del *objeto a reconstruir*

con $\varepsilon(\vec{r}) = 1.8$ y $a = 0.1m$

Figura 5.16: Reconstrucción del módulo del campo eléctrico

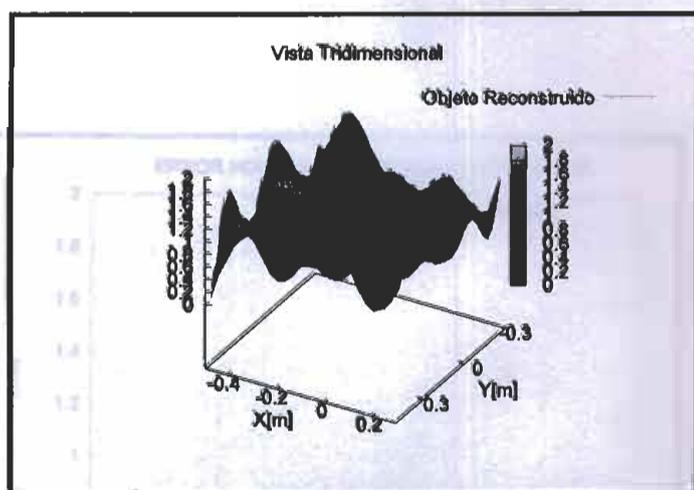


Figura 5.15: Simulación tridimensional del objeto reconstruido con $\varepsilon(\vec{r}) = 1.8$ y $a = 0.1m$

Figura 5.17: Error Normalizado de reconstrucción versus el número de muestreos

dispersadores: cilindro con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$

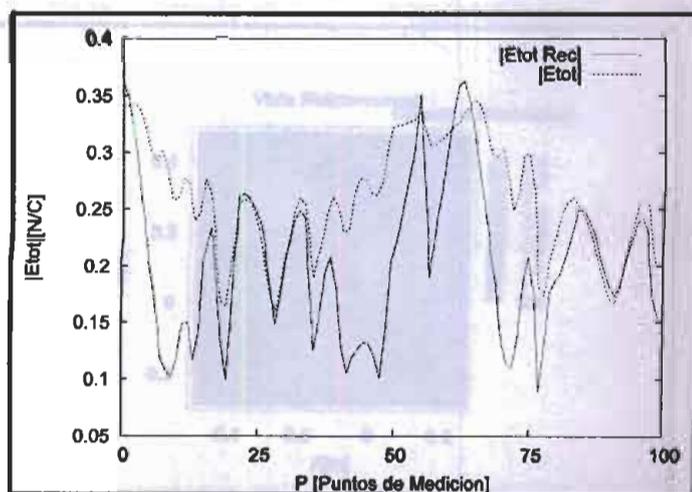


Figura 5.16: Reconstrucción del módulo del campo eléctrico total

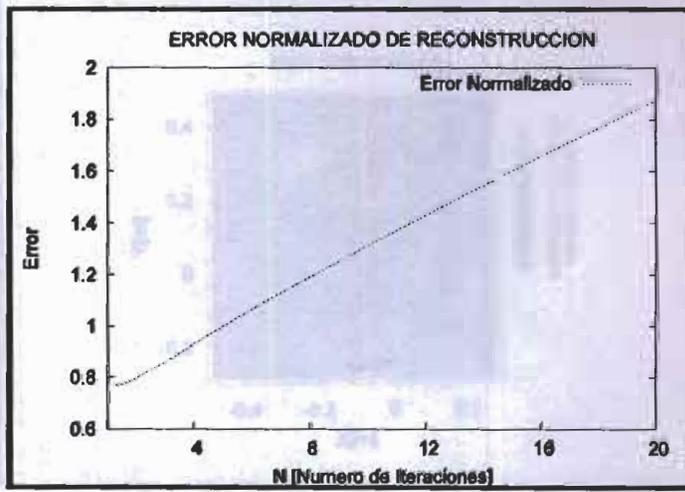


Figura 5.17: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

Débiles dispersadores: cilindro con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$

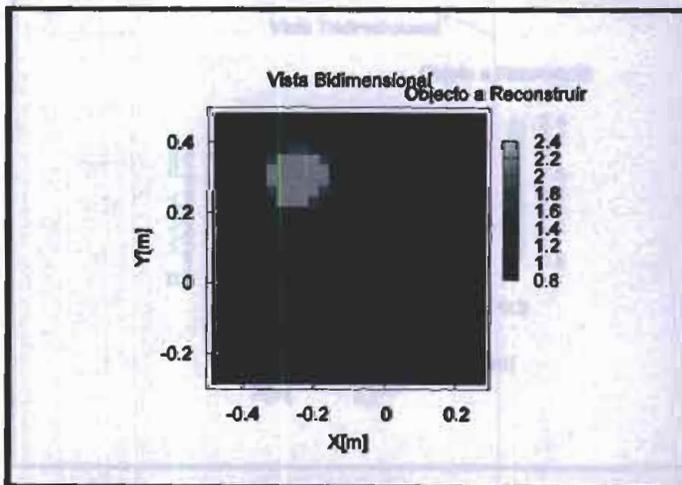


Figura 5.18: Simulación bidimensional del objeto a reconstruir con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$ y $a = 0.1m$

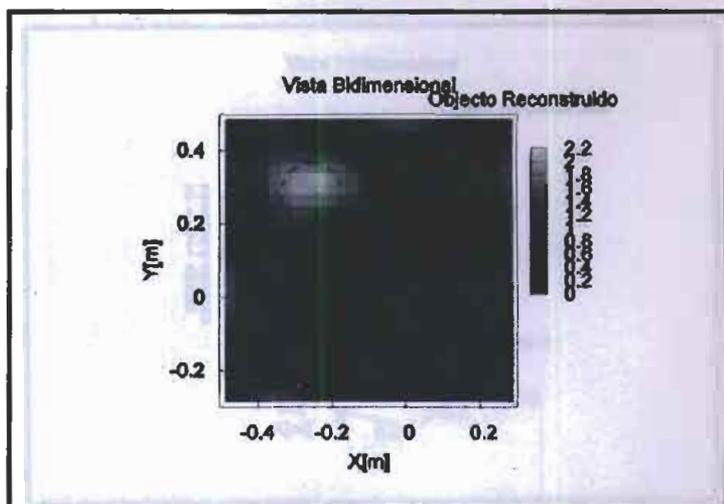


Figura 5.19: Simulación bidimensional del *objeto reconstruido* con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$ y $a = 0.1m$

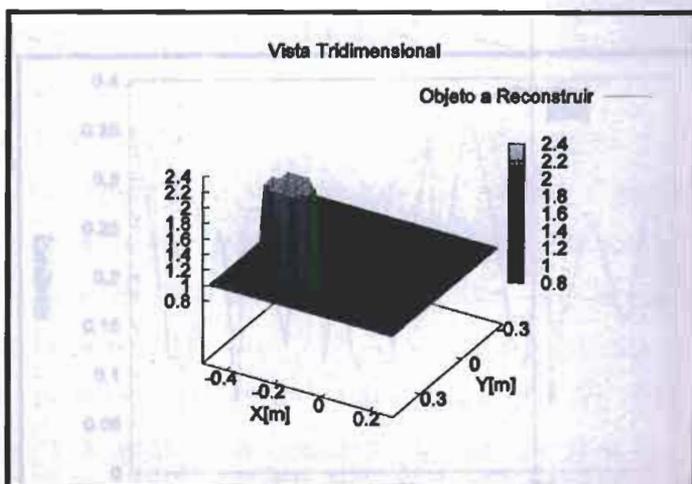


Figura 5.20: Simulación tridimensional del *objeto a reconstruir* con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$ y $a = 0.1m$

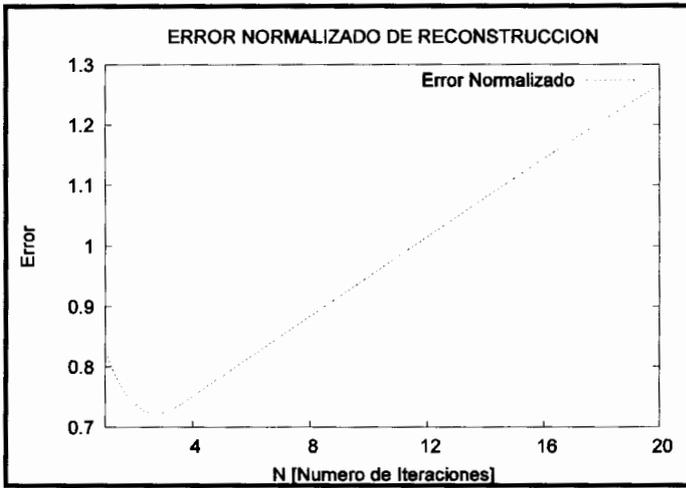


Figura 5.23: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

De las figuras anteriores podemos concluir:

- i. Las reconstrucciones 5.13 y 5.19 con su permitividad dieléctrica relativa de 1.8 y 2.2 respectivamente, se obtuvo una mejor visualización con 2.2.
- ii. A nivel tridimensional se pierde la reconstrucción, pues esta técnica está desarrollada para reconstrucciones bidimensionales.
- iii. Referente a los campos eléctricos totales tanto en la figuras 5.16 y 5.22, podemos notar que existe una mejor aproximación de reconstrucción en la figura 5.22, debido a lo expuesto en i.
- iv. Sobre los errores podemos notar que tanto la fig. 5.17 y 5.23 son de manera creciente con respecto a las iteraciones. Sin embargo notamos en la fig. 5.23 con permitividad dieléctrica 2.2 el error disminuye hasta una cierta iteración y después comienza a crecer.

Se han también reconstruido prismas cuadráticos homogéneos con centro en el punto de coordenadas (0.1 m, 0.0 m), de radio 0.1 m, y con una permitividad dieléctrica relativa de 1.8 y 2.2 (véase en la figura 5.24)

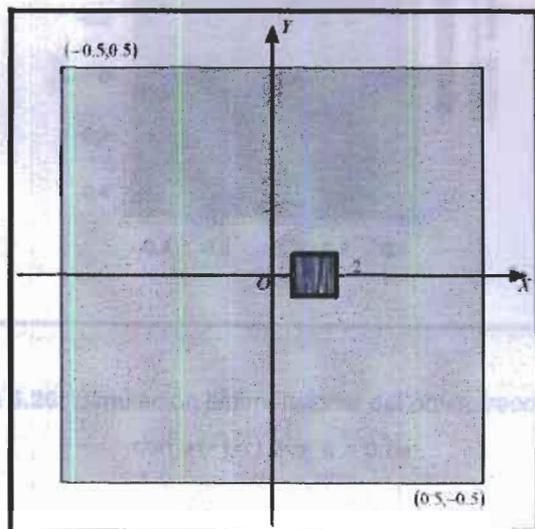


Figura 5.24: Objeto a reconstruir

Débiles dispersadores: prisma cuadrático $\epsilon(\vec{r}) = 1.8$

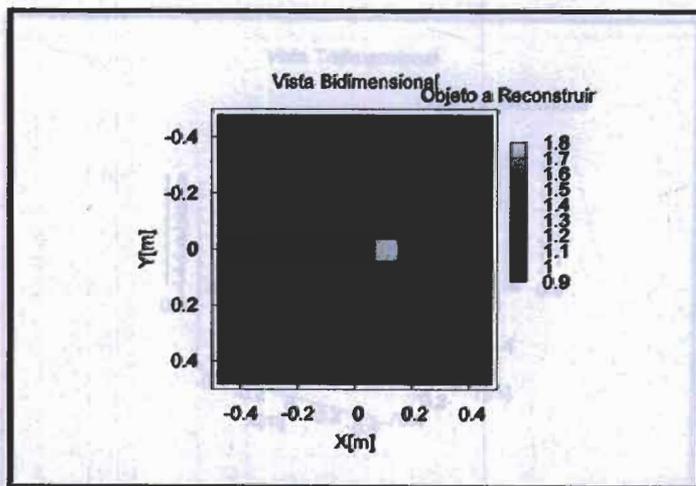


Figura 5.25: Simulación bidimensional del objeto a reconstruir con $\epsilon(\vec{r}) = 1.8$ y $a = 0.1m$

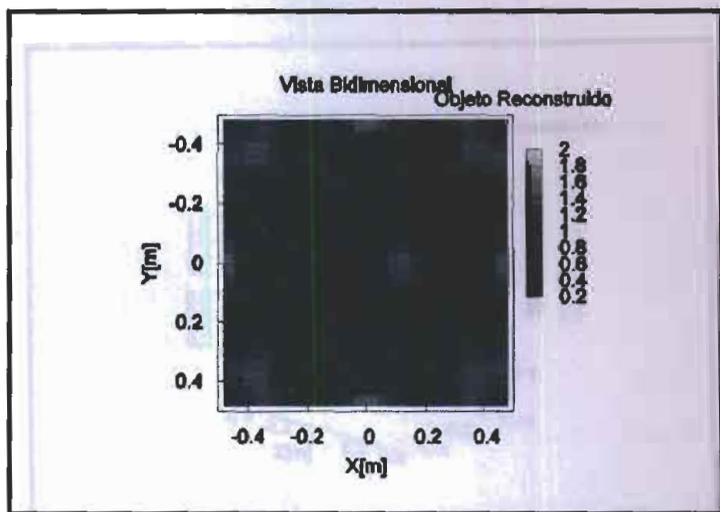


Figura 5.26: Simulación bidimensional del *objeto reconstruido*
con $\varepsilon(\vec{r}) = 1.8$ y $a = 0.1m$

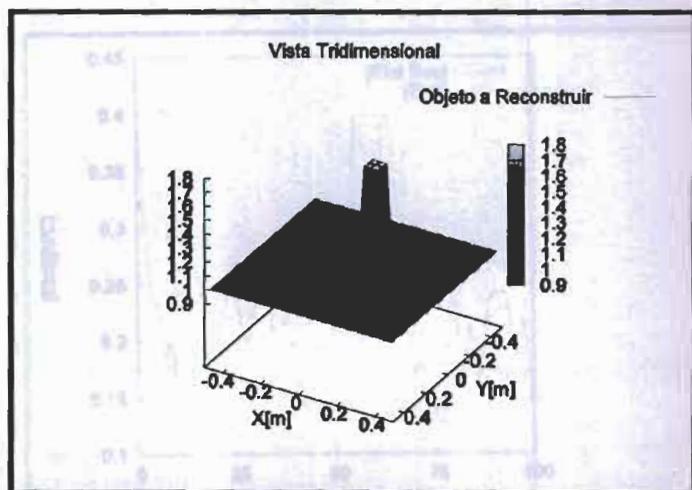


Figura 5.27: Simulación tridimensional del *objeto a reconstruir*
con $\varepsilon(\vec{r}) = 1.8$ y $a = 0.1m$

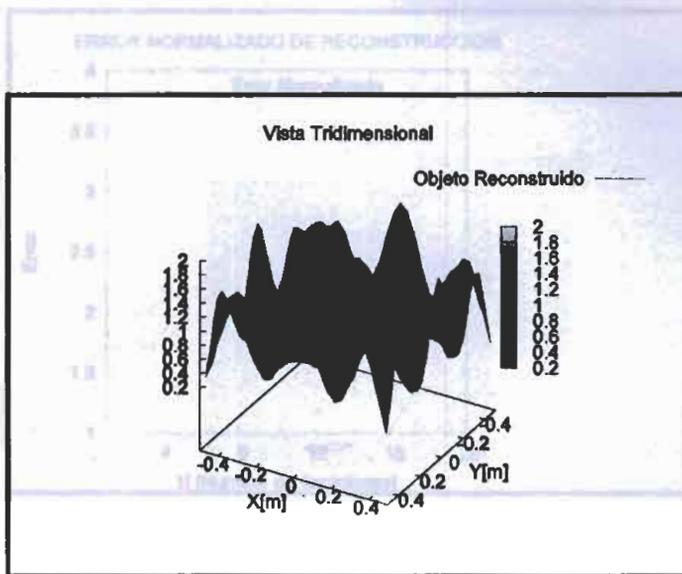


Figura 5.28: Simulación tridimensional del objeto reconstruido con $\varepsilon(\vec{r}) = 1.8$ y $a = 0.1m$

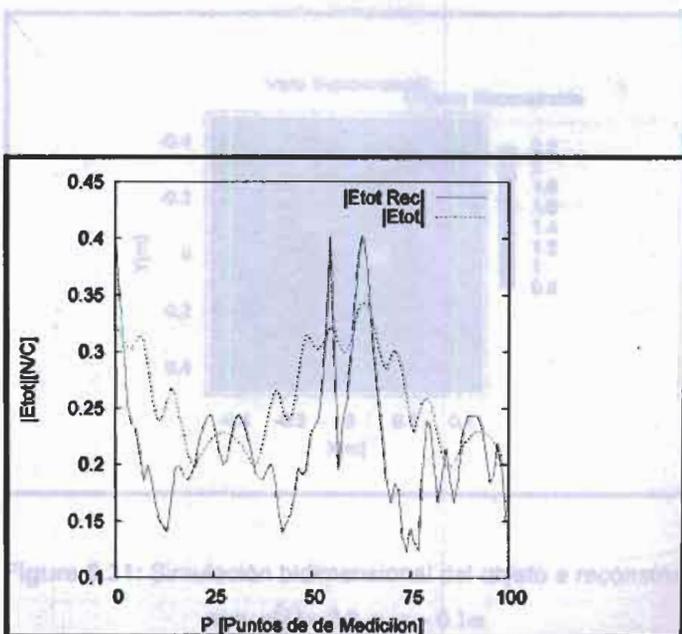


Figura 5.29: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total

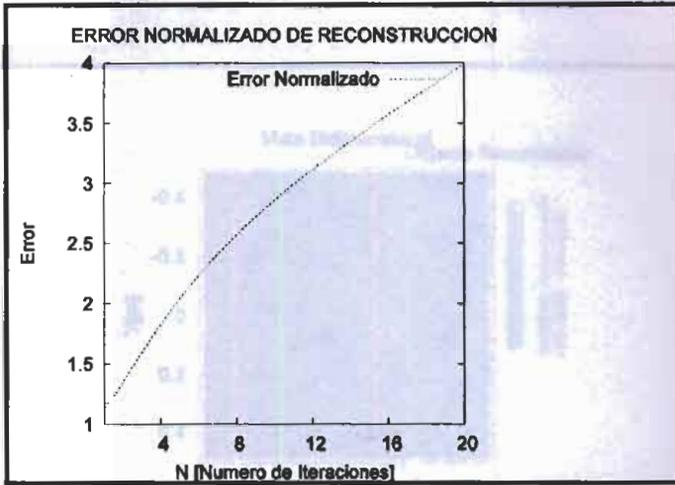


Figura 5.30: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

Figura 5.32: Simulación bidimensional del objeto a reconstruir con $\epsilon(\vec{r}) = 2.2$ y $a = 0.1m$

Débiles dispersadores: prisma cuadrático $\epsilon(\vec{r}) = 2.2$

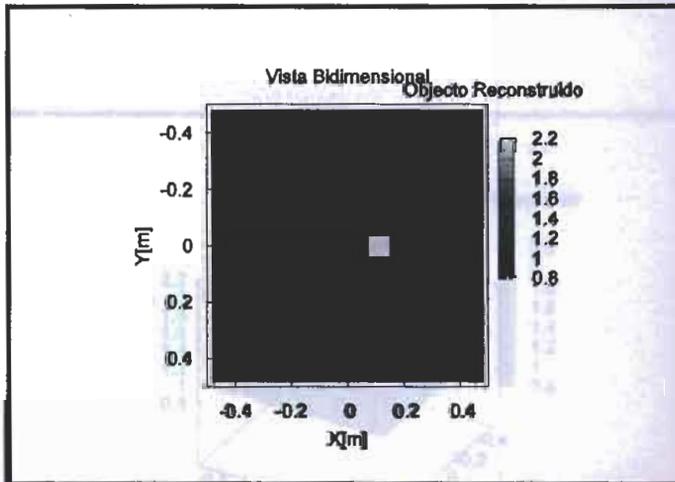


Figura 5.31: Simulación bidimensional del objeto a reconstruir con $\epsilon(\vec{r}) = 2.2$ y $a = 0.1m$

Figura 5.33: Simulación tridimensional del objeto a reconstruir con $\epsilon(\vec{r}) = 2.2$ y $a = 0.1m$

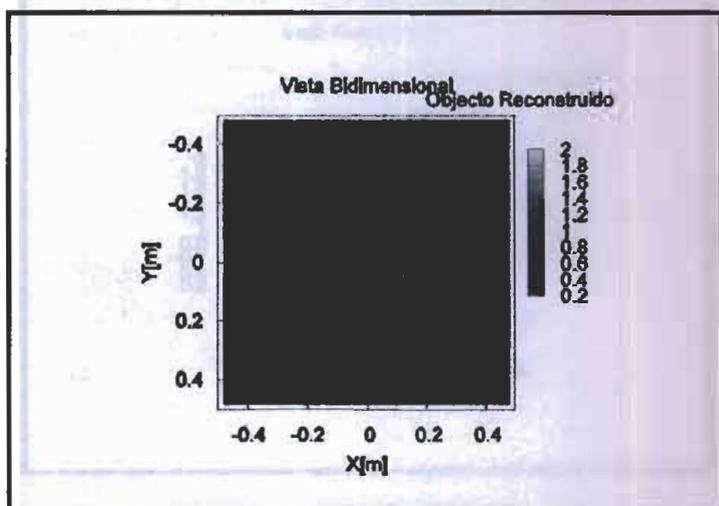


Figura 5.32: Simulación bidimensional del *objeto reconstruido* con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$ y $a = 0.1m$

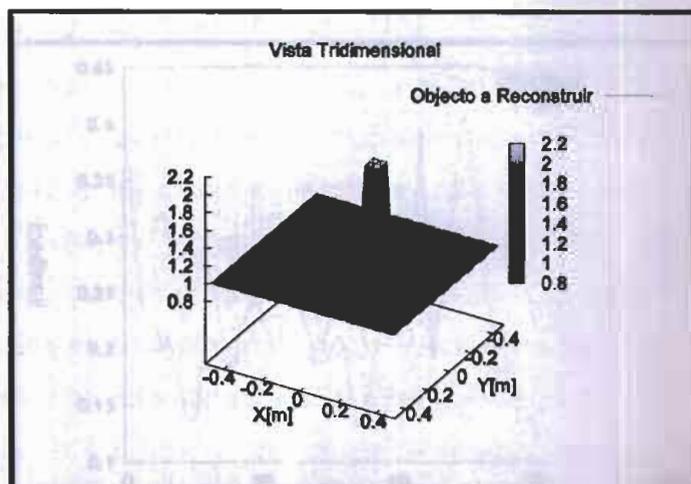


Figura 5.33: Simulación tridimensional del *objeto a reconstruir* con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$ y $a = 0.1m$

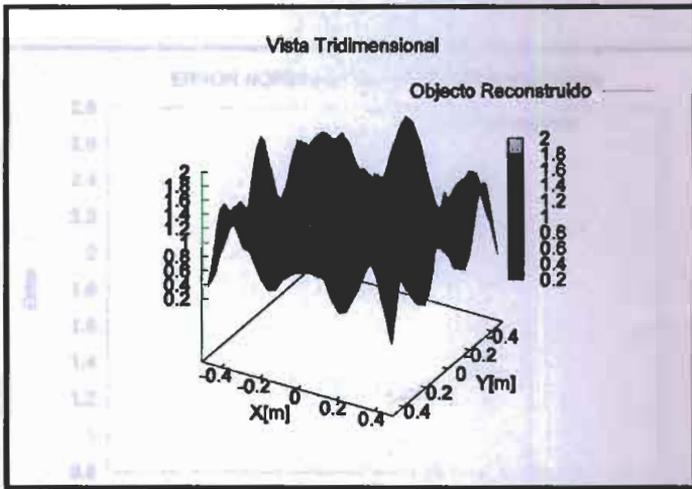


Figura 5.34: Simulación tridimensional del *objeto reconstruido* con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$ y $a = 0.1m$

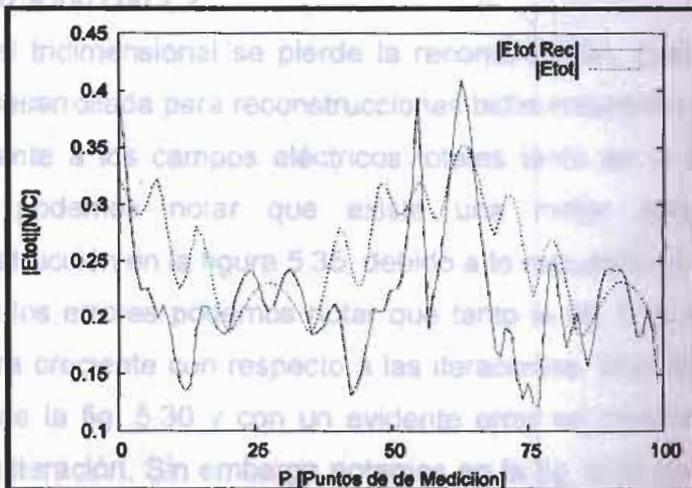


Figura 5.35: Reconstrucción del módulo del campo eléctrico total

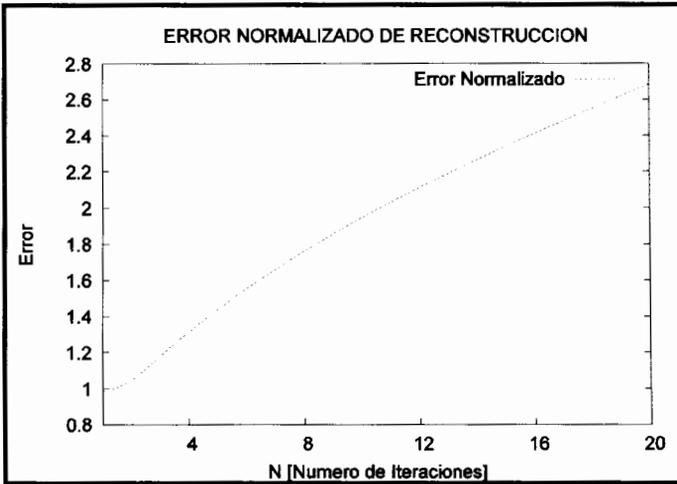


Figura 5.36: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

De las figuras anteriores podemos concluir:

- i. Las reconstrucciones 5.26 y 5.32 con su permitividad dieléctrica relativa de 1.8 y 2.2 respectivamente, se obtuvo una mejor visualización con 2.2.
- ii. A nivel tridimensional se pierde la reconstrucción, pues esta técnica está desarrollada para reconstrucciones bidimensionales.
- iii. Referente a los campos eléctricos totales tanto en la figuras 5.29 y 5.35, podemos notar que existe una mejor aproximación de reconstrucción en la figura 5.35, debido a lo expuesto en i.
- iv. Sobre los errores podemos notar que tanto la fig. 5.30 y 5.36 son de manera creciente con respecto a las iteraciones. Muy empinado en el caso de la fig. 5.30 y con un evidente error en crecimiento hasta la última iteración. Sin embargo notamos en la fig. 5.36 con permitividad dieléctrica 2.2 el error es menos empinado y no es tan alto en su última iteración como lo que sucede en la fig. 5.30.

v. **Tenemos entonces una mejor aproximación de reconstrucción de débiles dispersores con este método.**

Se han también reconstruido cilindros homogéneos con centro en el punto de coordenadas $(0.0 \text{ m}, 0.0 \text{ m})$, de radio 0.06 m , y con una permitividad dieléctrica relativa que corresponde a los modelos de la madera analizados en el capítulo anterior (véase en la figura 5.37)

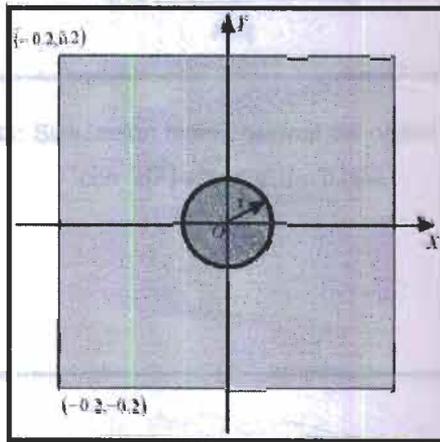


Figura 5.37: Objeto a reconstruir

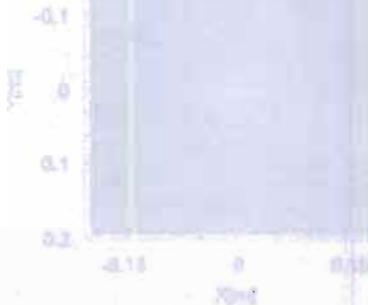


Figura 5.38: Simulación bidimensional del cilindro reconstruido con $\epsilon_r(2) = 2.11$ y $r = 0.06 \text{ m}$

Modelo de la madera con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.11$

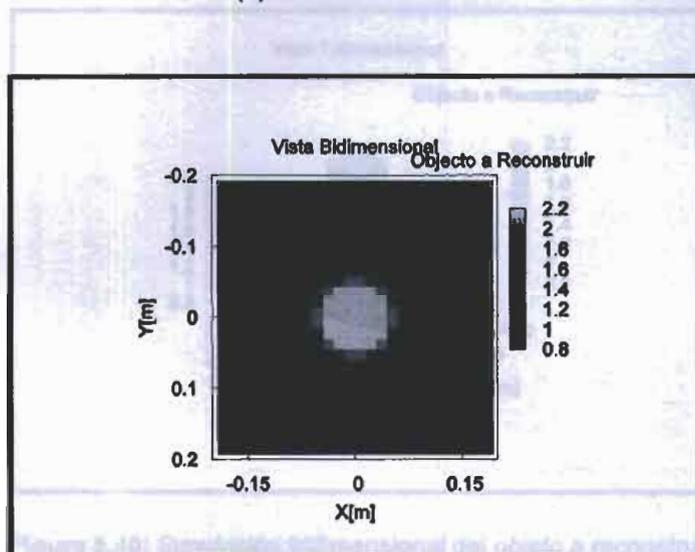


Figura 5.38: Simulación bidimensional del *objeto a reconstruir*

con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.11$ y $a = 0.06m$

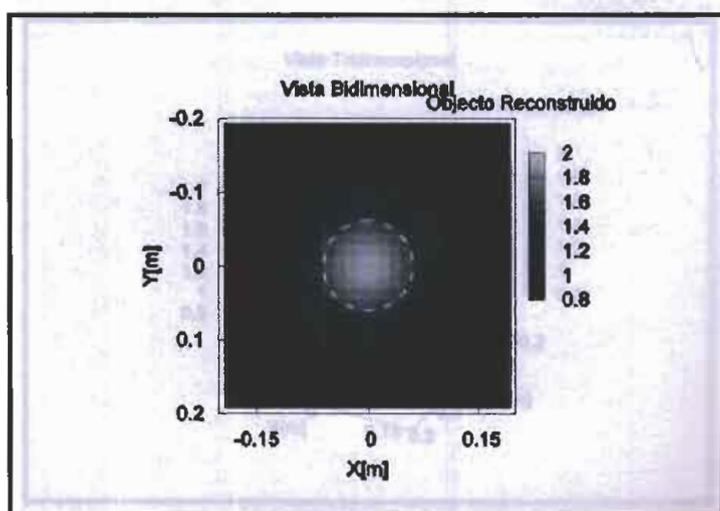


Figura 5.39: Simulación bidimensional del *objeto reconstruido*

con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.11$ y $a = 0.06m$

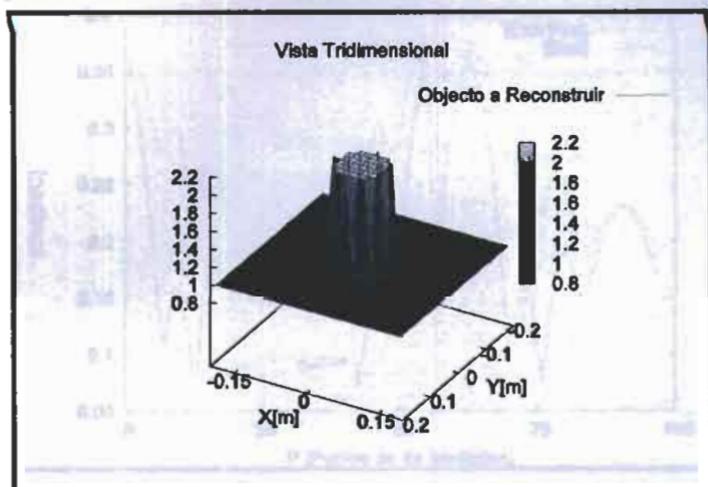


Figura 5.40: Simulación tridimensional del objeto a reconstruir con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.11$ y $a = 0.06m$

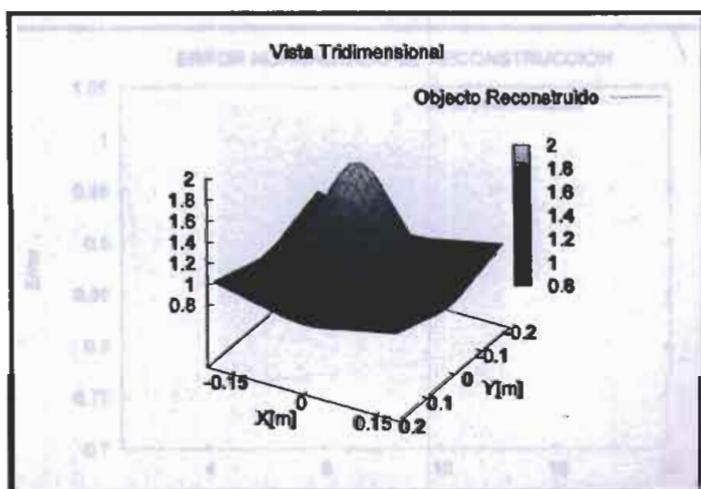


Figura 5.41: Simulación tridimensional del objeto reconstruido con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.11$ y $a = 0.06m$

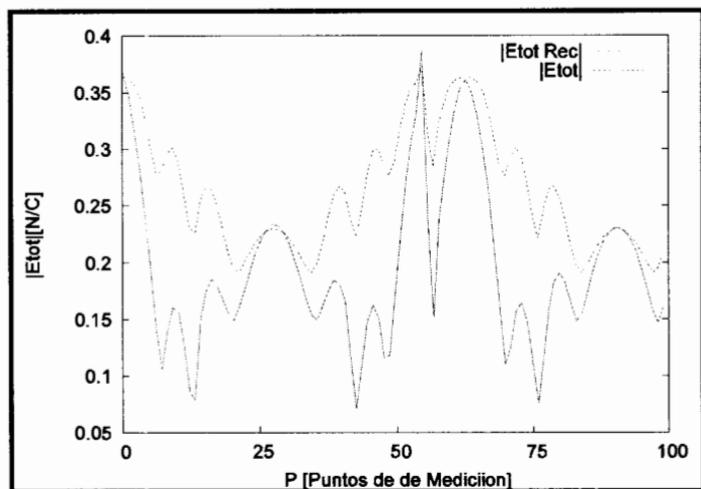


Figura 5.42: Reconstrucción del módulo del campo eléctrico total

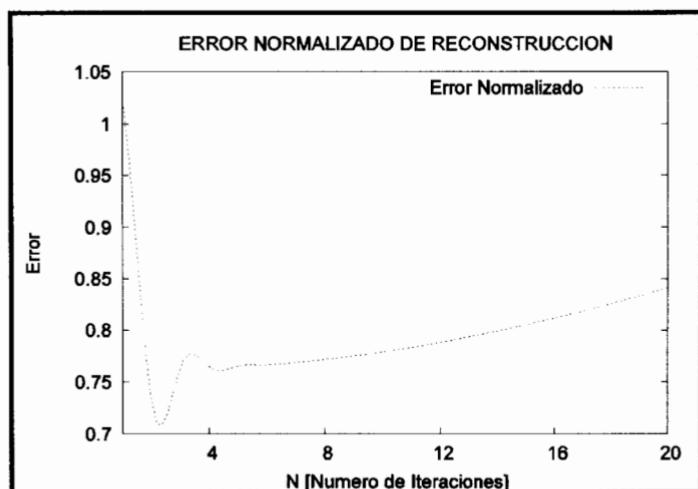


Figura 5.43: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

Modelo de la madera con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.79$

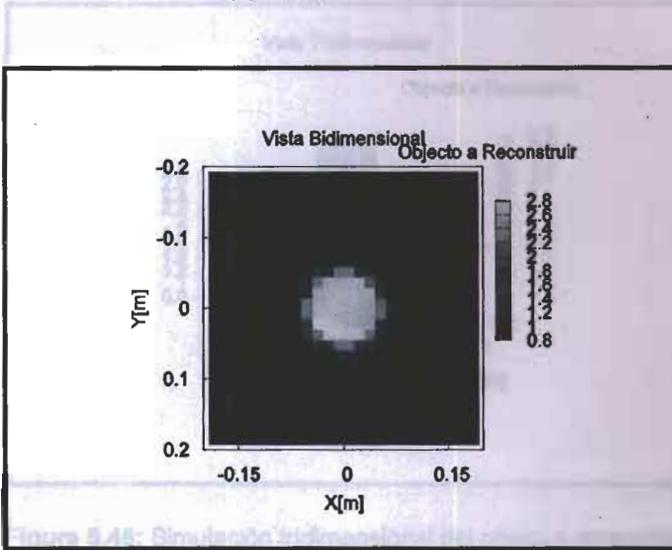


Figura 5.44: Simulación bidimensional del objeto a reconstruir con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.79$ y $a = 0.06m$

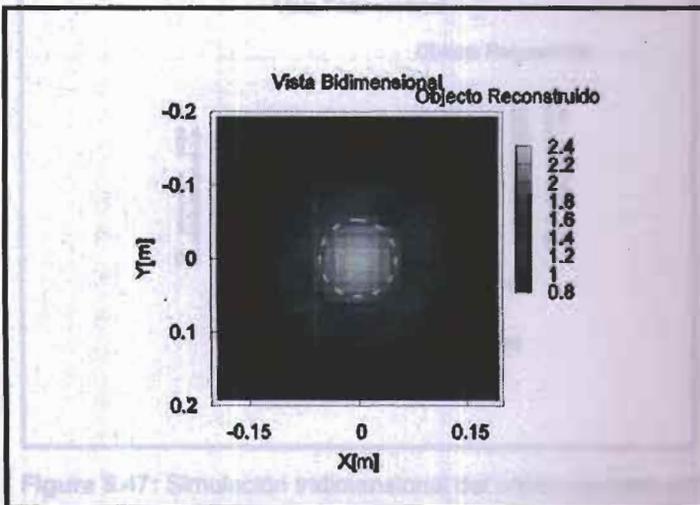


Figura 5.45: Simulación bidimensional del objeto reconstruido con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.79$ y $a = 0.06m$

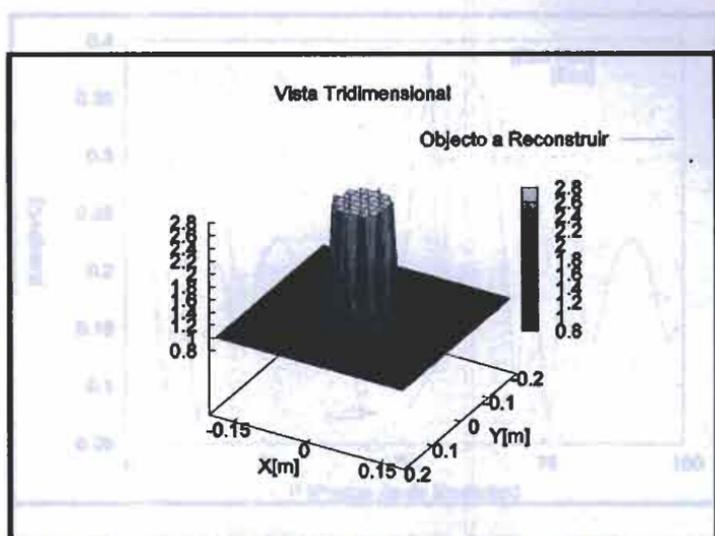


Figura 5.46: Simulación tridimensional del *objeto a reconstruir* con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.79$ y $a = 0.06m$

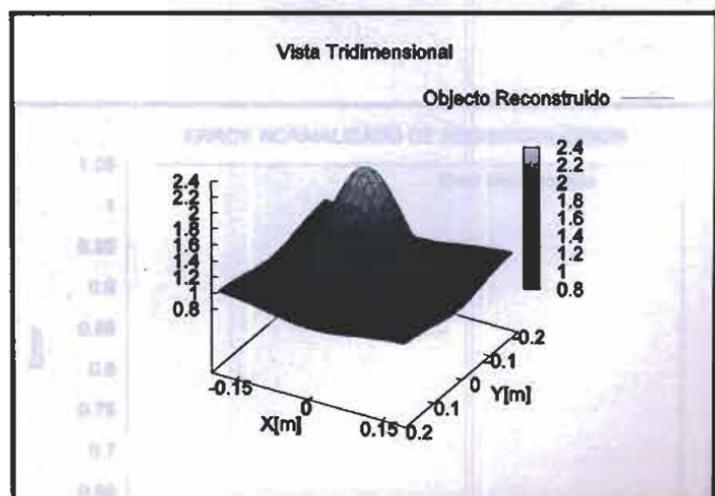


Figura 5.47: Simulación tridimensional del *objeto reconstruido* con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.79$ y $a = 0.06m$

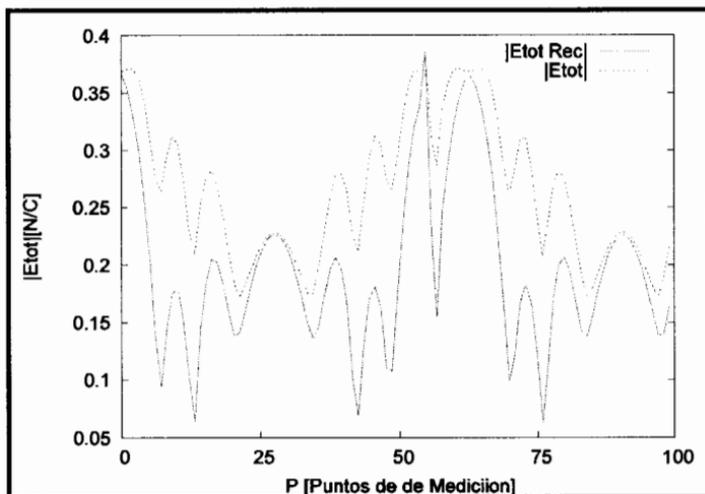


Figura 5.48: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total

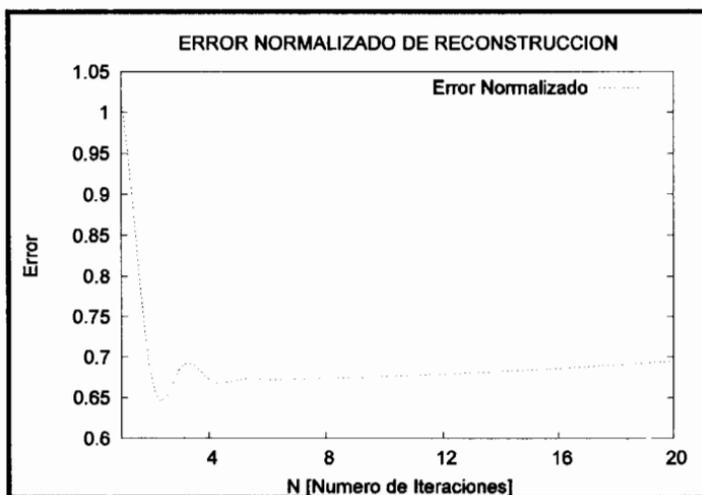


Figura 5.49: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

Modelo de la madera con $\varepsilon(\vec{r}) = 3.59$

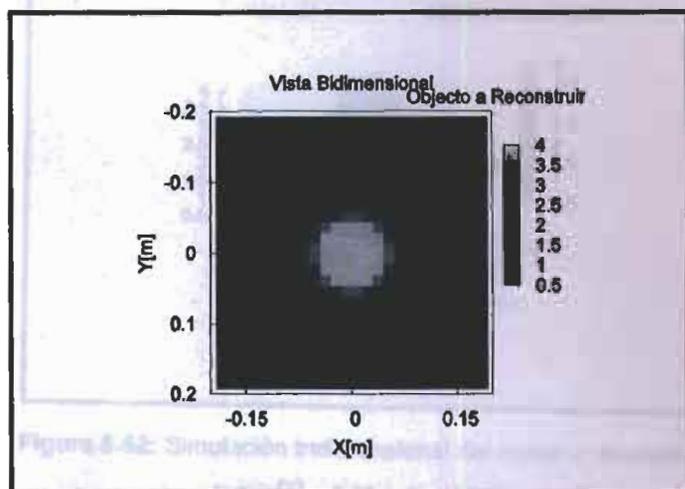


Figura 5.50: Simulación bidimensional del *objeto a reconstruir* con $\varepsilon(\vec{r}) = 3.59$ y $a = 0.06m$

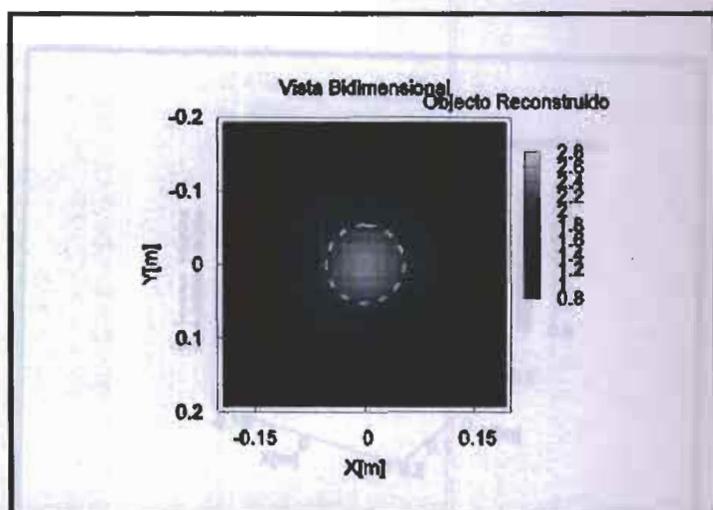


Figura 5.51: Simulación bidimensional del *objeto reconstruido* con $\varepsilon(\vec{r}) = 3.59$ y $a = 0.06m$

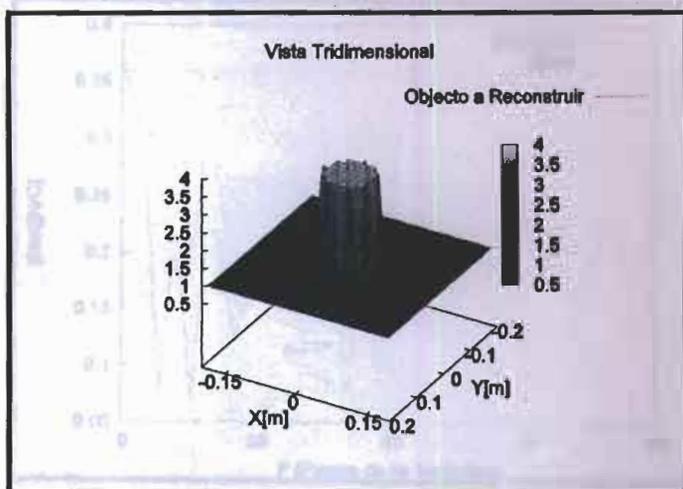


Figura 5.52: Simulación tridimensional del objeto a reconstruir con $\varepsilon(\vec{r}) = 3.59$ y $a = 0.06\text{m}$

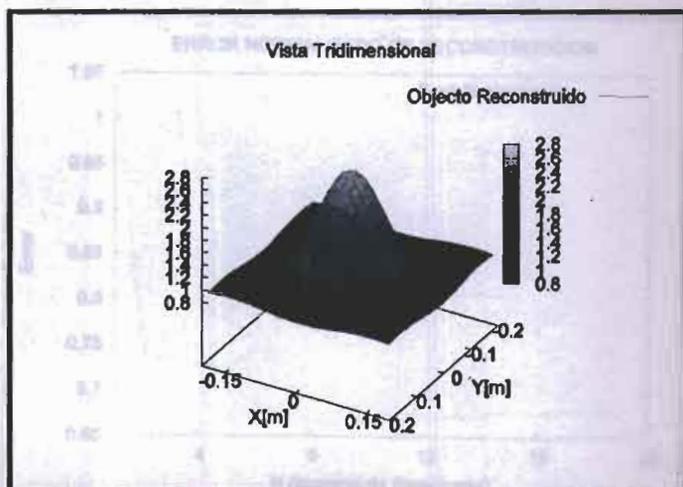


Figura 5.53: Simulación tridimensional del objeto reconstruido con $\varepsilon(\vec{r}) = 3.59$ y $a = 0.06\text{m}$

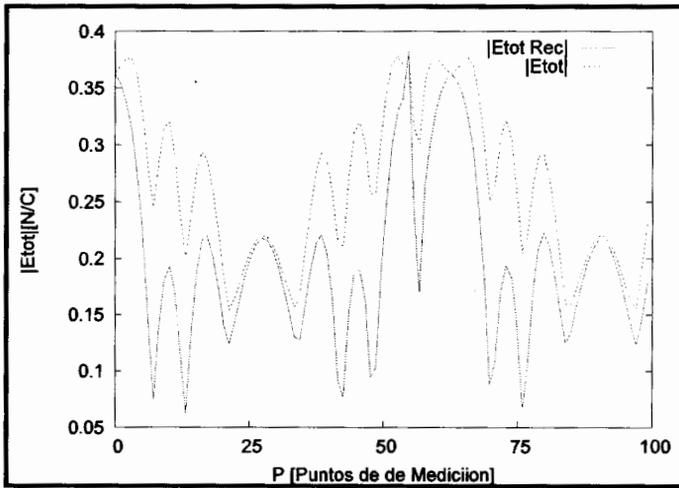


Figura 5.54: Reconstrucción del módulo del campo eléctrico total

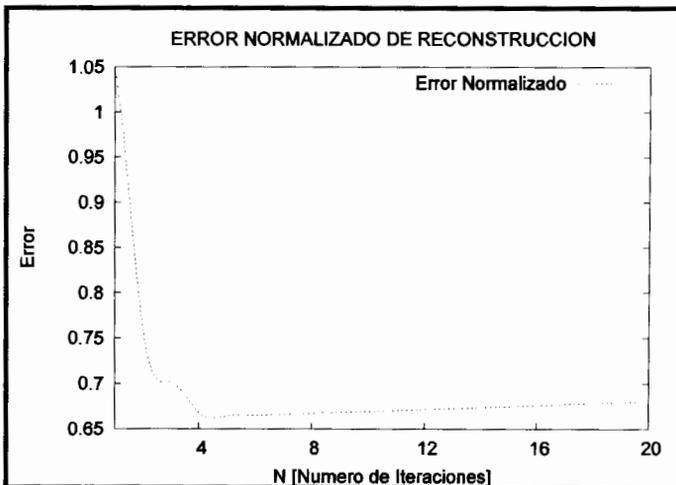


Figura 5.55: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

Modelo de la madera con $\varepsilon(\vec{r}) = 6.18$

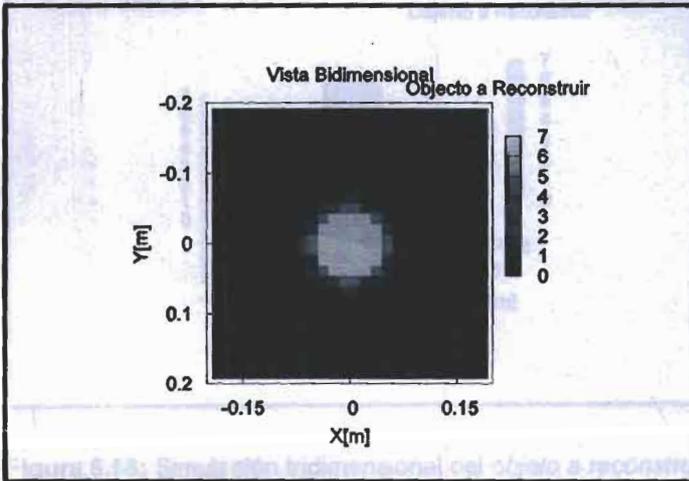


Figura 5.56: Simulación bidimensional del *objeto a reconstruir* con $\varepsilon(\vec{r}) = 6.18$ y $a = 0.06m$

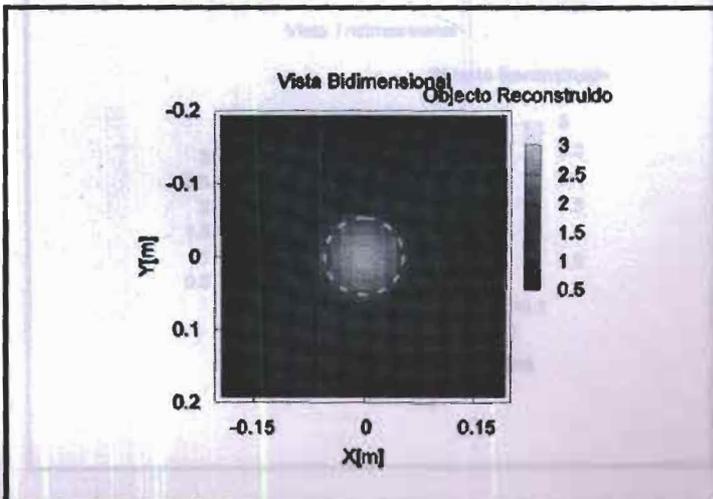


Figura 5.57: Simulación bidimensional del *objeto reconstruido* con $\varepsilon(\vec{r}) = 6.18$ y $a = 0.06m$

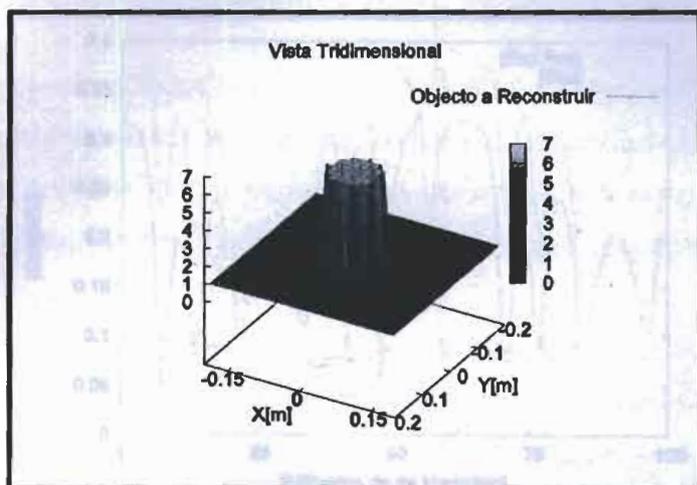


Figura 5.58: Simulación tridimensional del *objeto a reconstruir*
con $\varepsilon(\vec{r}) = 6.18$ y $a = 0.06m$

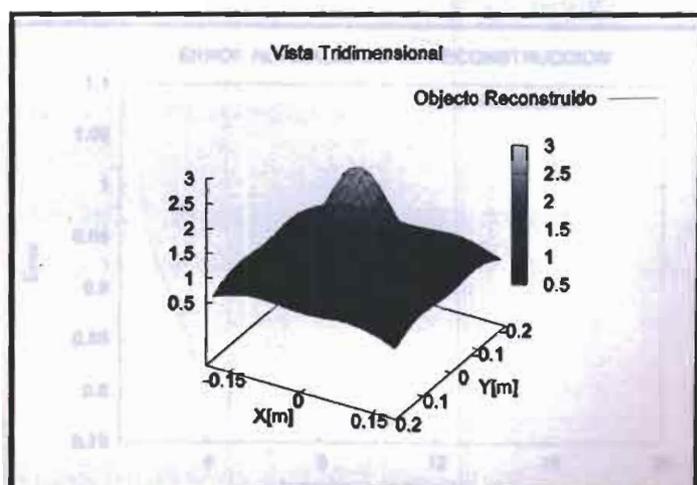


Figura 5.59: Simulación tridimensional del *objeto reconstruido*
con $\varepsilon(\vec{r}) = 6.18$ y $a = 0.06m$

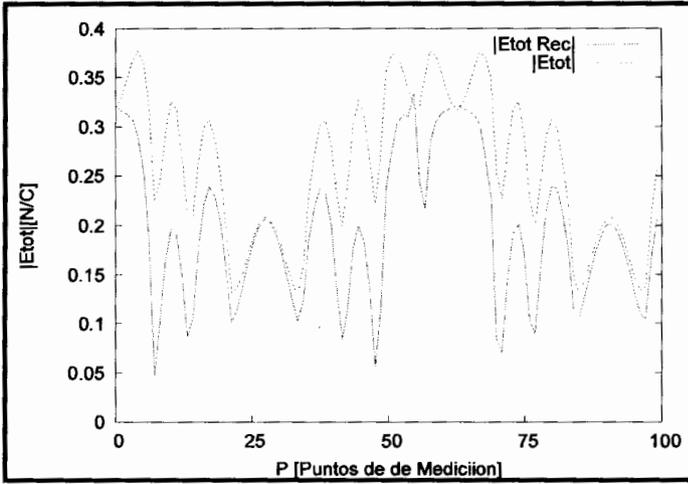


Figura 5.60: Reconstrucción del módulo del campo eléctrico total

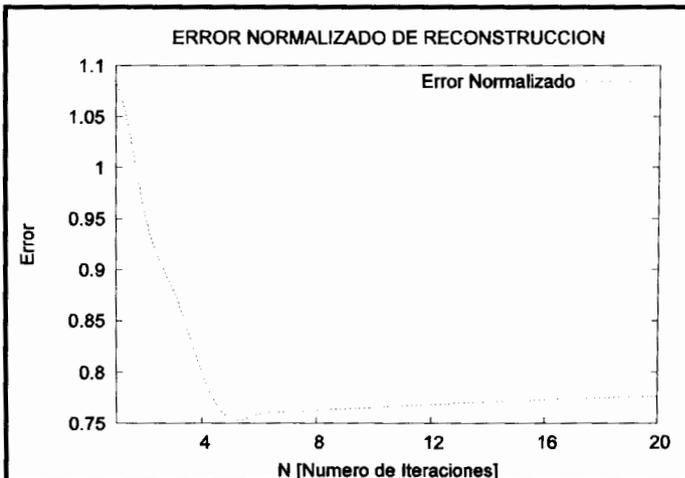


Figura 5.61: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

De las figuras anteriores podemos concluir:

- i. Las reconstrucciones 5.39, 5.45, 5.51 y 5.57 se han realizado tomando como referencia los modelos de la madera citados en el capítulo 4, las cuales con una mayor permitividad dieléctrica son concernientes a la madera de pino húmeda. Teniendo una mejor reconstrucción la fig. 5.39.
- ii. A nivel tridimensional se pierde la reconstrucción, pues esta técnica está desarrollada para reconstrucciones bidimensionales.
- iii. Referente a los campos eléctricos totales se ha tenido una mejor reconstrucción la fig. 5.60 con una $\varepsilon(\vec{r}) = 6.18$. No obstante no se ha tenido una buena reconstrucción de la permitividad dieléctrica del objeto debido a que este algoritmo trabaja bien con débiles dispersores y por ende con una permitividad dieléctrica baja.
- iv. Sobre los errores podemos notar que la fig. 5.55 presenta un mejor error normalizado, decreciente hasta la iteración 4 y luego se mantiene a lo largo del resto de iteraciones.

5.3.2 Reconstrucción en presencia de ruido

En esta sección están presentes los parámetros de error relativos a la reconstrucción usando datos corrompidos por ruido, los resultados de las reconstrucciones serán obtenidas con la aproximación de Born de segundo orden.

Se han ejecutado simulaciones con una relación señal-ruido (SNR) de 15 dB y de 25 dB.

La importancia de estas simulaciones encuentra justificación en el hecho de que el problema de *inverse scattering* es mal puesto (ill-posed) y por lo tanto, asume crucial importancia, en la evaluación de un método de inversión, la capacidad de reconstruir objetos teniendo como base datos conocidos en modo no exacto, pero dentro de un margen de certeza.

5.3.2.1 Modelos con Pilares de Hormigón

Aquí nos daremos cuenta que el error normalizado de reconstrucción crecerá al aumentar el valor de la permitividad dieléctrica. Teniendo en cuenta que al aumentar la permitividad dieléctrica del objeto, aumentará la capacidad de dispersar del mismo.

Modelo de Hormigón con SNR = 15 dB

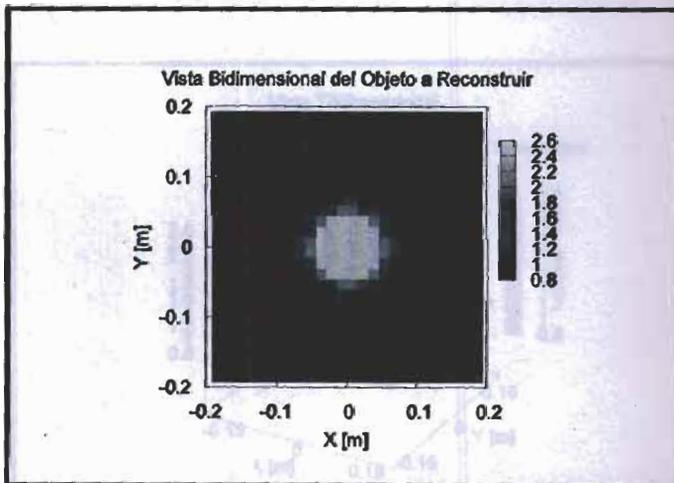


Figura 5.62: Simulación bidimensional del objeto a reconstruir con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.48$, $a = 0.06m$ y $SNR = 15dB$

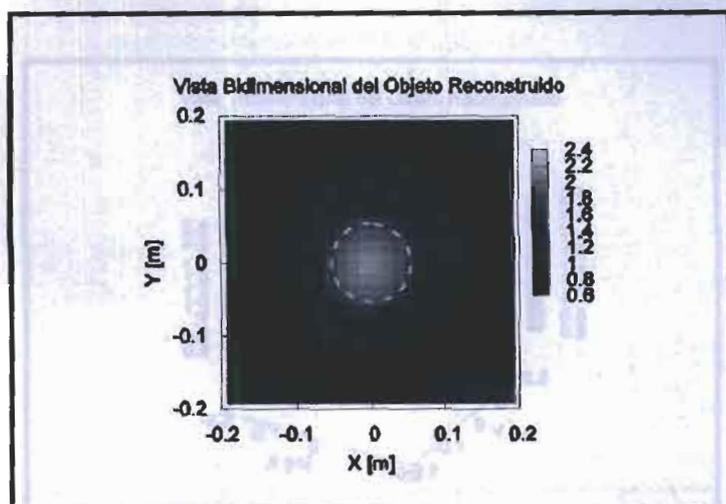


Figura 5.63: Simulación bidimensional del objeto reconstruido con $\varepsilon(\bar{r}) = 2.48$, $a = 0.06m$ y $SNR = 15dB$

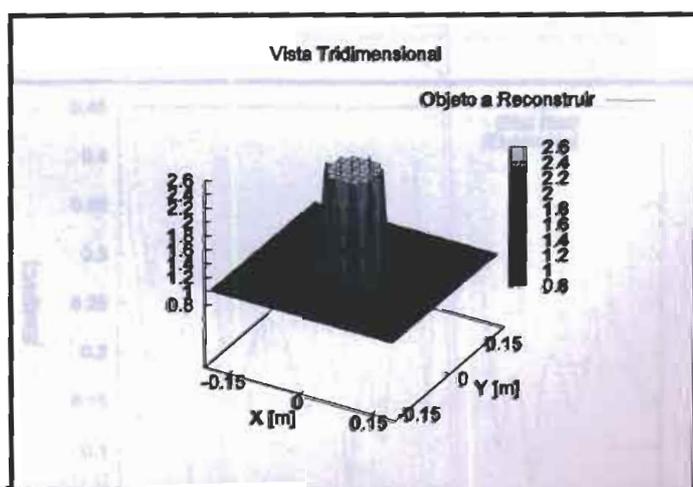


Figura 5.64: Simulación tridimensional del objeto a reconstruir con $\varepsilon(\bar{r}) = 2.48$, $a = 0.06m$ y $SNR = 15dB$

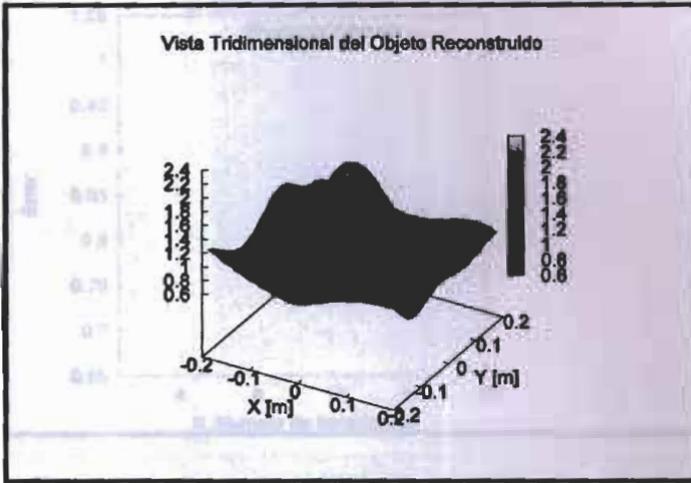


Figura 5.65: Simulación tridimensional del *objeto reconstruido* con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.48$, $a = 0.06m$ y $SNR = 15dB$

blo de Hormigón con $SNR = 25 dB$

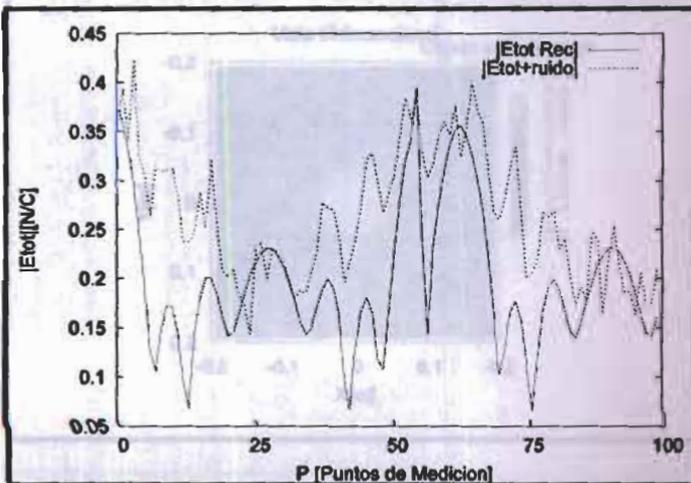


Figura 5.66: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total

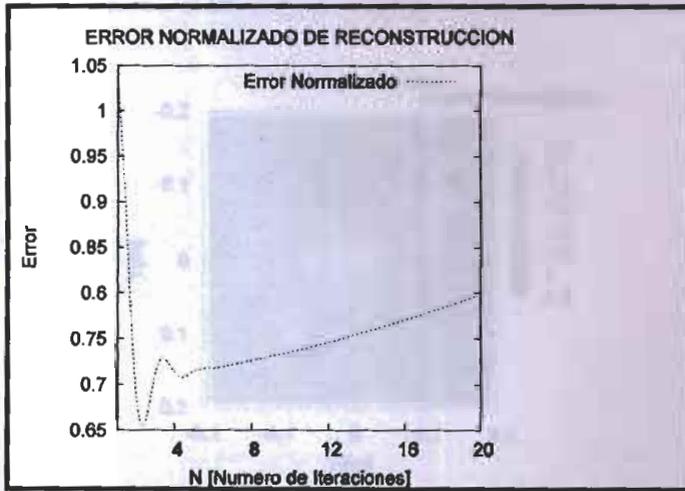


Figura 5.67: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

Modelo de Hormigón con SNR = 25 dB

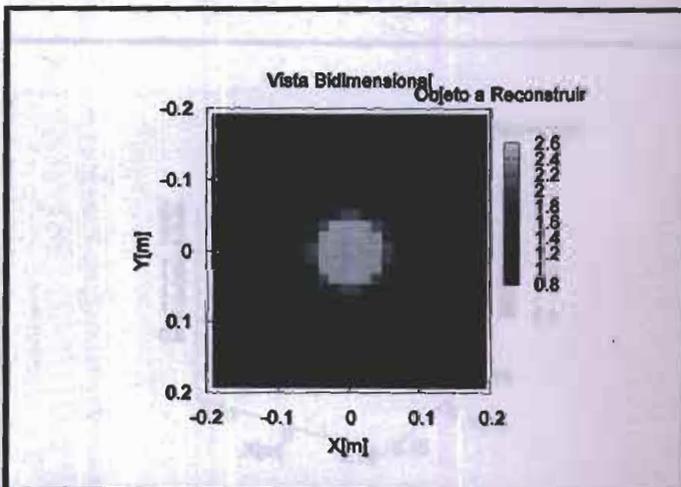


Figura 5.68: Simulación bidimensional del objeto a reconstruir con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.48$, $a = 0.06m$ y $SNR = 25dB$

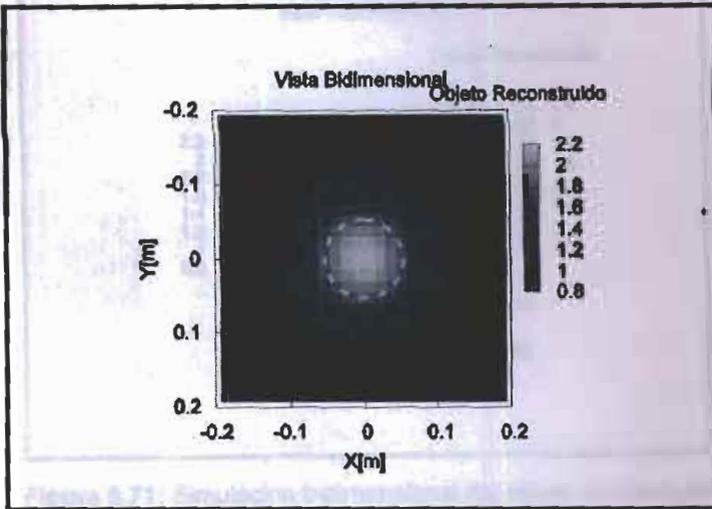


Figura 5.69: Simulación bidimensional del objeto reconstruido con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.48$, $a = 0.06m$ y $SNR = 25dB$

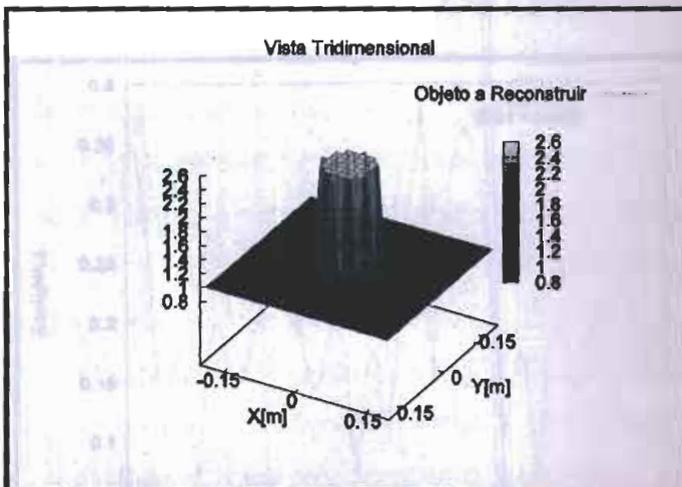


Figura 5.70: Simulación tridimensional del objeto a reconstruir con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.48$, $a = 0.06m$ y $SNR = 25dB$

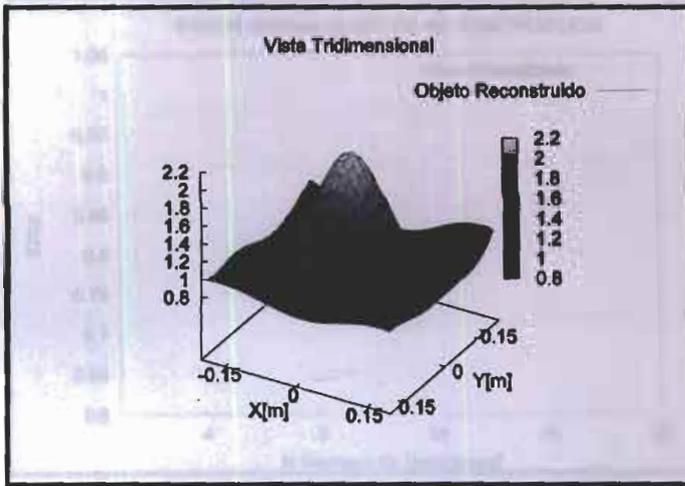


Figura 5.71: Simulación tridimensional del objeto reconstruido con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.48$, $a = 0.06m$ y $SNR = 25dB$.

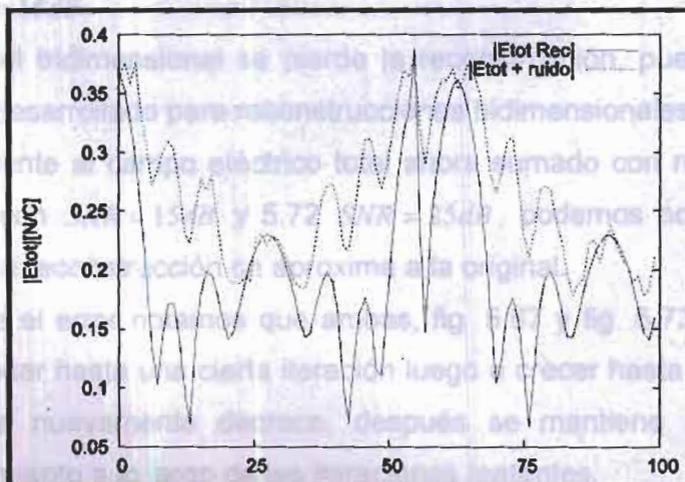


Figura 5.72: Reconstrucción del módulo del campo eléctrico total

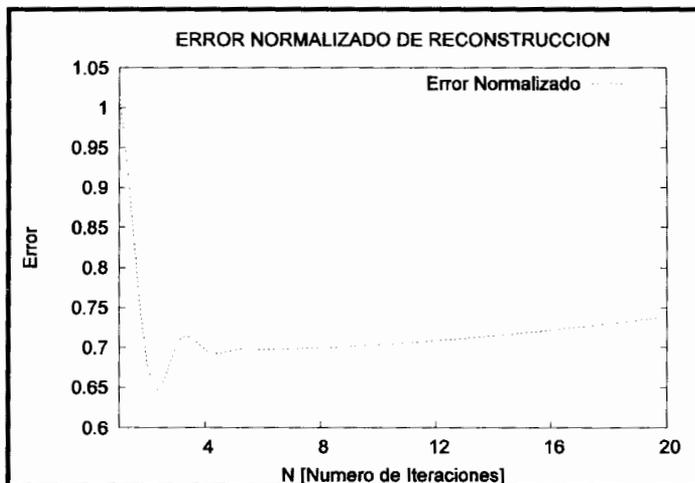


Figura 5.73: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

De las figuras anteriores podemos concluir:

- i. Las reconstrucciones de la fig. 5.63 con $SNR = 15dB$ y de la fig. 5.69 con $SNR = 25dB$, ambas con permitividad dieléctrica relativa de 2.48, se obtuvo con una buena imagen de reconstrucción con la relación $SNR = 15dB$.
- ii. A nivel tridimensional se pierde la reconstrucción, pues el algoritmo está desarrollado para reconstrucciones bidimensionales.
- iii. Referente al campo eléctrico total ahora sumado con ruido, en la fig. 5.66 con $SNR = 15dB$ y 5.72 $SNR = 25dB$, podemos notar que la fig. 5.66 la reconstrucción se aproxima a la original.
- iv. Sobre el error notamos que ambas, fig. 5.67 y fig. 5.73 comienzan a decrecer hasta una cierta iteración luego a crecer hasta llegar un nivel donde nuevamente decrece, después se mantiene con un ligero crecimiento a lo largo de las iteraciones restantes.

5.3.2.2 Modelos con la madera

Se han reconstruido cilindros homogéneos con centro en el punto de coordenadas (1.0 m, 0 m), de radio 0.1 m, y con una permitividad dieléctrica relativa de 1.8 y 2.2 (véase en la figura 5.10). falta poner el ruido

Se han ejecutado simulaciones con una relación señal-ruido (SNR) de 15 dB y de 25 dB.

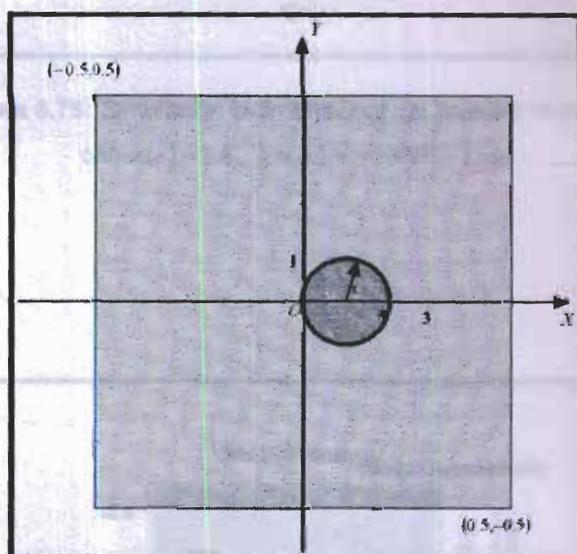


Figura 5.74: Objeto a reconstruir

Débiles dispersadores: cilindro con $\varepsilon(\vec{r})=1.8$ y $SNR = 15dB$

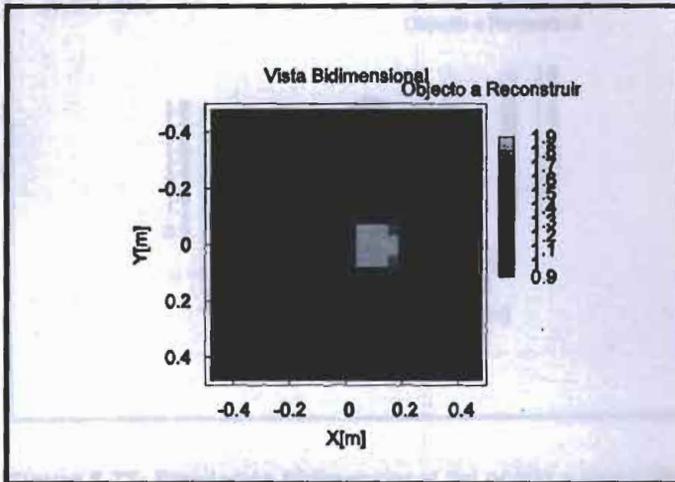


Figura 5.75: Simulación bidimensional del *objeto a reconstruir* con $\varepsilon(\vec{r})=1.8$, $a = 0.1m$ y $SNR = 15dB$

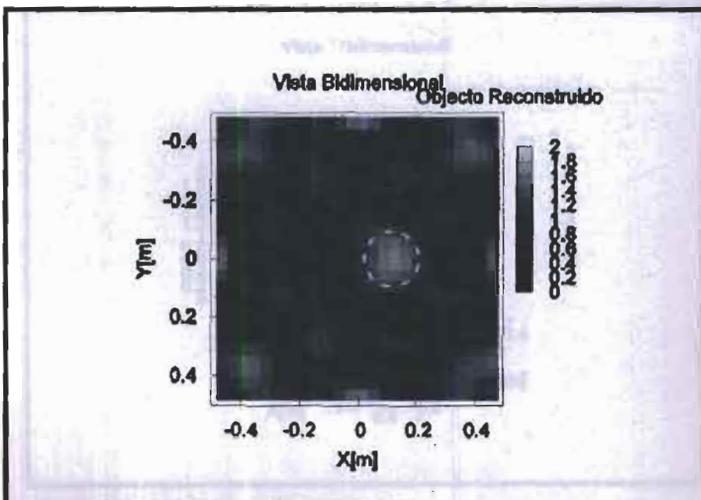


Figura 5.76: Simulación bidimensional del *objeto reconstruido* con $\varepsilon(\vec{r})=1.8$, $a = 0.1m$ y $SNR = 15dB$

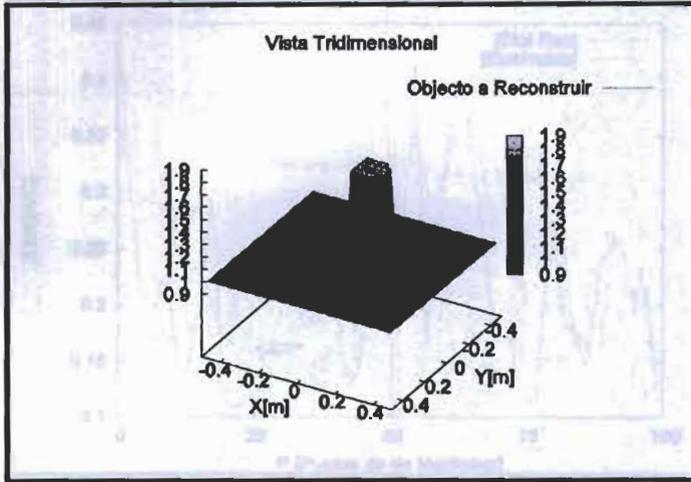


Figura 5.77: Simulación tridimensional del *objeto a reconstruir* con $\varepsilon(\bar{r}) = 1.8$, $a = 0.1m$ y $SNR = 15dB$

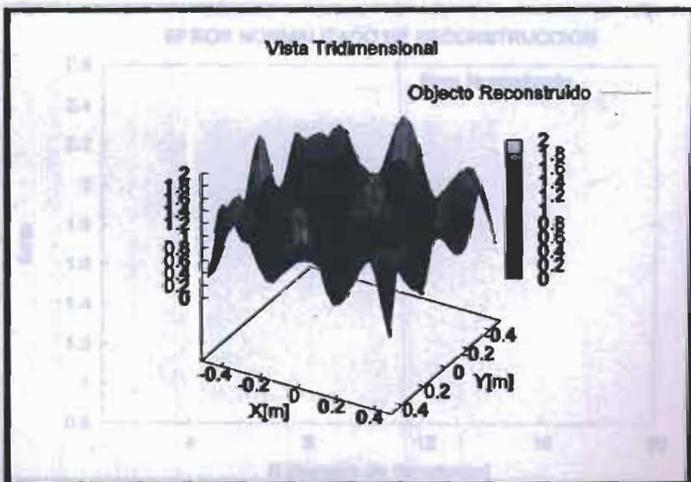


Figura 5.78: Simulación tridimensional del *objeto reconstruido* con $\varepsilon(\bar{r}) = 1.8$, $a = 0.1m$ y $SNR = 15dB$

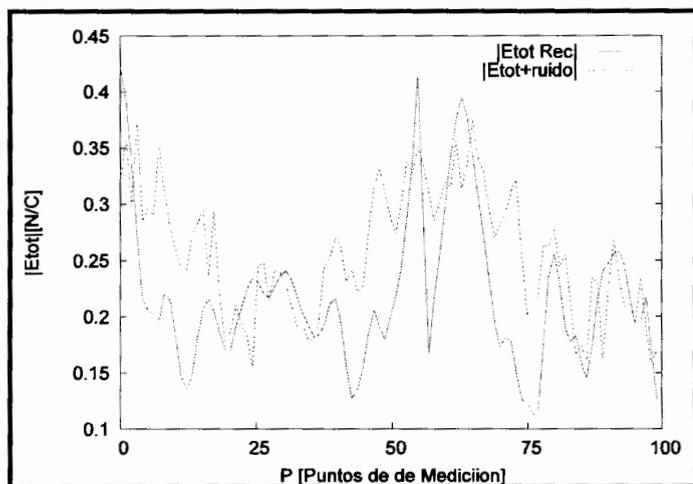


Figura 5.79: Reconstrucción del módulo del campo eléctrico total

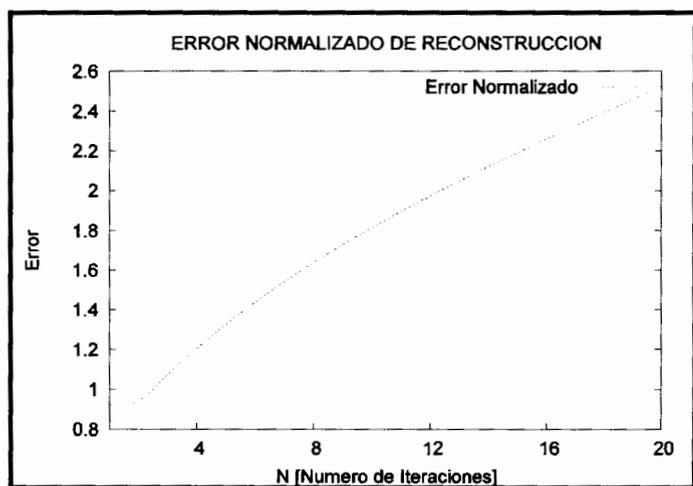


Figura 5.80: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

Débiles dispersadores: cilindro con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$ y $SNR = 15dB$

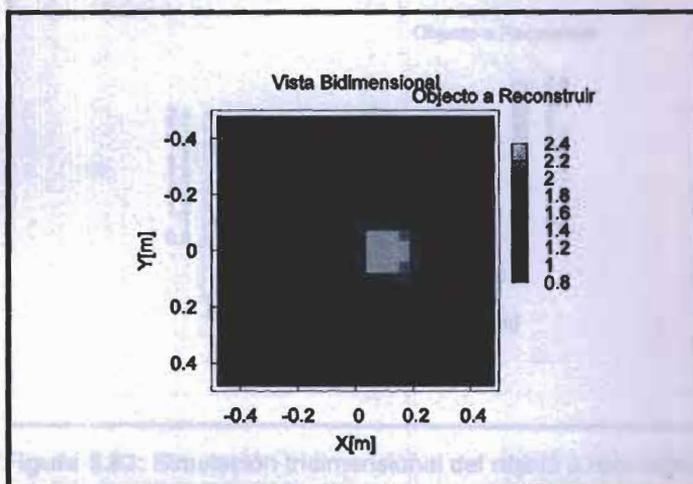


Figura 5.81: Simulación bidimensional del *objeto a reconstruir* con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$, $a = 0.1m$ y $SNR = 15dB$

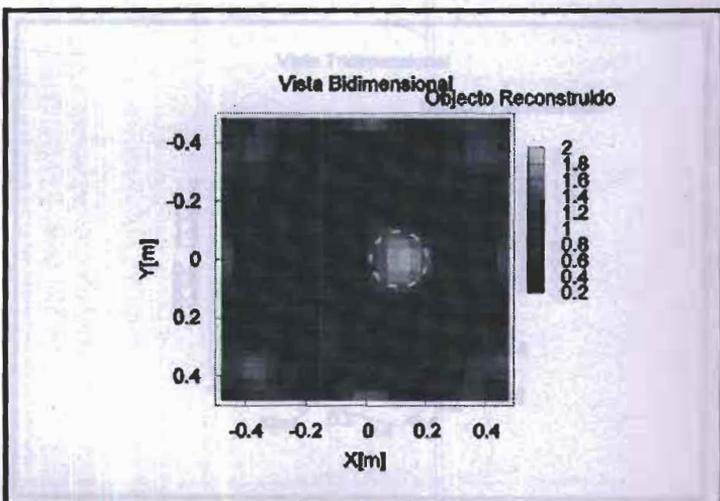


Figura 5.82: Simulación bidimensional del *objeto reconstruido* con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$, $a = 0.1m$ y $SNR = 15dB$

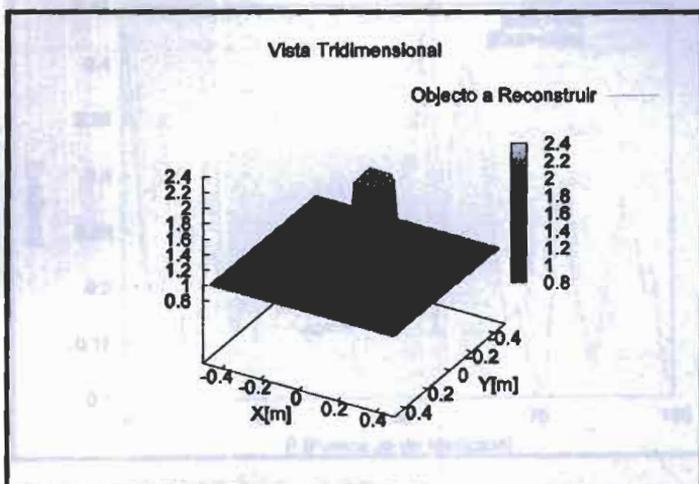


Figura 5.83: Simulación tridimensional del *objeto a reconstruir* con $\varepsilon(\bar{r}) = 2.2$, $a = 0.1m$ y $SNR = 15dB$

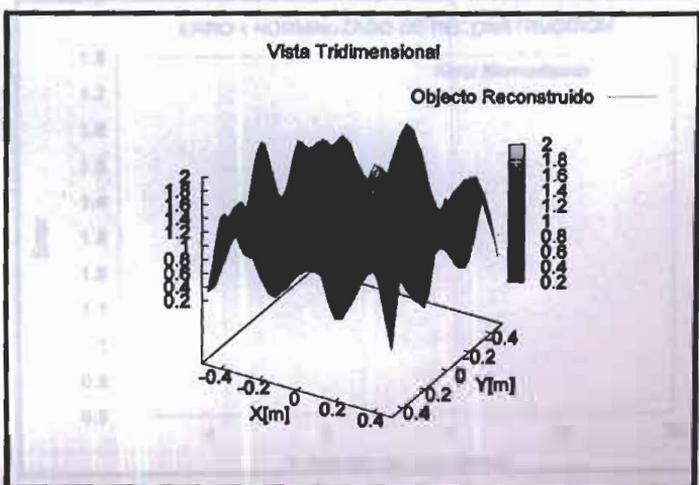


Figura 5.84: Simulación tridimensional del *objeto reconstruido* con $\varepsilon(\bar{r}) = 2.2$, $a = 0.1m$ y $SNR = 15dB$

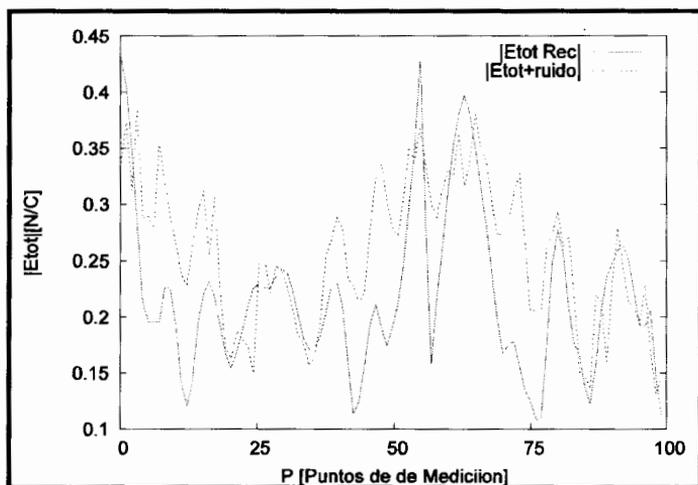


Figura 5.85: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total

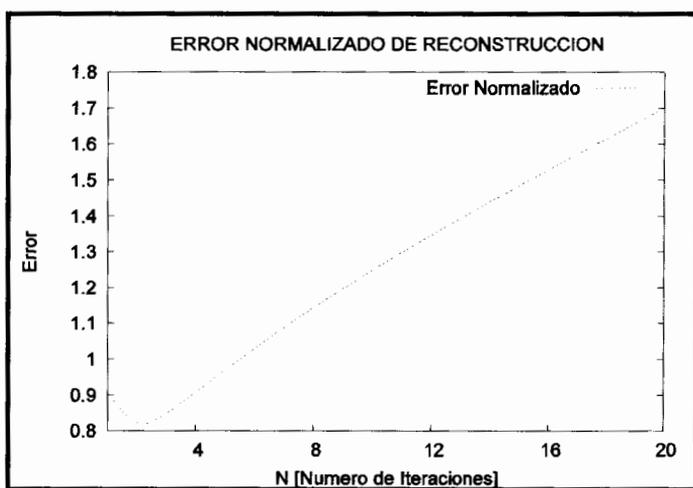


Figura 5.86: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

Débiles dispersadores: cilindro con $\varepsilon(\vec{r}) = 1.8$ y $SNR = 25dB$

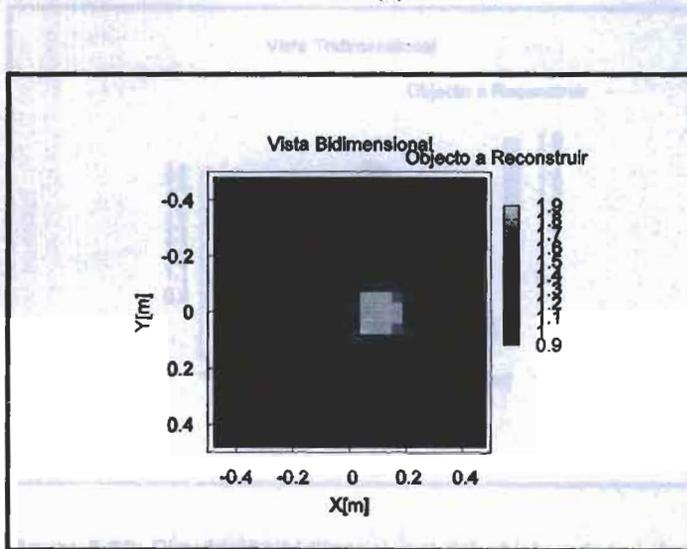


Figura 5.87: Simulación bidimensional del *objeto a reconstruir* con $\varepsilon(\vec{r}) = 1.8$, $a = 0.1m$ y $SNR = 25dB$

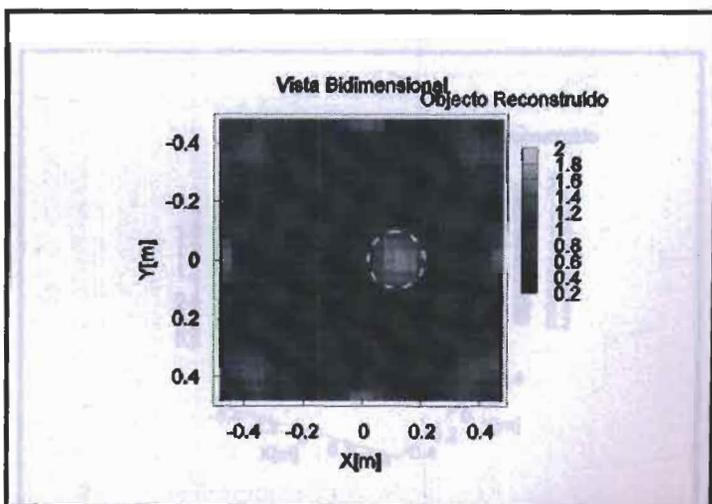


Figura 5.88: Simulación bidimensional del *objeto reconstruido* con $\varepsilon(\vec{r}) = 1.8$, $a = 0.1m$ y $SNR = 25dB$

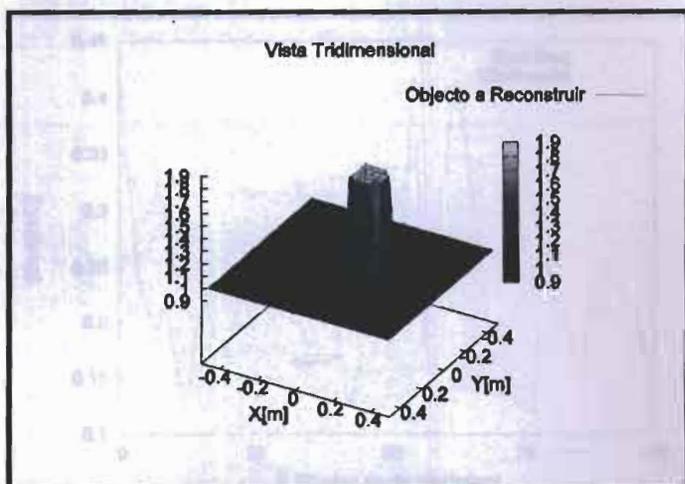


Figura 5.89: Simulación tridimensional del *objeto a reconstruir* con $\varepsilon(\vec{r}) = 1.8$, $a = 0.1m$ y $SNR = 25dB$

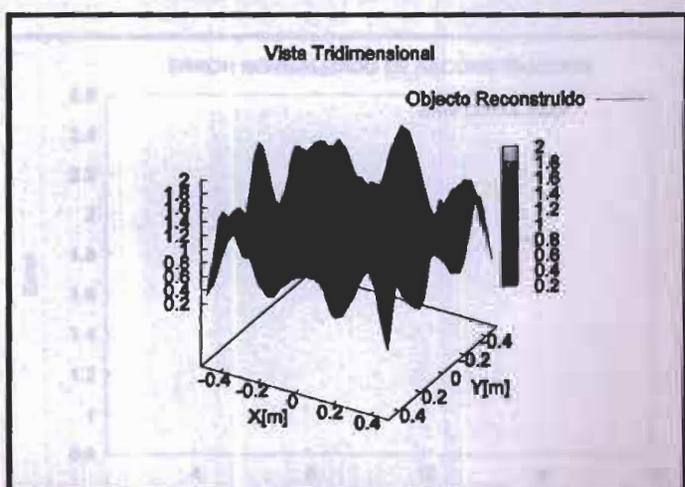


Figura 5.90: Simulación tridimensional del *objeto reconstruido* con $\varepsilon(\vec{r}) = 1.8$, $a = 0.1m$ y $SNR = 25dB$

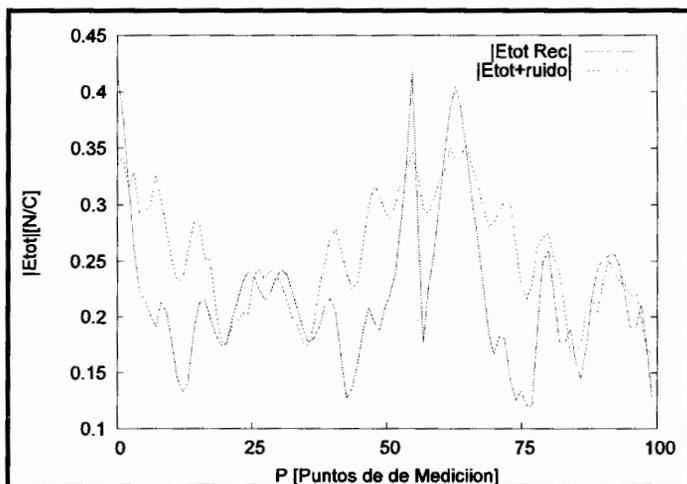


Figura 5.91: Reconstrucción del módulo del campo eléctrico total

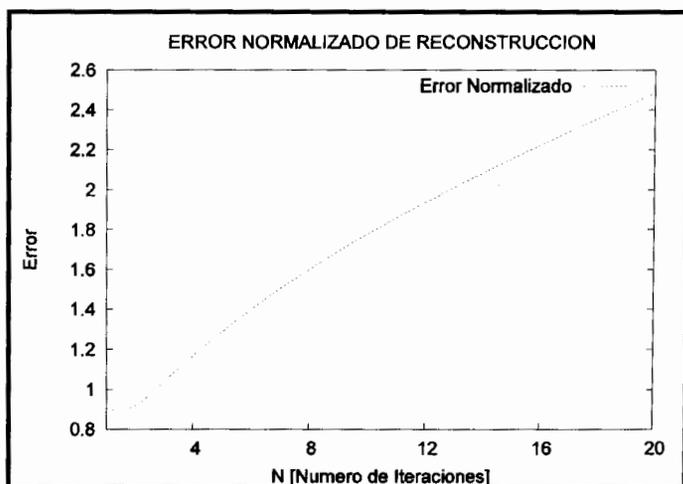


Figura 5.92: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

Débiles dispersadores: cilindro con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$ y $SNR = 25dB$

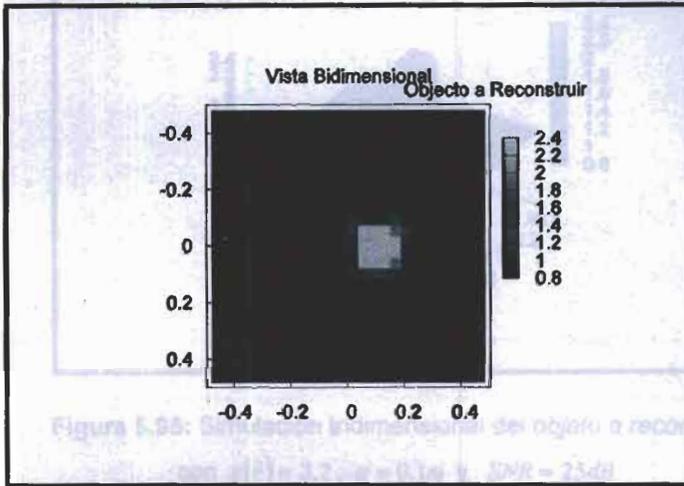


Figura 5.93: Simulación bidimensional del *objeto a reconstruir* con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$, $a = 0.1m$ y $SNR = 25dB$

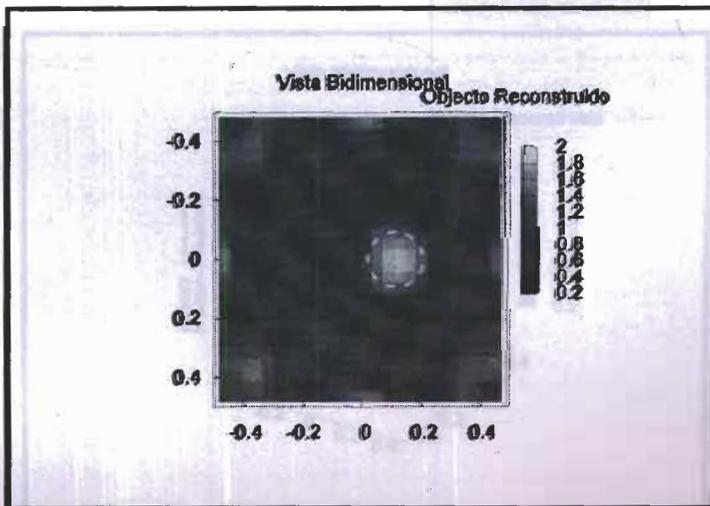


Figura 5.94: Simulación bidimensional del *objeto reconstruido* con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$, $a = 0.1m$ y $SNR = 25dB$

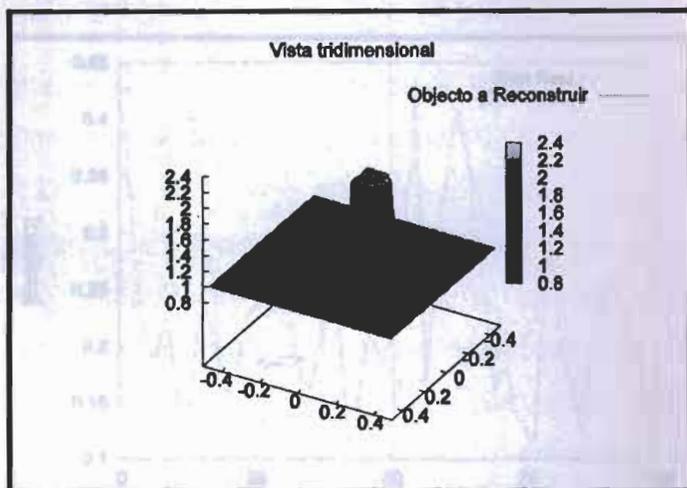


Figura 5.95: Simulación tridimensional del *objeto a reconstruir* con $\varepsilon(\bar{r}) = 2.2$, $a = 0.1m$ y $SNR = 25dB$

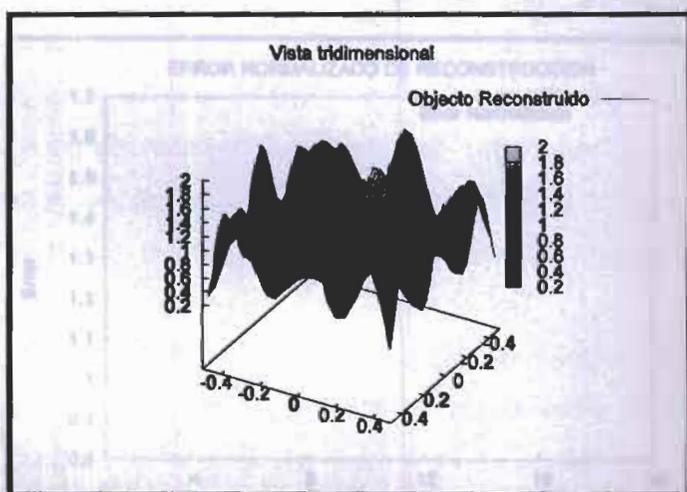


Figura 5.96: Simulación tridimensional del *objeto reconstruido* con $\varepsilon(\bar{r}) = 2.2$, $a = 0.1m$ y $SNR = 25dB$

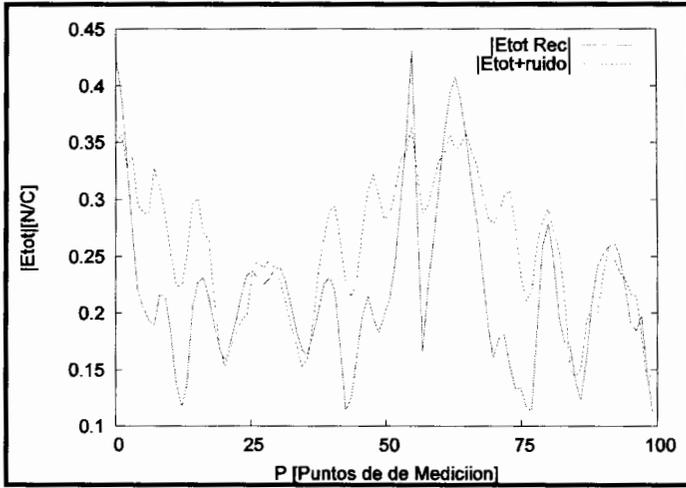


Figura 5.97: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total

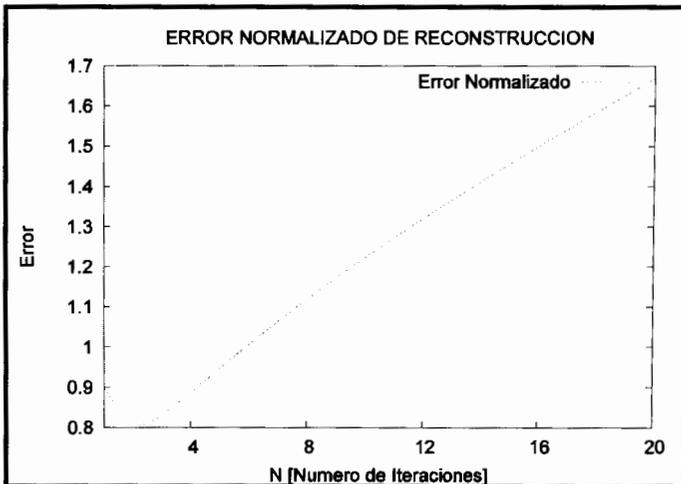


Figura 5.98: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

De las figuras anteriores podemos concluir:

- i. Las reconstrucciones de las figuras 5.76 y 5.82 con su permitividad dieléctrica relativa de 1.8 y 2.2 respectivamente, y con una relación $SNR = 15dB$ se obtuvo una mejor visualización con 2.2. Sin embargo al aumentar la relación señal – ruido a $SNR = 25dB$ se tiene una mejor reconstrucción evidente en la fig. 5.94, se tiene por lo cual una de las virtudes de este algoritmo en dispersores débiles como la madera.
- ii. A nivel tridimensional se pierde la reconstrucción, pues esta técnica está desarrollada para reconstrucciones bidimensionales.
- iii. Referente a los campos eléctricos totales tanto para la relación $SNR = 15dB$ y $SNR = 25dB$, podemos notar que existe una mejor aproximación de reconstrucción del mismo en la figura 5.97, debido a lo expuesto en i.
- iv. Sobre los errores podemos notar tanto para la relación $SNR = 15dB$ y $SNR = 25dB$ que los errores decrecen hasta una cierta iteración para después tener una forma creciente el resto de las iteraciones: se trata del fenómeno de la *semiconvergencia*, algo característico de las inversiones de datos con ruido. Observamos en las figuras concernientes al ruido normalizado de reconstrucción que no es dicho que el error decrezca indefinidamente; simplemente, siendo menor o mayor la influencia del ruido, con el fin de que el error logre el mínimo, es necesario un número de iteraciones externas mayor.

Se han reconstruido dos cilindros homogéneos próximos entre si, el primero con centro en las coordenadas (0.055 m, 0 m), de radio 0.015m y con una permitividad dieléctrica relativa de 3.0; y el segundo con centro en las coordenadas (0.0 m, 0.0 m), de radio 0.04m y con una permitividad dieléctrica relativa de 1.45 (véase en la figura 5.10).

Se han ejecutado simulaciones con una relación señal-ruido $SNR = 25dB$.

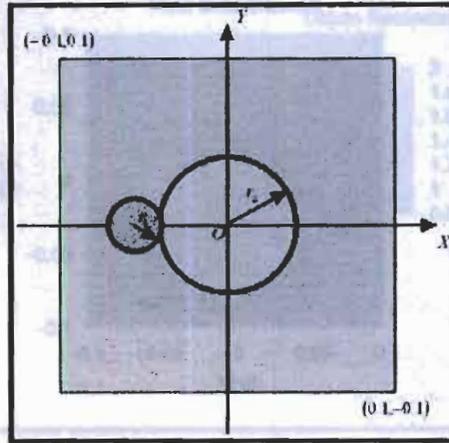


Figura 5.99: Objeto a reconstruir

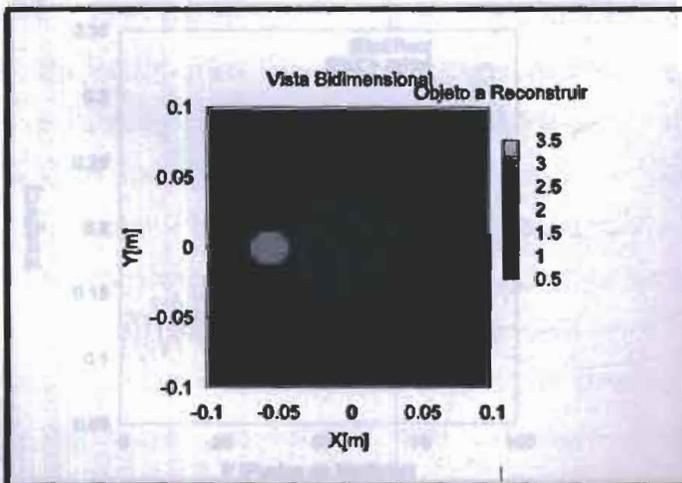


Figura 5.100: Simulación bidimensional de los objetos a reconstruir

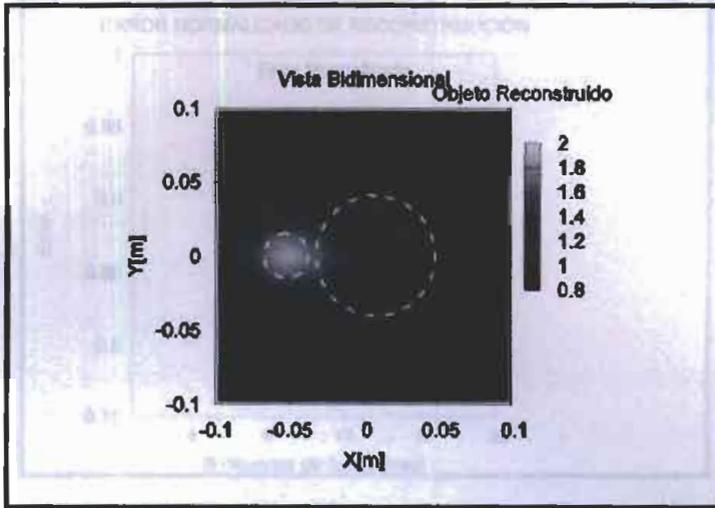


Figura 5.101: Simulación bidimensional de los objetos reconstruidos

De las figuras anteriores podemos concluir

Las reconstrucciones de las figuras 5.101 muestra que es muy buena ya que esta es una reconstrucción aspecal donde tenemos los cilindros próximos con permitividad dieléctrica diferentes y con una relación $S/N = 25dB$.

Sabemos que las clasificaciones de los algoritmos se hacen una división de los mismos que se hacen en el dominio de la frecuencia (como el método de la Tomografía de Coherencia) el método del momento que utilizamos donde la simulación del problema es en dominio espacial y buscan encontrar las ecuaciones de onda que gobiernan el fenómeno. Una de las ventajas de los algoritmos que operan en el dominio de la frecuencia consiste en el hecho de que ellos mejoran la resolución de detalles de dimensiones pequeñas.

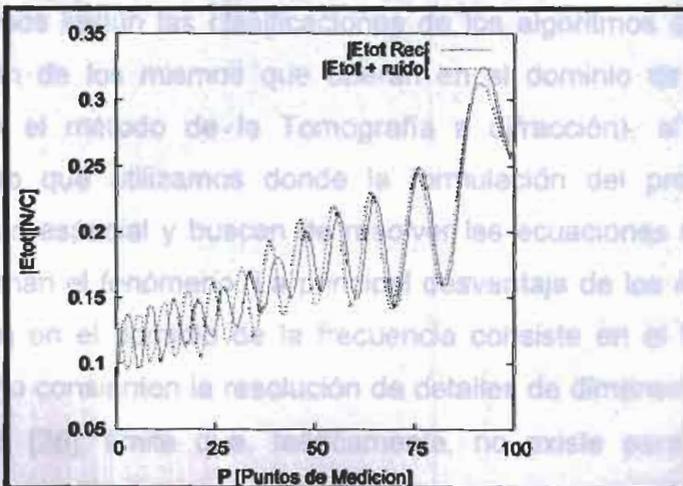


Figura 5.102: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total

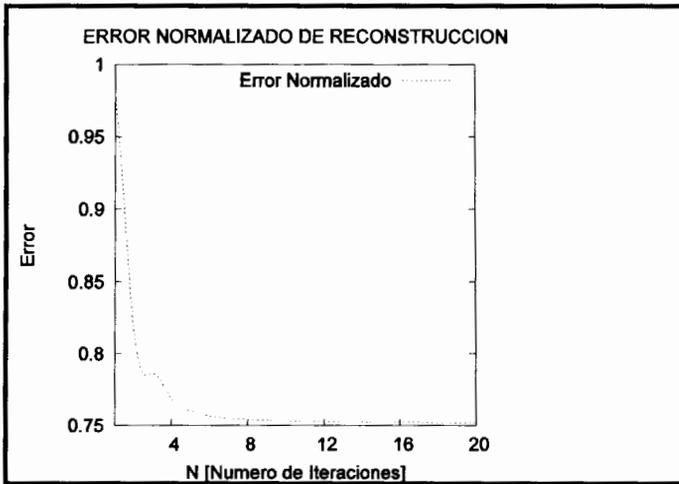


Figura 5.103: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

De las figuras anteriores podemos concluir:

- i. Las reconstrucciones de las figuras 5.101 muestra que es muy buena, ya que esta es una reconstrucción especial donde tenemos dos cilindros próximos con permitividad dieléctrica diferentes y con una relación $SNR = 25dB$.
- ii. Sabemos según las clasificaciones de los algoritmos que existe una división de los mismos que operan en el dominio de la frecuencia (como el método de la Tomografía a difracción), al contrario del método que utilizamos donde la formulación del problema es en dominio espacial y buscan de resolver las ecuaciones integrales que gobiernan el fenómeno. La principal desventaja de los algoritmos que operan en el dominio de la frecuencia consiste en el hecho de que ellos no consienten la resolución de detalles de dimensiones inferiores a $\lambda/2$ [26], límite que, teóricamente, no existe para los métodos formulados en el dominio espacial. Aquí la aproximación de Born es adecuada y es posible reconstruir con precisión también detalles de

pequeñas dimensiones (el radio de uno de los cilindros es menor a $\lambda/2$)

- iii. Referente al campo eléctrico total se ha tenido una excelente reconstrucción.
- iv. Sobre el error se ha obtenido una baja tasa, es razonable ya que se ha obtenido una muy buena reconstrucción.

Se han también reconstruido cilindros homogéneos con centro en el punto de coordenadas (0.0 m, 0.0 m), de radio 0.06 m, y con una permitividad dieléctrica relativa que corresponde a los modelos de la madera analizados en el capítulo anterior pero ahora con ciertos niveles de SNR.

Modelo de la madera con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.11$ y $SNR = 20dB$

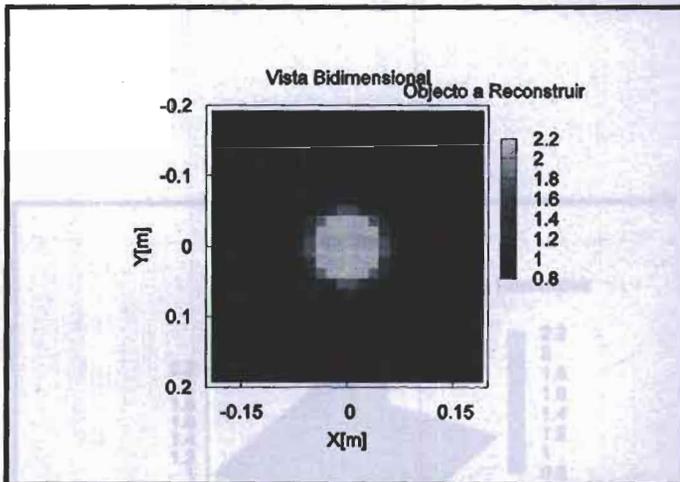


Figura 5.104: Simulación bidimensional del *objeto a reconstruir* con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.11$, $a = 0.06m$ y $SNR = 20dB$

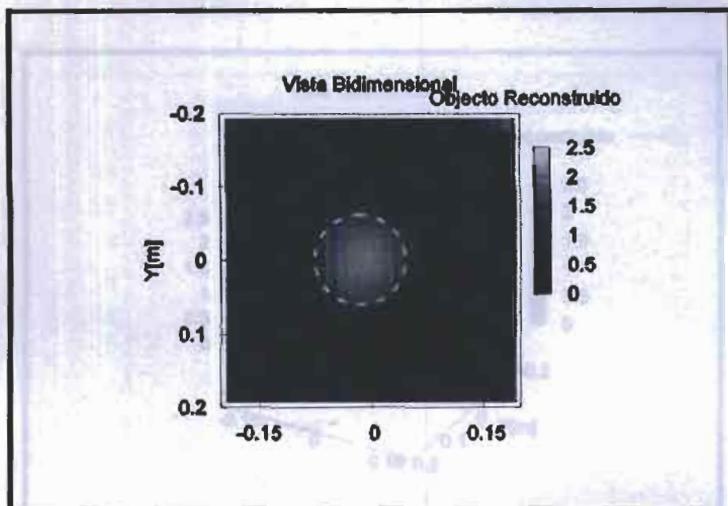


Figura 5.105: Simulación bidimensional del objeto *reconstruido*

con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.11$, $a = 0.06\text{m}$ y $\text{SNR} = 20\text{dB}$

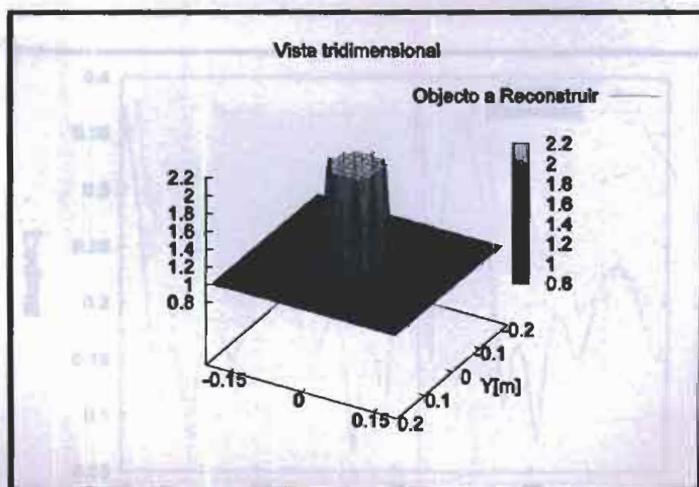


Figura 5.106: Simulación tridimensional del objeto *a reconstruir*

con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$, $a = 0.06\text{m}$ y $\text{SNR} = 20\text{dB}$

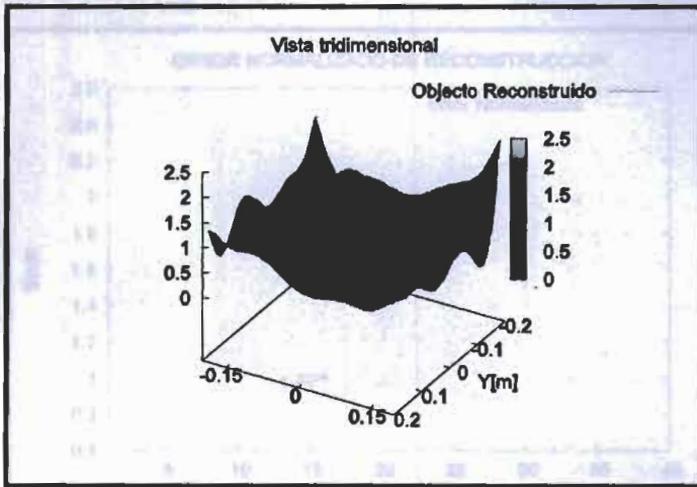


Figura 5.107: Simulación tridimensional del objeto reconstruido con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.2$, $a = 0.06m$ y $SNR = 20dB$

Modelo de la madera con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.79$ y $SNR = 20dB$

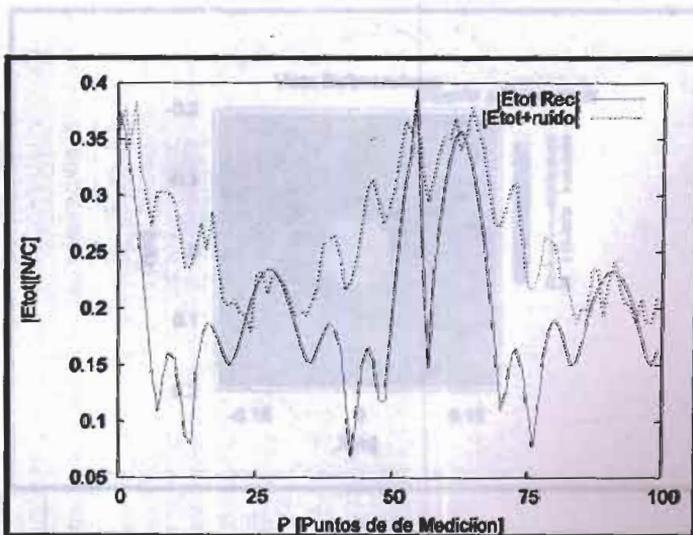


Figura 5.108: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total

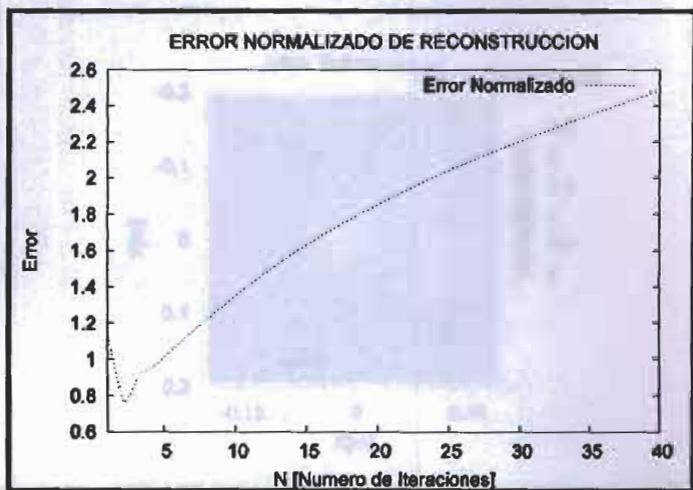


Figura 5.109: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

Modelo de la madera con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.79$ y $SNR = 20dB$

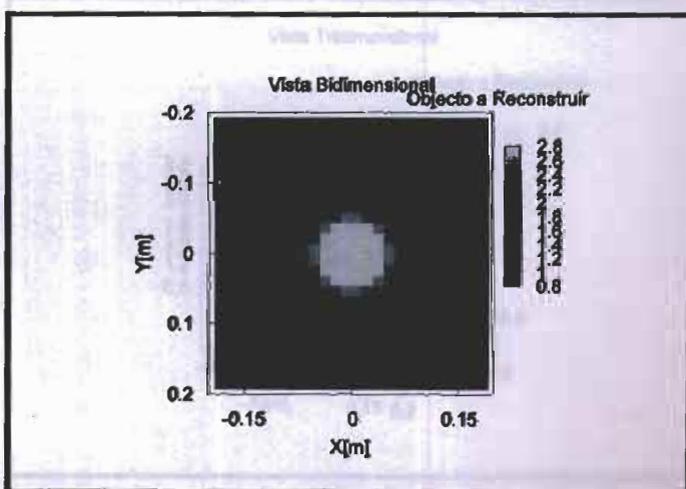


Figura 5.110: Simulación bidimensional del objeto a reconstruir con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.79$, $a = 0.06m$ y $SNR = 20dB$

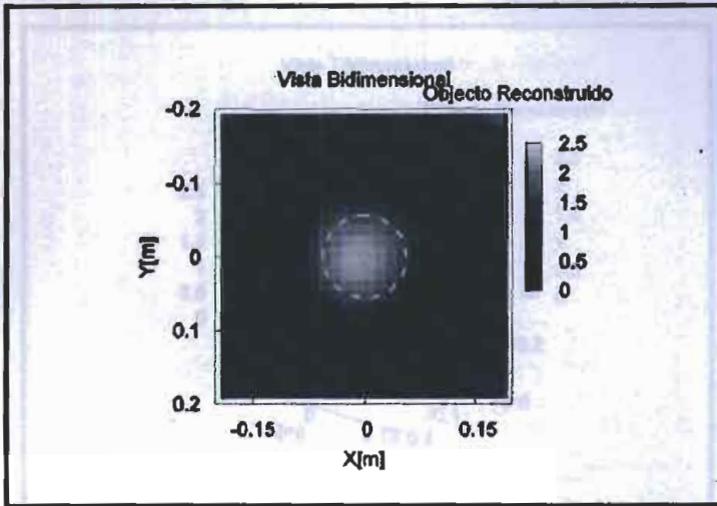


Figura 5.111: Simulación bidimensional del *objeto reconstruido* con $\epsilon(\vec{r}) = 2.79$, $a = 0.06m$ y $SNR = 20dB$

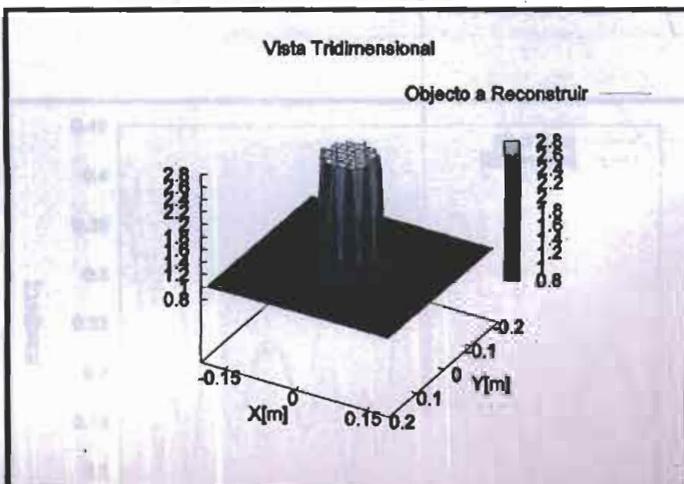


Figura 5.112: Simulación tridimensional del *objeto a reconstruir* con $\epsilon(\vec{r}) = 2.79$, $a = 0.06m$ y $SNR = 20dB$

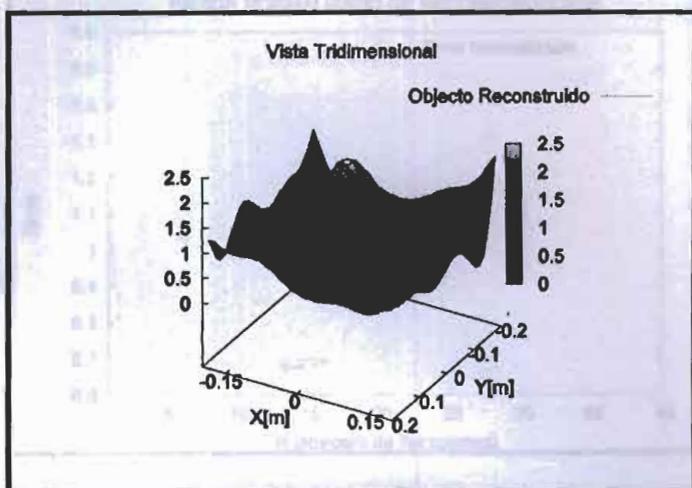


Figura 5.113: Simulación tridimensional del objeto reconstruido

con $\varepsilon(\vec{r}) = 2.79$, $a = 0.06m$ y $SNR = 20dB$

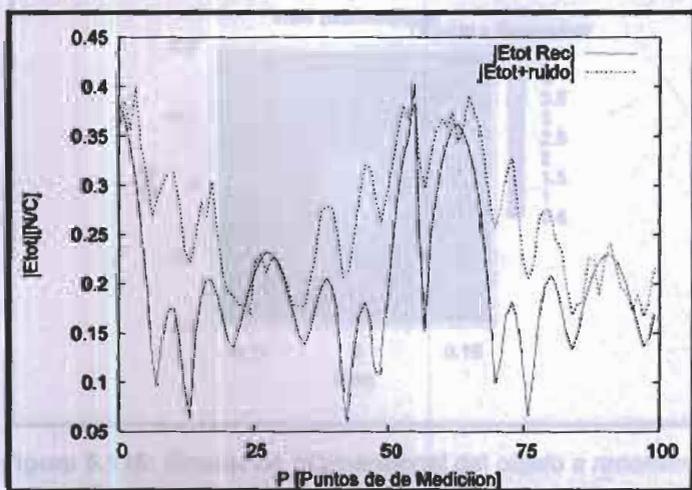


Figura 5.114: Reconstrucción del módulo del campo eléctrico total

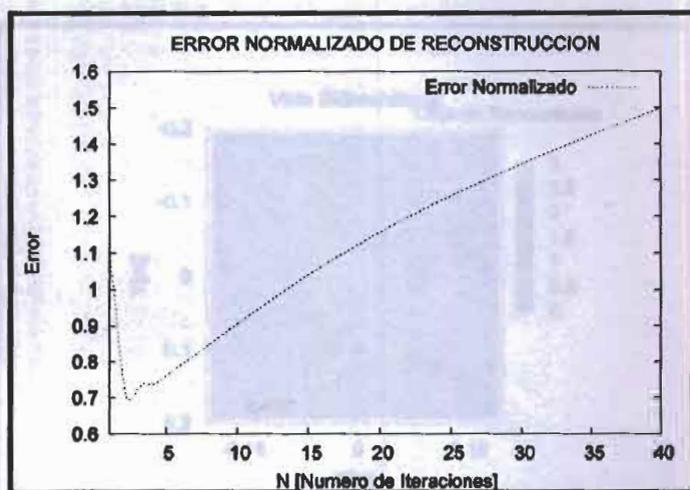


Figura 5.115: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

Modelo de la madera con $\varepsilon(\vec{r}) = 3.59$ y $SNR = 20dB$

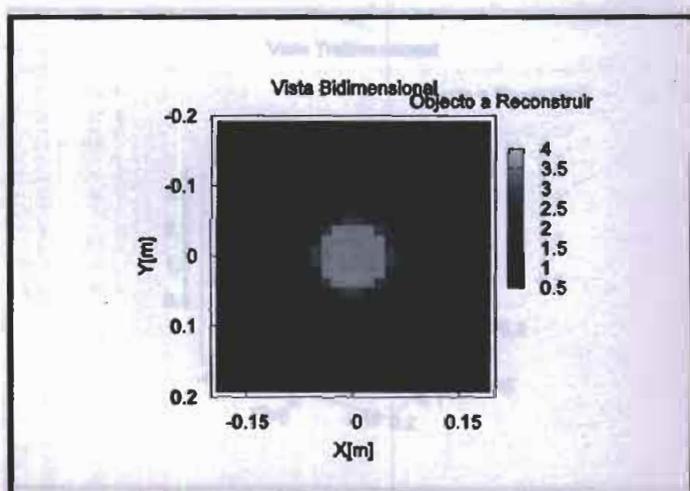


Figura 5.116: Simulación bidimensional del objeto a reconstruir con $\varepsilon(\vec{r}) = 3.59$, $a = 0.06m$ y $SNR = 20dB$

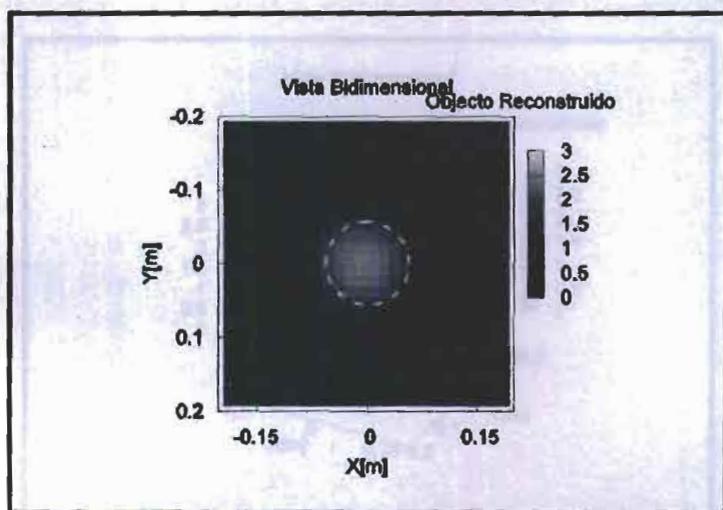


Figura 5.117: Simulación bidimensional del *objeto reconstruido* con $\varepsilon(\vec{r}) = 3.59$, $a = 0.06m$ y $SNR = 20dB$

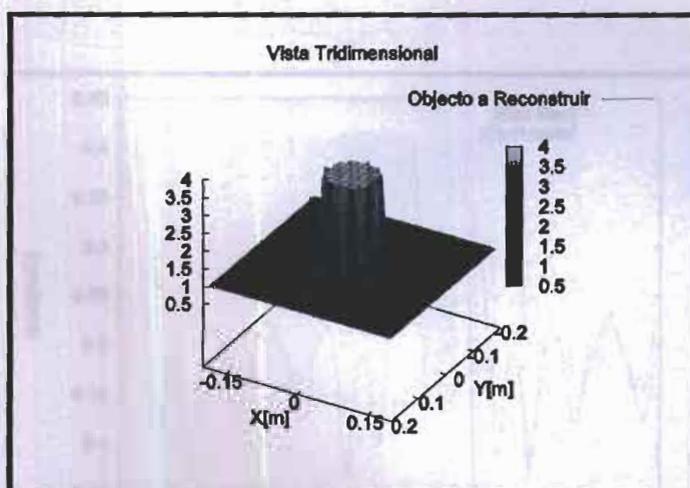


Figura 5.118: Simulación tridimensional del *objeto a reconstruir* con $\varepsilon(\vec{r}) = 3.59$, $a = 0.06m$ y $SNR = 20dB$

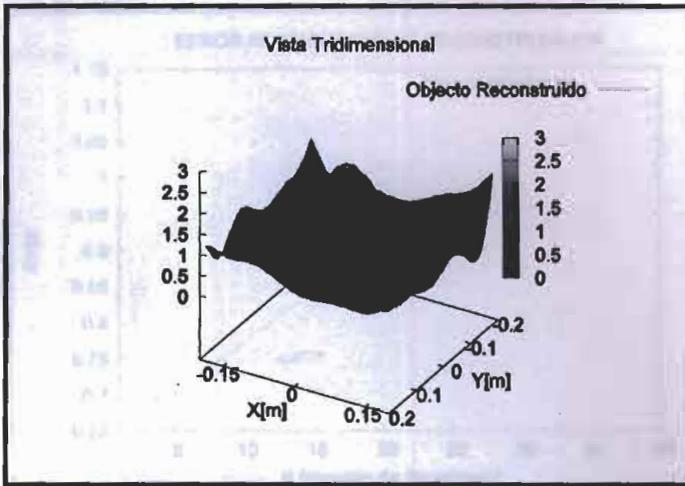


Figura 5.119: Simulación tridimensional del objeto reconstruido con $\varepsilon(\bar{r}) = 3.59$, $a = 0.06m$ y $SNR = 20dB$

Modelo de la madera con $\varepsilon(\bar{r}) = 6.18$ y $SNR = 20dB$

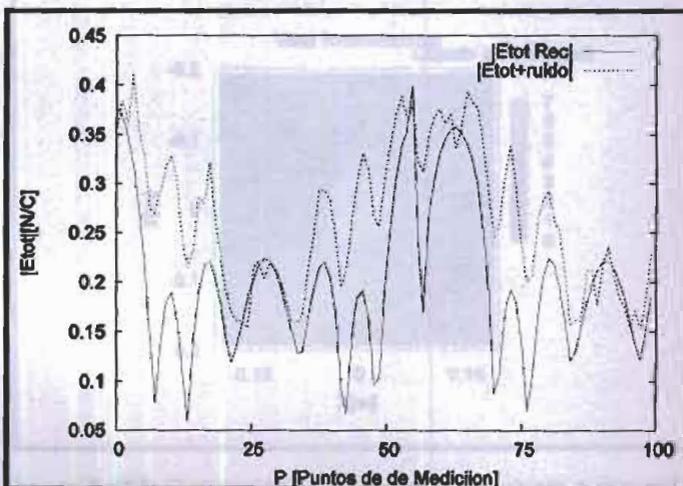


Figura 5.120: Reconstrucción del módulo del campo eléctrico total



Figura 5.121: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

Figura 5.122: Simulación bidimensional del objeto a reconstruir con $\varepsilon(\vec{r}) = 6.18$, $a = 0.06m$ y $SNR = 20dB$

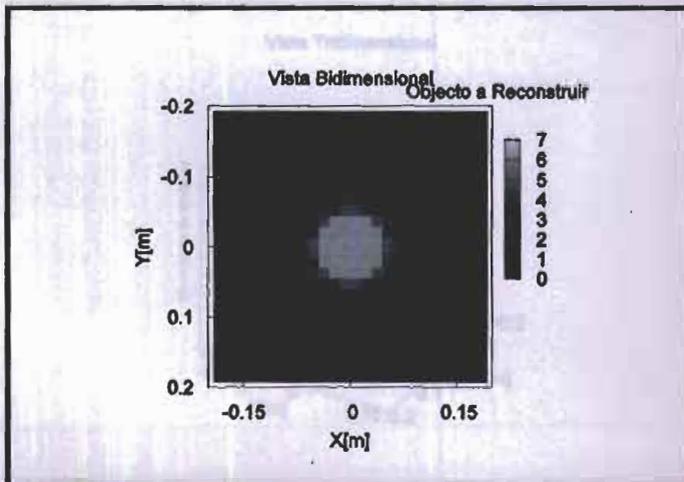


Figura 5.122: Simulación bidimensional del objeto a reconstruir con $\varepsilon(\vec{r}) = 6.18$, $a = 0.06m$ y $SNR = 20dB$

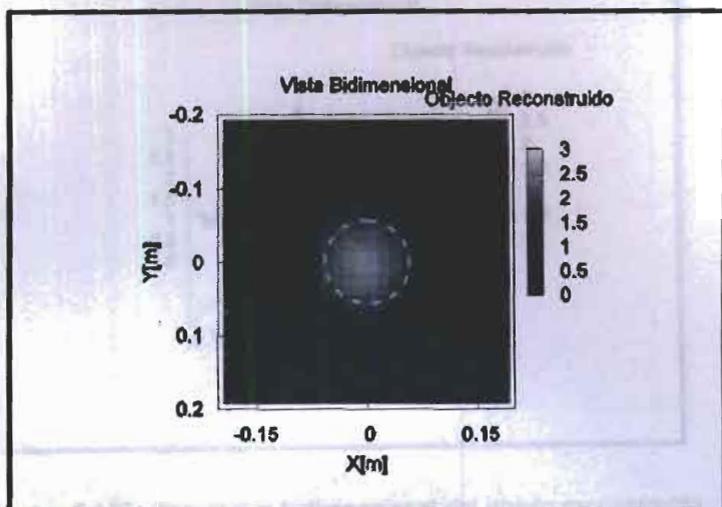


Figura 5.123: Simulación bidimensional del *objeto reconstruido* con $\varepsilon(\vec{r}) = 6.18$, $a = 0.06m$ y $SNR = 20dB$

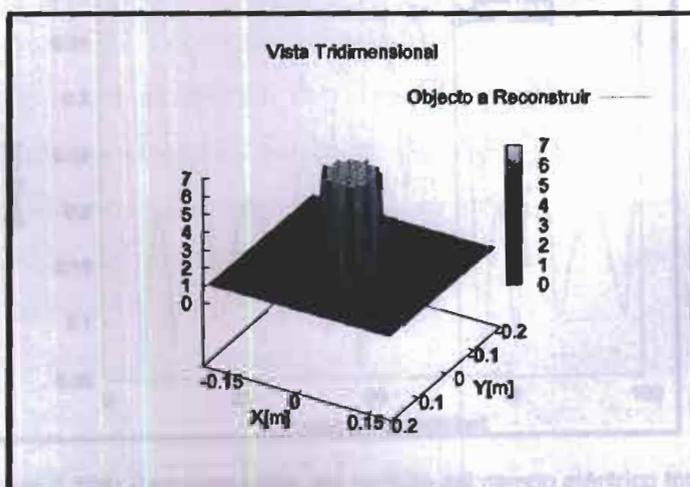


Figura 5.124: Simulación tridimensional del *objeto a reconstruir* con $\varepsilon(\vec{r}) = 6.18$, $a = 0.06m$ y $SNR = 20dB$

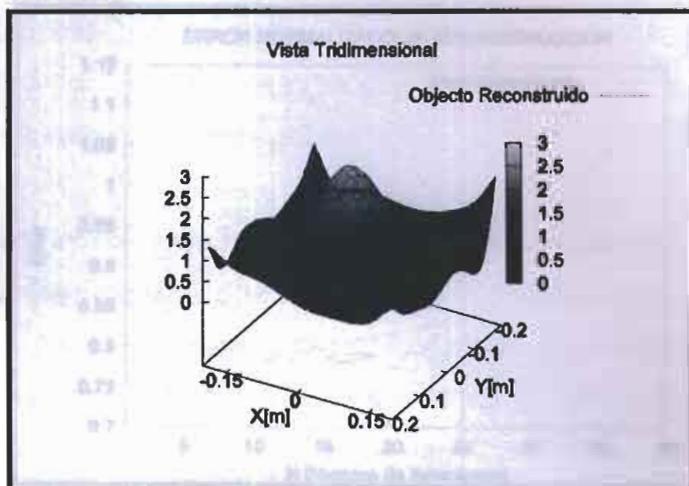


Figura 5.125: Simulación tridimensional del objeto reconstruido con $\varepsilon(\bar{r}) = 6.18$, $a = 0.06m$ y $SNR = 20dB$

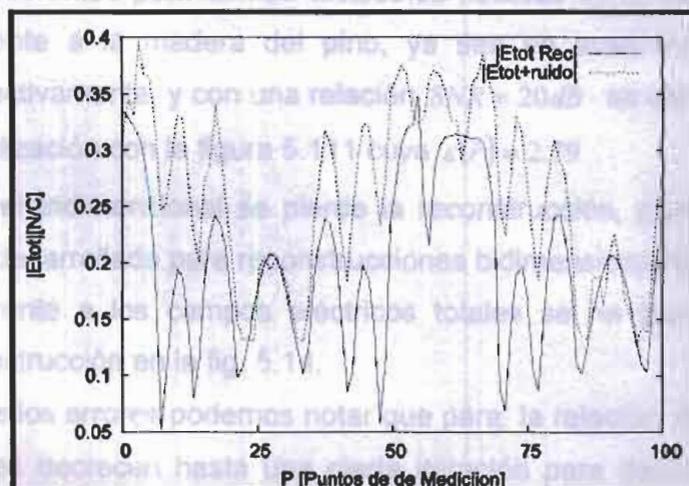


Figura 5.126: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total

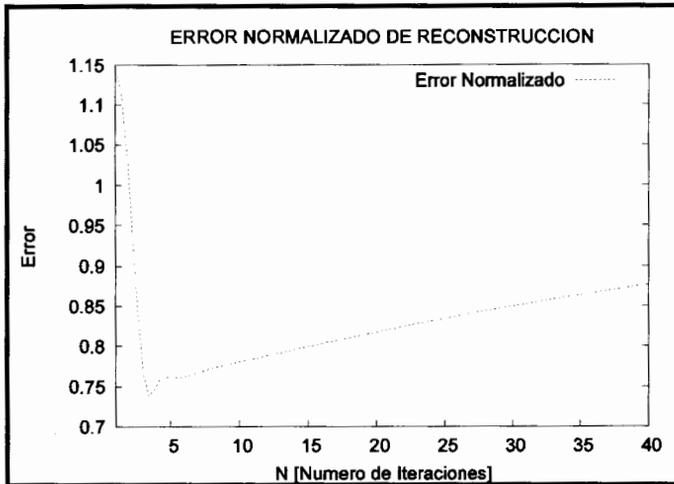


Figura 5.127: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

De las figuras anteriores podemos concluir:

- i. Las reconstrucciones de las figuras 5.105, 5.111, 5.117 y 5.123 con sus diferentes permitividad dieléctrica notadas en el capítulo anterior referente a la madera del pino, ya sea en ausencia o con agua respectivamente, y con una relación $SNR = 20dB$ se obtuvo una mejor visualización con la figura 5.111 cuya $\varepsilon(\vec{r}) = 2.79$.
- ii. A nivel tridimensional se pierde la reconstrucción, pues esta técnica está desarrollada para reconstrucciones bidimensionales.
- iii. Referente a los campos eléctricos totales se ha tenido una mejor reconstrucción en la fig. 5.14.
- iv. Sobre los errores podemos notar que para la relación $SNR = 20dB$ los errores decrecen hasta una cierta iteración para después tener una forma creciente el resto de las iteraciones: se trata del fenómeno de la *semiconvergencia*, algo característico de las inversiones de datos con ruido. Notemos que en las figuras concernientes al ruido normalizado

de reconstrucción, no es dicho que el error decrezca indefinidamente; simplemente, siendo menor, mayor o constante la influencia del ruido, con el fin de que el error logre el mínimo, es necesario un número de iteraciones externas mayor.

5.4 Reconstrucción de los modelos con la formulación exacta

Aunque el código que utiliza el método Inexact-Newton para la solución del problema del *inverse scattering* electromagnético en la formulación *exacta* no sea todavía optimizado siguiendo los criterios del párrafo 4.6.4, ya que los resultados de él obtenidos parecen ser muy alentadores. Se presenta una discretización en el dominio de indagación igual a la aplicada en con la aproximación de Born.

Para precisar, los parámetros del aparato simulado son:

Parámetro	Valor
I	125 mA
R_s	1.67 m
R_T	1.67
S	8
θ_s	45°
N_L	27
N_H	27
H	0.4 m
L	0.4 m
M	56
$\Delta\theta_r$	300°
θ_r	5.4545°

Tabla XI : Parámetros de instrumentación

Las simulaciones han sido efectuadas tanto en ausencia de ruido como en presencia de ruido con una relación señal-ruido $SNR = 20dB$.

Para compensar la pérdida de información debida al empleo de un numero limitado de fuentes, se ha aprovechado la técnica del *frequency hopping*, utilizando las frecuencias comprendidas entre 0.9GHz y 1.5 GHz con intervalos de 100 MHz.

Para cada frecuencia se han efectuado 40 iteraciones externas, mientras que el número de iteraciones internas ha sido de 30 en ambos casos, respectivamente, en presencia y ausencia de ruido.

La solución inicial a 0.9GHz ha sido $\chi_0 = 0$, $E_0^{1(int)}, \dots, E_0^{S(int)} = E^{t,S}$ mientras que a frecuencias más altas se han tomado como función contraste inicial aquella obtenida en la última iteración de la frecuencia precedente y como campos eléctricos internos aquellos obtenidos resolviendo el problema directo con aquella función contraste.

5.4.1 Reconstrucción en ausencia de ruido

En esta sección están presentes las reconstrucciones de los modelos de pilares de hormigón con la formulación *exacta*, tanto en vistas de trazados bidimensionales y tridimensionales, del campo eléctrico total original y reconstruido, además del error normalizado de reconstrucción generados por la técnica *frequency hopping*, utilizando datos *no* corrompidos por ruido.

5.4.1.1 Modelos con Pilares de Hormigón

En las aplicaciones de diagnostica no destructiva en el ámbito de la ingeniería civil e industrial es frecuente la demanda de identificar anomalías o defectos de construcciones en estructuras no directamente accesible. Una posible situación es dada en la figura 5.128, donde se tiene un prisma cuadrático con centro en el punto de coordenadas $(0.0 \text{ m}, 0.0 \text{ m})$, cuyo lado es de 0.2 m , y con una permitividad dieléctrica relativa de valor 2.6 y un cilindro con centro en el punto de coordenadas $(-0.025 \text{ m}, -0.025 \text{ m})$, cuyo radio es de 0.025 m , y con una permitividad dieléctrica relativa de valor 1.0 (véase en la figura 5.128).

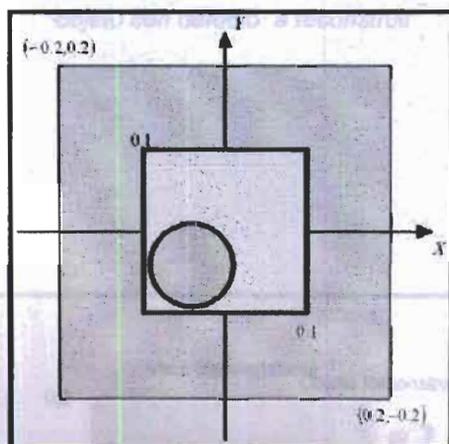


Figura 5.128: Objeto a reconstruir

Figura 5.130: Simulación bidimensional del objeto con defecto representado

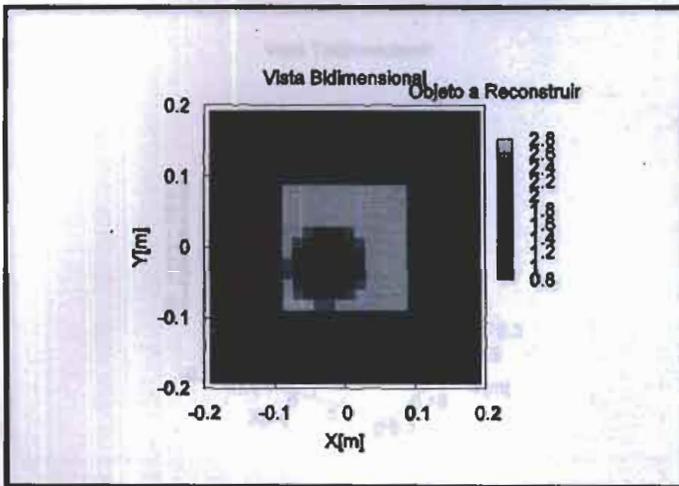


Figura 5.129: Simulación bidimensional del objeto con defecto a reconstruir

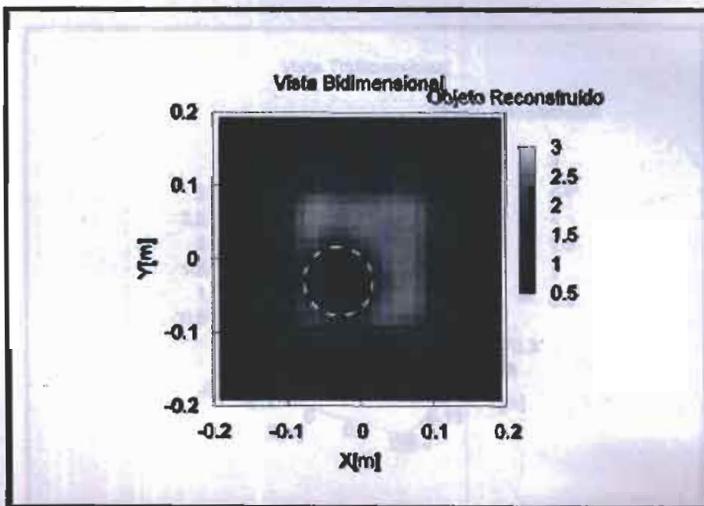


Figura 5.130: Simulación bidimensional del objeto con defecto reconstruido

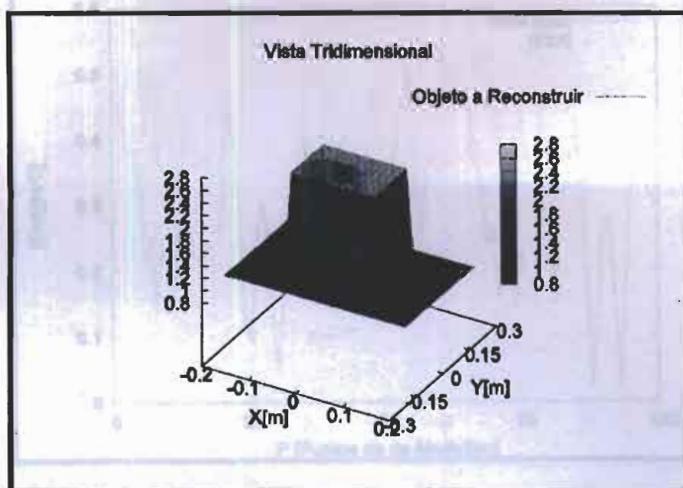


Figura 5.131: Simulación tridimensional del objeto con defecto a reconstruir

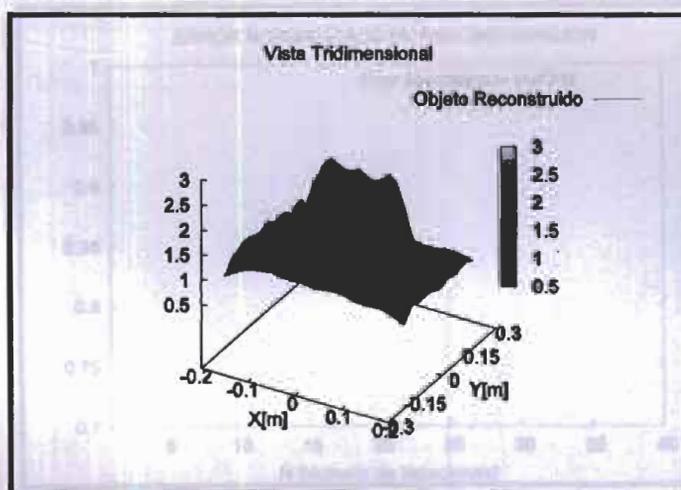


Figura 5.132: Simulación tridimensional del objeto con defecto reconstruido

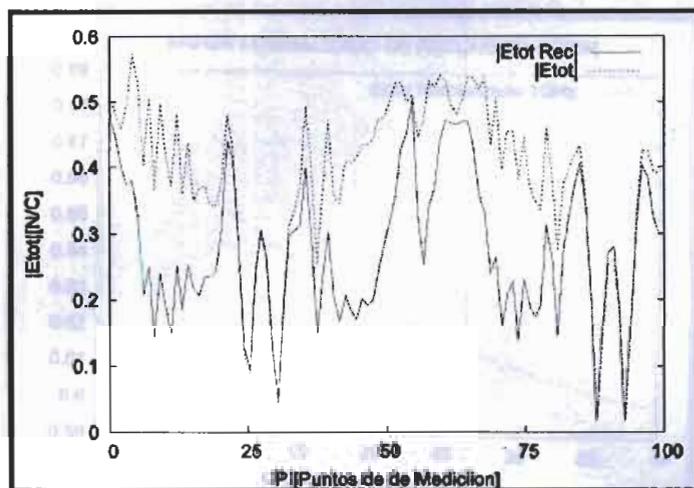


Figura 5.133: Reconstrucción del módulo del campo eléctrico total

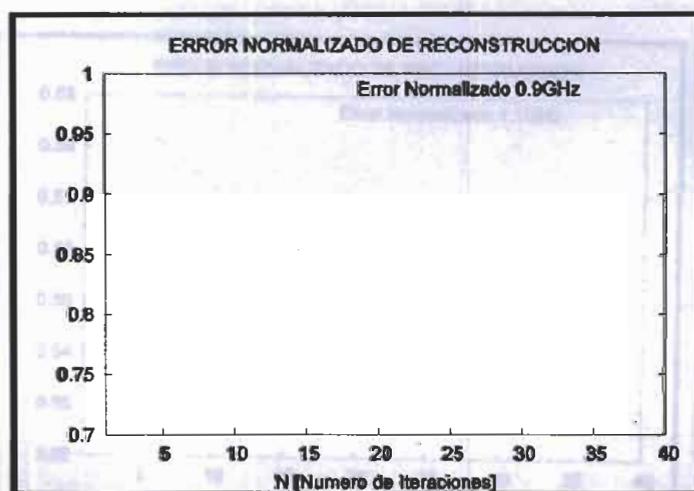


Figura 5.134: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones con $f_H = 0.9 \text{ GHz}$

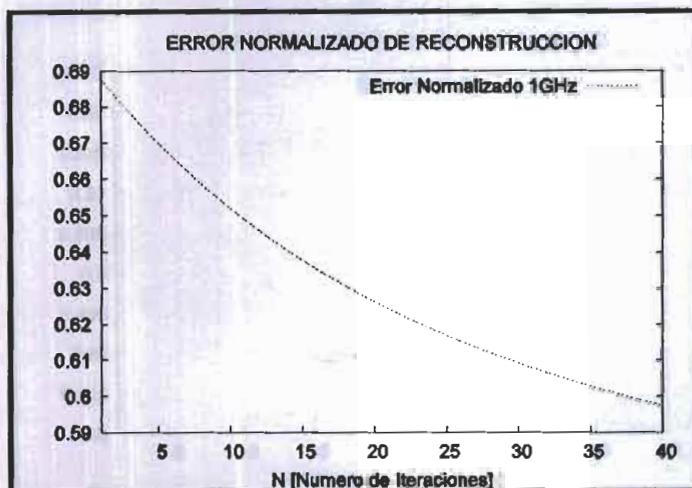


Figura 5.135: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones con $f_H = 1.0GHz$



Figura 5.136: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones con $f_H = 1.1GHz$



Figura 5.137: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones con $f_H = 1.2GHz$



Figura 5.138: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones con $f_H = 1.3GHz$

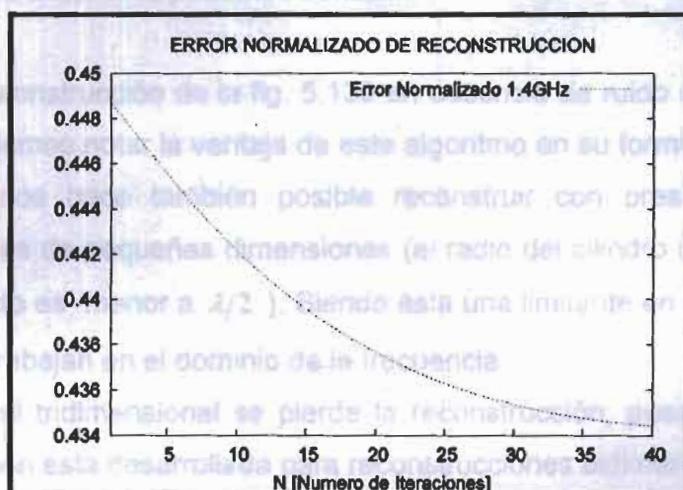


Figura 5.139: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones con $f_H = 1.4GHz$

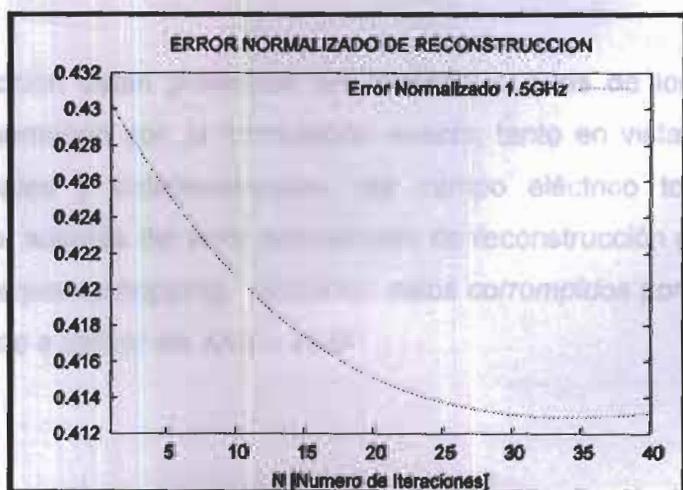


Figura 5.140: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones con $f_H = 1.5GHz$

De las figuras anteriores podemos concluir:

- i. La reconstrucción de la fig. 5.130 en ausencia de ruido es muy buena y podemos notar la ventaja de este algoritmo en su formulación *exacta* que nos hace también posible reconstruir con precisión también detalles de pequeñas dimensiones (el radio del cilindro utilizado como defecto es menor a $\lambda/2$). Siendo ésta una limitante en otras técnicas que trabajan en el dominio de la frecuencia.
- ii. A nivel tridimensional se pierde la reconstrucción, pues esta técnica también está desarrollada para reconstrucciones bidimensionales.
- iii. Referente al campo eléctrico total se ha tenido una muy buena reconstrucción vista en la fig. 5.133.
- iv. Sobre los errores, en ausencia de ruido, notamos la eficiencia de la técnica *frequency hopping* al verse que el error progresivamente va disminuyendo en cada intervalo de frecuencia determinado.

5.4.2 Reconstrucción en presencia de ruido

En esta sección están presentes las reconstrucciones de los modelos de pilares de hormigón con la formulación *exacta*, tanto en vistas de trazados bidimensionales y tridimensionales, del campo eléctrico total original y reconstruido, además del error normalizado de reconstrucción generados por la técnica *frequency hopping*, utilizando datos *corrompidos* por ruido. Siendo la señal- ruido a utilizar de $SNR = 20dB$.

5.4.2.1 Modelos con Pilares de Hormigón

En esta sección están presentes los parámetros de error relativos a la reconstrucción usando datos corrompidos por ruido, los resultados de las reconstrucciones serán obtenidas con la aproximación *exacta* del algoritmo Inexact-Newton.

Será utilizado el mismo modelo citado en el párrafo 5.4.1.1 y se han ejecutado simulaciones con una relación señal-ruido $SNR = 20dB$.

La importancia de estas simulaciones encuentra justificación en el hecho de que el problema de *inverse scattering* es mal puesto (ill-posed) y por lo tanto, asume crucial importancia, en la evaluación de un método de inversión, la capacidad de reconstruir objetos teniendo como base datos conocidos (método directo) en modo no exacto, pero dentro de un margen de certeza.

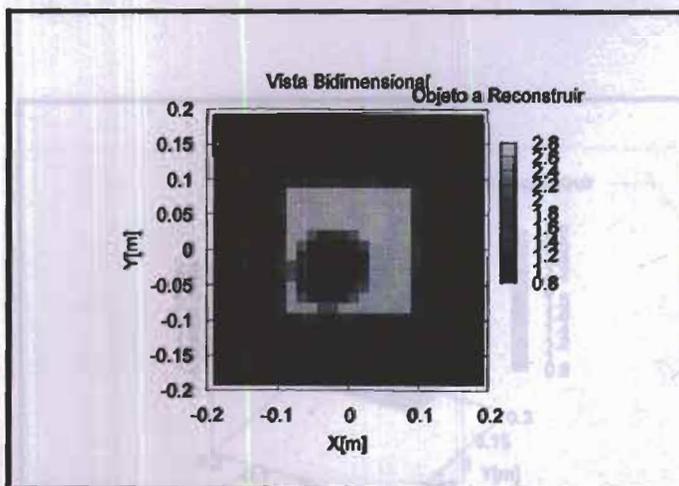


Figura 5.141: Simulación bidimensional del objeto con defecto a reconstruir

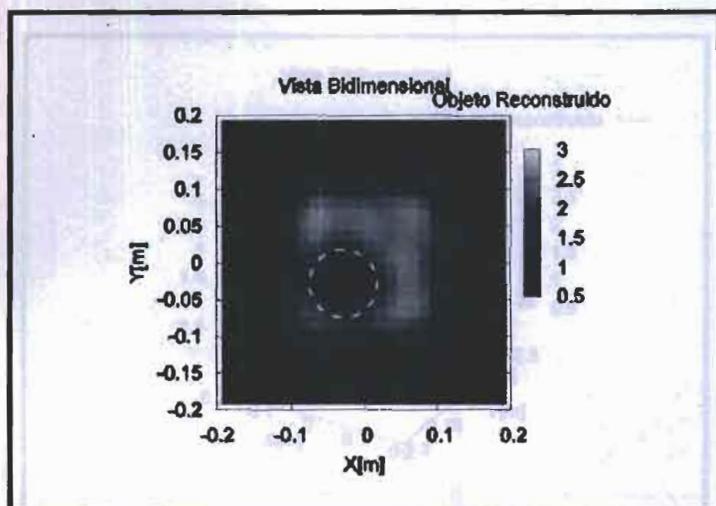


Figura 5.142: Simulación bidimensional del objeto con defecto reconstruido con $SNR = 20dB$

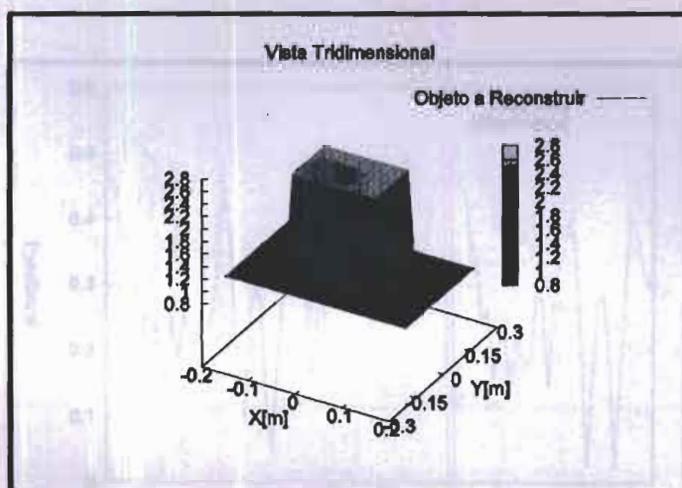


Figura 5.143: Simulación tridimensional del objeto con defecto a reconstruir

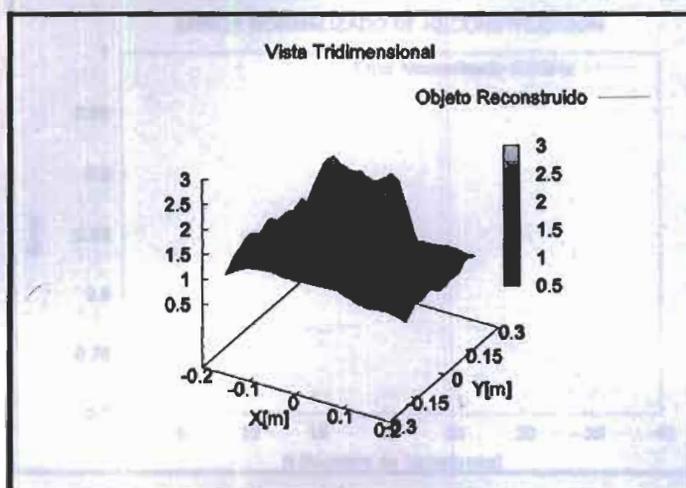


Figura 5.144: Simulación tridimensional del objeto con defecto reconstruido con $SNR = 20dB$

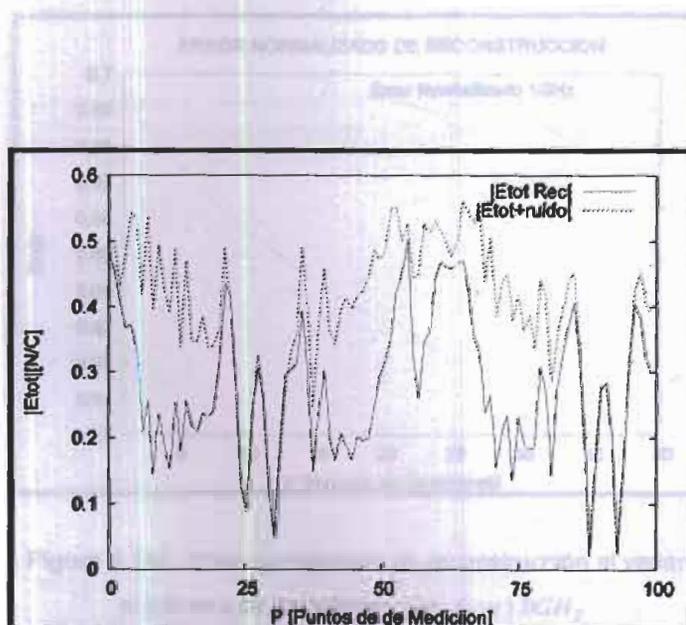


Figura 5.145: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total

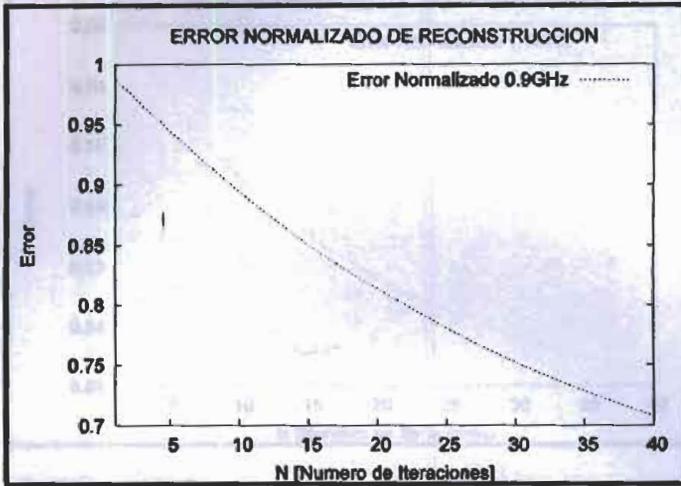


Figura 5.46: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones con $f_H = 0.9\text{GHz}$

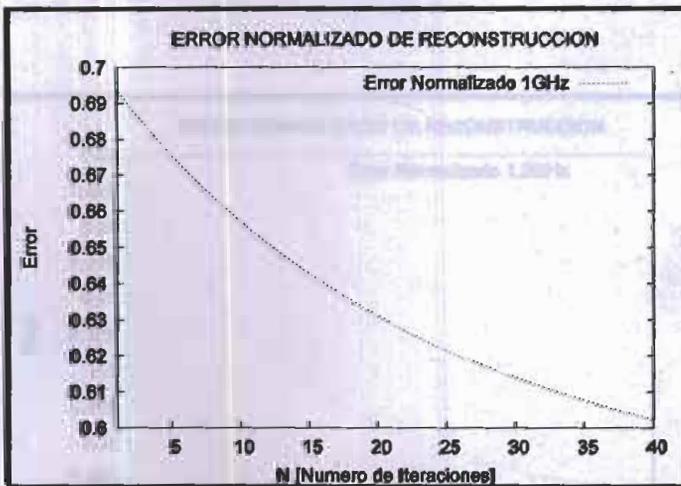


Figura 5.147: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones con $f_H = 1.0\text{GHz}$

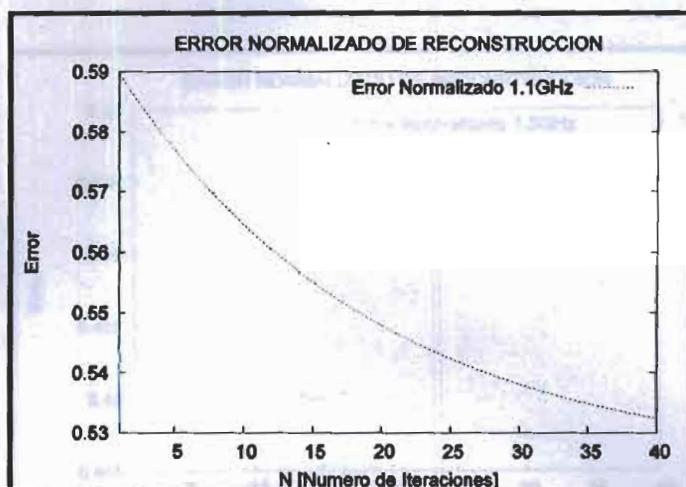


Figura 5.148: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones con $f_H = 1.1 \text{ GHz}$

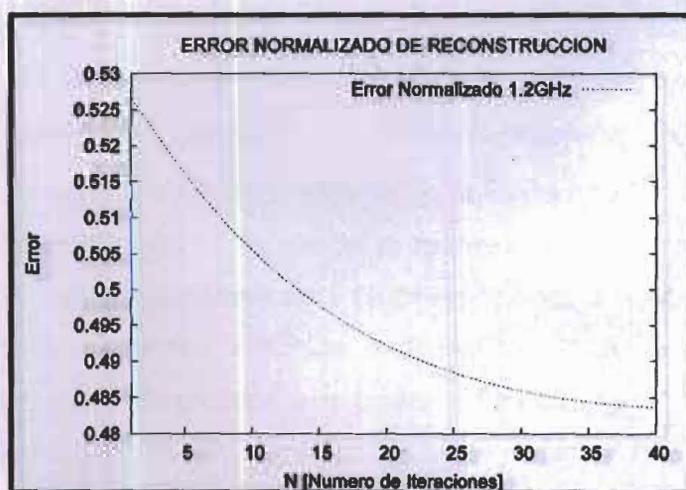


Figura 5.149: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones con $f_H = 1.2 \text{ GHz}$

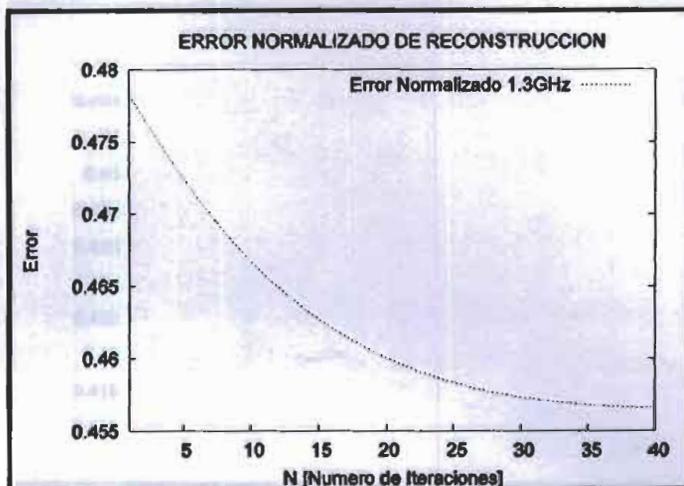


Figura 5.150: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones con $f_H = 1.3GHz$

De las figuras anteriores podemos concluir:

La reconstrucción de la fig. 5.149 con una relación $SVA = 20dB$ es muy buena y podemos notar la ventaja de este algoritmo en su formulación exacta que nos hace también posible reconstruir con

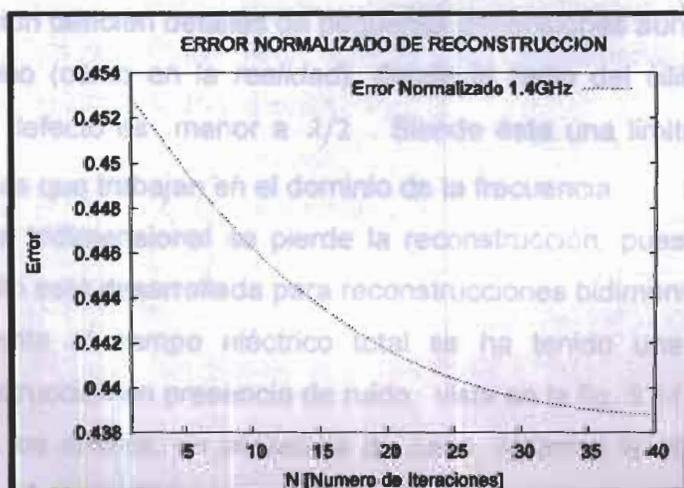


Figura 5.151: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones con $f_H = 1.4GHz$

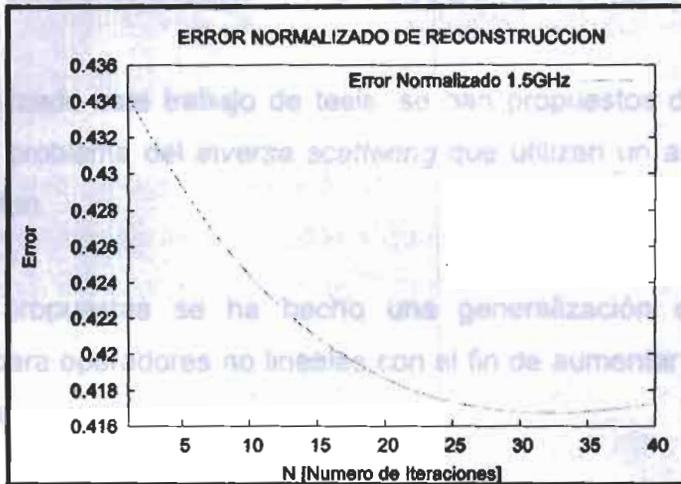


Figura 5.152: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones con $f_H = 1.5GH_z$

De las figuras anteriores podemos concluir:

- i. La reconstrucción de la fig. 5.142 con una relación $SNR = 20dB$ es muy buena y podemos notar la ventaja de este algoritmo en su formulación *exacta* que nos hace también posible reconstruir con precisión también detalles de pequeñas dimensiones aún en presencia de ruido (como en la *realidad*), donde el radio del cilindro utilizado como defecto es menor a $\lambda/2$. Siendo ésta una limitante en otras técnicas que trabajan en el dominio de la frecuencia.
- ii. A nivel tridimensional se pierde la reconstrucción, pues esta técnica también está desarrollada para reconstrucciones bidimensionales.
- iii. Referente al campo eléctrico total se ha tenido una muy buena reconstrucción en presencia de ruido, vista en la fig. 5.145.
- iv. Sobre los errores, en presencia de ruido, notamos la eficiencia de la técnica *frequency hopping* aún en datos inmerso en ruido; concluimos esto por el hecho de que el error progresivamente va decreciendo cada intervalo de frecuencia determinado.

CONCLUSIONES Y FUTUROS DESARROLLOS

Una vez realizado este trabajo de tesis, se han propuestos dos métodos de solución del problema del *inverse scattering* que utilizan un algoritmo de tipo Inexact-Newton.

En ambas propuestas se ha hecho una generalización del método de Landweber para operadores no lineales con el fin de aumentar la velocidad de convergencia.

Hemos aplicado un enfoque multivista, para ambas propuestas, tanto en el modelo 'exacto' como de aquel que aprovecha la aproximación de Born de segundo orden.

Se han efectuado una gran cantidad de reconstrucciones a partir de datos sintéticos para validar ambos métodos y para medir las prestaciones de los mismos.

Este trabajo, sin embargo, tiene puntos que actualmente la comunidad científica está profundizando y desarrollado.

Uno de esos puntos es la indagación de una *stopping rule* eficaz, para convertir más veloz al algoritmo de solución del modelo basado en la aproximación de Born, sería muy interesante experimentar un método de tipo 'Inexact-Quasi Newton', en el cual, la derivada de Fréchet no sea recalculada en cada iteración.

Lo referente a la formulación del método *exacto* demanda todavía diferentes optimizaciones: en primer lugar una rutina software que permita la gestión

eficiente de las matrices a flecha, y en segundo lugar una técnica que permita combinar las reconstrucciones obtenidas con diferentes fuentes con el fin de reducir la cantidad de memoria necesaria.

Además, aunque ambos métodos propuestos sean en grado de reconstruir objetos dispersivos, no ha sido todavía desarrollada una técnica que permita combinar el uso del frequency hopping.

Como último punto, se deberían extender estos métodos al caso tridimensional, aunque todavía sea una meta lejana a causa de la enorme cantidad de recursos computacionales necesarios. Podemos concluir que para resolver el problema de imágenes a microondas tridimensional son necesarios algoritmos basados en aproximaciones menos precisas, como ha sido el caso de estudio en esta tesis.

Finalizando, podemos notar las grandes aplicaciones industriales que tendría en nuestro País el estudio de los *Problemas Inversos*, donde estarían involucradas: la electrónica de circuitos, las telecomunicaciones, los procesos industriales, la tomografía computarizada, los sensores remotos; todo en rango de las microondas.

Sería una muy buena propuesta de diseñar e implementar en conjunto un *Anechoic Chamber* y un tomógrafo.

APÉNDICE A

PROBLEMAS MAL PUESTO (*ILL-POSED*)

Para introducir el concepto de *problema mal puesto*, damos la siguiente definición (devida a J. Hadamar, [16]).

Definición 1. Sea $A: U \subset X \rightarrow V \subset Y$ un operador del subconjunto U de un espacio normado X en un subconjunto V de un espacio normado Y . La ecuación

$$A\varphi = f$$

En la incógnita φ , se dice bien puesta si A es biyectivo y el operador inverso $A^{-1}: V \subset Y \rightarrow U \subset X$ es continuo; en caso contrario la ecuación se dice mal puesta.

Basándonos en esta definición, un problema puede ser mal puesto por tres diferentes motivos.

- A no es sobreyectivo: la solución entonces puede *no existir*, puesto que $\exists f \in V: \neg \exists \varphi: A\varphi = f$ (no existencia).
- A no es inyectivo: pueden existir más soluciones (no unicidad).
- A^{-1} no es continuo: la solución φ no depende en modo continuo de los datos f (inestabilidad).

En las aplicaciones prácticas es frecuentemente la última condición crea grandes dificultades. El hecho de que el operador inverso A^{-1} sea no continuo, significa, como será aclarado en seguida, que 'pequeñas' variaciones de los datos f pueden repercutirse en 'grandes' variaciones de la solución φ .

El estudio de los problemas mal puestos está profundamente ligado a aquellos de los *problemas inversos*, entendiendo por problemas inversos todos aquellos que consisten en, a partir de un 'efecto', llegar a la 'causa' que lo ha producido. El problema tratado en esta tesis –*inverse scattering electromagnético*– no es el único caso de problema inverso; en tal categoría entran en efecto, también los problemas de *sensores remotos*, *fuentes inversas*, *síntesis inversa*, *dispersión acústica inversa* y los problemas de *desconvolución*.

La resolución de los problemas inversos mal puestos no pueden ocurrir, por medio de métodos ordinarios, que requieren el uso de técnicas *ad hoc*, por los motivos que se ilustran en seguida

En vista de los próximos desarrollos, es necesario dar las siguientes definiciones.

Definición 2. *Un subconjunto S de un espacio métrico X se dice compacto si de cualquier sucesión de elementos de S , se puede extraer una subsucesión que sea convergente a cualquier punto de S .*

Definición 3. *Un conjunto S se dice relativamente compacto si su cerradura \bar{S} es un conjunto compacto.*

Definición 4. Un operador $A:U \subset X \rightarrow Y$ se dice compacto si hace corresponder conjuntos limitados en U a conjuntos relativamente compactos en Y .

Definición 5. Un operador $A:U \subset X \rightarrow Y$ se dice completamente continuo si es continuo y compacto.

Considerando que los operadores lineales compactos son siempre continuos, para ellos no es necesario distinguir entre compactabilidad y completa continuidad [24].

El teorema siguiente [10] constituye un resultado fundamental, porque provee un criterio para establecer si un problema es mal puesto.

Teorema 1. Sea $A:U \subset X \rightarrow Y$ un operador completamente continuo de un subespacio U de un espacio normado X en un espacio normado Y . Entonces la ecuación $A\varphi = f$, en la incógnita φ es mal puesto si U no es de dimensión finita.

Demostración. Se razona por absurdo y se supone que la ecuación sea bien puesta y que $A^{-1}:Y \rightarrow U$ exista y sea continúa. Entonces de la relación $I = A^{-1}A$ se deduce que el operador identidad sobre U es compacto ya que el producto entre un operador continuo y uno compacto es un operador compacto [5]. Pero el operador identidad sobre un espacio de dimensión infinita no es compacto [5], ya que en espacios de dimensión infinita existen conjuntos limitados que no son compactos. Por lo cual U debe ser de dimensión finita, contradiciendo las hipótesis.

Puesto que se tratará un problema *no lineal*, asume particular relieve el siguiente resultado, del cual no se reporta la demostración [10].

Teorema 2. Sea $A:U \subset X \rightarrow Y$ un operador completamente continuo de un subconjunto U de un espacio normado X en un espacio de Banach Y y se asuma que A admita derivada de Fréchet¹ A'_ψ en ψ y U . Entonces $A'_\psi:U \subset X \rightarrow Y$ es un operador compacto.

Estos dos teoremas implican que, si se linealiza una ecuación no lineal $A\varphi = f$ mal puesta con $A:U \subset X \rightarrow Y$ completamente continuo y $\dim U = \infty$, se obtiene una ecuación lineal que es todavía mal puesta.

Los dos teoremas anteriores valen en general para operadores *no lineales*. No obstante la teoría de las ecuaciones no lineales mal puestas no han logrado todavía el nivel de perfección en la teoría de los operadores *lineales*. Por este motivo y por el hecho de que el conocimiento de las propiedades de los operadores lineales constituirá de todas maneras un instrumento útil, se presentan ahora los resultados esenciales relativos a la solución de problemas lineales en espacios de *Hilbert* del tipo

$$A\varphi = f \tag{A.1}$$

donde $A:X \rightarrow Y$ es un operador *lineal* entre los espacios de Hilbert X y Y , $\varphi \in X$ es la *incógnita* y $f \in Y$ es el *termino dado*.

Es obvio que el problema (A.1) admite solución si y solo si $f \in R(A)$, siendo $R(A) := \{A\varphi : \varphi \in X\}$ el *rango* de A . Si $f \notin R(A)$, la ecuación (A.1) no admite soluciones. Además si $N(A) := \{\varphi \in X : A\varphi = 0\} \neq \emptyset$, la solución, si existe, no es única.

¹ Véase en el párrafo 3.2 para la definición de la derivada de Fréchet.

Es sin embargo es posible obviar las problemáticas de no existencia buscando una *solución generalizada* φ^\dagger al problema.

En el caso mas general, la definición de *solución generalizada* de un problema lineal, basada sobre el concepto de la *inversa generalizada*, deriva en la siguiente

Definición 6. Se define *inversa generalizada* A^\dagger para el operador lineal limitado A la aplicación lineal $A^\dagger : D(A^\dagger) \rightarrow X$ que satisface las siguientes condiciones:

- (i) el dominio $D(A^\dagger) = R(A) \oplus R(A)^\perp$ de A^\dagger es denso en Y
- (ii) $\forall f \in D(A^\dagger) \quad \|A\varphi^\dagger - f\| = \inf_{\varphi \in X} \|A\varphi - f\|$ con $\varphi^\dagger = A^\dagger f$
- (iii) $\|\varphi^\dagger\| < \|\varphi'\| \quad \forall \varphi' \in X, \varphi' \neq \varphi^\dagger$ tal que $A\varphi' = A\varphi^\dagger$

En otros términos, la *solución generalizada* es el elemento de X a *norma mínima*, que 'minimiza' la norma del residuo $A\varphi - f$.

El caso en el cual $R(A)$ sea cerrado, la definición precedente de la inversa generalizada coincide con aquella de solución a los mínimos cuadrados: vale en efecto el siguiente [13]

Teorema 3. Dado un operador lineal limitado $A : X \rightarrow Y$ con $R(A)$ cerrado, las siguientes condiciones son equivalentes

- (i) $A\varphi^\dagger = P_R f$
- (ii) $\|A\varphi^\dagger - f\| \leq \|A\varphi - f\| \quad \forall \varphi' \in X \quad \|\varphi^\dagger\| < \|\varphi'\|$
- (iii) $A^* A\varphi^\dagger = A^* f$

donde $P_R : Y \rightarrow \overline{R(A)}$ es el operador de proyección ortogonal sobre $R(A)$.

La relación (iii) del teorema 3 toma el nombre de *forma normal* de la ecuación lineal $A\varphi = f$. Para el teorema precedente, la solución de la *forma normal* es el elemento del dominio con imagen a distancia mínima de los datos.

Si A es lineal y compacto vale además el siguiente [13]

Teorema 4. Sea A un operador lineal y compacto con sistema singular $\{\mu_n; \varphi_n; \mathbf{g}_n\}^2$.

Si $f \in R(A) \oplus R(A)^\perp$, se tiene

$$A^\dagger f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (f, \mathbf{g}_n) \varphi_n \quad (A.2)$$

El teorema de Picard³ evidencia una importante consecuencia por el hecho de que en la ecuación $A\varphi = f$ A sea compacto sobre un espacio de dimensión infinita y que por lo tanto, por el teorema 1, la misma sea mal puesta.

Si en efecto, empleando los símbolos definidos en el apéndice B, si en él se perturba el término conocido f sustituyendo con $f^\delta = f + \delta \mathbf{g}_m$, donde δ es un número, se obtiene una solución perturbada

$$\begin{aligned} \varphi^\delta &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (f^\delta, \mathbf{g}_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (f + \delta \mathbf{g}_m, \mathbf{g}_n) \varphi_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (f, \mathbf{g}_n) \varphi_n + \delta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (\mathbf{g}_m, \mathbf{g}_n) \varphi_n \end{aligned} \quad (A.3)$$

² Véase en el apéndice B.

³ Véase en el apéndice B

Observando que $(g_m, g_n) = \delta_{m,n}$, donde $\delta_{m,n}$ es el delta de Kronecher, se concluye

$$\varphi^\delta = \varphi + \frac{\delta \varphi_n}{\mu_n} \quad (A.4)$$

De consecuencia

$$\|\varphi^\delta - \varphi\| = \frac{\delta}{\mu_n} \|\varphi_n\| \quad (A.5)$$

Considerando de que $\|f^\delta - f\| = \delta \|g_m\| = \delta$, se puede escribir

$$\left\| \frac{\varphi^\delta - \varphi}{f^\delta - f} \right\| = \frac{1}{\mu_m} \quad (A.6)$$

El único caso de interés en el cual el operador lineal compacto A tiene un infinidad de valores singulares no nulos, estos necesariamente se acumulan en cero [5]. La relación $\left\| \frac{\varphi^\delta - \varphi}{f^\delta - f} \right\|$ puede entonces ser arbitrariamente grande.

Esto significa que una variación finita de entidad cualquiera sobre los datos f puede repercutirse en una variación grande a placer sobre la solución φ , puesto que los datos son perturbados a lo largo de g_m con m suficientemente grande; esto muestra que el operador inverso no es continuo y por lo tanto confirma que el problema resulta mal puesto.

La sensibilidad de la solución a los errores sobre los datos f depende de la rapidez con los cuales los valores singulares $\{\mu_n\}$ tienden a cero. Un problema se dice entonces *blandamente mal puesto* si los valores singulares tienden a cero 'lentamente'; *fuertemente mal puesto* si ellos tienden a cero 'rápidamente'.

Consecuencia numérica de la mal posición de un problema

Como se ha visto, la mal posición es una característica intrínseca del problema tratado, *independiente* del método de solución y de los aspectos numéricos a él conexos. Sin embargo, el hecho de que una ecuación sea mal puesta repercute sobre el modo en el cual ella puede ser resuelta numéricamente.

No obstante, en efecto un problema sea generalmente descrito, como en el caso del *scattering electrogmánico*, de un modelo *continuo* formulado sobre espacios de dimensión *infinita*, su solución *numérica* necesita de una discretización, o sea de una aproximación en espacios de dimensión *finita*. La ecuación, que suponemos, por simplicidad, lineal

$$A\varphi = f \quad (A.7)$$

se vuelve por consiguiente un sistema de ecuaciones algebraicas

$$\tilde{A}\tilde{\varphi} = \tilde{f} \quad (A.8)$$

donde la matriz \tilde{A} es la *aproximación numérica* del operador A , en la cual su dimensión depende del tipo de discretización adoptada.

Siendo formulado en espacios de dimensión finita, el problema (A.8) resulta *bien puesto* [13]. Desde un punto de vista *numérico*, sin embargo, el ser bien puesto no es suficiente a garantizar estabilidad y confiabilidad de la solución.

La propiedad que al contrario caracteriza cada problema del tipo (A.8) es el *condicionamiento* de la matriz \tilde{A} . Vale por lo tanto la siguiente afirmación: *la discretización de una ecuación lineal mal puesta da lugar a un sistema mal condicionado*.

Se es tentado de gestionar las problemáticas conexas a la mal posición utilizando discretización mas finas, obteniendo así matrices de dimensión mayor. Esta estrategia no es eficaz, puesto que discretizaciones más precisas dan lugar a matrices siempre peor condicionadas.

El caso en el cual A es compacto (como ocurre en los problemas de *inverse scattering*), se puede dar una simple explicación de este fenómeno.

Sea $\{\mu_n; \varphi_n; \mathbf{g}_n\}$ el sistema singular del operador lineal A . Sea \tilde{A} la matriz $p \times p$, invertible, obtenida discretizando al operador A . Se considera además la descomposición en valores singulares de la matriz \tilde{A} , o sea $f^\delta = f + \delta \mathbf{g}_m$

$$\tilde{A} \tilde{\varphi} = \sum_{i=1}^p \tilde{\mu}_i (\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_i) \tilde{\mathbf{g}}_i, \quad (A.9)$$

donde $\{\tilde{\mu}_n; \tilde{\varphi}_n; \tilde{\mathbf{g}}_n\}$ es el sistema singular de la matriz \tilde{A} , con $\tilde{\mu}_1 \geq \tilde{\mu}_2 \geq \tilde{\mu}_p > 0$. se verifica 'experimentalmente' que los p valores de \tilde{A} resultan ser una aproximación de los primeros p valores singulares del operador A . Una explicación *heurística* de tal hecho es la siguiente: recordando que los primeros p valores singulares corresponden a las componentes más significativas y menos oscilantes, se puede concluir que estas son las más fáciles de aproximar, o sea son aquellas que también se pueden aproximar bien con discretizaciones menos finas.

La situación puede ser ejemplificada haciendo referencia al desarrollo en serie de Fourier. Desarrollando en serie de Fourier una función f periódica de periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, tal que $\int_0^T f^2(t) dt < \infty$, se obtienen en efecto armónicas de amplitud *finita*; además la amplitud de la n -ésima armónica (de pulsación $n\omega$) tiende a cero para $n \rightarrow \infty$. Es además obvio que armónicas 'a baja

frecuencia' pueden ser bien aproximadas con una discretización menos fina, mientras las componentes a alta frecuencia en él requieren una mayor exactitud.

Supongamos ahora de realizar una discretización más fina, en la cual corresponda una matriz \tilde{A}' , $p' \times p'$, con $p' > p$

Se consideran por lo tanto las inversas generalizadas de \tilde{A} y de \tilde{A}' . Los valores singulares de \tilde{A}^+ son

$$\frac{1}{\tilde{\mu}_p} \leq \frac{1}{\tilde{\mu}_{p-1}} \leq \dots \leq \frac{1}{\tilde{\mu}_1} \quad (A.10)$$

mientras aquellos de \tilde{A}'^+ son

$$\frac{1}{\tilde{\mu}'_p} \leq \frac{1}{\tilde{\mu}'_{p-1}} \leq \dots \leq \frac{1}{\tilde{\mu}'_1} \quad (A.11)$$

Se obtiene

$$\text{cond}(\tilde{A}^+) = \frac{\tilde{\mu}_p^{-1}}{\tilde{\mu}_1^{-1}} = \frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\mu}_p} \quad (A.12)$$

y

$$\text{cond}(\tilde{A}'^+) = \frac{\tilde{\mu}'_p^{-1}}{\tilde{\mu}'_1^{-1}} = \frac{\tilde{\mu}'_1}{\tilde{\mu}'_p} \quad (A.13)$$

donde $\text{cond}(\cdot)$ denota el *número de condición* de una matriz.

Considerando nuevamente las propiedades de las componentes asociadas a los primeros valores singulares, se observa que las dos aproximaciones de μ_1 no difieren mucho (como ya observado la aproximación obtenida por medio de la primera discretización es desde ya buena), mientras, que en valores singulares mas pequeños, en general $\tilde{\mu}_p \gg \tilde{\mu}'_p$, recordando que $\mu_n \rightarrow \infty$ para $n \rightarrow \infty$. Se obtiene así que

$$\text{cond}(\tilde{A}^+) \gg \text{cond}(\tilde{A}^+) \quad (A.14)$$

Desde el punto de vista práctico, el hecho de que la matriz de coeficientes de un sistema tenga un número de condición elevado, significa que perturbando 'poco' al término conocido, se provoca una variación 'grande' sobre la solución. Este resultado sigue inmediatamente del razonamiento hecho en el párrafo precedente sobre el operador A , que queda válido también para matriz \tilde{A} siempre y cuando se considere suma de un número *finito* de términos. La conclusión del razonamiento no es por lo tanto que la cantidad

$\frac{\|\tilde{\varphi}^\delta - \tilde{\varphi}\|}{\|\tilde{f}^\delta - \tilde{f}\|}$ puede ser grande a placer, pero que ella puede resultar 'muy grande'.

Esto constituye un notable problema en la solución de un problema inverso. En efecto en las aplicaciones el término \tilde{f} deriva frecuentemente de mediciones y por tanto resulta conocido al igual que su tolerancia, que aunque limitada, según se ha visto, puede perjudicar fuertemente la bondad de la solución. En el ámbito de los problemas del *inverse scattering electromagnético* el ruido es, por ejemplo, debido a errores de medición o a la precisión finita de los instrumentos, además de interferencias electromagnéticas presentes en el ambiente de medición.

Métodos de regularización

Los *métodos de regularización* son métodos para construir aproximaciones bien puestas de problemas mal puestos. Aquí se hará todavía la hipótesis que $A : X \rightarrow Y$ sea un operador lineal.

Se quiere pues aproximar la solución φ de la ecuación $A\varphi = f$ sabiendo que el término dado f no en manera exacta, pero dentro de un nivel de incertidumbre δ . En otras palabras, en lugar de $f \in Y$ se tiene una disposición $f^\delta \in Y$ tal que

$$\|f^\delta - f\| \leq \delta \quad (A.15)$$

Si f pertenece al rango de A (y A es inyectivo), existe entonces una única solución φ para la ecuación $A\varphi = f$. Si al contrario el miembro derecho f ha sido perturbado en f^δ , en general no podremos esperar que $f^\delta \in R(A)$ y por consiguiente la solución de la ecuación considerada podría no existir. En otros términos no existe una 'causa' φ que sea en grado de generar exactamente el efecto f^δ .

Sin embargo, del conocimiento de f^δ , se desea de todas maneras determinar una aproximación φ^δ de la solución exacta φ y, por obvios motivos de robustez y estabilidad, se quiere que φ^δ dependa en modo continuo de los datos. Para lograr este objetivo es necesario individuar una aproximación del operador inverso ilimitado $A^{-1} : R(A) \rightarrow X$ mediante un operador lineal limitado $R : Y \rightarrow X$.

Damos ahora la importante definición del método de regularización [10].

Definición 7. Sean X y Y dos espacios normados y sea $A: X \rightarrow Y$ un operador inyectivo lineal. Entonces una familia de operadores lineales limitados $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$, $R_\alpha: X \rightarrow Y$, con la propiedad de convergencia puntual

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha A \varphi = \varphi \quad (A.16)$$

$\forall \varphi \in X$ se dice método de regularización para el operador A . El parámetro α se lo conoce como parámetro de regularización.

El siguiente teorema muestra que la convergencia de los métodos de regularización para los operadores compactos *no* puede ser uniforme.

Teorema 5. Sean X y Y dos espacios normados y sea X de dimensión infinita. Sea $A: X \rightarrow Y$ un operador lineal y compacto. Para un método de regularización R_α los operadores R_α no pueden entonces ser uniformemente limitados respecto a α y los operadores $R_\alpha A$ no pueden ser convergentes en norma cuando $\alpha \rightarrow 0$ al operador identidad.

Demostración. Para demostrar que los operadores R_α no pueden ser uniformemente limitados respecto a α , se procede razonando por absurdo y suponemos que $\|R_\alpha\| \leq C$, $\forall \alpha > 0$ para una constante C . del hecho de que $R_\alpha f \rightarrow A^{-1}f, \alpha \rightarrow 0, \forall f \in R(A)$, se deduce $\|A^{-1}f\| \leq C\|f\|$, o sea que $A^{-1}: R(A) \rightarrow X$ es limitado. Por el teorema 1 esta afirmación contradice la hipótesis de que X sea de dimensión infinita.

En cuanto resguarda la segunda parte del teorema, se razona por absurdo y suponemos de tener la convergencia en norma. Entonces existe $\alpha > 0$ tal que $\|R_\alpha A - I\| < \frac{1}{2}$.

Ahora $\forall f \in R(A)$, se tiene

$$\begin{aligned} \|A^{-1}f\| &= \|A^{-1}f - R_\alpha AA^{-1}f + R_\alpha f\| \leq \\ &\leq \|A^{-1}f - R_\alpha AA^{-1}f\| + \|R_\alpha f\| \leq \frac{1}{2}\|A^{-1}f\| + \|R_\alpha\|\|f\| \end{aligned} \quad (A.17)$$

De consecuencia $\frac{1}{2}\|A^{-1}f\| \leq \|R_\alpha\|\|f\| \Leftrightarrow \|A^{-1}f\| \leq 2\|R_\alpha\|\|f\|$. Entonces, como ya expuesto, $A^{-1} : R(A) \rightarrow X$ es limitado y por lo tanto, por el teorema precedente, esta afirmación contradice que X sea de dimensión infinita. Vale además el siguiente teorema.

Teorema 6. si $f^\delta \notin D(A^\dagger)$, entonces

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha f^\delta\| = \infty \quad (A.18)$$

Para la demostración véase [13].

Un método de regularización aproxima la solución φ de la ecuación $A\varphi = f$ con la solución regularizada

$$\varphi_\alpha^\delta := R_\alpha f^\delta \quad (A.19)$$

Resulta entonces

$$\varphi_\alpha^\delta - \varphi := R_\alpha f^\delta - \varphi \quad (A.20)$$

Teniendo en cuenta el hecho de que $A\varphi = f$ y por consiguiente $R_\alpha f = R_\alpha A\varphi$, se puede escribir

$$\varphi_\alpha^\delta - \varphi = R_\alpha f^\delta - R_\alpha f + R_\alpha A\varphi - \varphi \quad (A.21)$$

y, por la desigualdad triangular,

$$\|\varphi_\alpha^\delta - \varphi\| \leq \|R_\alpha(f^\delta - f)\| + \|R_\alpha A\varphi - \varphi\| \quad (A.22)$$

Además, siendo $\|R_\alpha f^\delta - R_\alpha f\| \leq \|R_\alpha\| \|f^\delta - f\| \leq +\|R_\alpha\| \|\delta\|$, se concluye

$$\|\varphi_\alpha^\delta - \varphi\| \leq \|\delta\| \|R_\alpha\| + \|R_\alpha A\varphi - \varphi\| \quad (A.23)$$

La (A.23) da en evidencia el hecho de que al error sobre la solución aproximada contribuyen dos elementos: el primero ($\|\delta\| \|R_\alpha\|$) es debido al errado conocimiento de los datos f y el segundo ($\|R_\alpha A\varphi - \varphi\|$) es el error que se comete aproximando A^{-1} con R_α .

En las hipótesis del teorema precedente, el primer termino no puede ser estimado en manera uniforme respecto a α y el segundo no puede ser estimado uniformemente respecto a φ . Además, puesto que

$$\|R_\alpha f^\delta\| \leq \|R_\alpha\| \|f^\delta\| \quad (A.24)$$

si, como frecuentemente ocurre, $f^\delta \notin D(A^\dagger)$, por el teorema 6, se concluye que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha\| = \infty \quad (A.25)$$

Este razonamiento permite afirmar que, típicamente, el primer termino de la (A.23) aumentará para $\alpha \rightarrow 0$ a causa de la posición del problema, mientras que el segundo termino disminuirá para $\alpha \rightarrow 0$.

Elección del parámetro de regularización

Cada método de regularización requiere una estrategia para seleccionar el parámetro α en función del nivel de error δ con el fin de obtener un error total aceptable sobre la solución regularizada. De un lado la exactitud de la aproximación requiere un valor de α pequeño para reducir el término $\|R_\alpha A\varphi - \varphi\|$; del otro lado, la estabilidad requiere que $\|R_\alpha\|$ sea pequeña y por consiguiente α sea grande. Es por lo tanto necesario un *compromiso entre estabilidad y exactitud*, escogiendo un valor de α que balancee ambas exigencias.

La elección de α puede ocurrir *a priori* o *a posteriori*.

Una elección *a priori* no necesita del cálculo de la solución regularizada, pero en la práctica, raramente es realizable con éxito. Las elecciones *a posteriori* son al contrario más prácticas, pero necesitan del cálculo de la solución regularizada antes de evaluar la bondad.

Frecuentemente ellas se basan en el nivel de error sobre los datos δ .

Entre las estrategias *a posteriori* se tiene el *principio de discrepancia* o el *principio del residuo*.

Tal método se basa en el hecho de que, para datos corrompidos por ruido, no tiene sentido determinar el residuo $\|A\varphi - f\|$ más pequeño que la exactitud con el cual se conoce f ; en otros términos, el parámetro de regularización α debería ser escogido en modo tal que

$$\|AR_\alpha f^\delta - f^\delta\| = \gamma\delta \quad (A.26)$$

donde $\gamma \geq 1$ es un parámetro fijado.

En el caso de métodos de regularización iterativos $\{R_m\}$ con parámetro de regularización $m = 1, 2, 3, \dots$ correspondiente al número de iteraciones efectuadas, la iteración óptima debería ser escogida como la primera iteración que satisface la relación

$$\|AR_m f^\delta - f^\delta\| \leq \gamma\delta \quad (A.27)$$

Necesita de todas manera observar que frecuentemente el parámetro de regularización óptimo viene determinado por medio de diferentes tentativos, escogiendo el valor en el cual corresponde la solución mas *razonable* sobre la base del conocimiento a priori, como ocurre regularmente en la diagnostica medica.

APÉNDICE B

DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES

Antes que todo enunciemos, sin demostrar [24], la siguiente

Proposición 1. sean X y Y dos espacios de Hilbert y sea $A: X \rightarrow Y$ un operador lineal limitado. Entonces existe un único operador limitado $A^*: Y \rightarrow X$ denominado operador adjunto de A , tal que $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^*\psi)$ $\forall \varphi \in X, \forall \psi \in Y$.

Sea X un espacio de Hilbert. El operador lineal $A: X \rightarrow Y$ se dice *autoadjunto* si es tal que $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi) \forall \varphi, \psi \in X$, o sea si él coincide con su adjunto.

En estas hipótesis todos los autovalores de A son reales. En efecto, siendo $Ax = \lambda x$, escogido $\|x\| = 1$ resulta

$$\lambda = \lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, \lambda x) = \lambda^*(x, x) = \lambda^* \quad (B.1)$$

Además, si A es también compacto y diferente de cero, A tiene al menos un auto valor diferente de cero y además un conjunto numerable de autovalores con cero como punto de acumulación [5]. Todos los autovalores no nulos tienen multiplicidad finita, es decir los correspondiente autoespacios son de dimensión finita y los autovectores que corresponden a autovalores distintos son ortogonales.

Suponemos que la sucesión finita $\{\lambda_n\}$ de los autovalores no nulos sea ordenada en modo tal que

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \quad (B.2)$$

donde cada autovalor es repetido sobre la base de su multiplicidad y sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión de los correspondientes autovalores orto-normales. Vale entonces el siguiente

Teorema 1. sea $A: X \rightarrow Y$ un operador lineal, compacto y autoadjunto.

$\forall \varphi \in X$ se tiene

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n) \varphi_n + Q\varphi \quad (B.3)$$

donde $Q: X \rightarrow N(A)$ denota el operador de proyección ortogonal de X sobre el espacio nulo de A , $N(A) := \{\varphi \in X : A\varphi = 0\}$ y

$$A\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\varphi, \varphi_n) \varphi_n \quad (B.4)$$

Serán deducidas las (B.3) y (B.4) válidas para cualquier operador compacto en un espacio de Hilbert.

Enunciamos ahora el siguiente teorema útil.

Teorema 2. Para un operador lineal limitado se tiene

$$R(A)^\perp = N(A^*) \quad (B.5)$$

$$R(A^*)^\perp = \overline{R(A)}$$

Vale además proposición de la cual no se reporta la demostración [5].

Proposición 2. sea $A: X \rightarrow Y$ un operador lineal compacto. Entonces su operador adjunto $A^*: Y \rightarrow X$ es aún compacto.

Recordando que las raíces cuadradas no negativas de los autovalores del operador compacto autoadjunto $A^*A: X \rightarrow X$ se llaman valores de A , se tiene

Teorema 3. Sea $\{\mu_n\}$ la sucesión de los valores singulares no nulos del operador lineal compacto A ($A \neq 0$), ordenados en modo tal que

$$|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq |\mu_3| \geq \dots \quad (B.6)$$

donde cada valor singular es repetido en base a su multiplicidad, es decir sobre la base de la dimensión de los espacios nulos $N(\mu_n^2 I - A^*A)$. Entonces existe una sucesión de elementos ortonormales $\{\varphi_n\}$ en X y una sucesión $\{g_n\}$ en Y tal que

$$A\varphi_n = \mu_n g_n \quad A^*g_n = \mu_n \varphi_n \quad (B.7)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. $\forall \varphi \in X$ se tiene la descomposición en valores singulares

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n) \varphi_n + Q\varphi \quad (B.8)$$

donde $Q: X \rightarrow N(A)$ es el operador de proyección ortogonal sobre el espacio nulo de A ; además

$$A\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (\varphi, \varphi_n) g_n \quad (B.9)$$

Cada sistema $\{\mu_n; \varphi_n; \mathbf{g}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ que goza de las propiedades arriba descritas, se llama *sistema singular* de A .

Demostración. Sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión de elementos ortonormales de autovectores del operador A^*A , es decir sea

$$A^*A\varphi_n = \mu_n^2\varphi_n \quad (B.10)$$

Los elementos

$$\mathbf{g}_n := \frac{1}{\mu_n} A\varphi_n \quad (B.11)$$

resultan ortonormales. En efecto

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}_n, \mathbf{g}_m) &= \left(\frac{1}{\mu_n} A\varphi_n, \frac{1}{\mu_m} A\varphi_m \right) = \frac{1}{\mu_n\mu_m} (\varphi_n, A^*A\varphi_m) = \\ &= \frac{1}{\mu_n\mu_m} (\varphi_n, \mu_m^2\varphi_m) = \frac{\mu_m}{\mu_n} (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{n,m} \end{aligned} \quad (B.12)$$

Es inmediato verificar que el sistema $\{\mu_n; \varphi_n; \mathbf{g}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ satisface las (B.7).

Puesto que el operador A^*A , es autoadjunto, vale el desarrollo (B.3) y por consiguiente se tiene

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n) \varphi_n + Q\varphi \quad (B.13)$$

$\forall \varphi \in X$, donde $Q: X \rightarrow N(A^*A)$ denota el operador de proyección ortogonal sobre el espacio nulo de A^*A .

Sea $\psi \in N(A^*A)$. Entonces $(A\psi, A\psi) = (\psi, A^*A\psi) = 0$. Esto significa que $N(A^*A) = N(A)$ y la demostración se completa observando que la (B.9) es obtenida de la (B.8) aplicando a ambos miembros el operador A .

Se puede además demostrar que los vectores $\{\varphi_n\}$ y los vectores $\{g_n\}$ constituyen, respectivamente, una base para $N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}$ y para $N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}$.

Del teorema precedente se deduce

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2 + \|Q\varphi\|^2 \quad (B.14)$$

y

$$\|A\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 |(\varphi, \varphi_n)|^2 \quad (B.15)$$

El teorema siguiente expresa la solución de la ecuación de primer tipo $A\varphi = f$ en términos de un sistema singular del operador A .

Teorema 4 (de Picard). *Sea $A: X \rightarrow Y$ un operador lineal compacto con sistema singular $\{\mu_n; \varphi_n; g_n\}$, $n \in \aleph$. La ecuación*

$$A\varphi = f \quad (B.16)$$

Se la puede resolver si y solo si f pertenece a $N(A^)^\perp$ y satisface la relación*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} |(f, g_n)|^2 < \infty \quad (B.17)$$

bajo tales hipótesis, la solución es

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} |(f, g_n)| \varphi_n \quad (B.18)$$

Demostración. Del teorema 2 se tiene que, a fin de que la solución exista debe necesariamente ser $f \in N(A^*)^\perp$. Si φ es una solución de la ecuación $A\varphi = f$, entonces

$$\mu_n(\varphi, \varphi_n) = (\varphi, A^*g_n) = (f, g_n) \quad (B.19)$$

Para la (B.14) se tiene entonces

$$\|\varphi\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} |(f, g_n)|^2 \quad (B.20)$$

por lo cual debe ser necesariamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} |(f, g_n)|^2 < \infty \quad (B.21)$$

Supongamos ahora que $f \in N(A^*)^\perp$ y que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} |(f, g_n)|^2 < \infty$. Considerando

las sumas parciales de la (B.17) se concluye que la serie en el segundo miembro de la (A.3) converge en el espacio de Hilbert X. Aplicando el operador A a la (A.3), se obtiene

$$A\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (f, g_n) A\varphi_n \quad (B.22)$$

Puesto que $A\varphi_n = \mu_n g_n$, podemos escribir

$$A\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (f, g_n) g_n \quad (B.23)$$

Considerando que $f \in N(A^*)^\perp$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, g_n) g_n = f \quad (B.24)$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] C. A. Alanine's, D'Avance Engineering D'Elettromagnetico, Ottilie, New York, 1982.
- [2] Annual Book of ASTM Standards, Concrete and Aggregate, Section 4, Vol. 4.02 ASTM.
- [3] C. A. Balanis, Advanced Engineering Electromagnetic, John Wiley & Sons, 1989.
- [4] Karl J. Bois, and others, Transactions on Instrumentation and Measurement: Cure-State Monitoring and Water-to-Cement Ratio Determination of Fresh Portland Cement-Based Materials Using Near-Field Microwave Techniques, vol .47, No. 3, June 1998.
- [5] M. Boiti, Dispense del corso: Metodi Matematici della Fisica, Introduzione all' Analisi Funzionale, disponibili all'indirizzo <http://cl.fisica.unile.it/soft/boiti/mm2002af.pdf>.
- [6] J. C. Bolomey, "Recent European Development in Active Microwave Imaging for Industrial, Scientific and Medical Application," *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-37, p. 2109, 1989.
- [7] F. Buffa <http://www.ilmondodelletelecomunicazioni.it>
- [8] S. Caorsi, A. Massa, M. Pastorino, "A Computational Technique Based on a Real-coded Genetic Algorithm for Microwave Imaging Purposes," *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 38, N. 4, pp. 1697-1708, July 2000.

- [9] S. Caorsi, G. L. Gragnani, M. Pastorino, "Numerical electromagnetic inverse-scattering solutions for two-dimensional infinite dielectric cylinders buried in a lossy half-space", *IEEE Trans Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-41, n. 2, pp. 352-356, Feb. 1993.
- [10] D. Colton, R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer, Berlin, 1992.
- [11] K.J. Duchow, R.A. Gerhardt, *Materials Science and Engineering: Dielectric characterization of wood infiltrated with ceramic precursor*, C 4 (1996) pp 125-131
- [12] C. Estatico, *Generalized Landweber Methods for Nonlinear Inverse Problems*, Applied Computational Inverse Problems, Firenze, 22-25 Mar. 2004.
- [13] C. Estatico, *Gradiente Coniugato e Regolarizzazione di Problemi Mal Posti*, C.N.R., Quaderni del Gruppo Nazionale per l'Informatica Matematica, Firenze, 1996.
- [14] G. C. Giakos, M. Pastorino, F. Russo, S. Chowdhury, N. Shah, W. Davros, *Noninvasive imaging for the new century*, *IEEE Instrum. Meas. Mag.*, vol. 2, pp. 32-35, June 1999.
- [15] G. L. Gragnani, *Dispense del corso di campi elettromagnetici I*, Genova, 2001.
- [16] J. Hadamard, *Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale University Press, New York, 1923.

- [17] L. Hansson, N. Lundgren, A.L. Antti, O. Hagman, *Measurement* : Microwave penetration in wood using imaging sensor, 38 (2005) pp 15-20
- [18] R. H. W. Hoppe, Numerical Methods for Large-Scale Nonlinear Systems, disponibili all'indirizzo http://www.math.uh.edu/~rohop/fall_04/downloads/script.pdf.
- [19] L. Landweber, An Iteration Formula for Fredholm Integral Equations of the First Kind, *American Journal of Mathematics*, vol. 73, 1951.
- [20] Lea, F. M., *The Chemistry of Cement and Concrete*, Chemical Publishing Company, Inc., New York, NY, 1971.
- [21] Mehta, P. K., *Concrete: Structure, Properties and Materials*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1986.
- [22] Mindess, S., and Young, J. F., *Concrete*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, NJ, 1981.
- [23] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [24] J. T. Oden, L. F. Demkovicz, *Applied Functional Analysis*, CRC Press, 1996
- [25] M. Pastorino, "Recent inversion procedures for microwave imaging in biomedical, subsurface detection and nondestructive evaluation," *Measurement*, Elsevier, special issue on "Imaging Systems, Measurements and Processing Techniques"

- [26] M. Pastorino, Recent inversion procedures for microwave imaging in biomedical, subsurface detection and nondestructive evaluation, Measurement, special issue on Imaging Measurement Systems, vol. 36, pp. 257-269, 2004.
- [27] M. Pastorino, Modern Microwave Inverse-Scattering Techniques for Image Reconstruction, IEEE Instrum. Meas. Magaz., vol. 1, pp. 20-25, Dec. 1998
- [28] M. Pastorino, Short-range microwave inverse scattering techniques for image reconstruction and applications, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 47, n. 6, pp. 1419-1427, Dec. 1998.
- [29] M. Pastorino, A. Massa, S. Caorsi, A microwave inverse scattering technique for image reconstruction based on genetic algorithm, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 49, pp. 573-578, Jun. 2000.
- [30] K. Pokkuluri, Thesis, Effect of admixtures, chlorides, and moisture on Portland cement concrete in the low microwave frequency range, October, 1998
- [31] Al-Qadi, I. L., and Riad, S. M., Characterization of Portland Cement Concrete: Electromagnetic and Ultrasonic Measurement Techniques, Report Submitted to the National Science Foundation, Washington, DC, 1996.
- [32] J. H. Richmond, Scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross-section shape, IEEE Trans. Antennas and Propagation, vol. AP-13, pp. 334-341, 1965.

- [33] M. Romeo, Dispense di Matematica per l'Ingegneria 1, disponibili all'indirizzo <http://www.elettronica.ingegneria.unige.it/CdS/Home/Corsi/24011/Dispense/Dispense>
- [34] G.I. Torgovnikov, Dielectric Properties of wood and wood-Based materials, Springer, Berlin, 1993
- [35] A.Von Hippel, Dielectric materials and Applications ,New York, 1954
- [36] Weyers, R. E., Prowell, B. D., Sprinkel, M. M., and Vorster, M., Concrete Bridge Protection, Repair, and Rehabilitation Relative to Reinforcement Corrosion: A Methods Application Manual, SHRP-S-360, Strategic Highway Research Program, National Research Council, 1993.
- [37] H. Zhao, I. Turner and G. Torgovnikov, An Experimental and Numerical Investigation of the Microwave Heating of Wood, *J. Microwave Power & Electromagn Energy*, vol. 33 N.- 2, 1998
- [38] D. Mindiola, Tesis de grado: Hormigón Arquitectónico, *FICT-ESPOL*, 1997.