10.1 Rectas en el plano

1. Determine la distancia y el punto medio entre los siguientes pares de puntos:

   a. $(1, 2)$; $(-2, 3)$
   b. $(0, 3)$; $(1, 5)$
   c. $(-2, -1)$; $(-3, 4)$
   d. $(2, 4)$; $(3, 4)$
   e. $(-4, 6)$; $(-7, 6)$
   f. $(a, 1)$; $(2a, 1)$; $a \in \mathbb{R}$
   g. $(5a, 2a)$; $(a, 3a)$; $a \in \mathbb{R}$

2. Encuentre las ecuaciones paramétricas, Punto–Pendiente y general de la recta que contiene los siguiente pares de puntos:

   a. $(-2, 3)$; $(-3, 1)$
   b. $(2, 0)$; $(4, 5)$
   c. $(-1, 1)$; $(1, 1)$
   d. $(-2, 4)$; $(1, 4)$
   e. $(-4, 5)$; $(-4, 2)$

3. Hallar la ecuación de una recta si se conoce que contiene el punto $(1, 3)$ y tiene pendiente 9.

4. Hallar la ecuación de una recta que contiene el punto $(0, 6)$ y es:

   a. Paralela al eje X.
   b. Paralela al eje Y.
   c. Paralela a la recta $3x - 2y = 6$.
   d. Perpendicular a la recta $-2x + y - 1 = 0$.

5. Califique cada una de las siguientes proposiciones como VERDADERA o FALSA. En caso de ser VERDADERA, DEMUÉSTRELA; y en caso de ser FALSA, justifique su respuesta con un CONTRAEJEMPLO.

   a. El vector (a, b) es paralelo a la recta definida por la ecuación $ax+by+c=0$.
   b. El vector $(2a, 2b)$ es perpendicular a la recta definida por la ecuación $ax+by+c=0$.
   c. Si se tienen las rectas L_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y L_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, tales que $L_1 \cap L_2 = \varnothing$, entonces para algún k real se cumple que $A_1 = kA_2$, $B_1 = kB_2$ y $C_1 \neq kC_2$.
   d. Si L es una recta que tiene ecuación $y=kx+b$, entonces la pendiente de la recta L es k.
   e. Si $W = \{(x,y) \,/\, x = x_0 + at \wedge y = y_0 + bt,\ t \in \mathbb{R}\}$, entonces W es una recta paralela al vector (a,b) que contiene al punto (x_0, y_0).

6. Determine la ecuación de la recta vertical cuya intersección con el eje X es el punto P $(-1/2, 0)$.

7. Determine la ecuación de la recta que contiene al punto $(5, -1)$ y que es paralela a la recta $2x + y - 1 = 0$.

8. Se definen los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en el plano, tales que $\mathbf{v}_1=(2, -3)$ y $\mathbf{v}_2=(4,1)$. Determine la ecuación de la recta L que es paralela al vector $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ y contiene al punto P$(1,2)$.

9. Determine la ecuación de la recta que contiene al punto $(3, -5)$ y es paralela al vector $(-4, 2)$.

10. Si se tiene una recta L que contiene al punto $P_0(1, 2)$ y que es perpendicular al vector $\mathbf{v}=(-2, -4)$ entonces es VERDAD que:

    a) $P(-1, -2) \in L$
    b) $L=\{(x, y)\in \mathbb{R}^2 / x + 2y - 5 = 0\}$
    c) La pendiente de L es -2.
    d) L es perpendicular a la recta $2x + 5y - 1 = 0$.

11. Una recta contiene los puntos $(-1, 1)$ y $(3, 9)$, entonces su intersección con el eje X es:

    a) $-\frac{3}{2}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $-\frac{2}{5}$ d) 2 e) 3

12. La ecuación de la recta que tiene la misma intersección con el eje X que la recta $2x - 5y + 6 = 0$, y que es paralela a la recta $4x - 2y - 5 = 0$, es:

    a) $2x - y - 6 = 0$ b) $x - 2y + 3 = 0$ c) $2x + y + 6 = 0$

    d) $2x - y + 6 = 0$ e) $2y - x - 3 = 0$

13. Dada la ecuación que define a la recta L: $3x + 2y - 5 = 0$, entonces es verdad que:

    a) L tiene pendiente $3/2$.
    b) L interseca al eje Y en el punto $(0, -5)$.
    c) L es perpendicular a la recta $2x - 3y - 15 = 0$.
    d) L es paralela a la recta $3x - 2y + 5 = 0$.
    e) El punto $(3,2) \in L$.

14. Sea f una función de variable real con regla de correspondencia $f(x) = ax + b$, entonces es verdad que:

    a) Si $a = 0$, entonces f es estrictamente creciente.
    b) Si $b = 0$, entonces f es par.
    c) Si $a < 0$, entonces f es decreciente.
    d) $f(a)$ es igual a $a^2 + b^2$.

cap 010.indd 866 03/07/2006 11:34:24

15. El gráfico adjunto representa a una recta cuya ecuación es:

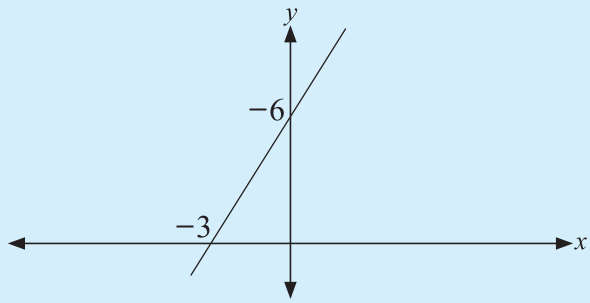
a) $y = 6x+2$

b) $y = -3x+6$

c) $y = 2x+6$

d) $y = 6x+-3$

e) $y = 4x+6$



16. Hace 6 años se compró una casa por \$59 000. Este año fue avaluada en \$95 000. Suponiendo que el valor de la casa está relacionado linealmente con el tiempo, determine cuál de las siguientes expresiones relaciona el valor de la casa y(\$) para cualquier tiempo t(años) después de la fecha de compra:

a) $y= 6000t + 59000$
b) $y= 6000t - 59000$
c) $y= 5000t - 59000$
d) $y= 5900t + 59000$

17. Una maquinaria agrícola, cuyo valor inicial era de \$80 000, se deprecia sobre su tiempo de vida útil de 10 años. Al final de los 10 años, el equipo tiene un valor de \$2 000. Exprese y(\$) como una función de x(años).

18. En el problema anterior, el valor de la maquinaria para cuando el tiempo de vida útil sea de 5 años, es:

a) \$40 000
b) \$41 000
c) \$52 000
d) \$35 000
e) \$21 000

19. Calcule la distancia entre la recta L: $3x-4y+12=0$ y el punto $P(4,-1)$.

20. Si una recta tiene como su punto más cercano al origen a $P_1(1,3)$ entonces, una de las siguientes opciones es FALSA, identifíquela:

a) La pendiente de la recta es $-1/3$.
b) Un vector normal a L es $\mathbf{n}=(1, 3)$.
c) El punto $P(2, 3) \in L$.
d) La ecuación de L es $x + 3y - 10 = 0$.
e) La distancia de la recta al origen es igual a $\sqrt{10}$.

21. Si el punto $P(3/2, 1/2)$ pertenece a la recta cuya distancia desde su punto de intersección con el eje X al origen es 2 veces su distancia desde su punto de intersección con el eje Y al origen, entonces determine la ecuación de dicha recta.

22. Calcule la distancia entre las rectas cuyas ecuaciones son $3x - 4y = 1$ y $3x - 4y = 10$.

23. Determine las ecuaciones de las rectas que tienen pendientes de -2 y equidistan 4 unidades del punto $(-2, 3)$.

24. Considere la recta cuya ecuación es $x+2y+k=0$. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que la recta forme con los ejes coordenados un triángulo cuya área sea de 16 unidades cuadradas.

25. Considere la recta cuya ecuación es L: $3x+ky-2=0$. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que la distancia del punto $(1, 1)$ a L sea:

    a. Igual a 2 unidades.
    b. Menor que 5 unidades.
    c. Mayor que 1 unidad.

10.2 Secciones cónicas

26. La ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ representa en el plano $\mathbb{R}^2$:

    a) Un punto con coordenadas $(2, -3)$.
    b) Una circunferencia con centro en $(-2, 3)$ y radio 2.
    c) Una circunferencia con centro en $(2, -3)$ y radio 16.
    d) Una circunferencia con centro en $(2, -3)$ y radio 4.
    e) Un conjunto vacío.

27. Se conoce que una circunferencia tiene como extremos de uno de sus diámetros, los puntos $(5, -2)$ y $(-3, -2)$. Determine su radio y su ecuación canónica.

28. Dadas dos circunferencias cuyas ecuaciones son $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$ y $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, entonces es verdad que:

    a) La distancia mínima entre ellas es 1.
    b) La distancia máxima entre ellas es $\sqrt{26} + 3$.
    c) Las dos circunferencias son tangentes al eje Y.
    d) El diámetro de una de ellas tiene longitud 1.
    e) Las dos circunferencias son tangentes entre sí.

29. Determine la ecuación de la recta que pasa por el centro de la circunferencia $(x + 1)^2 + (y - 9)^2 = 3$ y que es perpendicular a la recta $3x - 6y + 1 = 0$.

30. Una circunferencia se ubica en el I Cuadrante, de tal forma que es tangente a los ejes coordenados. Su centro es el punto $(2, 2)$. Determine su ecuación canónica.

31. De acuerdo a la posición de la recta $2x - y + 3 = 0$ respecto de la circunferencia $x^2 + y^2 - 3x - 4y + 3 = 0$, se puede afirmar que:
    a. La recta es secante a la circunferencia.
    b. La recta es tangente a la circunferencia.
    c. La recta es externa a la circunferencia.
    d. La intersección entre la recta y la circunferencia tiene tres puntos.

32. Determine la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $(4, 1)$ y que es tangente a la recta L: $2x - 3y = 15$.

cap 010.indd 868 03/07/2006 11:34:26

33. Determine la ecuación de la circunferencia que tiene el mismo centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 5 = 0$ y que contiene al origen de coordenadas.

34. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 = 4$ en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

35. Determine la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ en el punto $(1, 1)$.

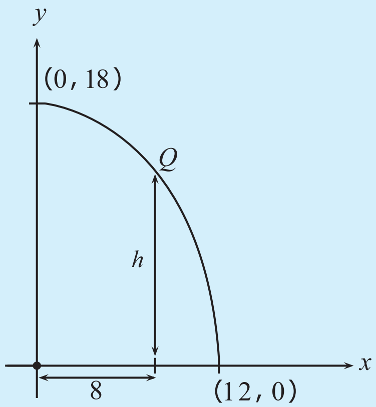
36. Calcule la menor distancia que hay entre la recta $4x+3y=15$ y la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

37. Encuentre la ecuación canónica y general de una parábola que tiene foco en $(2, 3)$ y su directriz es $y = -1$.

38. Determine la ecuación de la parábola de eje vertical, que tiene su vértice en el punto $(1, 0)$ y que contiene al punto $(-3, 2)$.

39. La altura h de un punto Q que pertenece a un arco parábolico de 18m de altura máxima y 24m de base, situado a una distancia de 8m del centro de la base del arco, es:

a) 8 b) 10 c) 12 d) 26 e) 14



40. Determine las coordenadas del foco de la parábola de ecuación $2x^2-4x+y+4=0$.

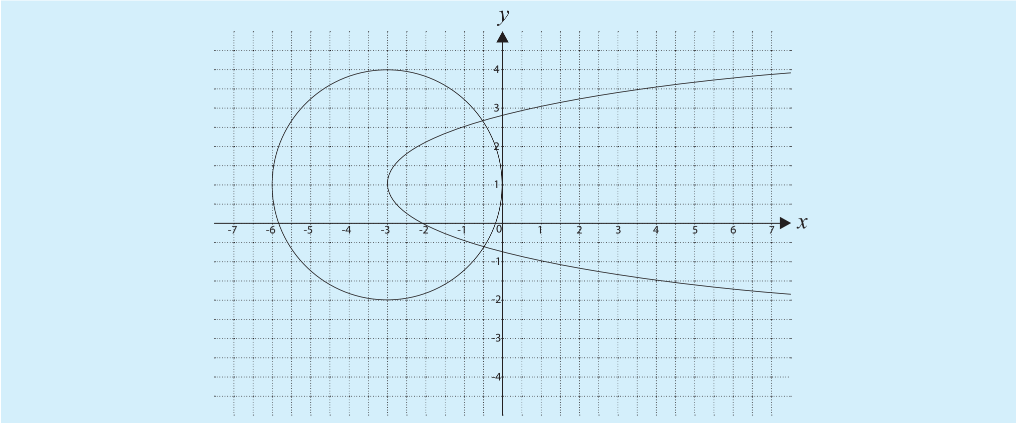
41. Una circunferencia C tiene por ecuación general $x^2+y^2+2x-8y+9=0$. Una parábola tiene como vértice el centro de C y su directriz es paralela al eje X. Si la parábola contiene al punto $(1,2)$, entonces las coordenadas de su foco son:

a) $\left(1, \frac{7}{2}\right)$ b) $\left(1, \frac{9}{2}\right)$ c) $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$ d) $\left(-1, \frac{9}{2}\right)$ e) $\left(-1, -\frac{7}{2}\right)$

42. Encuentre, de ser posible, la intersección entre la recta $y=-x-1$ y la cónica:

a) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$ b) $(x-2)^2 = y - 1$ c) $-(y+1)^2 = x$

43. Escriba la ecuación canónica y la ecuación general para las cónicas cuyas gráficas se muestran en la siguiente figura, respectivamente:



44. Determine la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos $V_1(0, 2)$, $V_2(4, 2)$ y cuyo eje menor tiene longitud 2.

45. Si una elipse tiene centro en el punto $(2, 3)$, su eje mayor es paralelo al eje X, la longitud del eje menor es 4 y la distancia desde uno de los vértices al centro es $\sqrt{13}$ entonces es VERDAD que uno de los siguientes puntos pertenence a la elipse:

a) $(4, 5)$ b) $(3, 0)$ c) $(2, 1)$ d) $(5, 3)$ e) $(4, \sqrt{10})$

46. La ecuación $3x^2 - 4y^2 + 16y - 18 = 0$ representa:
a) Una elipse con centro en $(0, -2)$.
b) Una hipérbola con centro en $(0, 2)$.
c) Ningún lugar geométrico real.
d) Un punto en el plano.
e) Una parábola con vértice en el punto $(-1/2, 2)$.

47. Determine los vértices, los focos, asíntotas, excentricidad, dimensiones del rectángulo auxiliar y centro de la hipérbola $6y^2-4x^2+12y+16x-34=0$. Dibuje la hipérbola con todos los elementos encontrados.

48. El conjunto de puntos del plano, tales que su distancia al punto $(1, 1)$ es el doble de su distancia al eje X, corresponde a:
a) Una elipse con centro en el punto $(1, 1)$.
b) Una hipérbola con centro en el punto $(1, -1/3)$.
c) Una parábola cuya recta directriz es $y=1$.
d) Una circunferencia de radio 2.
e) Una elipse cuyo eje mayor tiene una longitud de 4.

49. Determine el lugar geométrico del conjunto de puntos $P(x, y)$, tales que su distancia al eje X es el triple que su distancia al punto $P(2, -1)$.

50. Determine la ecuación que describe los puntos en el plano, tales que su distancia al punto $(2,1)$ es igual al doble de la distancia a la recta L: $y + 1=0$.

cap 010.indd 870 03/07/2006 11:34:29