

2.1 Representación decimal

- El conjunto de los números irracionales es cerrado bajo el producto.
 - Verdadero
 - Falso
- El número $\frac{\pi}{2\pi} + 4$ es un número irracional.
 - Verdadero
 - Falso
- Indique cuál de estos conjuntos no es vacío.
 - $\{x/x \in \mathbb{Z} \wedge 3 < x < 4\}$
 - $\{x/x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 - 2 = 0\}$
 - $\{x/x \in \mathbb{I} \wedge x + 1 \geq 0\}$
 - $\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 1 < 0\}$
 - $\{x/x \in \mathbb{N} \wedge x^{-1} - 2 = 0\}$
- Hallar el valor de las siguientes operaciones y expréselo como un entero o fracción simplificada:
 - $$\frac{(7-6.35) \div 6.5 + 9.9}{(1.2 \div 36 + 1.2 \div 0.25 - 1 \frac{5}{16}) \div \frac{169}{24}}$$
 - $3(6-1.333\dots) + 6(1.333\dots) - 16.666\dots$
 - $$\frac{3}{1 + \frac{2}{0.5}} - \frac{2}{1 + \frac{3}{0.5}} + \frac{\frac{54}{3} + 1.666\dots}{9 + 2.666\dots}$$
- ¿Es el conjunto de los números irracionales cerrado bajo la adición? Si no lo es, dar un contraejemplo.

2.2 Operaciones binarias

- Dado el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4\}$ y la operación binaria en S definida como:

$$a * b = \begin{cases} a; & a \geq b \\ b; & a < b \end{cases}$$

Indicar cuál de las siguientes proposiciones es verdadera:

- La operación no es conmutativa.
- La operación no es asociativa.
- El elemento neutro es 1.
- $\forall a, b \in S: (3 * a) = (b * 3)$
- $(1 * 3) * 2 = (2 * 1) * (3 * 4)$

7. Sea $G = \{a, b, c\}$, si sobre este conjunto se define la operación binaria que se representa en la siguiente tabla.

∇	a	b	c
a	b	a	a
b	b	c	b
c	a	b	c

Identifique cuál de las siguientes proposiciones es falsa.

- a) La operación binaria ∇ es conmutativa.
- b) La operación binaria ∇ es asociativa.
- c) $\exists \lambda \in G, \forall x \in G: [x \nabla \lambda = x]$
- d) $(a \nabla a) = [(b \nabla c) \nabla a]$
- e) $[(a \nabla b) \nabla (a \nabla c)] = (c \nabla b)$

8. Un sistema matemático (operación binaria) particularmente interesante es el que llamamos aritmética modular. Un ejemplo es el conjunto de los enteros módulo 4, los elementos de este conjunto son 4, a saber:

$$S = \{0, 1, 2, 3\}$$

En donde las operaciones quedan definidas de la siguiente manera:

$\forall i, j, k \in S: i+j=k$, donde k es el residuo de la división de $i+j$ para 4.

$\forall i, j, m \in S: i \cdot j = m$, donde m es el residuo de la división de $i \cdot j$ para 4.

Así:

$\bar{2} + \bar{3} = \bar{1}$ ya que $2+3=5$, que dividido por 4, da residuo 1.

$\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{2}$ ya que $2 \cdot 3=6$, que dividido por 4, da residuo 2.

Hallar el resultado de las siguientes operaciones para el módulo indicado.

a) Módulo 7

b) Módulo 6

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

I) $\bar{4} + \bar{5}$

I) $\bar{4} + \bar{5}$

II) $\bar{5} \cdot \bar{3}$

II) $\bar{5} \cdot \bar{3}$

III) $\bar{2} \cdot \bar{4}$

III) $\bar{2} \cdot \bar{4}$

IV) $\bar{5} \cdot \bar{6}$

IV) $\bar{5} \cdot \bar{1}$

V) $\bar{6} \cdot \bar{1}$

V) $\bar{0} \cdot \bar{1}$

VI) $\bar{1} + \bar{0}$

VI) $\bar{1} \cdot \bar{0}$

VII) $\bar{2} \cdot \bar{0}$

VII) $\bar{2} \cdot \bar{0}$

VIII) $\bar{5} + \bar{3}$

VIII) $\bar{5} + \bar{3}$

IX) $\bar{4} \cdot \bar{5}$

IX) $\bar{4} \cdot \bar{5}$

X) $\bar{2} + \bar{5}$

X) $\bar{2} + \bar{5}$

2.3 Operaciones entre números reales

9. El valor de la expresión $2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$ es:

- a) $\frac{15}{2}$ b) $\frac{2}{15}$ c) $\frac{41}{18}$ d) $\frac{18}{41}$ e) $\frac{27}{11}$

10. ¿A qué es igual $a \cdot 0$? ¿por qué?

11. ¿Por qué es verdadera la igualdad $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$?

12. ¿Es verdadera alguna de las siguientes propiedades distributivas de la división sobre la adición? ¿Por qué?

- a) $a \div (b + c) = (a \div b) + (a \div c)$
b) $(a + b) \div c = (a \div c) + (b \div c)$

13. Demostrar que entre los números reales hay un sólo cero; esto es, hay un sólo número c , tal que:

$$\forall a \in \mathbb{R} (a + c) = a$$

2.4. Relación de orden

14. El valor de verdad de la proposición $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} \neq (\sqrt{1 - \sqrt{3}})^2$ es:

- a) Verdadero b) Falso

15. Una de las siguientes proposiciones es falsa, identifícala:

- a) $8 < e^\pi < 81$
b) $\sqrt{3} + \sqrt{2} > \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$
c) $2^{\sqrt{2}} < \sqrt{8}$
d) $\frac{1}{0.16666\dots} = 6$
e) $\sqrt[5]{0.1} < \sqrt[5]{0.2}$

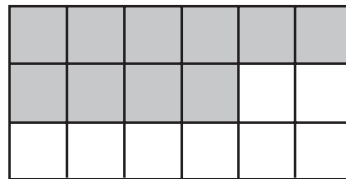
16. ¿Cuál es la lista donde los números aparecen ordenados de menor a mayor?

- a) $\frac{69}{200}$, $\frac{19}{100}$, 0.8 , $\frac{1}{5}$
- b) $\frac{19}{100}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{69}{200}$, 0.8
- c) $\frac{4}{5}$, $\frac{19}{100}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{69}{200}$
- d) $\frac{1}{5}$, 0.8 , $\frac{69}{200}$, $\frac{19}{100}$
- e) $\frac{1}{2}$, 0.5 , $\frac{2}{4}$

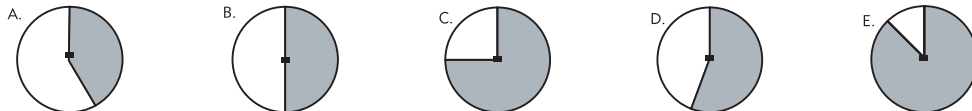
17. Dos grupos de turistas tienen 60 personas cada uno. Si $\frac{3}{4}$ del primer grupo y $\frac{2}{3}$ del segundo toman un autobús para ir al museo, ¿cuántas personas más del primer grupo toman el autobús que del segundo?

- a) 2
- b) 4
- c) 5
- d) 40
- e) 45

18. Dado el siguiente rectángulo:



¿Qué círculo tiene oscurecida , aproximadamente, la misma fracción que el rectángulo?



19. ¿Qué número es mayor?

- a) $\frac{4}{5}$
- b) $\frac{3}{4}$
- c) $\frac{5}{8}$
- d) $\frac{7}{10}$
- e) $\frac{31}{40}$

2.6 Expresiones algebraicas

30. Simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{\frac{2}{1-a} + \frac{2}{1+a}}{\frac{2}{1+a} - \frac{2}{1-a}}$$

31. Uno de los factores de la expresión $3x^2 + 7x - 6$, es:

- a) $3x + 2$ b) $2 - 3x$ c) $x + 3$ d) $3 - x$ e) $x + 2$

32. Al simplificar la expresión $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} - (x + 1)$, se obtiene:

- a) $\frac{x + 1}{x}$ b) 1 c) x d) $-\frac{1}{x}$ e) $-\frac{x}{x + 1}$

33. Al simplificar la expresión $\frac{\sqrt{1+x} - \frac{x}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}$, se obtiene:

- a) $\frac{2+x}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$
b) $2x$
c) $\sqrt{1+x}$
d) $\frac{\sqrt{1+x}}{x-1}$
e) $x\sqrt{1+x}$

34. Expresar como un producto de tres factores cada una de las siguientes expresiones:

- a) $a^4 + 3a^3 + 4a^2 - 6a - 12$
b) $(ab + ac + bc)(a + b + c) - abc$
c) $x^3 - 5x^2 - x + 5$
d) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4$
e) $x^3 - 7x + 6$

35. Efectuar las operaciones indicadas y simplificar, siempre que sea posible.

a) $\frac{4}{x^2 + xy} + \frac{4}{xy + y^2}$

b) $\frac{2x}{x^2 + 3y + 2} - \frac{x}{x^2 - 4}$

c) $\frac{3x}{x-1} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x-1}$

d) $\frac{4}{x^2 - 3x - 4} + \frac{3}{x^2 - 16} - \frac{7}{x^2 + 5x + 4}$

e) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9} \cdot \frac{x - 3}{4}$

f) $\frac{xy - x}{y^2 - 1} \cdot \frac{y + 1}{x + 2} \cdot \frac{2x + 4}{5x}$

g) $\left(\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x-2}\right) \cdot \left(\frac{3x}{x-5}\right)$

h) $\frac{5a^2 - a - 4}{a^3 - 1}$

i) $\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}$

j) $\frac{a^6 + a^4 + a^2 + 1}{a^3 + a^2 + a + 1}$

k) $\left(\frac{b}{a+b} + a\right)\left(\frac{a}{a-b} - b\right) - \left(\frac{a}{a+b} + b\right)\left(\frac{b}{a-b} - a\right)$

l) $\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1+a} - \frac{2a}{1+a^2} - \frac{4a^3}{1+a^4} - \frac{8a^7}{1+a^8}$

36. Descomponer en cuatro factores las siguientes expresiones:

a) $a^2b^2(b-a) + b^2c^2(c-b) + a^2c^2(a-c)$

b) $(a-b)^3 - (a-c)^3 + (b-c)^3$

c) $a^4 - 18a^2 + 81$

d) $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3$

e) $(3x-6)(x^2-1) - (5x-10)(x-1)^2$

37. Simplificar las siguientes expresiones:

a) $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$

b) $\frac{a}{a^2-1} + \frac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1} + \frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1} - \frac{2a^2}{a^4-1}$

c) $\frac{a-c}{a^2+ac+c^2} \cdot \frac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2} \left(1 + \frac{c}{a-c} - \frac{1+c}{c}\right) \div \frac{c(1+c)-a}{bc}$

d) $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{c+a}{(a-c)(b-c)}$

38. ¿Para qué valores reales de x no está definida la siguiente expresión?

$$\frac{5x+2}{x+1}$$

39. Simplificar: $\frac{(x^3-y^3)(x^2+2xy+y^2)}{(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)} - x - y$

2.7 Valor Absoluto

40. Sea $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y $\#$ la operación binaria definida en S , tal que:

$$a\#b = |a - b| - 2$$

Entonces es falso que:

- a) $1\#0 = -1$
- b) $(-2\#-1)\#1 = 0$
- c) $\#$ es una operación conmutativa.
- d) $\forall a \in S: a\#0 = |a| - 2$
- e) $\forall a \in S: a\#a = a$

41. Una de las siguientes proposiciones es falsa, identifícala:

- a) $\sqrt{4} = 2$ siempre que -2π es un número irracional.
- b) $6 \div (10 \div 5) = 3$ o $(-15)^{-2}$ es un número negativo.
- c) El número $2e \div e$ es irracional y $|x - e| = |e - x|$.
- d) Si $\sqrt{2}$ es irracional, entonces $-3 = 1 - 4$.
- e) Una de las proposiciones anteriores es falsa.

42. Realizar las operaciones indicadas:

- a) $|-7| + |3| - |-5|$
- b) $|6 - 9| + |10 - 4| + |5| - |-5|$
- c) $|4 - 8| - |-6| + |14 - 11| - |-8|$
- d) $|3(-1) - (-1)| - |2(-1) - (-1)| - |3 - (-1)|$
- e) $2(1) - 3 - |3(1) - 2(2)| + |4 - 5(-2)|$
- f) $|3(0) - 1| - [3(-4) + 6] - |-3 - 2(-4)|$

43. Definir sin barras de valor absoluto las siguientes expresiones:

- a) $|x - a|$
- b) $|1 - x|$
- c) $|x - a + b|$

2.8 Ecuaciones

44. Elena tiene una canasta con canicas. Le dio la mitad de las canicas a Jorge y un tercio de las que le quedaban en la canasta, se las dio a María. De esta manera, le quedaron 6 canicas a Elena, ¿cuántas canicas tenía al principio?

- a) 18 b) 24 c) 30 d) 36 e) 40

45. Elena, Antonio y su madre comieron un pastel. Elena comió $\frac{1}{2}$ del pastel, Antonio comió $\frac{1}{4}$ del pastel y su madre comió $\frac{1}{4}$ del pastel. ¿Cuánto quedó del pastel?

- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) Nada

46. La suma de tres números es 12. El segundo número es 1 más que tres veces el primero y el tercer número es 1 menos que 2 veces el segundo. Entonces es verdad que:

- a) El tercer número es 6.
b) La suma del primero y el segundo es 7.
c) El segundo número es 5.
d) La suma del primero y el tercero es 8.
e) El primer número es 2.

47. Una compañía vinícola requiere producir 10 000 litros de jerez, mezclando vino blanco con brandy; el vino blanco contiene 10% de alcohol, y el brandy contiene 35% de alcohol por volumen. El jerez debe tener un contenido de alcohol del 15%.

Entonces las cantidades en litros de vino blanco y de brandy que deben mezclarse para obtener el resultado deseado, es:

- a) 8000 de vino blanco y 2000 de brandy.
b) 9000 de vino blanco y 1000 de brandy.
c) 7000 de vino blanco y 3000 de brandy.
d) 6500 de vino blanco y 3500 de brandy.
e) 2000 de vino blanco y 8000 de brandy.

En los siguientes cuatro ejercicios, considere que $\text{Re}=\mathbb{R}$.

48. Determine el conjunto de verdad de $p(x): \frac{2}{x+5} + \frac{1}{x-5} + \frac{20}{x^2-5} = 0$.

49. Un valor de k para que la suma de las raíces de la ecuación $kx^2 + 4kx + 3 = x^2$ sea 10, es:

- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{10}{14}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{3}{8}$

50. Hallar el conjunto de verdad del predicado: $p(x): \sqrt{x} + \sqrt{x+2} = 3$.

51. Dado el predicado $p(x): \frac{x}{x-2} + \frac{x}{x^2-4} = 0$, la suma de los elementos de $Ap(x)$, es:

- a) 0
b) -3
c) -5
d) 1
e) $Ap(x)$ no tiene elementos.

52. La suma de los elementos del conjunto de verdad de

$$p(x): |9 - x^2| - \frac{7x}{22} - \frac{48}{11} = 0, \text{ es:}$$

- a) 0 b) 7 c) $\frac{7}{11}$ d) $\frac{48}{11}$ e) $\frac{7}{22}$

53. Cecilia recibió \$435 por trabajar 52 horas en una semana. La jornada laboral normal es de 40 horas semanales, y su jefe paga una y media veces más de lo que paga por cada hora normal cada hora extra. Entonces, por cada hora, Cecilia recibe:

- a) Menos de cinco dólares.
b) Más de cinco, pero menos de seis dólares.
c) Más de seis, pero menos de siete dólares.
d) Más de siete, pero menos de ocho dólares.
e) Más de ocho, dólares.

54. Resolver las siguientes ecuaciones, considere $x \in \mathbb{R}$.

a) $\frac{x^2 + 17}{x^2 - 1} = \frac{x - 2}{x + 1} - \frac{5}{1 - x}$

b) $\frac{ax + b}{ax - b} - \frac{ax - b}{ax + b} = \frac{4b}{a^2x^2 - b^2}$

c) $1 - |x| = 5$

d) $|5 - x| = 13 - x$

e) $|3 - x| - |x + 2| = 5$

f) $|2x - 3| = |x + 7|$

g) $|2x - 3| = 5$

h) $|x - 2| + |x - 1| = x - 3$

i) $4x + 6x = 9x^2 - 15x$

j) $(x + 1)^2 |x + 1| - 1 = 0$

55. A continuación se presenta una lista de diversos enunciados verbales de uso frecuente en el cálculo algebraico. Expresarlos en forma algebraica.

- * Número natural cualquiera.
- * El antecesor de n .
- * El sucesor de n .
- * Número natural par.
- * Número natural impar.
- * El cuadrado del sucesor de n .
- * El sucesor del cuadrado de n .
- * El cuadrado del sucesor del antecesor de n .
- * Dos números naturales impares consecutivos.
- * La diferencia positiva de los cuadrados entre dos números naturales consecutivos.
- * La diferencia positiva de los cubos entre dos números naturales pares consecutivos.
- * El inverso aditivo u opuesto de r .
- * El inverso multiplicativo o recíproco de r .
- * El sucesor del recíproco de s .
- * El triple de x .

- * El cuadrado de la suma entre a y b .
 - * La suma de los cuadrados de a y b .
 - * El producto entre a , b y c .
 - * Un número de dos cifras en el sistema decimal, cuya cifra de las unidades es u , cifra de las decenas es d y cifra de las centenas es c .
 - * La razón o cociente entre p y q .
 - * La mitad de m o el cincuenta por ciento de m .
 - * La cuarta parte de n o el veinticinco por ciento de n .
 - * El valor absoluto de x .
 - * La media aritmética o promedio aritmético entre m y n .
 - * La raíz cuadrada de x .
 - * La media geométrica entre a y b . (La media geométrica entre dos números se define como la raíz cuadrada de su producto).
 - * x es directamente proporcional a y .
 - * x es inversamente proporcional a y .
 - * La distancia entre a y b menor que δ .
56. El largo de un cuadro es el doble del ancho. Si el marco del cuadro tiene 2cm de ancho y si el cuadro y su marco tienen una superficie 244cm^2 mayor que la del cuadro, encontrar las dimensiones del cuadro.
57. Encontrar un número tal que sustraído en 4 y agregado en $2\frac{1}{4}$ es igual a $\frac{1}{3}$ de sí mismo.
58. Una piscina puede ser llenada por tres cañerías en forma independiente. La primera cañería llena la piscina en 15h; la segunda en 20h y la última en 30h. ¿En qué tiempo llenarían la piscina las tres cañerías juntas?
59. Un vendedor de nueces tiene dos clases de fruta; una de \$0.90 el kg y otra de \$0.60 el kg. La competencia vende las nueces a \$0.72 el kg. ¿En qué proporciones debe mezclar las nueces, de tal forma que pueda competir en el mercado?
60. Un trozo de alambre de 100 pulgadas de largo se corta en dos, y cada pedazo se dobla para que tome la forma de un cuadrado. Si la suma de las áreas formadas es de 397 pulg^2 , encontrar la longitud de cada pedazo de alambre.
61. Bienes raíces "Chóez" construyó una unidad habitacional con 40 departamentos, se conoce que si se fija un alquiler mensual de \$120 por departamento, todos serán ocupados, pero por \$5 de incremento en el alquiler uno quedará vacante. El alquiler en dólares que deberá fijarse con el objeto de obtener los mismos ingresos (que si se alquilaran a \$120 cada departamento), dejando algunos vacíos para mantenimiento, es:
- a) 160 b) 180 c) 200 d) 220 e) 240

62. J. Cárdenas es propietario de un edificio de apartamentos que tiene 60 habitaciones, él puede alquilar todas las habitaciones si fija un alquiler de \$180 al mes. Al subir el alquiler, algunas habitaciones quedarán vacías, en promedio, por cada incremento de \$5, una habitación quedará vacía; sin posibilidad alguna de alquilarse. Encuentre el alquiler que debería cobrar con el fin de obtener un ingreso total de \$11 475.
63. Un capital de \$100 se invierte a cierto interés a un año; luego con el interés ganado, se invierte en el segundo año a un interés igual al doble de la primera tasa de interés. Si la suma total obtenida es \$112.32, ¿cuáles son las dos tasas de interés?
64. Cada semana, una compañía puede vender x unidades de su producto a un precio de p dólares cada uno, en donde $p = 600 - 5x$. Si le cuesta a la compañía $(8\,000 + 75x)$ dólares producir x unidades,
- ¿Cuántas unidades debería vender la compañía a la semana si desea generar un ingreso de \$17 500? (Ingreso= $p \cdot x$)
 - ¿Qué precio por unidad debería fijar la compañía con el propósito de obtener ingresos semanales por \$18 000?
 - ¿Cuántas unidades debería producir y vender cada semana para lograr utilidades semanales de \$5 500? (Utilidad=ingresos – costos)
 - ¿Qué precio por unidad generaría a la compañía una utilidad semanal de \$5 750?
65. La longitud de un rectángulo excede a su anchura por dos pies. Si cada dimensión fuese incrementada en tres pies, el área se incrementaría en 51 pies². Encontrar las dimensiones originales y nuevas del rectángulo.
66. Un tanque puede llenarse por una tubería en $2\frac{1}{2}$ horas, por otra tubería en $3\frac{1}{3}$ horas, y por una tercera en 5 horas. ¿En qué tiempo se llenará el tanque si se habilitan las tres tuberías a la vez?
67. Francisco puede hacer una obra en 3 días, Santiago en 4 días y José en 6 días. ¿Qué tiempo tardarán trabajando conjuntamente?
68. Yolanda puede hacer cierto trabajo en 8 horas, Pablo en 10 horas y Carlos en 12 horas. ¿Cuánto tiempo tomará efectuar el trabajo si Yolanda y Pablo se ponen a trabajar durante una hora e inmediatamente después Yolanda y Carlos lo terminan?
69. J.C. presta \$4 000 a una tasa de interés anual y \$5 000 a una tasa mayor en un punto a la anterior. Por el préstamo de \$5 000 obtiene \$110 más cada año que por el préstamo de \$4 000. Hallar las dos tasas de interés.

Para los siguientes cinco ejercicios, considere $x \in \mathbb{R}$.

78. Hallar el conjunto de verdad de los siguientes predicados:

a) $m(x): (x + 1)(x + 2)(x + 3) = x(x + 4)(x + 5)$

b) $m(x): (x + 1)^3 + (x - 1)^2 = x^3 + x + 1$

c) $p(x): x^2 - 4ax + 4a^2 - c^2 = 0$

d) $q(x): a^2 - x^2 + a(b - c)x - bc = 0$

e) $p(x): \frac{2x+a}{b} - \frac{x-b}{a} = \frac{3ax + (a-b)^2}{ab}$

f) $p(x): \frac{x+a}{a-b} + \frac{x+a}{a+b} = \frac{x+b}{a+b} + \frac{2(x-b)}{a-b}$

g) $p(x): (a+x)(b+x) - a(b+c) = \frac{a^2c}{b} + x^2$

h) $p(x): \frac{(a+b)^2(x+1) - (a+b)(x+1) + (x+1)}{a+b+1} = (a+b)^2 - (a+b) + 1$

i) $p(x): \frac{x}{ab} + \frac{x}{bc} + \frac{x}{ac} - 1 = abc - x(a + b + c)$

79. Hallar el conjunto de verdad de los siguientes predicados:

a) $q(x): \frac{4}{x+4} + \frac{1}{x+3} + \frac{3}{x+1} = 0$

b) $p(x): \frac{3x}{2x+1} + \frac{x+5}{x+1} = \frac{x-19}{2x^2+3x+1}$

c) $m(x): \frac{3a+x}{3a-x} + \frac{2a-3x}{2a+3x} = \frac{9}{2}$

d) $p(x): \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{x-c}$

e) $q(x): \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b-x}$

f) $r(x): \frac{6}{x+4} - \frac{x+4}{x-4} + \frac{7x^2+50}{3(x^2-16)} = \frac{4}{3}$

g) $q(x): \frac{x+a+b}{x+a} = \frac{x+a-b}{x-a} - \frac{a^2+b^2}{x^2-a^2}$

h) $p(x): \frac{\frac{x+1}{x-1}}{1 + \frac{2x}{x-1}} = \frac{1}{2}$

80. Hallar el conjunto de verdad de los siguientes predicados:

a) $r(x): \sqrt{x^2 - 7} = 3$

b) $m(x): \sqrt{x + 1} = x - 1$

c) $p(x): \sqrt{x} + \sqrt{3x + 4} = \sqrt{4 - x}$

d) $q(x): \sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} = \sqrt{2a}$

e) $r(x): \frac{\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 4}}{\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 4}} = x - 3$

f) $m(x): \frac{1}{\sqrt{3a + x} - \sqrt{a - x}} + \frac{1}{\sqrt{3a + x} + \sqrt{a - x}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

g) $p(x): \frac{1}{\sqrt{4a + x} + \sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{4a + x} - \sqrt{a}} = \frac{4}{3\sqrt{a}}$

h) $p(x): \sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 1} = \sqrt{2x + 2}$

i) $q(x): \sqrt{4x + 3} + 1 = \sqrt{2x - 2}$

j) $p(x): \sqrt{x + 4} = 1 + \sqrt{2x - 2}$

k) $r(x): \sqrt{x} + \sqrt{x + 2} = 3$

81. Hallar el conjunto de verdad de:

$$p(x): \frac{x - 2}{\sqrt{2x - 7}} = \sqrt{x - 4}$$

82. Hallar el valor de k para que el conjunto de verdad del predicado

$$p(x): kx^2 + 3x + 1 = 0 \text{ tenga solución única.}$$

83. Si un cuerpo recorre la mitad de la distancia total de caída libre durante el último segundo de su movimiento, a partir del reposo, calcular el tiempo y la altura desde la cual cae. (Sugerencia: use la ecuación cuadrática del tiempo $y = v_0 t + g t^2$).

84. Un ciclista acelera a 4m/seg^2 para un cierto punto a 3m/seg . Calcular el tiempo necesario para que el ciclista esté a 20 metros del punto. (Sugerencia: use la ecuación cuadrática del tiempo)

2.9 Inecuaciones

85. Dado el predicado $p(x): | |x - 1| + 1| \leq 0$, y sea x elemento de los \mathbb{R} , entonces $N(Ap(x)) = 0$.

- a) Verdadero b) Falso

86. Si $\mathbb{R} = \mathbb{R}$ y $p(x): |x - a| < \delta$, entonces $Ap(x) = (a - \delta, a + \delta)$.

- a) Verdadero b) Falso

87. Si $\mathbb{R} = \mathbb{R}$, $p(x): 7x^2 < 3x$ y $q(x): \frac{|2 - x|}{x^2 + 1} \geq 0$, entonces $A(p(x) \wedge Aq(x))$ es:

- a) \emptyset b) \mathbb{R} c) $(0, 3/7)$ d) $[0, 3/7]$ e) $(0, 1)$

88. Si se tienen los predicados $p(x): |7x + 4| \leq 10$ y $q(x): x^2 - 6x < -9$, y x es elemento de los \mathbb{R} , entonces es verdad que:

- a) $A[p(x) \wedge q(x)] = \emptyset$
b) $A[p(x) \wedge q(x)] = \left(-2, \frac{6}{7}\right)$
c) $A[p(x) \wedge q(x)] = \left[-2, \frac{6}{7}\right]$
d) $A[p(x) \wedge q(x)] = \left[-\frac{6}{7}, 3\right)$
e) $A[p(x) \wedge q(x)] = [-2, 3)$

89. Los valores reales de x que satisfacen la inecuación $1 - x \geq 2x + 6$, son:

- a) $x \geq -\frac{5}{3}$ b) $x \leq \frac{5}{3}$ c) $x \geq \frac{2}{3}$ d) $x \leq -\frac{5}{3}$ e) $(0, +\infty)$

90. Si $\mathbb{R} = \mathbb{N}$ y $p(n): |12n - 5| \leq 7$, entonces es verdad que:

- a) $Ap(n)$ tiene 8 elementos.
b) La suma de los elementos de $Ap(n)$ es 20.
c) $Ap(n) = [-1, 6]$
d) $Ap(n)$ tiene 5 elementos.
e) No es posible determinar la cantidad de elementos que tiene $Ap(n)$.

91. Escribir el conjunto de los números reales no negativos como un intervalo.

92. Expresar los siguientes conjuntos como una operación de intervalos:

a) $(x \leq 14) \wedge (x > 2)$

b) $[(x \leq -3) \wedge (x > 2)] \vee [(x \geq 3) \wedge (x \leq 5)]$

93. Resolver las siguientes inecuaciones, considere $x \in \mathbb{R}$.

a) $5(x-1) - x(7-x) > x^2$

b) $|2x + 4| < 10$

c) $\left| \frac{x-3}{x-4} \right| < \frac{5}{2}$

d) $\frac{4}{x+1} - \frac{3}{x+2} > 1$

e) $|x-1| \geq \frac{x+1}{2}$

f) $\frac{3x}{2} + 3|x-2| \leq 3$

94. Hallar el conjunto de verdad de las siguientes desigualdades, considere $\mathbb{R} = \mathbb{R}$.

a) $p(x) : 2 + 4x < 6x + 7$

b) $q(x) : 2 < 2x - 2 \leq 12$

c) $r(x) : 8 - 3x \leq 2x - 7 < x - 13$

d) $m(x) : \frac{8}{x} \geq 3$

e) $p(x) : \frac{2x}{x-4} \leq 8$

f) $n(x) : 2x^3 - 5x^2 + 2x \leq 0$

g) $p(x) : \frac{x^2 - 3x - 18}{13x - x^2 - 42} \geq 0$

h) $q(x) : \frac{x^2 - 3x - 6}{x^2 - 1} \leq 1$

95. Demostrar que si $a \geq 0 \wedge b \geq 0$, entonces $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (desigualdad de Cauchy).

96. Demostrar que si $ab > 0$, entonces $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

97. Demostrar que: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 14 > 2a + 12b + 6c$$

98. Demostrar que si $a + b + c \geq 0$, entonces $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

99. Demostrar que si $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$, entonces:

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$$

100. Demostrar que si $a \geq 0$; $b \geq 0$; $c \geq 0$ y $d \geq 0$, entonces:

$$\frac{a + b + c + d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

2.10 Inducción matemática

101. Demostrar que: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

102. Considere $n \in \mathbb{N}$. Empleando inducción matemática:

a) Demostrar que $2^{2n} + 5$ es divisible por 3.

b) Demostrar que $2^{2n} + 3n - 1$ es divisible por 9.

c) Demostrar que $a^n - b^n$ es divisible por $(a - b)$.

d) Demostrar que $a^{2n} - 1$ es divisible por $(a + 1)$.

e) $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$; $r \neq 1$

f) $a_1 + [a_1 + d] + [a_1 + 2d] + \dots + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$

103. Demostrar por inducción matemática que la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es:

$$S = \pi(n - 2), n \geq 3$$

115. Si un hospital cuenta con 21 cirujanos, entonces una guardia de tres cirujanos se puede seleccionar de:
- 1300 maneras diferentes.
 - 300 maneras diferentes.
 - 1000 maneras diferentes.
 - 330 maneras diferentes.
 - 1330 maneras diferentes.

2.12 Teorema del binomio

116. Si en el desarrollo del binomio $(x + k)^5$ el coeficiente de x^2 es 80, entonces el valor de k es:

- a) 1 b) 2 c) -2 d) -1 e) 3

117. Escribir en cada literal el desarrollo del binomio indicado:

- a) $(1-2a)^3$ b) $\left(a - \frac{1}{a}\right)^5$

118. Encontrar el séptimo término del desarrollo de $\left(\frac{1}{2}u - 2v\right)^{10}$.

119. Encontrar el término medio en el desarrollo de $\left(2x + \frac{3}{y}\right)^6$.

120. Encontrar el término que no contiene x en el desarrollo de $\left(6x - \frac{1}{2x}\right)^{10}$.

121. ¿Cuál es el coeficiente del término en x del desarrollo de $\left(x^2 + \frac{3}{x^3}\right)^7$?
¿Existen términos en x ? Justifique su respuesta.

122. Hallar el término independiente de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$.

123. Hallar el término que contiene x^{10} en el desarrollo de $(5 + 2x^2)^7$.

124. El término del desarrollo de $\left(x^2 - \frac{y}{x}\right)^5$ que contiene x^3 es:

- 21
- 30
- 12
- 72
- No existe tal término.

2.13 Sucesiones

125. La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética vale 168. El primer término es 30 y la diferencia es -2 . Determinar:

- a) Los posibles valores de n . b) Los posibles valores a .

126. Los primeros 10 términos de una progresión aritmética suman 35 y el primer término es 10, entonces el décimo término es:

- a) -5 b) 2 c) -1 d) 10 e) -3

127. Al sumar un número natural n con el doble de su sucesor, se obtiene 44; entonces, el número $n + 3$ es:

- a) 14 b) 11 c) 17 d) 13 e) 16

128. Una de las siguientes proposiciones es falsa, identifícala:

a) $1+2+3+\dots+100 = 5050$

b) $\frac{\binom{20}{10}}{\binom{21}{10}} = \frac{11}{21}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}: \binom{n}{0} = \binom{n}{n}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}: n! = n(n-1)!$

e) $2^{\binom{1000}{2}} = 1000$

129. Sea una progresión geométrica cuyo primer término es 2 y la suma de los tres primeros términos es 86, entonces es verdad que:

- a) La media geométrica es $-\frac{1}{2}$.
b) Hay un solo valor posible de la razón (r).
c) La suma de los valores de r es -1 .
d) La suma de los valores de r es 13.
e) La suma de los valores de r es -13 .

130. En cada uno de los siguientes literales, indicar si la sucesión dada es una progresión aritmética o geométrica. En cada caso, determinar la diferencia o la razón.

a) $f(n) = (-1)^n$

b) $f(n) = \frac{1}{3^n}$

c) $f(n) = \frac{1}{n^2}$

d) $f(n) = \frac{1}{n!}$

131. El valor de $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}$ es:

a) $\sqrt{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $2^{\frac{31}{32}}$

d) $2^{\frac{5}{2}}$

e) $2^{\frac{5}{32}}$

132. En cada literal, indicar una regla de correspondencia que defina la sucesión.

Por ejemplo, para la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^3}, \dots$ una regla de correspondencia es $f(n) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

a) $\frac{1}{1001}, \frac{1}{2001}, \frac{1}{3001}$

b) $1, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}$

133. Hallar $f(4), f(6)$ y $f(11)$ de una progresión geométrica si $f(1)=3$ y $r=2$.

134. Hallar $f(3)$ de una progresión geométrica compuesta de números reales, si $f(5)=162$ y $f(8)=4372$.

135. En una progresión geométrica compuesta de números reales, hallar P_{10} si se conoce que $P_3=9$ y $P_6=-63$.

136. Un hombre jugó durante 10 días y cada día ganó $\frac{1}{2}$ de lo que ganó el día anterior. Si el décimo día ganó \$10, ¿cuánto ganó el primer día?

137. Un hombre que ahorra $\frac{2}{5}$ de lo que ahorró el año anterior, ahorró el décimo año \$150. ¿Cuánto ha ahorrado en los 10 años?

138. Representar con una fracción simplificada los siguientes números decimales:
- a) 0.675675675...
 - b) 3.4738247382...
 - c) 0.3754337543...
 - d) 12.213333213333...
139. Una progresión geométrica tiene todos sus términos positivos. La suma de los dos primeros términos es 15 y la suma de los infinitos términos de la sucesión tiende a 27. Hallar el valor de:
- a) La razón común.
 - b) El primer término.
140. Un individuo está de acuerdo en pagar una deuda libre de interés de \$5 800 en cierto número de pagos, cada uno de ellos (empezando por el segundo) debiendo exceder al anterior por \$20. Si el primer pago es de \$100, calcular:
- a) Cuántos pagos deberá efectuar con objeto de finiquitar la deuda.
 - b) Cuánto cancela en el último pago.
141. Considerar el préstamo del banco al Sr. Dorado por \$5 000 a un interés mensual del 2 % . Cada mes paga \$200 al capital más el interés mensual del balance pendiente. Calcular:
- a) El número de pagos.
 - b) El último pago.
 - c) El monto total pagado.
 - d) El interés cancelado.
142. Una empresa instala una máquina con un costo de \$1 700. El valor de la máquina se depreció anualmente en \$150 y su valor de desecho es de \$200. ¿Cuál es la vida útil de la máquina?
143. Una compañía manufacturera instaló una máquina a un costo de \$1 500, al cabo de nueve años la máquina tiene un valor de \$420. Suponiendo que la depreciación anual es constante, calcule la depreciación anual.
144. Si una máquina tiene un costo de \$2 000 y ésta se deprecia anualmente \$160, ¿cuál es la duración de la máquina (vida útil) si su valor de desecho fue de \$400?

145. Los pagos mensuales del Sr. Piedra al banco, ocasionados por un préstamo forman una progresión aritmética. Si el octavo y décimo quintos pagos son de \$153 y \$181, respectivamente, hallar:
- a) La diferencia.
 - b) El primer pago.
 - c) El vigésimo pago.
146. En el ejercicio anterior, suponga que el Sr. Piedra pagó un total de \$5 490 al banco.
- a) Calcule el número de pagos que efectuó al banco.
 - b) ¿De cuánto fue su último pago?
147. Debe saldarse una deuda de \$1 800 en un año, efectuando un pago de \$150 al término de cada mes, más el interés a una tasa del 1 % mensual sobre el balance restante. Hallar:
- a) El valor del primer pago.
 - b) El valor del último pago.
 - c) Cuánto paga en total.
 - d) Cuánto paga por concepto de intereses.
148. ¿Cuántos términos de la sucesión 9, 12, 15,... es necesario considerar, de modo que su suma sea 306?
149. ¿Cuántos términos de la sucesión $-12, -7, -2, 3, 8, \dots$ deben sumarse, de tal manera que la suma sea 105?
150. Si Luisa compra 50 libros, donde el precio por libro es: \$8 el primer libro, \$11 el segundo libro, \$14 el tercer libro; y de esta manera el costo de cada libro es \$3 más que el precio del libro anterior, entonces Luisa pagó por los 50 libros:
- a) \$3000
 - b) \$2935
 - c) \$3700
 - d) \$4075
 - e) \$3075
151. La suma de todos los números de tres cifras que son múltiplos de 7 es:
- a) 70000
 - b) 60000
 - c) 70300
 - d) 60360
 - e) 70336