3.1 Funciones de Variable Real

1. La gráfica de una función puede tener más de una intersección con el eje Y.

   a) Verdadero b) Falso

2. Un dominio de la función de variable real $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$ es $(-\infty, 3)\cup(3, +\infty)$.

   a) Verdadero b) Falso

3. El rango de la función de variable real $f(x)=2x+1$ es $(2, +\infty)$.

   a) Verdadero b) Falso

4. A continuación se indican las reglas de correspondencia de varias funciones y un dominio posible. Una de las alternativas no es correcta, identifíquela.

   a) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}-1}$; $dom\, f = [1, +\infty)$

   b) $f(x) = \dfrac{x^8 - x^3 + x - \sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$; $dom\, f = \mathbb{R}$

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; $dom\, f = \mathbb{R} - \{1\}$

   d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$; $dom\, f = [1, 2)$

   e) $f(x) = \sqrt{x-1}$; $dom\, f = [1, +\infty)$

5. Hallar un dominio y el rango correspondiente de las siguientes funciones de variable real:

   a) $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$

   b) $h(x)=\dfrac{2x}{x+3}$

   c) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

   d) $r(x)=\sqrt{x^2-1}$

   e) $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{|x-2|-1}}$

   f) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

   g) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$

   h) $h(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$

6. Sea f una función tal que $f(x) = x^2 - x$, con dominio igual a $\mathbb{R}$. El intervalo en x para el cual $f(x) > 2$, es:

a) $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
b) $(-\infty, 1)$
c) $(2, 1)$
d) $(-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$
e) $\mathbb{R} - [-1, 2]$

7. Si f es una función de variable real cuya regla de correspondencia está definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2 + 6x - 7}$, un dominio de f es:

a) $[-2, 2]$
b) $[-7, -2] \cup [1, 2]$
c) $[-2, 1) \cup (1, 2]$
d) $(-2, 1] \cup [-1, 2)$
e) $(-2, 2)^C$

8. Sea h una función de variable real cuya regla de correspondencia es: $h(x) = \sqrt{x - 4 + |3x - 5|}$. Un conjunto que puede ser dominio de esta función es:

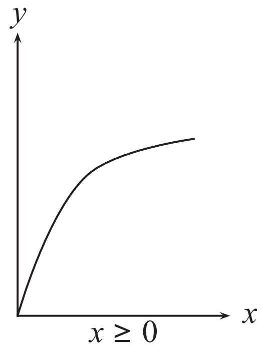
a) $\left(\dfrac{9}{8}, \dfrac{9}{4}\right)$ b) $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$ c) $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{4}\right)^C$ d) $\left[0, \dfrac{9}{4}\right)$ e) $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$

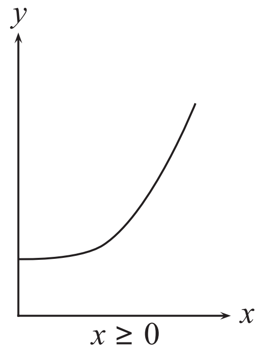
3.2 Representación gráfica de funciones de variable real

9. Empleando una tabla de valores, grafique las siguientes funciones de variable real para el dominio dado. Identifique los ejes y las divisiones utilizadas.

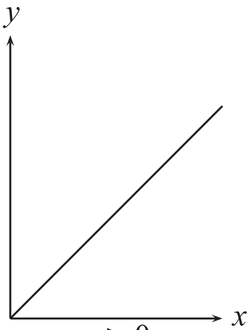
a) $f(x) = x^2;\ x \geq 0$
b) $g(x) = \sqrt{-x};\ x \leq 0$
c) $h(x) = x^3 - 2;\ x \in \mathbb{R}$
d) $r(x) = \dfrac{2}{x - 1};\ x \in \mathbb{R} - \{1\}$
e) $m(x) = 2x + 2;\ x \in \mathbb{R}$
f) $g(x) = 4 - x^2;\ x \in \mathbb{R}$
g) $f(x) = \sqrt{x};\ x \geq 0$

10. Utilice el criterio de la recta vertical para determinar si las gráficas dadas corresponden a una función o no. En cada caso se especifica el dominio de la relación.

(I)


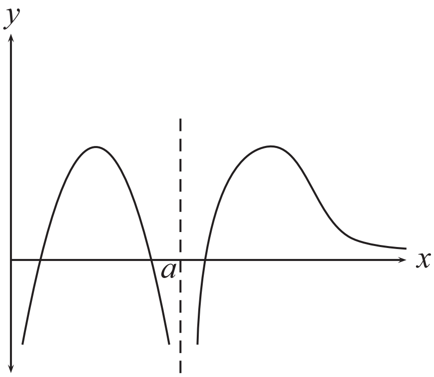
(II)


(III)



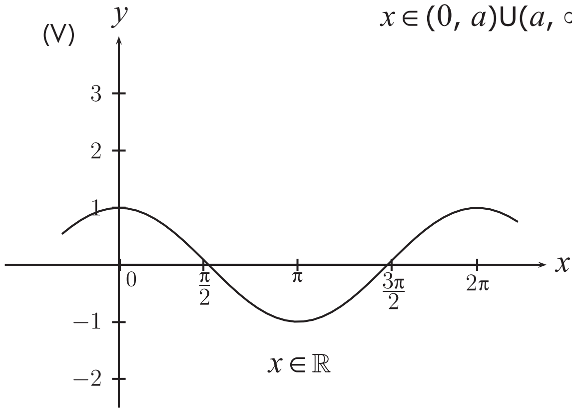
$x \geq 0$

(IV)



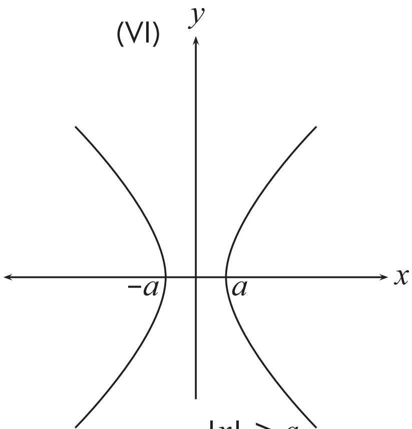
$x \in (0, a) \cup (a, \infty)$

(V)



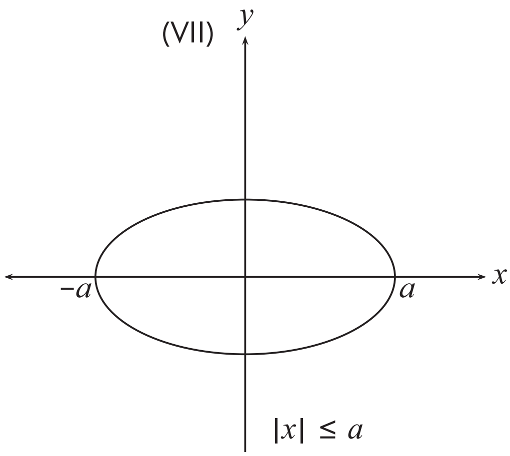
$x \in \mathbb{R}$

(VI)



$|x| \geq a$

(VII)



$|x| \leq a$

3.3 Tipos de funciones

11. Existe alguna función que es simétrica respecto al eje X.

    a) Verdadero   b) Falso

12. La función $f:(-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x) = |x-2|+1$, es inyectiva.

    a) Verdadero   b) Falso

13. Para la función f de variable real, tal que $f(x)=\frac{3x+4}{2x-1}$, bosqueje una gráfica para f e identifique cuál de las siguientes proposiciones es verdadera:

a) f es estrictamente creciente en todo su dominio.
b) f contiene el punto $(1, -6)$.
c) f es una función impar.
d) f es una función inyectiva.
e) f es una función par.

14. Sea f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Si se definen las funciones g y h, tales que: $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ y $h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$, es falso que:

a) $\forall x \in \mathbb{R}\,[g(x)=h(-x)]$
b) h es impar
c) $f(a)=g(-a)-h(-a)$
d) g es par
e) $-g$ es par

15. Analizar si la función dada en cada literal es par o impar:

a) $f(x)=5x+x^3$
b) $g(x)=|x|+1$
c) $h(x)=|-x|-x^2$
d) $j(x)=|2-x|-|x+2|$
e) $f(1-x)=x+2$
f) $h(x)=x^2-|x|$

16. Demostrar que la función $g:\left[\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}$ definida por la regla de correspondencia: $g(x)=x^2-x+1$, es estrictamente creciente.

17. Demostrar que la función de variable real $f(x)=kx+b$ es estrictamente creciente para $k>0$ y estrictamente decreciente para $k<0$.

18. Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ impar estrictamente creciente y g es una función tal que $g(x)=f(x)$, entonces el valor de $\dfrac{2g(4)+3f(4)}{-f(-4)+4g(-4)}$ es:

a) $5/3$ b) $-5/2$ c) $-5/3$ d) 1 e) -1

3.4 Asíntotas de la gráfica de una función de variable real

19. La gráfica de la función de variable real $f(x)=\dfrac{3x^3+2x^2+5}{x^2-4}$ tiene dos asíntotas verticales.

a) Verdadero b) Falso

20. La gráfica de la función de variable real $g(x)=\dfrac{12x-3}{9x^2-4}$ tiene una asíntota horizontal y dos verticales.

a) Verdadero b) Falso

21. Sea f una función de variable real dada por $f(x)=\dfrac{4x^2-x}{x^2-1}$, es falso que:

a) La gráfica de f tiene dos asíntotas verticales.
b) f es monótona creciente.
c) La gráfica de f tiene una asíntota horizontal.
d) $y=4$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.
e) La gráfica de f corta el eje X es dos puntos.

22. Sea h una función de variable real tal que $h(x)=\dfrac{2x}{x^2+x-2}$, es verdad que:

a) La gráfica de h no tiene asíntotas horizontales.
b) La gráfica de h tiene dos asíntotas horizontales.
c) $x=2$ y $x=-1$ son asíntotas verticales de la gráfica de h.
d) La gráfica de h tiene dos asíntotas verticales y una horizontal.
e) $x=-2$ y $x=1$ son asíntotas verticales y $y=2$ es asíntota horizontal de la gráfica de h.

23. Sea g una función de variable real tal que $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, es falso que:

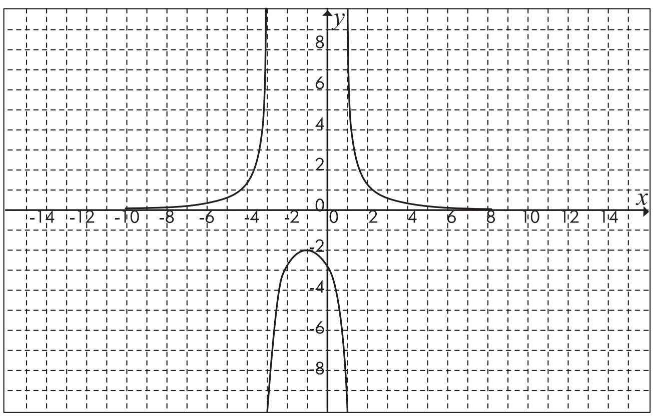
a) g es una función par.
b) $y=0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de g.
c) La gráfica de g tiene una asíntota horizontal y dos verticales.
d) El rango de g es el intervalo $(0, 1]$.
e) El dominio de g son todos los reales.

24. Para cada una de las siguientes funciones, determine las asíntotas horizontales y verticales de sus gráficas si hubieren; además, halle los puntos de corte con los ejes coordenados:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+7x-8}$ b) $g(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$ c) $h(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}$

d) $i(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2}$ e) $j(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ f) $k(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

25. Determinar a, b y $c \in \mathbb{R}$ para que la función de variable real $f(x)=\dfrac{a}{x^2+bx+c}$ tenga la siguiente gráfica:



26. Determine cuál de las siguientes funciones no tiene una gráfica en los diagramas mostrados:

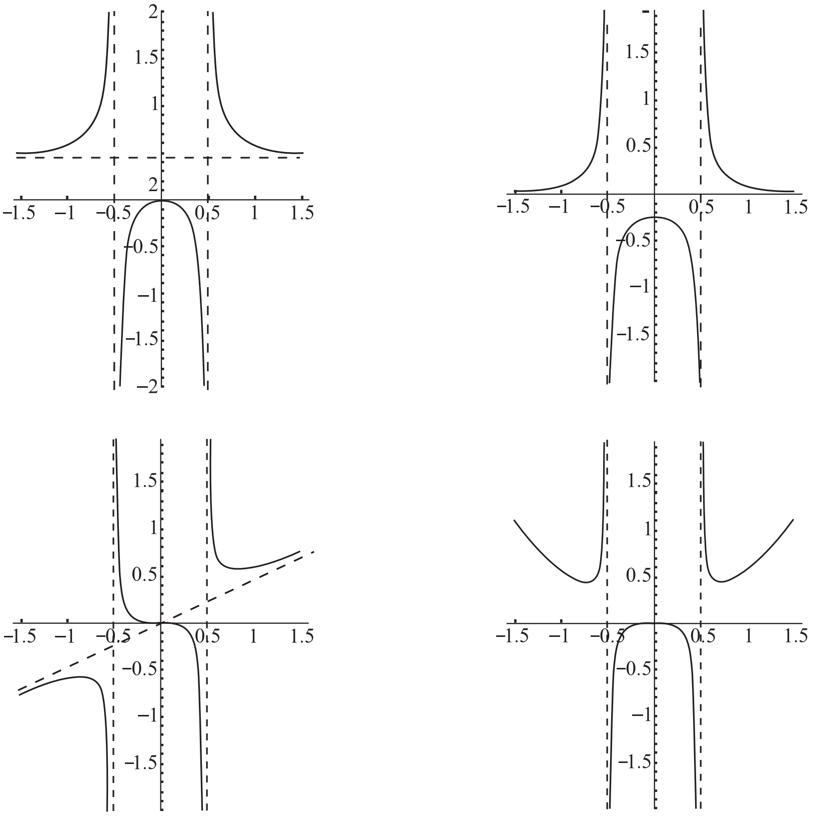
I) $f(x)=\dfrac{1}{2(2x-1)(2x+1)}$

I) $g(x)=\dfrac{7x^2}{4(2x-1)(2x+1)}$

III) $h(x)=\dfrac{7x^3}{4(2x-1)(2x+1)}$

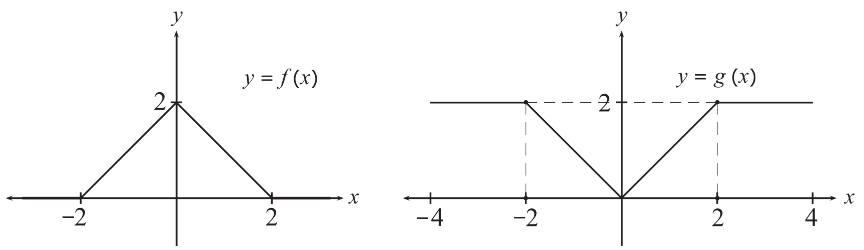
IV) $r(x)=\dfrac{7x^4}{4(2x-1)(2x+1)}$

V) $m(x)=\dfrac{7x}{(2x-1)(2x+1)}$



3.5 Técnicas de graficación de funciones

27. Las gráficas siguientes representan las funciones f y g.



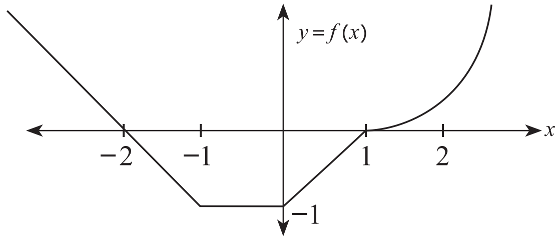
Expresar g en función de f.

28. Si f y g son funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que $g(x)=f(|x|)$, entonces el gráfico de g es simétrico con respecto al eje Y.

a) Verdadero   b) Falso

29. Respecto a la gráfica de la función $y=f(x)$ que se adjunta, grafique:

a) $y=f(x+1)-1$
b) $y=-2f(3-x)$
c) $y=|f(2x-4)|-2$
d) $y=|f(-|x|)|$
e) $y=1-2f(|x|)$



3.6 Funciones definidas por tramos

30. Considere la función h de variable real definida por $\begin{cases} 4+2x & ; -2 \le x \le 0 \\ 4-2x & ; \quad 0 < x \le 2 \\ 0 & ; \quad |x| > 2 \end{cases}$.

Entonces, el valor de $\dfrac{h(-3)+h(0)-h(5)+h\left(-\frac{5\pi}{2}\right)}{h(1)+h(-1)-h(\pi)+h(-e)}$ es 1.

a) Verdadero   b) Falso

31. Sean f y g funciones de variable real, tales que:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & ; \quad x \ge 2 \\ x^2+3 & ; \quad x \in (-\infty, 2) \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 3 & ; \quad x \ge 2 \\ 1-x & ; \quad x \in (0,2) \\ 4x & ; \quad x \in (-\infty, 0] \end{cases}$$

a) Determine el rango de f.   b) Determine el rango de g.

32. Sea una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que: $f(x)=\begin{cases} |x|-4 & ; \quad |x| \le 6 \\ 2 & ; \quad |x| > 6 \end{cases}$, una de las siguientes proposiciones es falsa, identifíquela.

a) f es par.
b) $[0, 2] \subseteq rg\, f$
c) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x)=-5$
d) $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0], [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)]$
e) f es acotada.

33. Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que $f(x) = \begin{cases} 7 & ; \quad x < -4 \\ 3-x & ; -4 \le x \le 4 \\ -1 & ; \quad x > 4 \end{cases}$, entonces es verdad que:

a) f es una función par.
b) f es una función creciente.
c) f es una función inyectiva.
d) f es una función sobreyectiva.
e) $rg\, f = [-1, 7]$

3.7 Funciones lineales

34. Si la gráfica de una función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x)=-x$, se la desplaza dos unidades hacia arriba, dos unidades hacia la izquierda y luego se la refleja con respecto al eje X, obteniéndose una función g, entonces $g(0)=-2$.

    a) Verdadero   b) Falso

35. (Aplicación a la administración). El costo "C" en dólares australianos (AUD) del alquiler de un Bungalow por n semanas, está dado por la función lineal $C(r)= nr + s$, donde s es el depósito de garantía (costo fijo) y r es el monto del alquiler semanal (costo variable). Jenny alquiló el Bungalow por 12 semanas y pagó en total $2\ 925$ AUD. Yolanda alquiló el mismo Bungalow por 20 semanas y pagó en total $4\ 525$ AUD. Hallar los valores de:

    a) El alquiler semanal.   b) El depósito de garantía.

36. (Aplicación a la vida diaria). En la ciudad de Guayaquil existían $1\ 420$ médicos trabajando al 1 de enero de 1994. Después de n años, el número de médicos D que trabajan en la ciudad, viene dado por:

$$D(n)=1\ 420 + 100n$$

    a) ¿Cuántos médicos trabajaban en la ciudad a comienzos del año 2004?
    b) ¿En qué año hubo por primera vez más de 2000 médicos trabajando en la ciudad?

37. (Aplicación a la economía). Una compañía tiene costos fijos de $\$2\ 500$ y los costos totales por producir 200 unidades son de $\$3\ 300$. Cada artículo se vende a $\$5.25$.

    a) Suponiendo linealidad, escribir la ecuación de costos.
    b) Suponiendo linealidad, escribir la ecuación de ingreso ($I=px$).
    c) Grafique costo e ingreso en un mismo sistema de coordenadas con escalas adecuadas. El punto de intersección se lo denomina punto de equilibrio de mercado, determínelo algebraicamente.
    d) ¿Cuántas unidades deberán venderse y producirse, de modo que resulte una utilidad de $\$200$? (U=Ingreso–Costo).

38. (Aplicación a la economía). El costo de producir x artículos está dado por $y_c = 2.8x + 600$.

    a) Encuentre algebraicamente el punto de equilibrio ($I=C$) si cada artículo se vende a $\$4$.
    b) Graficar la función costo e ingreso en un mismo plano cartesiano, identificar el punto de intersección (punto de equilibrio).
    c) Si se sabe que al menos 450 unidades se venderán, ¿cuál debe ser el precio de cada artículo para garantizar que no exista pérdidas?

39. (Producción de aceite). Agrícola Palmera de Los Ríos produce aceite de palma africana, tiene tanques para almacenar el aceite después de prensar. Los tanques son cilíndricos y su volumen está determinado por $V = A \bullet h$, donde A es el área de la base y h es la altura del tanque. Se sabe que el área de la base del tanque es 388 m^2 y la densidad del aceite es $0.859 \ \frac{\text{ton}}{\text{m}^3}$.

a) Si la capacidad del tanque es de 5000 ton (toneladas), halle la altura del tanque de almacenamiento y aproxímelo al entero más cercano.

b) Grafique el volumen en función de la altura. Discuta acerca del dominio de esta función lineal respecto a la máxima capacidad del tanque. (Agradecemos la información para este ejercicio de la Agrícola Palmera de Los Ríos, especialmente a uno de sus ejecutivos, el Ing. Z. Junco).

40. Vanessa quiere alquilar una sala para su recepción de bodas, le dan dos posibilidades:

a) El ayuntamiento le cobrará 20£ por el uso de un salón comunal más 5£ por huésped.

(I) Complete la siguiente tabla correspondiente a los cargos del ayuntamiento.

Número de huéspedes (N)	10	30	50	70	90
Cargos (C) en £					

(II) Usando escalas adecuadas, dibuje una gráfica que muestre los cargos respecto al número de huéspedes. Tome el eje horizontal para el número de huéspedes y el eje vertical para los cargos.

(III) Escriba una expresión para C, en función de N, que pueda usar el ayuntamiento para calcular sus cargos.

b) Un hotel local calcula sus cargos para el uso de su sala de congresos usando la siguiente expresión:

$$C = \frac{5N}{2} + 500$$

En la que C es el cargo en £ y N el número de huéspedes.

(I) Completar la siguiente tabla de los cargos impuestos por el hotel.

Número de huéspedes (N)	10	30	50	70	90
Cargos (C) en £					

(II) En el mismo par de ejes usados en el apartado (a)(II), dibujar la gráfica de C.

Con la información anterior, discuta la mejor opción para Vanessa.

3.8 Funciones cuadráticas

41. Si cae un objeto al suelo en Júpiter desde una altura de 25 metros, la altura H (en metros) a la que se encuentra del suelo después de x segundos es $H(x)=25-16x^2$. Entonces, el objeto golpea el suelo a los 1.25 segundos.

a) Verdadero   b) Falso

42. Dada la función cuadrática $f: \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a\neq 0$, $b^2-4ac > 0$, una condición necesaria y suficiente para que el producto de sus raíces sea igual a la suma de las mismas es que:

a) $a=b$ b) $b=-c$ c) $a=c$ d) $b=c$ e) $c=-a$

43. Dada la función $g: \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, tal que $g(x)= x^2 + bx + 1$, $b \in \mathbb{R}$, identifique cuál de las siguientes proposiciones es falsa:

a) $dom\ g = (-\infty,+\infty)$

b) $(b^2 < 4) \rightarrow (\forall x\in \mathbb{R},\ g(x)\neq 0)$

c) $\left(2-\frac{b^2}{4}\right) \in rg\ g$

d) $rg\ g = \left[1-\frac{b^2}{4}, +\infty\right)$

e) g es sobreyectiva.

44. Si f es una función de variable real, tal que $f(x)=|2x^2-3x+1|-2$, entonces es verdad que:

a) $\forall x\in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, f es creciente.

b) f es simétrica respecto a $x=3/4$.

c) f es par.

d) $f(1) + f(\frac{1}{2}) > 0$

e) $\forall x\in (-\infty, 1)$, f es decreciente.

45. Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que $f(x)=x^2 + x$, entonces es verdad que:

a) f es par.

b) f es inyectiva.

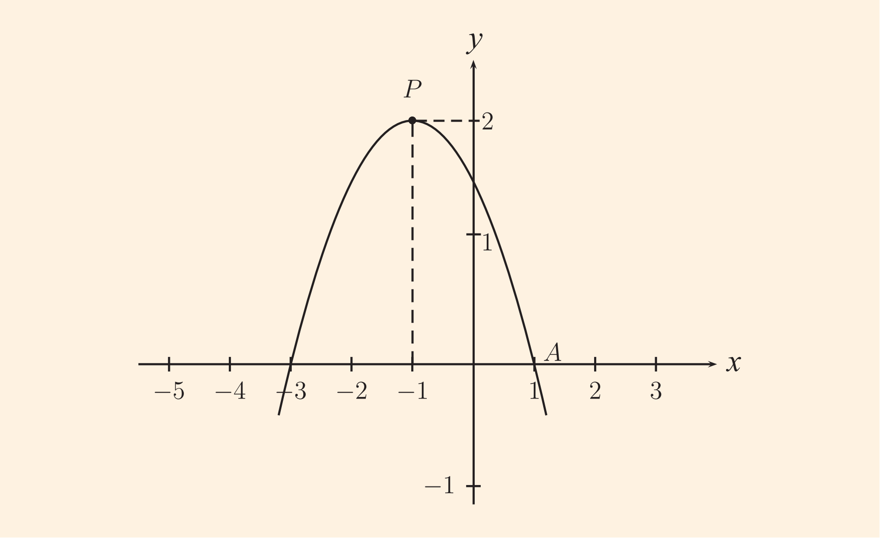
c) $rg\ f = [0, +\infty)$

d) f decrece en $(-\infty,-1)$

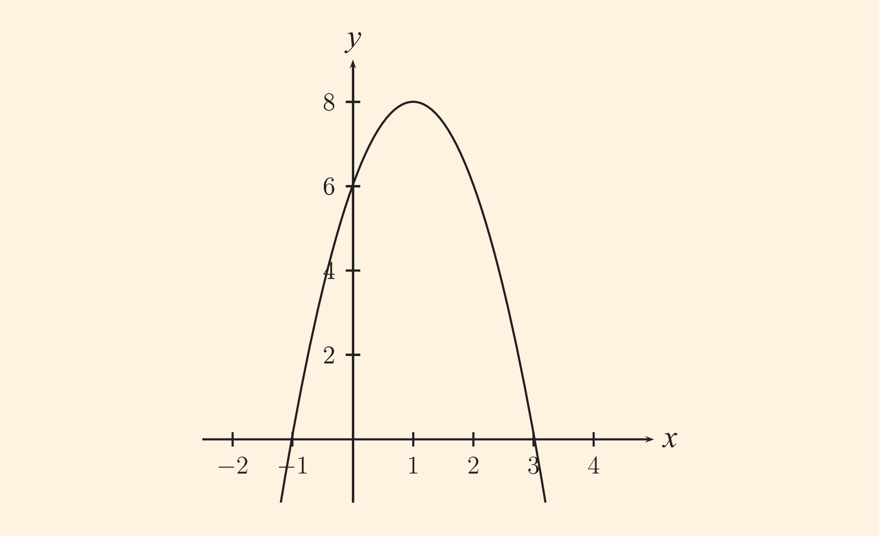
e) $\forall x \in \mathbb{R}$, f es creciente.

46. En la figura aparece parte de la gráfica de $y = a(x-h)^2 + k$. La gráfica tiene su vértice en P, y pasa por el punto $A(1, 0)$. Entonces es verdad que:

a) $h+k=3$
b) $a=1/2$
c) $a+h=-3/2$
d) $a+h+k=-1/2$
e) $h+k-a=0$



47. La figura a continuación muestra parte de la gráfica de una función cuadrática $y=ax^2+bx+c$.

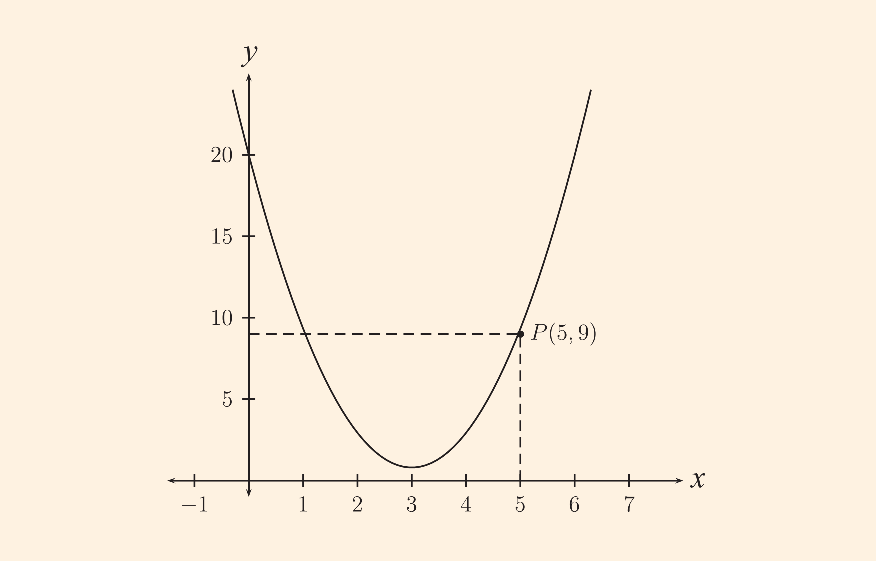


a) Hallar el valor de c.

b) Hallar el valor de a.

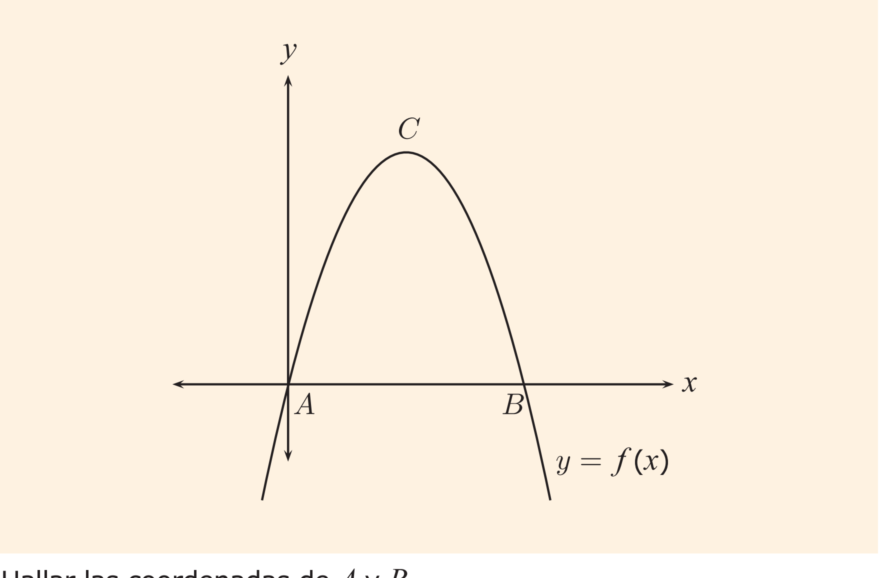
c) Escribir la función cuadrática descompuesta en factores.

48. El diagrama muestra parte de la curva $y=a(x-h)^2+k$, donde a, h, $k \in \mathbb{Z}$.



a) Si el vértice está en el punto $(3, 1)$, encuentre el valor de h y k.
b) Si el punto $P(5, 9)$ está sobre la gráfica, demuestre que $a=2$.
c) A partir de lo anterior, demuestre que la ecuación de la curva se puede escribir en la forma $y = 2x^2 - 12x + 19$.

49. La gráfica de la función $f(x)=30x - 5x^2$ se muestra a continuación:

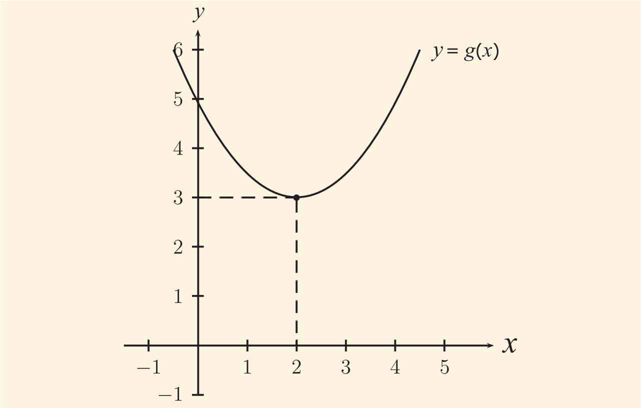


a) Hallar las coordenadas de A y B.
b) Hallar las coordenadas de C.
c) Escribir la ecuación de la recta paralela al eje Y que pasa por el vértice C.

50. El siguiente diagrama muestra parte de la gráfica de una función cuadrática g, que se define por $g(x)=a(x–h)^2+3$.

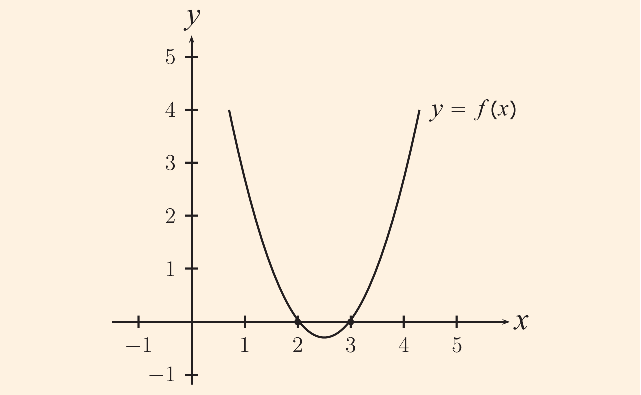
Hallar el valor de:

a) h
b) a



51. El siguiente diagrama muestra parte de la gráfica de una función cuadrática $f(x)=x^2+ bx + c$, que interseca el eje X en: $x=2$ y $x=3$.

Hallar el valor de:
a) b
b) c



52. Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que $f(x)=2x^2+x+k$, entonces los valores de k para que la gráfica de f no interseque al eje X, son:

a) $\{2\}$ b) $(8, +\infty)$ c) $(1/8, +\infty)$ d) $\{1/8\}$ e) $(-\infty, 0)$

53. Una compañía puede vender a $\$100$ por unidad un artículo de primera necesidad que elabora. Si se producen x unidades al día, el número de dólares en el costo de la producción diaria es $x^2 + 20x + 700$.

a) Exprese el ingreso como una función de x.
b) Exprese la utilidad como una función de x.
c) Encuentre la ganancia máxima y cuántas unidades deben producirse al día para que la empresa obtenga esta ganancia.

54. La demanda para los bienes producidos por una industria están dados por la ecuación $p^2 + x^2 = 169$, donde p es el precio unitario y x es la cantidad demandada. La oferta está dada por $p = x + 7$. El precio de equilibrio es:

a) 5 b) 12 c) 22 d) 19 e) 17

55. El perímetro de un rectángulo tiene 24 metros.

a) La tabla muestra algunas dimensiones posibles del rectángulo. Halle los valores de a, b, c, d y e.

Longitud (metros)	Anchura (metros)	Área (m^2)
1	11	11
a	10	b
3	c	27
4	d	e

b) Si el perímetro del rectángulo es fijo y el área es A en m^2, exprese A en función de la longitud x del rectángulo.

c) ¿Qué longitud y anchura tiene el rectángulo si el área es máxima?

56. Un objeto que se lanza hacia arriba llega a una altura de h metros pasados t segundos, donde $h(t) = 30t - 5t^2$.
a) ¿Después de cuántos segundos alcanza el objeto su altura máxima?
b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el objeto?

57. El costo de producir un texto de matemáticas para cierto nivel es de $\$15$ y se vende después por $\$x$. Si se vende un total de $(100000 - 4000x)$ libros:
a) Halle una expresión para el beneficio (utilidad) obtenido por todos los libros vendidos.
b) A partir de lo anterior, calcule el valor de x que produce un beneficio máximo.
c) Calcule el número de libros vendidos para producir este beneficio máximo.

3.9 Operaciones con funciones de variable real

58. Sean f y g funciones de variable real, tales que:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & ; \quad x \geq 2 \\ x^2+3 & ; \quad x \in (-\infty, 2) \end{cases}, \qquad g(x)=\begin{cases} 3 & ; \quad x \geq 2 \\ 1-x & ; \quad x \in (0,2) \\ 4x & ; \quad x \in (-\infty, 0] \end{cases}$$

a) Determinar $f-g$

b) Determinar f/g

c) Hallar $f+g$

d) Gráficar $f \,.\, g$

59. Si f y g son funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$,tales que:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & ; \quad x \leq -6 \\ 2x-1 & ; \quad -6 < x \leq 1 \\ 4 & ; \quad x > 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} 1 & ; \; x \leq 4 \\ x^2-1 & ; \; 4 < x < 6, \\ 2 & ; \; x \geq 6 \end{cases}$$

entonces la regla de correspondencia de $f+g$ es:

a) $\begin{cases} x+4 & ; \quad x \leq 4 \\ x^2+2x & ; \quad 4 < x < 6 \\ 6 & ; \quad x \geq 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+4 & ; \quad x \leq -6 \\ x^2+2x-2 & ; \quad -6 < x < 6 \\ 6 & ; \quad x \geq 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+4 & ; \quad x \leq -6 \\ 2x & ; \quad -6 < x \leq 1 \\ 5 & ; \quad 1 < x \leq 4 \\ x^2+3 & ; \quad 4 < x < 6 \\ 6 & ; \quad x \geq 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+4 & ; \quad x \leq -6 \\ x^2+3 & ; \quad 4 < x < 6 \\ 6 & ; \quad x \geq 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+4 & ; \quad x \leq -6 \\ 2x & ; \quad -6 < x < 6 \\ 6 & ; \quad x \geq 6 \end{cases}$

60. Sean f y g dos funciones de variable real con reglas de correspondencia:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; \; x \leq 0 \\ \sqrt{x} & ; \; x > 0 \end{cases} \text{ y } \; g(x)=x^2-x-2; \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Realizar las siguientes operaciones y especifique su dominio.

a) $f+g$ b) $g-f$ c) $f \,.\, g$ d) f/g e) g/f

61. Si f y g son funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ cuyas reglas de correspondencia son:

$$f(x)=\begin{cases} x & ; \; x > 1 \\ 1 & ; \; x \leq 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x)=\begin{cases} 3-x \,; \, |x| \leq 4 \\ x+1 \,; \, |x| > 4 \end{cases},$$

entonces la regla de correspondencia de la función $f \circ g$ es:

a) $\begin{cases} x+1 \,; \, x > 4 \\ 3-x \,; \, -4 \leq x < 2 \\ 1 \,; \, x < -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2 \,; \, |x| \leq 4 \\ x+1 \,; \, |x| > 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3-x \,; \, x > 0 \\ x+1 \,; \, -4 \leq x \leq 0 \\ 1 \,; \, x < -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2 \,; \, -4 \leq x < 2 \\ x+1 \,; \, x > 4 \\ 1 \,; \, 2 \leq x \leq 4 \vee x < -4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+1 \,; \, x > 4 \\ 3-x \,; \, -4 \leq x < 2 \\ 1 \,; \, 2 \leq x \leq 4 \vee x < -4 \end{cases}$

62. Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y g es una función par de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, entonces la función $f o g$ es par.

a) Verdadero   b) Falso

63. Sean f y g dos funciones de variable real, tales que:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; \; x<0 \\ x+1 & ; \; x\geq 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x)=x^2-1,\; x\in\mathbb{R}.$$

Entonces la regla de correspondencia de la función $g o f$ es:

a) $\begin{cases} 1 & ; \; x<0 \\ x^2-2x & ; \; x\geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -1 & ; \; x<0 \\ x^2+2x & ; \; x\geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1 & ; \; x<0 \\ x^2+2x & ; \; x\geq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -1 & ; \; x<0 \\ x^2-x & ; \; x\geq 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 0 & , \; x<0 \\ x^2-2x & ; \; x\geq 0 \end{cases}$

64. Sea g una función de variable real, tal que $g(x)=x^3$.
a) Halle g^{-1}.
b) Grafique g y g^{-1} en el mismo sistema de coordenadas.
c) Encuentre A$q(x)$ si $q(x)$: $g(x)=g^{-1}(x)$.

65. Sean las funciones de variable real definidas por:

$f(x)=\sqrt{x}$

$g(x)=x^2$ Halle $f o g o h$

$h(x)=x-1$

66. Dada $(f o g)(x)=x^2+2x+6$ y $f(0)=9$, determinar la regla de correspondencia de f si:

a) $g(x)=x-k$ siendo $k\in\mathbb{N}$.   b) $g(x)=x-k$ siendo $k\in\mathbb{Z}^-$.

67. Sean las funciones $f(x)=\begin{cases} 2(x-3) & ; \; x\leq 3 \\ (x-2)^2 & ; \; x>3 \end{cases}$ y $g(x)=1-2x$; $x\leq 0$, determine la regla de correspondencia de $f o g$.

3.10 Funciones especiales

68. El rango de la función f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con regla de correspondencia: $f(x)=-[\![x]\!]$ es el conjunto de los números enteros.

a) Verdadero   b) Falso

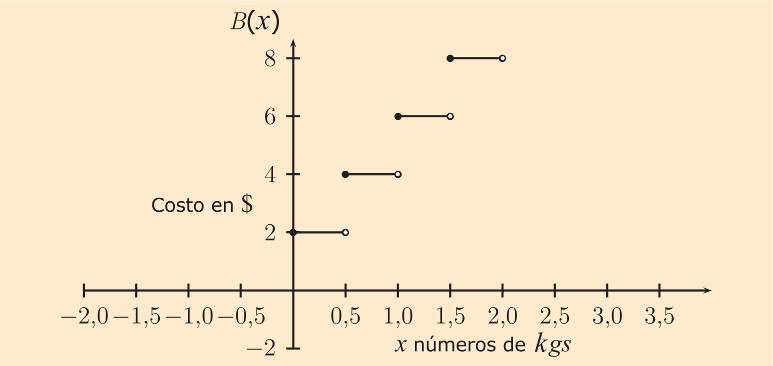
69. Sea $f(x)=x^3$, con $x \in (-\infty,+\infty)$, la suma de los elementos del conjunto de verdad del predicado $f(x)=f^{-1}(x)$ es:

a) 2 b) 0 c) 1 d) -2 e) -1

70. Miriam desea enviar un paquete a Madrid desde la oficina de correos. Tiene dos opciones. La ***Opción A*** contiene un cargo fijo por enviar el paquete, más un costo que depende del peso del paquete. Estos cargos se expresan por la ecuación $A(x)=6+3x$, donde x es el peso del paquete en kg, y A es el costo total de enviar el paquete expresado en $ (dólares USA).

a) ¿De cuánto es el cargo fijo por enviar un paquete según la ***Opción A***?
b) ¿Cuánto costaría enviar un paquete que pesa $2,4$ kg según la ***Opción A***?
c) El costo de la ***Opción B*** se muestra parcialmente en la siguiente gráfica.

El peso en kg está representado por la variable x.



La función $B(x)$ puede definirse para valores de x entre 0 y 1 kg como sigue:

$$B(x) = \begin{cases} 2 & \text{para } 0 \leq x < 0.5 \\ 4 & \text{para } 0.5 \leq x < 1 \end{cases}$$

Para pesos mayores de 1 kg, el costo se sigue incrementando en intervalos de $\$2$, siguiendo el mismo modelo que para pesos inferiores. Defina $B(x)$ para pesos entre 2 y 3 kg, escribiendo su respuesta según el esquema a continuación:

$$B(x) = \begin{cases} \ldots & \text{para } \ldots \\ \ldots & \text{para } \ldots \end{cases}$$

d) Hallar la regla de correspondencia que exprese el costo para $x \geq 0$ de la ***Opción B***.
e) Halle el costo de enviar un paquete que pesa 1.6 kg usando la ***Opción B***.
f) Si a Miriam le costó $\$22.50$ enviar por correo un paquete usando la ***Opción A***, ¿cuánto pesaba este paquete?
g) ¿Cuánto le costaría enviar por correo este mismo paquete con la ***Opción B***?
h) Halle un peso (x entero distinto de cero) para el cual el costo de ambas opciones sea el mismo. Determine este costo.

71. Sea h una función de variable real con regla de correspondencia $h(x)=|x-2|-|x|+2$, entonces es verdad que:
a) $h(x)=4$ si $x \geq 2$.
b) Si $x<0$, entonces $h(x)=0$.
c) Si $0 \leq x<2$, entonces $0<y \leq 4$.
d) Si $x<0$, entonces $h(x)=4-2x$.
e) Si $x<2$, entonces $h(x)=4$.

72. Si se define la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $f(x)= sgn(x-2)+sgn(x+1)$, entonces una de las siguientes proposiciones es falsa, identifíquela:
a) Si $x>2$, entonces $f(x)=2$.
b) f es creciente.
c) $f(\pi)>1$
d) $\forall x\, (f(x)=-f(-x))$
e) $\forall x\, (f(x) \leq 2)$

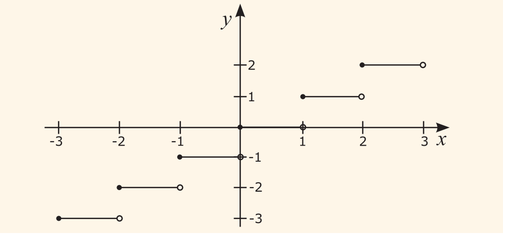
73. Dadas las funciones de variable real f, g y h, tal que $f(x)=sgn(x)$, $g(x)=\begin{cases} x\,;\ x>0 \\ 1\,;\ x \leq 0 \end{cases}$ y $h(x)=\begin{cases} x+1\,;\ x \geq 0 \\ x-1\,;\ x<0 \end{cases}$, hallar $[2f-3(g+h)](x)$.

74. Si se tienen las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tales que $f(x)=\mu(x)$ y $g(x)=sgn(x)$, entonces $[\,f(x)+g(x)]$ es:

a) $\begin{cases} 1\ ;\ x<0 \\ 0\ ;\ x=0 \\ 4\ ;\ x>0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1\ ;\ x<0 \\ 0\ ;\ x=0 \\ 4\ ;\ x>0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 1\ ;\ x<0 \\ 0\ ;\ x=0 \\ 4\ ;\ x>0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -1\ ;\ x<0 \\ 0\ ;\ x=0 \\ 2\ ;\ x>0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4\ ;\ x<0 \\ 0\ ;\ x=0 \\ 16\ ;\ x>0 \end{cases}$

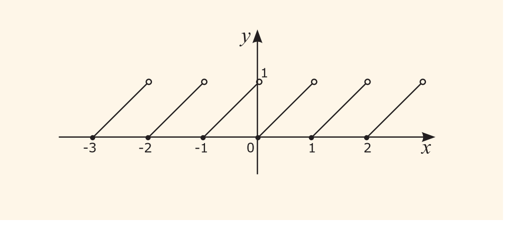
75. Relacione cada gráfica con la función de variable real correspondiente:

a) $f(x)=[2-sgn(x)]-x^2$

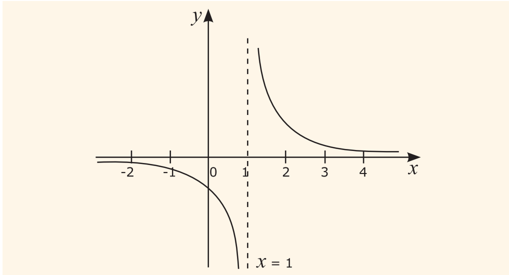


b) $f(x)=x-[\![x]\!]$

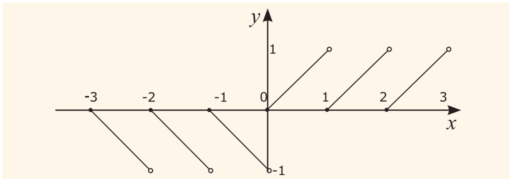
c) $f(x)=\begin{cases} x-[\![x]\!]; & x \geq 0 \\ [\![x]\!]-x; & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$



d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

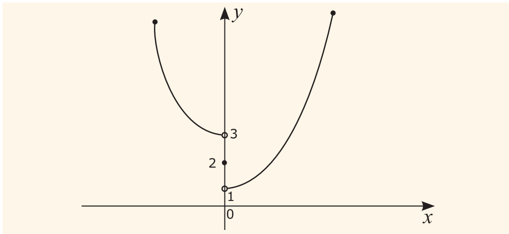


e) $f(x) = [\![x]\!]$

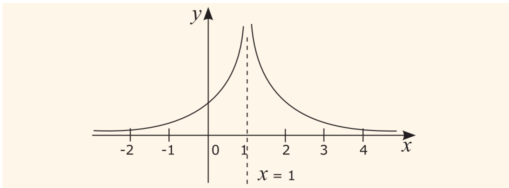


f) $f(x) = [2 - sgn(x)] + x^2$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$



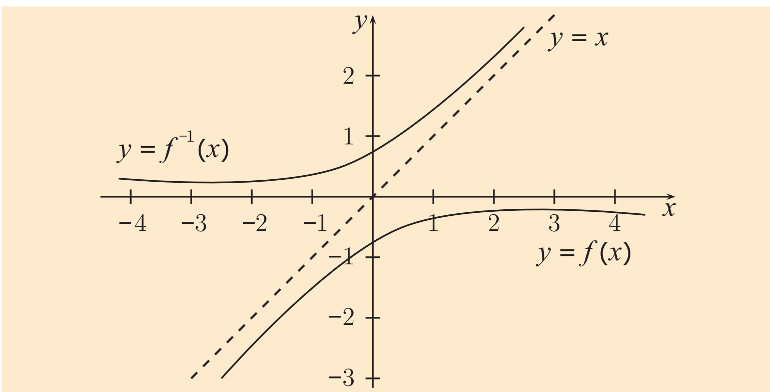
h) $f(x) = x + [\![x]\!]$



3.11 Función inversa de una función biyectiva

76. Si una función f tiene inversa, y su gráfica se encuentra en el primer cuadrante, la gráfica de f^{-1} estará en el primer cuadrante también.
    a) Verdadero   b) Falso

77. La siguiente es la gráfica de una función $f: \mathbb{R} \to (-\infty, 0)$ biyectiva y su inversa f^{-1}.
    a) Verdadero   b) Falso



78. Si f es una función inversible tal que $f^{-1}(a)=2$, entonces $f(2)=a$.

a) Verdadero b) Falso

79. Si $f(x)=x^2-4x-3$, $x\in(-\infty, 2]$ es la regla de correspondencia de una función inversible, entonces la regla de correspondencia de la inversa de f es:

a) $f^{-1}(x) = 2+\sqrt{7-x};\ x\geq -7$
b) $f^{-1}(x) = 2-\sqrt{7+x};\ x\geq -7$
c) $f^{-1}(x) = 2+\sqrt{7+x};\ x\geq -7$
d) $f^{-1}(x) = 2-\sqrt{7-x};\ x\geq -7$
e) $f^{-1}(x) = 2-\sqrt{7+x};\ x\leq -7$

80. Sean f y g dos funciones de variable real, tales que:

$f(x)=\dfrac{8}{x}$; $x\neq 0$ y $g(x)=x^2$.

a) Halle f^{-1}. ¿Cuál es la relación con la función f?
b) Halle $f^{-1}\circ g$. Determine si es par o impar.
c) Hallar A$p(x)$ si $p(x)$: $(f^{-1}\circ g)(x)=x$.

81. Sean f y g funciones de variable real, tales que:

$$f(x)=4(x-1)$$

$$g(x)=\frac{6-x}{2}$$

a) Halle g^{-1}.
b) Resolver la ecuación $(f^{-1}\circ g)(x)=4$.

82. Sea el conjunto A=$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la función f: A→A, definida por: $f=\{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3), (5, 5)\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $f\circ f$ es inyectiva.
b) $(f\circ f)\circ f=f$.
c) f es inyectiva.
d) $f\circ f$ es una función sobreyectiva.
e) $f=f^{-1}$

83. Sean $f(x)=2x+1$; $g(x)=3x-4$; $h(x)=\dfrac{8}{x}$, $x\neq 0$ y $r(x)=x^2$.

a) Demostar que f y h son inyectivas.
b) Hallar la regla de correspondencia de f^{-1}.
c) Graficar f y f^{-1} en el mismo plano.
d) Hallar $(g\circ f)(-2)$.
e) Hallar la regla de correspondencia de $(f\circ g)(x)$.
f) Hallar la regla de correspondencia de h^{-1}.
g) Graficar g y h^{-1} en el mismo plano.
h) Hallar la regla de correspondencia de $(h^{-1}\circ r)(x)$.
i) Hallar el conjunto solución de la ecuación: $(h^{-1}\circ r)(x)=1/2$.

84. Si f es una función cuyo dominio es el intervalo $[5, +\infty)$ y su regla de correspondencia es $f(x)= \sqrt{x-5} - 5$, entonces el dominio de f^{-1} es:

a) $[5,+\infty)$ b) $(5,+\infty)$ c) $[-5,+\infty)$ d) $[-5, 0]$ e) $[-5, 5)\cup(5,+\infty)$

85. La gráfica de la función $f(x)= \dfrac{1}{ax^2-1}$ con dominio $(1, +\infty)$, contiene al punto $\left(2,\dfrac{1}{3}\right)$. Encontrar:

a) El valor de a.
b) La regla de correspondencia de f^{-1}.
c) La función recíproca $1/f$.
d) La función $f \circ (1/f)$.

3.12 Funciones polinomiales

86. Si $p(x)$ es un factor del polinomio $q(x)$ y r es una raíz de la ecuación polinómica $p(x)=0$, entonces $(x-r)$ es un factor del polinomio $q(x)$.

a) Verdadero b) Falso

87. Sea p una función polinomial con regla de correspondencia $p(x)= x^2+ax+b$. Si al dividir $p(x)$ para $(x-3)$ se obtiene residuo 1, entonces $a+b=1$.

a) Verdadero b) Falso

88. Si $P(x)$ es un polinomio de grado cuatro y $\dfrac{P(x)}{x-2} = D(x) + \dfrac{k}{x-2}$, entonces $D(x)$ es un polinomio de grado tres.

a) Verdadero b) Falso

89. Si se define una función polinomial con regla de correspondencia $p(x)=x^3+x^2-(k+7)x + \dfrac{21}{8}$, tal que $k \in \mathbb{R}$, entonces el valor de k para que $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ sea factor de $p(x)$, es:

a) -1 b) 7 c) 14 d) -14 e) -7

90. La suma de a y b, tales que la función polinomial $p(x)=x^3+ax^2+b$ sea divisible para el trinomio x^2-x-2, es:

a) 1 b) -1 c) 7 d) -7 e) 2

91. La suma de los valores reales de k, tales que al dividir el polinomio $p(x)=k^2x^3-4kx + 4$ para $(x-1)$ se obtenga como residuo 1, es:

a) 4 b) 5 c) -1 d) 2 e) -5

92. Si se tiene un polinomio $p(x)=x^3+ mx - x - 2$, entonces el valor de m, tal que la división de $p(x)$ para $(x-2)$ tenga como residuo 4, es:

a) $1/4$ b) 0 c) -3 d) 1 e) -1

93. Si una de las raíces de la función polinomial $p(x)=x^4 - ax^2 + 5x + b$ es 2 y $p(1)+10=0$, entonces el residuo de dividir $p(x)$ para $(x-3)$ es:

a) 120 b) 150 c) $160/3$ d) $160/30$ e) $244/3$

94. Sea $p(x)=(a + 1)x^5+ (b - 2)x^4- 31x^3- 39x^2+ 76x -20$ una función polinomial, tal que si se divide para $(x-1)$ el residuo es cero, si se divide para $(x+3)$ el residuo es 400, entonces la suma $a+b$ es:

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

95. Si al dividir $q(x)=x^2+ax+b$ para $(x-1)$ se obtiene como residuo -3 y al dividir $q(x)$ para $(x-2)$ el residuo es -7, entonces el valor de ab es:

a) -6 b) -24 c) -21 d) 6 e) 21

96. Encuentre los ceros de la función $p(x)=x^3 - x^2 - 14x + 24$.

97. Hallar un polinomio $p(x)$ de cuarto grado que cumpla las siguientes condiciones:

I) El coeficiente de x^4 es 1.
II) $p(1)=0$.
III) $p(x)$ es divisible para el trinomio $x^2+ 2x + 2$.
IV) Al dividir $p(x)$ para x el residuo es -2.

98. Hallar el valor de k para que la función $q(x) = x^3 - 8x^2 + 9x + k$, tenga una raíz igual al doble de la otra.

3.13 Función exponencial

Las dos preguntas siguientes se refieren a la misma gráfica. En el diagrama aparece la forma de una cadena colgada entre dos ganchos, A y B. Los puntos A y B están a alturas iguales por encima del suelo. P es el punto más bajo de la cadena y se encuentra a p unidades del suelo. El suelo se representa por el eje X. La abcisa de A es -2, y la abcisa de B es 2. El punto P pertenece al eje de las Y. La forma de la cadena está dada por $y=2^x+2^{-x}$, donde $-2 \leq x \leq 2$.

99. El valor de P es:

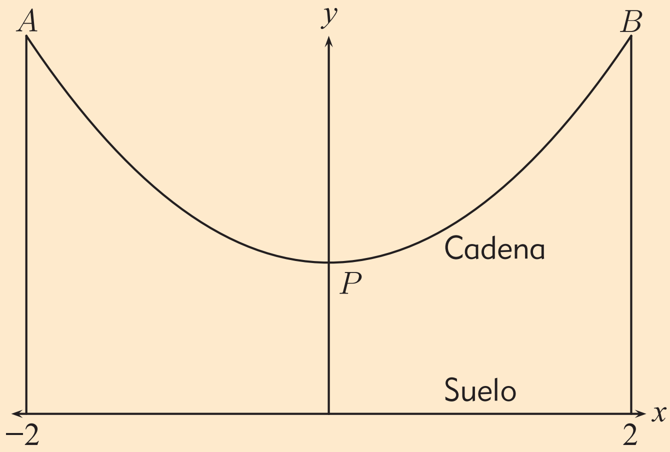
a) 0

b) 2

c) –4

d) 4

e) –2



100. El rango de f es:

a) $\mathbb{R}$ b) $[p, 4]$ c) $[p, +\infty)$ d) $[p, 4\frac{1}{4}]$ e) $[p, 8]$

101. Dada la función $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, con regla de correspondencia $f(x) = -\frac{1}{2^{|x|}} + 1$, es falso que:

a) f es una función acotada.

b) f es una función par.

c) $(f\circ f)(x) = -\frac{1}{2^{1-\frac{1}{2^{|x|}}}} + 1$

d) $rg\, f = [0, 1)$

e) f es una función inyectiva.

102. El valor más aproximado a $4 \mathrm{x} 4^{1/3} \mathrm{x} 4^{1/9} \mathrm{x} 4^{1/27}$... es:

a) 4^{100} b) 4000 c) 8 d) 2^{100} e) 0

103. Sea Re=$\mathbb{R}$. Hallar el conjunto de verdad de los siguientes predicados:
a) $p(x) : 3^{x+1} + 3^{x} + 3^{x-1} = 39$
b) $q(x) : 2^{x+1} + 4^{x} = 80$
c) $r(x) : 6(3^{2x}) - 13(6^{x}) + 6(2^{2x}) = 0$

104. Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x)=e^{sgn(x)+\mu(x)}$, entonces es verdad que:

a) f es estrictamente creciente.
b) $f(\pi)=f(-\sqrt{2})$.
c) f es impar.
d) f no es inyectiva.
e) $rg\, f=\left[\frac{1}{e}, e^2\right]$.

105. Hallar el conjunto de verdad de los siguientes predicados. Considere $x \in \mathbb{R}$.

a) $p(x)$: $4^x+2^{x+1}=8$

b) $h(x)$: $2^x+(0.5)^{2x-3}-5(0.5)^{x-1}=-1$

c) $q(x)$: $16^x-6(4)^x=-8$

d) $r(x)$: $9^x+3^{x+1}-4=0$

e) $q(x)$: $3^x+9^x=6642$

106. Sea f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que $f(x)=e^{x-1}-1$, entonces es verdad que:

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ [f$ es decreciente$]$.
b) $y=-1$ es una asíntota de la gráfica de f.
c) $f(-1)=0$.
d) f es una función impar.
e) $\forall x \in \mathbb{R}\ [\mu(f(x))=1]$.

107. Hallar el conjunto de verdad de las siguientes desigualdades. Considere $x \in \mathbb{R}$.

a) $\sqrt[3]{2^{\frac{3x-1}{x-1}}} < 8^{\frac{x-3}{3x-7}}$

b) $(0.04)^{5x-x^2} < 625$

c) $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4} \geq 0$

d) $\dfrac{1}{(0.5)^x-1}-\dfrac{1}{1-(0.5)^{x+1}} \geq 0$

e) $0 < 8^x+18^x-2\,(27)^x$

108. Sean f y g funciones de variable real, tales que:
$f(x)=2^x$, $x \in \mathbb{R}$, y $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$, $x \in \mathbb{R}-\{2\}$. Halle las funciones siguientes y determine su dominio:

a) $g \circ f$ b) g^{-1} c) $g^{-1} \circ g$

3.14 Función logarítmica

109. $\forall\, x \in \mathbb{R}^+(log(x)\ .\ log(x)\ .\ log(x)= 3log(x))$.

a) Verdadero b) Falso

110. Si Re=$\mathbb{R}^+-\{1\}$ y $p(x)$: $ln(log_x 2)=-1$, entonces A$p(x)$= $\{2^e\}$.

a) Verdadero b) Falso

111. Sea $c \in \mathbb{R}^+-\{1\}$. Si a y b son números reales cualesquiera, tal que $a < b$, entonces $log_c a < log_c b$.

a) Verdadero b) Falso

112. La gráfica de toda función logarítmica $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x)=log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, contiene a los puntos $(1, 0)$ y $(a, 1)$.

a) Verdadero b) Falso

113. Si $log(2)=a$ y $log(3)=b$, entonces $log(75)$ es:

a) $3-3a$ b) $2-a+b$ c) $2-2b+a$ d) $1-a+b$ e) $2+b-2a$

114. Sean las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+3}; & x \leq 3 \\ log_3(x-2); & x \in (3, +\infty) \end{cases} \qquad g(x) = 1-2x \quad ; x\leq 0$$

Determine:
a) El rango de f y g. b) Las gráficas de f y g. c) $f+g$

115. Hallar el conjunto de verdad de los siguientes predicados. Considere $x \in \mathbb{R}$.

a) $p(x)$: $log(x-1) = log\sqrt{5+x} + log\sqrt{5-x}$
b) $q(x)$: $log(x^2-4) - log(x+2) = 3log(x-2)$
c) $p(x)$: $e^x - e^{-x}=1$
d) $r(x)$: $5^x-5^{-x}=2$
e) $h(x)$: $5^{1+2x}+6^{1+x}=30+150^x$

116. Despejar x en las siguientes ecuaciones:

a) $10^{x^2+3x}=200$ b) $ln(x+4)=5y + ln\, C$

117. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $log_2 4\ log_4 6\ log_6 8 = -3$

b) $(log\,x)^n = n\,log\,x,\ \forall\, x > 0$

c) $ln(1+2+3) = ln1 + ln2 + ln3$

d) $e^{ln\sqrt{13}} = 13^{1/2}$

e) $2^{log_2 2} + log_4 \frac{1}{16} = 4$

118. Simplificar las siguientes expresiones logarítmicas:

a) $36^{log_6 5} + 10^{1-log2} - 3^{log_9 36}$

b) $81^{\frac{1}{log_5 3}} - 27^{log_9 36} - 3^{\frac{4}{log_7 9}}$

c) $log_8\,log_4\,log_2\,16$

d) $2 - log_2\,log_3\sqrt{\sqrt[4]{3}}$

e) $1 + log\,log\sqrt{\sqrt[5]{10}}$

f) $log(11 - log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3}\ .\ log_{\sqrt{3}}\frac{1}{3})$

g) $log_3 7.\ log_7 5.\ log_5 4 + 1$

119. Demostrar que:

$$\frac{1}{log_a n} + \frac{1}{log_{a^2} n} + \frac{1}{log_{a^3} n} + \frac{1}{log_{a^4} n} + \frac{1}{log_{a^5} n} = 15 log_n a$$

120. Hallar:

a) $log_{100} 40$ si $log_2 5 = a$

b) $log_3 5$ si $log_6 2 = a$ y $log_6 5 = b$

c) $log_2 360$ si $log_3 20 = a$ y $log_3 15 = b$

d) $log_b[28(b^{1-2a})]$ si $log_b 2 = \frac{a}{4}$, $log_b 7 = \frac{3a}{2}$, $b>0$, $a>0$, $b \neq 1$

e) $log_{m^2}(mn^3)$ si $log_a m = x$ y $log_a n = y$

121. Hallar el valor exacto de x que satisface la ecuación: $3^x(4^{2x+1}) = 6^{x+2}$.
Expresar la respuesta en la forma $\frac{ln\,a}{ln\,b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$.

122. Hallar el valor de $log_{a^2}\sqrt{108}$ si $log_a 2 = \frac{5}{2}$ y $log_a 3 = \frac{1}{3}$.

123. Sean $p(x)$: $2^x + (0.5)^{2x-3} - 6(0.5)^x = 1$ y $x \in \mathbb{R}$. Hallar $Ap(x)$.

124. A continuación se indican las reglas de correspondencia de varias funciones y un dominio posible. Una de las alternativas no es correcta, identifíquela:

a) $f(x)= ln(x-1)$; $dom\,f=(1,+\infty)$

b) $f(x)= \dfrac{1}{log_{x+1} 2}$; $dom\,f=(-1,0) \cup (0,+\infty)$

c) $f(x)= \dfrac{1}{|x|-x}$; $dom\,f=\mathbb{R}-\{0\}$

d) $f(x)= \dfrac{x^8-x^3+x-\sqrt{2}}{log(x^2+1)}$; $dom\,f=\mathbb{R}-\{0\}$

e) $f(x)= log([\mu(x)])$; $dom\,f=\mathbb{R}^+$

125. En el siguiente desarrollo de seis líneas, indicar claramente en cuál de ellas está el error y explique por qué.

(i) $5>3$

(ii) $5ln\left(\dfrac{1}{2}\right)>3ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

(iii) $ln\left(\dfrac{1}{2}\right)^5>ln\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

(iv) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5>\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

(v) $\dfrac{1}{32}>\dfrac{1}{8}$

(vi) $1 > 4$

126. Si f es una función de variable real biyectiva, tal que su regla de correspondencia es $f(x)=2e^{x-3}$; $x\in\mathbb{R}$, entonces la regla de correspondencia de la función inversa de f es:

a) $f^{-1}(x) = 2e^{x-3}$

b) $f^{-1}(x) =3+ln(\frac{x}{2})$

c) $f^{-1}(x) =ln(2x-3)$

d) $f^{-1}(x) =2ln(x-3)$

e) $f^{-1}(x) =2+ln(\frac{x}{3})$

127. Si f es una función inversible de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x)=\begin{cases} e^x;\ x>0 \\ 1-x^2;\ x\leq 0\end{cases}$, entonces la regla de correspondencia de la función $f^{-1}(x)$ es:

a) $\begin{cases} ln(x);\ \ x>0 \\ 1-x;\ \ x\leq 0\end{cases}$

b) $\begin{cases} ln(x);\ \ x>0 \\ -1-x;\ \ x\leq 0\end{cases}$

c) $\begin{cases} ln(x);\ \ 1<x \\ \sqrt{1-x};\ \ x\leq 1\end{cases}$

d) $\begin{cases} ln(x);\ \ x>1 \\ -\sqrt{1-x};\ \ x\leq 1\end{cases}$

e) $\begin{cases} ln(x);\ \ 1\leq x \\ \sqrt{1-x};\ \ x<1\end{cases}$

128. Con respecto a la función de variable real $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2; & x \geq 1 \\ ln(x); & x < 1 \end{cases}$, se puede afirmar que:

a) f es inyectiva.
b) f es creciente.
c) f no es sobreyectiva.
d) $\exists x \in \mathbb{R}, [f(-x) = f(x)]$
e) $rg\,f = (-\infty, 1)$

129. Grafique la función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} ln(x+1); & x \geq 0 \\ 1 - e^x; & x < 0 \end{cases}$$

130. Demuestre que:

$\forall$ M$\in \mathbb{R}^+$, $\forall$N$\in \mathbb{R}^+$, $\forall a \in \mathbb{R}^+-\{1\}$, $[log_a(MN)=log_a(M)+log_a(N)]$

131. Hallar el conjunto de verdad de los siguientes predicados. Considere $x \in \mathbb{R}$.

a) $p(x)$: $log(x+4) + log(2x+3) = log(1-2x)$

b) $p(x)$: $ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) + ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - ln(x^2-1) + 2 = 0$

c) $r(x)$: $(log_2 x)^2 = log_2 x^2$

d) $h(x)$: $log_3(x^2-3x-5) = log_3(7-2x)$

e) $m(x)$: $log_2(9^{x-1}+7) = 2 + log_2(3^{x-1}+1)$

f) $p(x)$: $log_5(5^{1/x} + 125) = log_5 6 + 1 + \dfrac{1}{2x}$

g) $q(x)$: $log^2 x + log x + 1 = \dfrac{7}{log\dfrac{x}{10}}$

h) $r(x)$: $log^2 x^3 - log(0.1x^{10}) = 0$

i) $m(x)$: $log_{0.5x} x^2 - 14 log_{16x} x^3 + 40 log_{4x} \sqrt{x} = 0$

132. Si se define el conjunto referencial $Re=\mathbb{R}$ y el predicado $p(x)$: $\log_{\frac{1}{4}} x - \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{4}} x} - \dfrac{3}{2} = 0$; entonces la suma de los elementos de $Ap(x)$ es:

a) $\dfrac{15}{8}$ b) $\dfrac{7}{16}$ c) $\dfrac{33}{16}$ d) $\dfrac{26}{32}$ e) 2

133. Si $f(x)=\begin{cases} 2^{(x-3)}, & x \leq 3 \\ \log_3(x-2), & x > 3 \end{cases}$ y $g(x)=1-2x$, $x \leq 0$, entonces la regla de correspondencia de la función $f o g$ es:

a) $2^{-2(x+1)}, x \leq 0$

b) $\begin{cases} 2^{-2(x+1)}, & -1 \leq x \leq 0 \\ \log_3(-1-2x), & x < -1 \end{cases}$

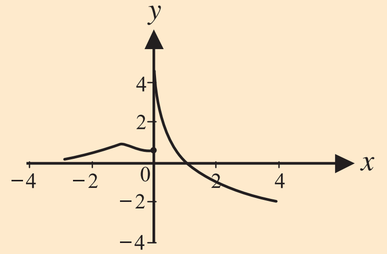
c) $\begin{cases} 2^{-2(x+1)}, & x \leq 3 \\ \log_3(-1-2x), & x < 3 \end{cases}$

d) $\log_3(-1-2x),\ x \leq 0$

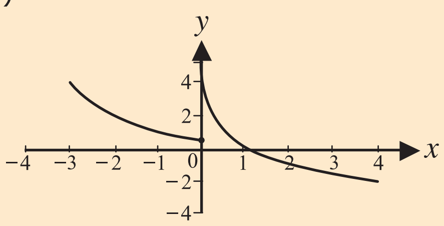
e) $\begin{cases} 2^{2(x+1)}, & -1 \leq x \leq 0 \\ \log_3(1-2x), & x < -1 \end{cases}$

134. Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que $f(x)=\begin{cases} 2^{-|x+1|}, & x \leq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}|x|, & x > 0 \end{cases}$, entonces la gráfica de f es:

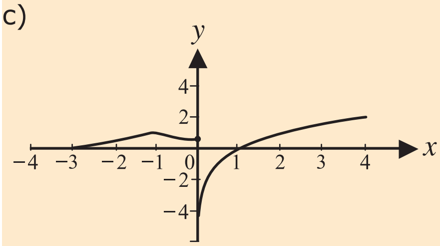
a)



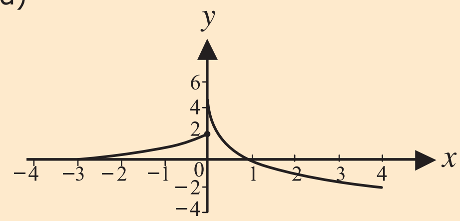
b)

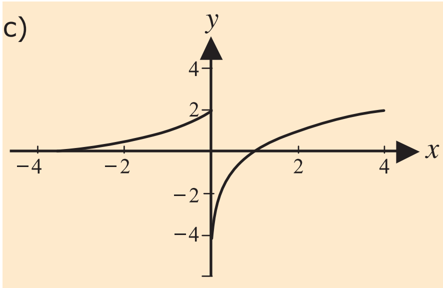


c)



d)





135. Dado $p(x)$: $sgn(ln||x|-1|)=-1$, sea $x \in \mathbb{R}$, entonces A$p(x)$ es:

a) $(-2, 2)$
b) $(0, +\infty)$
c) $\mathbb{R} - \{0\}$
d) $(0, 2)$
e) $(-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$

136. Si f: $\mathbb{R} \rightarrow (-3,+\infty)$ es una función con regla de correspondencia:

$$f(x)=\begin{cases} e^x+1 \; ; x \leq -1 \\ 2x \; ; x \in (-1,0) \\ ln(x+1) \; ; x \geq 0 \end{cases}$$

Hallar el valor de: $\dfrac{f(-2)-f(2)}{f^{-1}(-1)}$.

137. Hallar el conjunto solución de las siguientes desigualdades. Considere $x \in \mathbb{R}$.

a) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11}\right) \leq -1$

b) $\log_2 \dfrac{4}{x+3} > \log_2 (2-x)$

c) $\log_{0.2}(x^3+8) - 0.5\log_{0.2}(x^2+4x+4) \leq \log_{0.2}(x+58)$

d) $\log_{x-2}(2x-3) \geq \log_{x-2}(24-6x)$