

## 4.1 Ángulos y medidas

- Un ángulo es la unión de dos semirrectas de origen común.
  - Verdadero
  - Falso
- Un ángulo queda determinado de manera única por su vértice.
  - Verdadero
  - Falso
- Dos ángulos son adyacentes si son consecutivos y son suplementarios.
  - Verdadero
  - Falso
- Dos ángulos suplementarios son siempre agudos.
  - Verdadero
  - Falso
- Dos ángulos opuestos por el vértice siempre son complementarios.
  - Verdadero
  - Falso
- Transformar cada ángulo dado de grados a radianes.
  - $30^\circ$
  - $135^\circ$
  - $-120^\circ$
  - $450^\circ$
  - $-540^\circ$
  - $60^\circ$
- Transformar cada ángulo dado de radianes a grados.
  - $\pi/6$
  - $-5\pi/4$
  - $4\pi/3$
  - $\pi/2$
  - $\pi/12$
  - $4\pi$
- Complete la siguiente tabla:

Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$				
Grados sexagesimales				$60^\circ$			$135^\circ$	$112^\circ$	$150^\circ$	$15^\circ$

- El extremo del minutero de un reloj recorre  $\frac{7\pi}{10}$  cm en tres minutos. ¿Cuál es la longitud del minutero?
- Determine la medida del ángulo, en el cual la medida de su suplemento es 4 veces la medida de su complemento.
- Si la suma de las medidas de ocho ángulos congruentes es  $180^\circ$ . ¿Cuánto mide dicho ángulo en radianes?
- La medida del ángulo suplementario de  $x$  es igual a  $123^\circ$ . Hallar la medida del ángulo  $x$  y la medida de su ángulo complementario.

## 4.2 Funciones trigonométricas elementales

13. Calcule el valor de las expresiones siguientes y representélas como una fracción o radical simplificado:

a)  $\operatorname{sen}(30^\circ) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(-\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

d)  $\tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

b)  $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \left(-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \tan(330^\circ)$

e)  $\frac{\operatorname{sen}(120^\circ) + \cos(240^\circ)}{\tan(60^\circ) + \tan(330^\circ)}$

c)  $3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

f)  $\frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos^2(\pi)}{4\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

14. Hallar el valor de cada expresión dada:

a)  $\tan(\pi) + \operatorname{sen}(\pi)$

d)  $\frac{\operatorname{sen}(-40^\circ)}{\cos(50^\circ)}$

b)  $\frac{\operatorname{sen}(50^\circ)}{\cos(40^\circ)}$

e)  $6\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 2\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

c)  $3\operatorname{sen}(45^\circ) - 4\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

## 4.3 Gráficas de funciones trigonométricas

15. Parte de la gráfica de  $y = p + q\cos(x)$  aparece a continuación. La gráfica contiene los puntos  $(0,3)$  y  $(\pi,-1)$ . Determine cuál de los siguientes enunciados es verdadero:

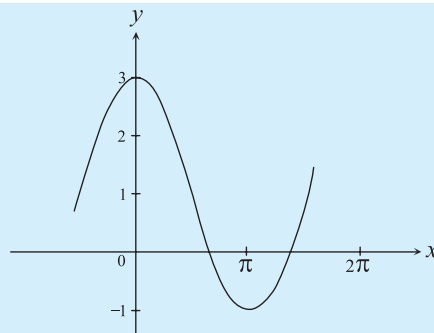
a)  $p^2 + q^2 = 9$

b)  $p^2 - q^2 = 3$

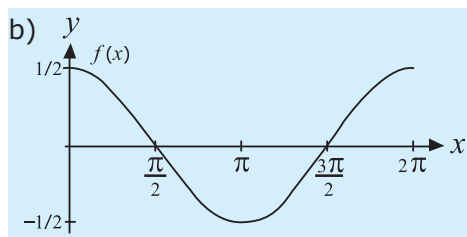
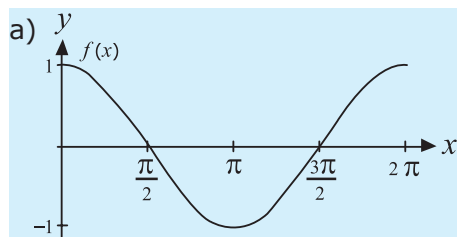
c)  $p^2 - q^2 = -9$

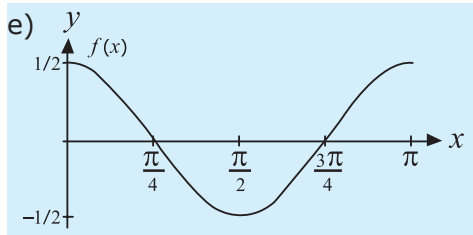
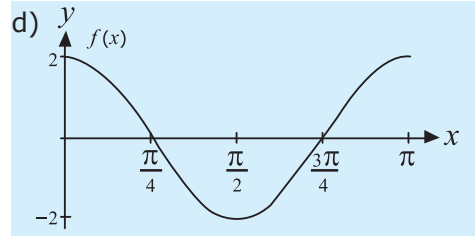
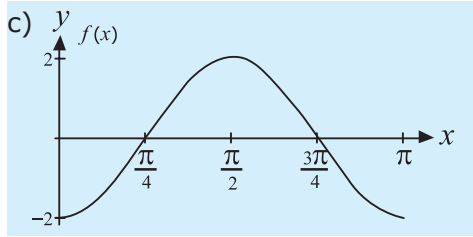
d)  $p + q = -3$

e)  $p^2 - q^2 = -3$

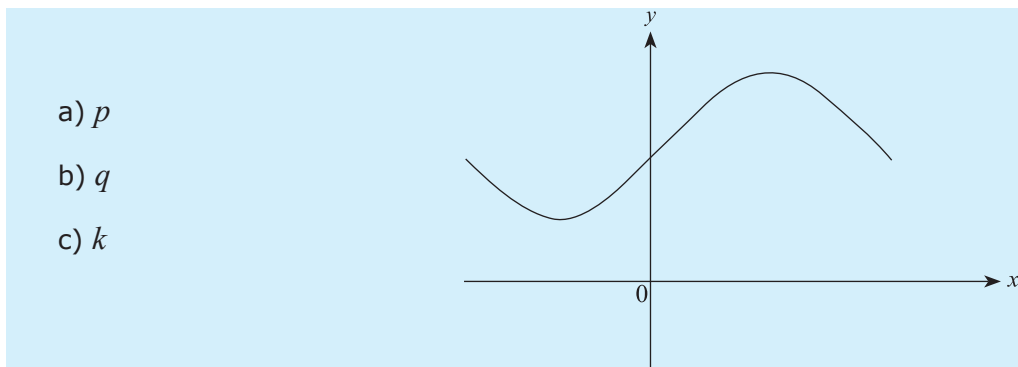


16. Si se tiene la función  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = 2^{-1}\cos(2x)$ , entonces su gráfica es:





17. El siguiente diagrama muestra parte de la gráfica de una curva senoidal  $f(x) = p + q\text{sen}(kx)$ . El período es  $4\pi$ , el valor mínimo es 3 y el valor máximo es 11 (esta gráfica no está a escala). Halle el valor de:



18. Graficar:

a)  $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

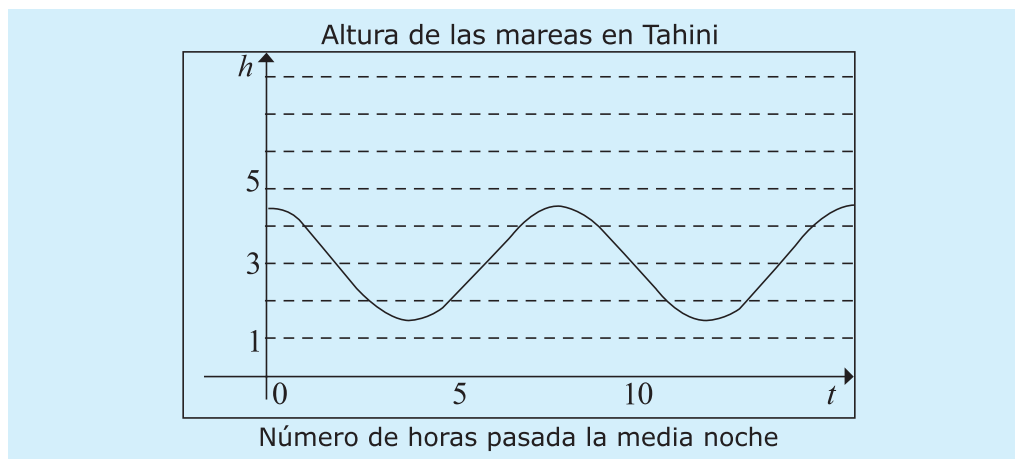
b)  $y = |\text{sen}(2x) - 1| - 1$

c)  $y = 1 - \tan(\pi - x)$

d)  $y = 0.5 - \llbracket \text{sen}(x/2) \rrbracket$

e)  $y = \text{sgn}(\cos(2x))$

19. La gráfica muestra la altura  $h$  de las mareas en metros, a las  $t$  horas pasadas la media noche en la isla de Tahini.



La altura  $h$  puede tener como modelo a la función  $h(t) = a \cos(bt) + 3$ .

- Use la gráfica anterior para hallar los valores de las constantes  $a$  y  $b$ .
- A partir del resultado anterior, calcule la altura de la marea a las 13:00.
- ¿A qué hora estará la marea en su mínimo durante el segundo período de 8 horas?

#### 4.4 Funciones trigonométricas inversas

20. Sea  $\alpha = \arccos(-1/2)$ ,  $\pi/2 < \alpha < \pi$  y  $\beta = \arcsen(-\sqrt{3}/2)$ ,  $3\pi/2 < \beta < 2\pi$ ; encuentre el valor de  $\sen(\alpha) + \tan(\beta)$ .

21. Encuentre el valor de  $\cos(x)$  si  $x = \arctan(4/7)$ ,  $x \in [\pi, 3\frac{\pi}{2}]$ .

22. Simplificar las siguientes expresiones:

- |                       |  |
|-----------------------|--|
| a) $\cos(\arcsen(x))$ | c) $\arccos\left[\cos\left(-\frac{17}{5}\pi\right)\right]$ |
| b) $\cos(\arctan(x))$ | d) $\sen\left[\arctan\left(-\frac{5}{3}\right)\right]$     |

#### 4.5 Identidades trigonométricas

23.  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,  $[\sen^{-1}(x+y) = \sen^{-1}(x) + \sen^{-1}(y)]$

- Verdadero
- Falso

24. El valor de la expresión  $8\cos(10^\circ)\cos(20^\circ)\cos(40^\circ)$  es:

- a)  $8\cos(70^\circ)$     b) 1    c)  $\tan(10^\circ)$     d)  $\cot(10^\circ)$     e) 8

25. El valor de  $\cos(\pi/12)$  es:

- a)  $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$     b)  $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$     c)  $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$     d)  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$     e)  $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

26. Si  $\pi/2 < x < \pi$  y  $\text{sen}(x) = 5/13$ , entonces el valor de  $\cos(x+\pi/3)$  es:

- a)  $-\frac{12+5\sqrt{3}}{26}$     b)  $\frac{5\sqrt{3}+7}{74}$     c)  $\frac{3\sqrt{3}-1}{74}$     d)  $\frac{3-7\sqrt{3}}{26}$     e)  $\frac{5-7\sqrt{3}}{\sqrt{74}}$

27. Si  $\pi/2 < x < \pi$  y  $\text{sen}(x) = 5/13$ , entonces el valor de  $\text{sen}(2x)$ , es:

- a)  $-10/13$     b)  $12/13$     c)  $-12/13$     d)  $120/169$     e)  $-120/169$

28. La expresión:  $\sqrt{\frac{2\sec(3x)}{1+\sec(3x)}}$ , es equivalente a:

- a)  $\sec(3x)$     b)  $\sec(2x)$     c)  $-1$     d)  $\cos(3x/2)$     e)  $\sec(3x/2)$

29. La expresión que no representa una identidad trigonométrica es:

- a)  $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\text{sen}(x)$     d)  $\text{sen}^2(2x) + \cos^2(2x) = 2$   
b)  $\cos(4x) = \cos^2(2x) - \text{sen}^2(2x)$     e)  $\tan(2x) = \frac{\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$   
c)  $\tan(x)\cos(x) = \frac{1}{\csc(x)}$

30. Hallar el valor de:  $\tan(19\pi/12)$ .

31. Hallar  $(g \circ f)(x)$  si  $f$  y  $g$  están definidas por las siguientes reglas de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & ; x \geq 0 \\ \ln(-x) & ; x < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x & ; |x| \leq 1 \\ e^x & ; |x| > 1 \end{cases}$$

32. Si  $\tan(25^\circ) = a$ , representar en términos de  $a$  la siguiente expresión:

$$\frac{\tan(205^\circ) - \tan(115^\circ)}{\tan(245^\circ) + \tan(335^\circ)}$$

33. Simplificar y hallar el valor de las siguientes expresiones:

- a)  $\frac{1}{2\operatorname{sen}(10^\circ)} - 2\operatorname{sen}(70^\circ)$   
 b)  $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$   
 c)  $\tan(55^\circ) - \tan(35^\circ)$   
 d)  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$   
 e)  $\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\tan\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\pi - \alpha)\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)} - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(2\pi - \beta)\tan(\pi - \alpha)}$   
 f)  $\cos\left(\frac{\pi}{65}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{65}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{65}\right)\cos\left(\frac{8\pi}{65}\right)\cos\left(\frac{16\pi}{65}\right)\cos\left(\frac{32\pi}{65}\right)$

34. Demuestre:

$$\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

35. Demuestre:

- a)  $\frac{\operatorname{sen}^3(\alpha - 270^\circ)\cos(360^\circ - \alpha)}{\tan^3\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\cos^3\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)} = \cos(\alpha)$   
 b)  $\frac{\cos^2(\alpha)}{\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\alpha)$   
 c)  $\frac{\tan^2(2x) - \tan^2(x)}{1 - \tan^2(2x)\tan^2(x)} = \tan(3x)\tan(x)$   
 d)  $\operatorname{sen}(\omega)\operatorname{sen}(60^\circ - \omega)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \omega\right) = \operatorname{sen}(3\omega)$   
 e)  $\operatorname{sen}(47^\circ) + \operatorname{sen}(61^\circ) - \operatorname{sen}(11^\circ) - \operatorname{sen}(25^\circ) = \cos(7^\circ)$   
 f)  $\frac{1 + \operatorname{sen}(\beta) + \cos(\beta)}{1 + \operatorname{sen}(\beta) - \cos(\beta)} = \frac{1 + \cos(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta)}$

36. Una de las siguientes expresiones no constituye una identidad trigonométrica, identifíquela:

- a)  $\operatorname{sen}^2(\theta)(1 + \cot^2(\theta)) = 1$       c)  $\operatorname{sen}(\theta)(\cot(\theta) + \tan(\theta)) = \sec(\theta)$   
 b)  $1 - \csc^2(\theta) = -\cot^2(\theta)$       d)  $(1 - \operatorname{sen}^2(\theta))(1 + \tan^2(\theta)) = -1$

37. Si  $\pi < \alpha < 3\pi/2$  y  $\text{sen}(\alpha) = -3/5$ , hallar el valor de  $\tan(2\alpha)$ .
38. Si  $\tan(\alpha) = 1/7$ ;  $\text{sen}(\beta) = 1/\sqrt{10}$ ;  $\alpha \in (0, \pi/2)$  y  $\beta \in (0, \pi/2)$ , determine  $\text{sen}(\alpha + 2\beta)$ .
39. Si  $f(x) = 2\tan(x/2)$ ;  $x \in [0, \pi/2]$ , hallar el valor de  $f(2\pi/3) - f(\pi/2)$ .
40. Si  $\text{sen}(x) = -12/13$ ;  $3\pi/2 \leq x \leq 2\pi$ , hallar el valor de  $\cos(x + \pi/3)$ .
41. Encuentre una expresión para  $\tan(3\alpha)$  en términos de  $\tan(\alpha)$ .
42. Si  $\tan(\alpha) = -7/24$  y  $\cot(\beta) = 3/4$ ,  $\pi/2 < \alpha < \pi$ ,  $\pi < \beta < 3\pi/2$ , encuentre el valor de  $\cos(\alpha + \beta)$ .
43. Demostrar las siguientes identidades trigonométricas:

$$\text{a) } \frac{(2\text{sen}^2(\theta) - 1)^2}{\text{sen}^4(\theta) - \cos^4(\theta)} = 1 - 2\cos^2(\theta)$$

$$\text{b) } \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)} + \frac{1}{2\cos^2(x) - 1} = \frac{\cos(x) + \text{sen}(x)}{\cos(x) - \text{sen}(x)}$$

$$\text{c) } \tan(\alpha) + \frac{1}{\cos^3(\alpha)} - \frac{1}{\sec(\alpha) - \tan(\alpha)} = \frac{\text{sen}^2(\alpha)}{\cos^3(\alpha)}$$

$$\text{d) } \frac{3\cos^2(z) + 5\text{sen}(z) - 5}{\cos^2(z)} = \frac{3\text{sen}(z) - 2}{1 + \text{sen}(z)}$$

$$\text{e) } \frac{2\text{sen}^2(\omega) + 3\cos(\omega) - 3}{\text{sen}^2(\omega)} = \frac{2\cos(\omega) - 1}{1 + \cos(\omega)}$$

$$\text{f) } \frac{\text{sen}^2(t) + 4\text{sen}(t) + 3}{\cos^2(t)} = \frac{3 + \text{sen}(t)}{1 - \text{sen}(t)}$$

$$\text{g) } \sec(y) - \frac{\cos(y)}{1 + \text{sen}(y)} = \tan(y)$$

44. Dado que  $\text{sen}(x) = \frac{1}{3}$ , donde  $x$  es un ángulo agudo, halle el valor de:

a)  $\cos(x)$

b)  $\cos(2x)$

c)  $\text{sen}(2x)$

## 4.6 Ecuaciones e inecuaciones trigonométricas

45. Sea  $p(x): 2\text{sen}^2(x) - 7\text{sen}(x) + 3 = 0$  y  $x \in [0, \pi]$ , la suma de los elementos de  $Ap(x)$  es:

- a)  $\pi$       b)  $\pi/3$       c)  $5\pi/3$       d)  $7\pi/6$       e)  $2\pi$

46. Sea  $p(x): \text{sen}(x) > \frac{1}{2}$ ,  $x \in (0, 2\pi)$ , hallar  $Ap(x)$ .

47. Sea  $q(x): \text{cos}(x) < \frac{1}{3}$ ,  $x \in (0, 2\pi)$ , hallar  $Aq(x)$ .

48. La función  $f$  de dominio  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  se define como  $f(x) = \text{cos}(x) + \sqrt{3} \text{sen}(x)$ .

Esta función puede también expresarse de la forma  $f(x) = R\text{cos}(x - \alpha)$ , donde  $R > 0$  y  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

- a) Halle el valor de  $R$  y la medida del ángulo  $\alpha$ .  
b) Halle el rango de  $f$ .  
c) Es inversible  $f$ , ¿por qué?  
d) Halle el valor de  $x$  que satisface la ecuación  $f(x) = \sqrt{2}$ .

49. Considere el predicado  $p(x): 2\text{sen}^2(x) = 1 - \text{cos}(x)$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ . La suma de los elementos de  $Ap(x)$  es:

- a)  $\frac{8\pi}{3}$       b)  $3\pi$       c)  $\frac{4\pi}{3}$       d)  $4\pi$       e)  $\frac{7\pi}{3}$

50. Resuelva la ecuación  $2\text{cos}^2(x) = \text{sen}(2x)$ , siendo  $0 \leq x \leq \pi$ .