

4.1 Ángulos y medidas

- Un ángulo es la unión de dos semirrectas de origen común.
 - Verdadero
 - Falso
- Un ángulo queda determinado de manera única por su vértice.
 - Verdadero
 - Falso
- Dos ángulos son adyacentes si son consecutivos y son suplementarios.
 - Verdadero
 - Falso
- Dos ángulos suplementarios son siempre agudos.
 - Verdadero
 - Falso
- Dos ángulos opuestos por el vértice siempre son complementarios.
 - Verdadero
 - Falso
- Transformar cada ángulo dado de grados a radianes.
 - 30°
 - 135°
 - -120°
 - 450°
 - -540°
 - 60°
- Transformar cada ángulo dado de radianes a grados.
 - $\pi/6$
 - $-5\pi/4$
 - $4\pi/3$
 - $\pi/2$
 - $\pi/12$
 - 4π
- Complete la siguiente tabla:

Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$				
Grados sexagesimales				60°			135°	112°	150°	15°

- El extremo del minutero de un reloj recorre $\frac{7\pi}{10}$ cm en tres minutos. ¿Cuál es la longitud del minutero?
- Determine la medida del ángulo, en el cual la medida de su suplemento es 4 veces la medida de su complemento.
- Si la suma de las medidas de ocho ángulos congruentes es 180° . ¿Cuánto mide dicho ángulo en radianes?
- La medida del ángulo suplementario de x es igual a 123° . Hallar la medida del ángulo x y la medida de su ángulo complementario.

4.2 Funciones trigonométricas elementales

13. Calcule el valor de las expresiones siguientes y representélas como una fracción o radical simplificado:

- a) $\operatorname{sen}(30^\circ) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(-\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
- b) $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \left(-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \tan(330^\circ)$
- c) $3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$
- d) $\tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
- e) $\frac{\operatorname{sen}(120^\circ) + \cos(240^\circ)}{\tan(60^\circ) + \tan(330^\circ)}$
- f) $\frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos^2(\pi)}{4\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

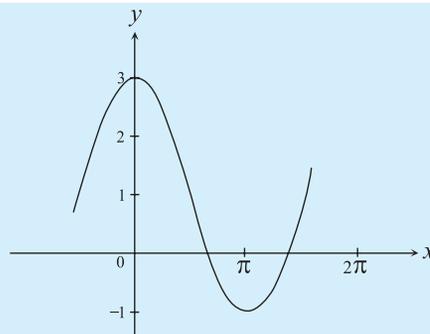
14. Hallar el valor de cada expresión dada:

- a) $\tan(\pi) + \operatorname{sen}(\pi)$
- b) $\frac{\operatorname{sen}(50^\circ)}{\cos(40^\circ)}$
- c) $3\operatorname{sen}(45^\circ) - 4\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$
- d) $\frac{\operatorname{sen}(-40^\circ)}{\cos(50^\circ)}$
- e) $6\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 2\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

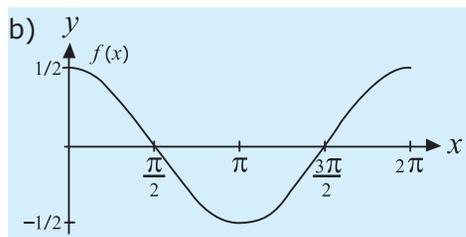
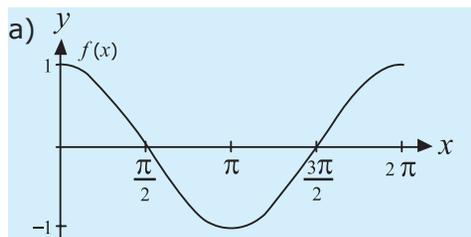
4.3 Gráficas de funciones trigonométricas

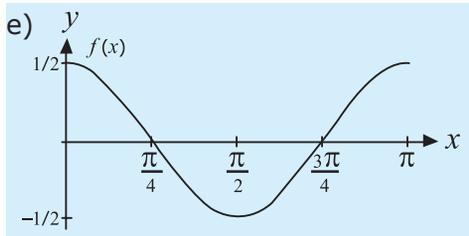
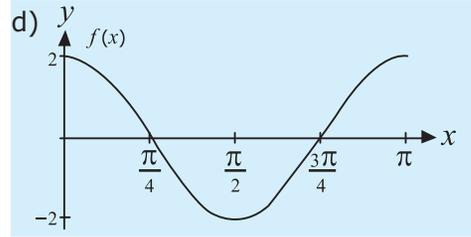
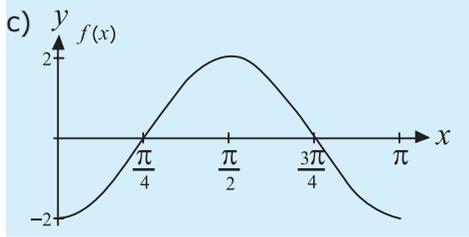
15. Parte de la gráfica de $y = p + q\cos(x)$ aparece a continuación. La gráfica contiene los puntos $(0,3)$ y $(\pi,-1)$. Determine cuál de los siguientes enunciados es verdadero:

- a) $p^2 + q^2 = 9$
- b) $p^2 - q^2 = 3$
- c) $p^2 - q^2 = -9$
- d) $p + q = -3$
- e) $p^2 - q^2 = -3$

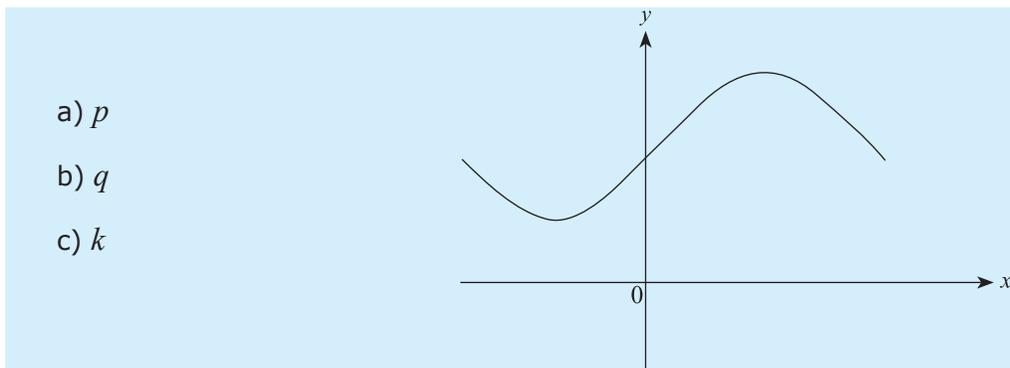


16. Si se tiene la función $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2^{-1}\cos(2x)$, entonces su gráfica es:





17. El siguiente diagrama muestra parte de la gráfica de una curva senoidal $f(x) = p + q\text{sen}(kx)$. El período es 4π , el valor mínimo es 3 y el valor máximo es 11 (esta gráfica no está a escala). Halle el valor de:



18. Graficar:

a) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

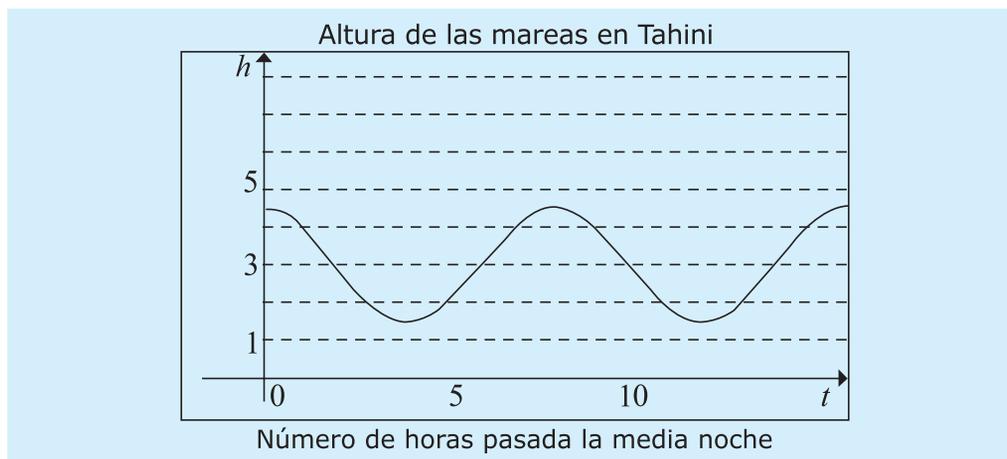
b) $y = |\text{sen}(2x) - 1| - 1$

c) $y = 1 - \tan(\pi - x)$

d) $y = 0.5 - \llbracket \text{sen}(x/2) \rrbracket$

e) $y = \text{sgn}(\cos(2x))$

19. La gráfica muestra la altura h de las mareas en metros, a las t horas pasadas la media noche en la isla de Tahini.



La altura h puede tener como modelo a la función $h(t) = a\cos(bt) + 3$.

- Use la gráfica anterior para hallar los valores de las constantes a y b .
- A partir del resultado anterior, calcule la altura de la marea a las 13:00.
- ¿A qué hora estará la marea en su mínimo durante el segundo período de 8 horas?

4.4 Funciones trigonométricas inversas

20. Sea $\alpha = \arccos(-1/2)$, $\pi/2 < \alpha < \pi$ y $\beta = \arcsen(-\sqrt{3}/2)$, $3\pi/2 < \beta < 2\pi$; encuentre el valor de $\sen(\alpha) + \tan(\beta)$.

21. Encuentre el valor de $\cos(x)$ si $x = \arctan(4/7)$, $x \in [\pi, 3\pi/2]$.

22. Simplificar las siguientes expresiones:

- | | |
|-----------------------|--|
| a) $\cos(\arcsen(x))$ | c) $\arccos\left[\cos\left(-\frac{17}{5}\pi\right)\right]$ |
| b) $\cos(\arctan(x))$ | d) $\sen\left[\arctan\left(-\frac{5}{3}\right)\right]$ |

4.5 Identidades trigonométricas

23. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $[\sen^{-1}(x+y) = \sen^{-1}(x) + \sen^{-1}(y)]$

- Verdadero
- Falso

24. El valor de la expresión $8\cos(10^\circ)\cos(20^\circ)\cos(40^\circ)$ es:

- a) $8\cos(70^\circ)$ b) 1 c) $\tan(10^\circ)$ d) $\cot(10^\circ)$ e) 8

25. El valor de $\cos(\pi/12)$ es:

- a) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ d) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

26. Si $\pi/2 < x < \pi$ y $\text{sen}(x) = 5/13$, entonces el valor de $\cos(x+\pi/3)$ es:

- a) $-\frac{12+5\sqrt{3}}{26}$ b) $\frac{5\sqrt{3}+7}{74}$ c) $\frac{3\sqrt{3}-1}{74}$ d) $\frac{3-7\sqrt{3}}{26}$ e) $\frac{5-7\sqrt{3}}{\sqrt{74}}$

27. Si $\pi/2 < x < \pi$ y $\text{sen}(x) = 5/13$, entonces el valor de $\text{sen}(2x)$, es:

- a) $-10/13$ b) $12/13$ c) $-12/13$ d) $120/169$ e) $-120/169$

28. La expresión: $\sqrt{\frac{2\sec(3x)}{1+\sec(3x)}}$, es equivalente a:

- a) $\sec(3x)$ b) $\sec(2x)$ c) -1 d) $\cos(3x/2)$ e) $\sec(3x/2)$

29. La expresión que no representa una identidad trigonométrica es:

- a) $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\text{sen}(x)$ d) $\text{sen}^2(2x) + \cos^2(2x) = 2$
b) $\cos(4x) = \cos^2(2x) - \text{sen}^2(2x)$ e) $\tan(2x) = \frac{\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$
c) $\tan(x)\cos(x) = \frac{1}{\csc(x)}$

30. Hallar el valor de: $\tan(19\pi/12)$.

31. Hallar $(g \circ f)(x)$ si f y g están definidas por las siguientes reglas de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & ; x \geq 0 \\ \ln(-x) & ; x < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x & ; |x| \leq 1 \\ e^x & ; |x| > 1 \end{cases}$$

32. Si $\tan(25^\circ) = a$, representar en términos de a la siguiente expresión:

$$\frac{\tan(205^\circ) - \tan(115^\circ)}{\tan(245^\circ) + \tan(335^\circ)}$$

33. Simplificar y hallar el valor de las siguientes expresiones:

- a) $\frac{1}{2\operatorname{sen}(10^\circ)} - 2\operatorname{sen}(70^\circ)$
 b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
 c) $\tan(55^\circ) - \tan(35^\circ)$
 d) $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$
 e) $\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\tan\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\pi - \alpha)\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)} - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(2\pi - \beta)\tan(\pi - \alpha)}$
 f) $\cos\left(\frac{\pi}{65}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{65}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{65}\right)\cos\left(\frac{8\pi}{65}\right)\cos\left(\frac{16\pi}{65}\right)\cos\left(\frac{32\pi}{65}\right)$

34. Demuestre:

$$\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

35. Demuestre:

- a) $\frac{\operatorname{sen}^3(\alpha - 270^\circ)\cos(360^\circ - \alpha)}{\tan^3\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\cos^3\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)} = \cos(\alpha)$
 b) $\frac{\cos^2(\alpha)}{\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\alpha)$
 c) $\frac{\tan^2(2x) - \tan^2(x)}{1 - \tan^2(2x)\tan^2(x)} = \tan(3x)\tan(x)$
 d) $\operatorname{sen}(\omega)\operatorname{sen}(60^\circ - \omega)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \omega\right) = \operatorname{sen}(3\omega)$
 e) $\operatorname{sen}(47^\circ) + \operatorname{sen}(61^\circ) - \operatorname{sen}(11^\circ) - \operatorname{sen}(25^\circ) = \cos(7^\circ)$
 f) $\frac{1 + \operatorname{sen}(\beta) + \cos(\beta)}{1 + \operatorname{sen}(\beta) - \cos(\beta)} = \frac{1 + \cos(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta)}$

36. Una de las siguientes expresiones no constituye una identidad trigonométrica, identifíquela:

- a) $\operatorname{sen}^2(\theta)(1 + \cot^2(\theta)) = 1$ c) $\operatorname{sen}(\theta)(\cot(\theta) + \tan(\theta)) = \sec(\theta)$
 b) $1 - \csc^2(\theta) = -\cot^2(\theta)$ d) $(1 - \operatorname{sen}^2(\theta))(1 + \tan^2(\theta)) = -1$

37. Si $\pi < \alpha < 3\pi/2$ y $\text{sen}(\alpha) = -3/5$, hallar el valor de $\tan(2\alpha)$.
38. Si $\tan(\alpha) = 1/7$; $\text{sen}(\beta) = 1/\sqrt{10}$; $\alpha \in (0, \pi/2)$ y $\beta \in (0, \pi/2)$, determine $\text{sen}(\alpha + 2\beta)$.
39. Si $f(x) = 2\tan(x/2)$; $x \in [0, \pi/2]$, hallar el valor de $f(2\pi/3) - f(\pi/2)$.
40. Si $\text{sen}(x) = -12/13$; $3\pi/2 \leq x \leq 2\pi$, hallar el valor de $\cos(x + \pi/3)$.
41. Encuentre una expresión para $\tan(3\alpha)$ en términos de $\tan(\alpha)$.
42. Si $\tan(\alpha) = -7/24$ y $\cot(\beta) = 3/4$, $\pi/2 < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < 3\pi/2$, encuentre el valor de $\cos(\alpha + \beta)$.
43. Demostrar las siguientes identidades trigonométricas:

$$\text{a) } \frac{(2\text{sen}^2(\theta) - 1)^2}{\text{sen}^4(\theta) - \cos^4(\theta)} = 1 - 2\cos^2(\theta)$$

$$\text{b) } \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)} + \frac{1}{2\cos^2(x) - 1} = \frac{\cos(x) + \text{sen}(x)}{\cos(x) - \text{sen}(x)}$$

$$\text{c) } \tan(\alpha) + \frac{1}{\cos^3(\alpha)} - \frac{1}{\sec(\alpha) - \tan(\alpha)} = \frac{\text{sen}^2(\alpha)}{\cos^3(\alpha)}$$

$$\text{d) } \frac{3\cos^2(z) + 5\text{sen}(z) - 5}{\cos^2(z)} = \frac{3\text{sen}(z) - 2}{1 + \text{sen}(z)}$$

$$\text{e) } \frac{2\text{sen}^2(\omega) + 3\cos(\omega) - 3}{\text{sen}^2(\omega)} = \frac{2\cos(\omega) - 1}{1 + \cos(\omega)}$$

$$\text{f) } \frac{\text{sen}^2(t) + 4\text{sen}(t) + 3}{\cos^2(t)} = \frac{3 + \text{sen}(t)}{1 - \text{sen}(t)}$$

$$\text{g) } \sec(y) - \frac{\cos(y)}{1 + \text{sen}(y)} = \tan(y)$$

44. Dado que $\text{sen}(x) = \frac{1}{3}$, donde x es un ángulo agudo, halle el valor de:

a) $\cos(x)$

b) $\cos(2x)$

c) $\text{sen}(2x)$

4.6 Ecuaciones e inecuaciones trigonométricas

45. Sea $p(x): 2\text{sen}^2(x) - 7\text{sen}(x) + 3 = 0$ y $x \in [0, \pi]$, la suma de los elementos de $Ap(x)$ es:

- a) π b) $\pi/3$ c) $5\pi/3$ d) $7\pi/6$ e) 2π

46. Sea $p(x): \text{sen}(x) > \frac{1}{2}$, $x \in (0, 2\pi)$, hallar $Ap(x)$.

47. Sea $q(x): \text{cos}(x) < \frac{1}{3}$, $x \in (0, 2\pi)$, hallar $Aq(x)$.

48. La función f de dominio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se define como $f(x) = \text{cos}(x) + \sqrt{3} \text{sen}(x)$.

Esta función puede también expresarse de la forma $f(x) = R\text{cos}(x - \alpha)$, donde $R > 0$ y $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

- a) Halle el valor de R y la medida del ángulo α .
b) Halle el rango de f .
c) Es inversible f , ¿por qué?
d) Halle el valor de x que satisface la ecuación $f(x) = \sqrt{2}$.

49. Considere el predicado $p(x): 2\text{sen}^2(x) = 1 - \text{cos}(x)$, $x \in [0, 2\pi]$. La suma de los elementos de $Ap(x)$ es:

- a) $\frac{8\pi}{3}$ b) 3π c) $\frac{4\pi}{3}$ d) 4π e) $\frac{7\pi}{3}$

50. Resuelva la ecuación $2\text{cos}^2(x) = \text{sen}(2x)$, siendo $0 \leq x \leq \pi$.