

7. Encuentre la matriz "X" en las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $A^3 - 3B^2 + 10I$.

b) Verifique que $(AB)^T = B^T A^T$.

c) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, verifique que $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

9. Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si y solo si $A^{-1} = A^T$.

Sea $A = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}$. Demuestre que A es ortogonal.

10. Las matrices A , B y X están dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ donde } a, b, c, d \in \mathbb{Q}.$$

Suponiendo que: $AX + X = B$, encuentre los valores de a, b, c y d .

11. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Demostrar que:

Si $AB=BC$, no necesariamente $B=C$.

12. Sea $M = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es elemento de los números enteros.

(i) Exprese M^2 en función de a .

(ii) Si M^2 es igual a $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, encontrar el valor de a .

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; $B = (5 \quad 1 \quad 0 \quad -3)$; $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{pmatrix}$. Halle:

- a) AD b) $A^T C^T$ c) CD d) $C^T B^T$

14. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, compruebe que $(BA)^T = A^T B^T$.

15. Encontrar todas las matrices diagonales de orden dos que coinciden con su inversa.

16. Una matriz cuadrada A tiene la propiedad de que $A^2 = 2A + I$, donde I es la matriz identidad. Demuestre que A tiene inversa y obtenerla en función de A .

17. Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1+m & 0 \\ 0 & 1-m \end{pmatrix}$, encuentre los valores de m , tales que $B^2 = 2B + I$, y para estos valores halle la inversa de B .

18. Se dice que dos matrices cuadradas A y B de orden $n \times n$ son semejantes, si existe una matriz inversible P , tal que $B = P^{-1}AP$. Determine si son semejante las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.2 Determinantes

19. Hallar los valores de x elemento de los reales para que la matriz A sea singular.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & |x-2| \\ 1 & |x| \end{pmatrix}$$

20. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -8 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Determinar:

- a) A^{-1}
 b) AB^{-1}
 c) $\det(AB - 2C^T)$
 d) $\det(A) + \det(B) - \det(C)$
 e) $B^{-1}C^{-1}$

21. Determinar el valor de k para que la matriz AB sea triangular superior, donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ k & -k & 3 \\ -\frac{k^2}{2} & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 1 \\ -k & -\frac{k^3}{3} & k^5 \\ -1 & -2k & 3 \end{pmatrix}$$

22. Para las siguientes matrices, considere $\text{Re} = \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & 1/x \end{pmatrix} & \text{b)} \begin{pmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^{2x} & e^{3x} \end{pmatrix} \\ \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & e^x & 0 \\ e^x & -e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{d)} \begin{pmatrix} \text{sen}(x) & \text{cos}(x) \\ -\text{cos}(x) & \text{sen}(x) \end{pmatrix} \end{array}$$

Encuentre los valores de x , tales que las matrices dadas no sean inversibles.

23. Para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Hallar el determinante de A y B .
 b) Hallar AB y BA . ¿Son iguales? Que podría decir acerca de AB .
 c) Hallar CD y DC . ¿Son iguales? Notar que C y D no son nulas.
- 24) Si $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -7 & -6 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, determine $a+b+c$.

25. Sabiendo que: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la suma de los valores de λ para los cuales $(A - \lambda I)$ es una matriz singular, es:

- a) 6 b) 1 c) 7 d) 5 e) -5

26. El valor de: $\begin{vmatrix} \log_2(8) & \log_2(4) & -1 \\ \log_3(81) & 3 & -1 \\ \log_2(1/2) & 2 & -4 \end{vmatrix}$ es:

- a) 2 b) -1 c) 1 d) -2 e) -7

27. Sean $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$. Sabiendo que $XA+B=C$,

el $\det(X)$ es:

- a) 14 b) -14 c) 19 d) -10 e) 0

28. Si $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x): \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8x & 2 \\ -1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & x \end{vmatrix} = 0$, entonces la suma de los elementos de $Ap(x)$ es:

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{5}{7}$ e) $\frac{2}{3}$

29. Dadas las matrices A y B , tales que:

$$A = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sec\left(\frac{\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \cos(2\pi) & \sin(\pi) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ -\cos(\pi) & \sin(2\pi) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \log(1) & \log_2\left(\frac{1}{4}\right) & 0 \\ \log_2\left(\frac{1}{4}\right) & \log_3(9) & 0 \\ \log_3(9) & \ln(e) & \ln(e) \end{pmatrix}.$$

El $\det\left(A^T + \frac{1}{2}B\right)$ es:

- a) 0 b) 1 c) 2 d) -1 e) -2

30. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} m & h & g \\ f & e & d \\ c & b & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2m \end{pmatrix}$, tal que

$\det(A)=10$, es verdad que:

- a) $\det(B) = -5$ c) $\det(A) \cdot \det(B) = 25$
 b) $\det(B) = -20$ d) $\frac{\det(A)}{\det(B)} = \frac{1}{2}$

31. Si el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ es n , encuentre el

determinante de las siguientes matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}$$

32. Sea $x \in \mathbb{R}$, encuentre $\Delta p(x)$ si $p(x): \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = 0$.

33. Considere la función: $f(x) = \begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$.

Sabiendo que: $f(0) = -3$ y $f(1) = f(-1)$, determine a y b .

34. Una de las siguientes proposiciones es falsa, identifíquela:

a) $\forall a, b, c, d, k \in \mathbb{R}; \begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

b) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}$

c) $\forall a, b, c, d, k \in \mathbb{R} \begin{vmatrix} k^2 a & kb \\ k^2 c & kd \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

d) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

e) $\forall a, b, c, d, k \in \mathbb{R} \begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

35. Sean $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Encuentre:

a) $\det(A)$

b) $\det(B)$

c) AB

d) BA

e) Verificar que $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$; $\det(BA) = \det(B) \cdot \det(A)$.

36. Hallar $\alpha \in \mathbb{R}$, de modo que $\det(A) = 1$, para $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ 1 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

37. Demostrar que: $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$.

38. Usando las propiedades de los determinantes, demuestre las igualdades

siguientes, si se tiene que: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$.

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = 6$ b) $\begin{vmatrix} c & b & -a \\ f & e & -d \\ g & h & -g \end{vmatrix} = 3$ c) $\begin{vmatrix} a-4c & b & c \\ d-4f & e & f \\ g-4i & h & i \end{vmatrix} = 3$

39. El valor del determinante $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(x) & \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ \cos(x) - \operatorname{sen}(x) & -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \\ 1 + \cos(x) + \operatorname{sen}(x) & \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \end{vmatrix}$ es:

- a) 1
- b) -1
- c) $1 + \cos(x)$
- d) $\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$
- e) $\cos^2(x) - \operatorname{sen}(x)$

40. Demostrar que: $\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{sen}(a) & \cos(a) \\ 1 & \operatorname{sen}(b) & \cos(b) \\ 1 & \operatorname{sen}(c) & \cos(c) \end{vmatrix} = \operatorname{sen}(b-c) + \operatorname{sen}(c-a) + \operatorname{sen}(a-c)$.

41. Factorizar las siguientes expresiones de x :

a) $\begin{vmatrix} x+4 & x+14 \\ x & 2x+1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 9 \\ x+1 & x & 2 \\ x+2 & x+1 & x-1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ x & -4 & 4 \\ 3 & x & 6 \end{vmatrix}$

42. Hallar $Ap(x)$. Considere $\operatorname{Re} = [0, \pi]$ y el predicado:

$$p(x) : \begin{vmatrix} 2\operatorname{sen}^2(2x) & 2\cos(x) \\ 3\operatorname{sen}(x) & 1 \end{vmatrix} = -1$$

43. Demostrar: $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix} = (y-z)(x-y)(x-z)$.

44. Si se conoce que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, encuentre el valor de $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 3+2y \\ 1+x & 1+y & z+1 \end{vmatrix}$.

45. Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 5$, hallar el valor de $\begin{vmatrix} -a_{31} & -2a_{32} & -a_{33} \\ 3a_{21} & 6a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$.

46. El determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1+b_2 \\ c_1 & d_1+d_2 \end{vmatrix}$ es equivalente a:

- a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} c_1 & d_1+d_2 \\ a_1 & b_1+b_2 \end{vmatrix}$
- d) $\begin{vmatrix} 1 & a_1+b_1+b_2 \\ 1 & c_1+d_1+d_2 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & c_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}$

5.3 Sistemas de ecuaciones lineales

47. Considere el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2y+z=k \\ 2x+y+4z=6; \text{ donde } k \text{ es una constante real.} \\ x-4y+5z=9 \end{cases}$$

- a) Demuestre que el sistema no tiene solución única.
 b) Halle el valor de k para que el sistema sea consistente.
 c) Halle la solución general del sistema para el valor de k obtenido.

48. Considere la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) Calcule la inversa de A .
 b) Calcule la inversa de A^T y la de A^{-1} .
 c) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$A^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

49. Encuentre dos matrices, A y B , de orden 3×3 con coeficientes reales, tales que satisfagan las dos igualdades siguientes:

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

50. Considere el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$.

- Calcule los valores de α y β , sabiendo que el par ordenado $P(2, -1)$ satisface la primera ecuación y el par ordenado $Q(2, 0)$ satisface la segunda.
- Si sustituimos estos valores de α y β calculados, ¿el sistema tiene solución única? ¿Por qué?

51. Considere la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & t & t \\ -1 & t & -1 \end{pmatrix}$.

- Hallar los valores de t para que esta matriz no sea inversible.
- Calcule su inversa para el valor o valores de t , tales que el determinante de la matriz es 1.

52. Considere la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

- Halle los valores de λ para los que la matriz A no tiene inversa.
- Tomando $\lambda = 1$, resuelva el siguiente sistema escrito en forma matricial:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

53. Resolver el sistema de ecuaciones matriciales:

$$3X - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix}; \quad X + 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix}$$

54. Dado el sistema:
$$\begin{cases} x - 3z = 1 \\ 2x - 6z = 3 \\ y + z = 2 \end{cases}$$
, entonces es verdad que:

- a) El sistema es consistente.
- b) El sistema tiene solución única.
- c) El sistema tiene infinitas soluciones.
- d) No se puede evaluar el determinante del sistema.
- e) El determinante del sistema es igual a cero.

55. Calcule a y b para que los siguientes sistemas sean consistentes.

$$\begin{cases} x + ay + z = -1 \\ y + 2z = 1 \\ x + y - z = -a \end{cases} \quad \begin{cases} x - ay + bz = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ ax - by - z = 0 \end{cases}$$

56. ¿Para qué valores de m es consistente el siguiente sistema?

$$\begin{cases} (m+2)x + y + 2z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

57. Dado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x - my = m^2 n \\ \frac{x}{m} + y = 2mn \end{cases}$$
, $m, n \in \mathbb{R}; m \neq 0$, entonces

es verdad que:

- a) El sistema no tiene solución.
- b) El sistema tiene infinitas soluciones.
- c) El sistema tiene solución única.
- d) El valor de x e y son iguales.
- e) Sólo tiene solución trivial.

58. Encontrar el valor, o los valores, del parámetro α que hace que el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & \alpha \\ 1 & -\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
 sea inconsistente.

59. Supongamos que la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & b \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix}$ es inversible.

Mostrar que la solución del sistema: $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ verifica que $x_3 = 0$.

60. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Encuentre los valores de λ y t para que $A=B$.

61. Resuelva los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10 \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 3 \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} & \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

62. Encuentre el valor de a para que el siguiente sistema no tengan solución.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + (a^2 - 1)z = a + 1 \end{cases}$$

63. Si se conoce que $(1, 1, 1, 1, 1)$ y $(3, 3, 3, 3, 3)$ son soluciones de un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y 5 incógnitas, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- a) El sistema debe ser homogéneo.
- b) $(2, 2, 2, 2, 2)$ también es una solución del sistema.
- c) m debe ser igual a 5.
- d) La información dada es insuficiente para encontrar más soluciones.
- e) No existe un sistema de ecuaciones lineales que satisfaga las condiciones dadas.

64. Respecto al siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \quad a \in \mathbb{R}, \text{ es falso que:} \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

- El sistema siempre tiene solución.
- El valor de a para que el sistema tenga sólo solución trivial debe ser diferente de -2 .
- Para que el sistema tenga solución, a debe ser diferente de -3 .
- Si $a = -2$, el sistema tiene infinitas soluciones.
- El sistema dado es inconsistente.

65. Para qué valores de " m " es consistente el sistema:

$$\text{a) } \begin{cases} (m-2)x + y + 2z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} -mx + y - z = 1 \\ 2mx + y - z = 0 \\ -my + z = 2m \\ mx = 1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} (m-1)x - 2y = 2 \\ -x + y + mz = 0 \\ -y + 2z = m \end{cases}$$

5.4 Sistemas de ecuaciones no lineales

66. Hallar la solución de los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 3^{x+y} = 81 \\ 3^{y-x} = 9 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 3^x + 3^y = 36 \\ 3^{y-x} = 3 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 2^x + 2^y = 20 \\ 2^{x+y} = 64 \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 2^{2x+1} - 3^{2y} = 23 \end{cases} & \text{e) } \begin{cases} 2^{2x-y} = 32 \\ 3^{x-2y} = 3 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} 3^x \cdot 9^y = 3^8 \\ 2^{x-1} \cdot 2^{y+1} = 2^6 \end{cases} \\ \text{g) } \begin{cases} x + y = 110 \\ \log(x) + \log(y) = 3 \end{cases} & \text{h) } \begin{cases} \log_2(x-y) = 2 \\ \log_2(x) - \log_2(y) = 1 \end{cases} & \text{i) } \begin{cases} \log(x) + \log(y) = 4 \\ y - 4x = 0 \end{cases} \end{array}$$

67. Resolver los siguientes sistemas. Considere $x, y \in (0, 2\pi)$.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} \text{sen}(x) + \text{sen}(y) = 1 \\ \cos(x-y) = 1 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} \cos(x) \tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}(x+y) = 1 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} \text{sen}(x)\text{sen}(y) = \frac{1}{4} \\ \cos(x)\cos(y) = \frac{3}{4} \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3} \\ \text{sen}(x) + \text{sen}(y) = \frac{2}{3} \end{cases} \\ \text{e) } \begin{cases} \text{sen}(x)\text{sen}(y) = \cos(x)\cos(y) \\ x - y = \frac{\pi}{6} \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} \text{sen}(x) + \cos(y) = \frac{1}{2} \\ \text{sen}(x) + \text{sen}(y) = \frac{3}{2} \end{cases} \end{array}$$

68. La demanda para los bienes producidos por una industria están dados por la ecuación $p^2 + x^2 = 169$, donde p es el precio y x es la cantidad demandada. La oferta está dada por $p = x + 7$, el punto de intersección de la demanda y oferta se lo conoce como punto de equilibrio, entonces el precio de equilibrio es:

- a) 5 b) 12 c) 22 d) 19 e) 17

69. Un hombre y su hijo trabajando juntos pueden hacer una obra en 12 días. Trabajando separadamente el hijo tardaría 7 días más que el padre en hacer él solo la obra, ¿cuánto tiempo tardará cada uno trabajando por su cuenta?

70. Dos resistencias conectadas en serie dan una resistencia total de 25 ohmios (Ω) y conectadas en paralelo dan una resistencia equivalente de 6 Ω . ¿Cuántos ohmios tiene cada resistencia separadamente? [Si r_1 y r_2 son los ohmios que tiene cada resistencia, R es la resistencia total cuando se conectan en serie y r la resistencia equivalente cuando se conectan en paralelo, se sabe que $r_1 + r_2 = R$ y que $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}$].

71. Hallar la solución de los siguientes sistemas:

a)
$$\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 15 \\ x^2 + 2y^2 = 11 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^2 + 3xy = -8 \\ xy + y^2 = -4 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ xy = 10 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} xy - 6 = \frac{y^3}{x} \\ xy + 24 = \frac{x^3}{y} \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0 \\ 5x^2 - 7xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 160 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8 \end{cases}$$

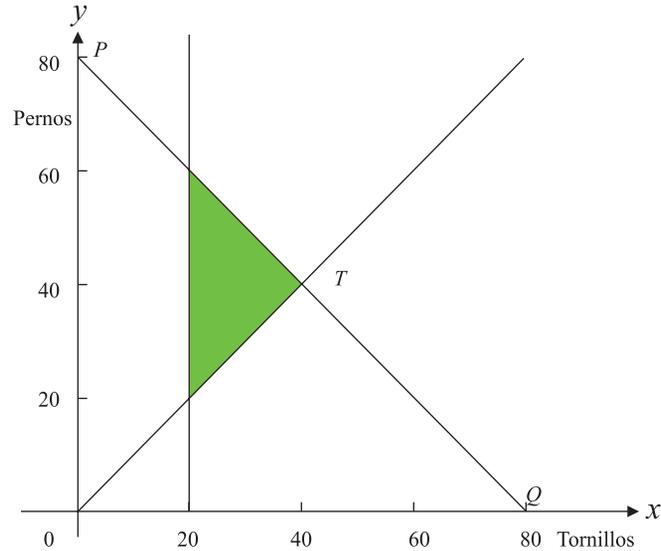
5.5 Sistemas de inecuaciones lineales

72. Para el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} 5x + 3y \leq 105 \\ 2x + 4y \leq 70 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ determine:}$$

- a) El punto de intersección entre $5x + 3y = 105$ y $2x + 4y = 70$.
 b) La representación en un plano cartesiano de las condiciones del sistema.
 c) La región factible.

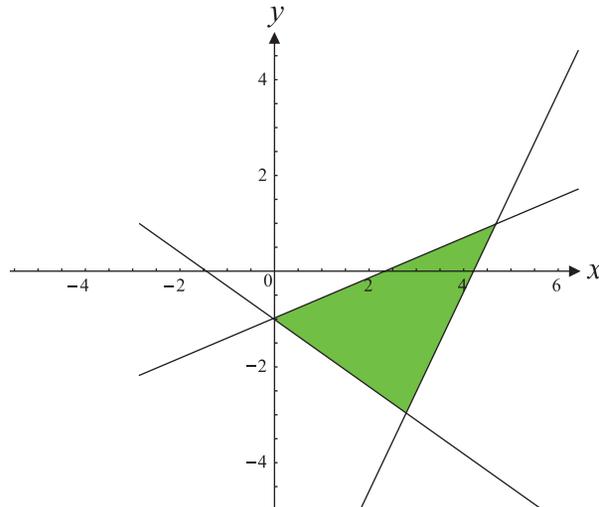
73. Una máquina puede fabricar cajas de tornillos o cajas de pernos. Puede funcionar durante un máximo de 80 horas semanales. Lleva una hora en fabricar una caja. La máquina debe fabricar no menos de 20 cajas de tornillos por semana. El número de cajas de pernos P no debe ser menor que el número de cajas de tornillos Q . El punto T es $(40, 40)$. Esta información aparece en el diagrama adjunto.



Entonces, uno de los siguientes sistemas de desigualdades lineales representa la región sombreada, identifíquelo:

a) $\begin{cases} P \leq Q \\ P \leq 80 - Q \\ Q \leq 20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} P \geq Q \\ P \leq 80 - Q \\ Q \geq 20 \end{cases}$ c) $\begin{cases} P \geq Q \\ P \leq 80 - Q \\ Q \leq 20 \end{cases}$ d) $\begin{cases} P \geq Q \\ P \leq 80 + Q \\ Q \geq 20 \end{cases}$ e) $\begin{cases} P \leq Q \\ P \leq 80 + Q \\ Q \geq 20 \end{cases}$

74. Para el gráfico adjunto, identificar el sistema que lo representa y encontrar los vértices de la región sombreada.



$$a) \begin{cases} 2x+3y \geq -3 \\ 2x-y-9 \geq 0 \\ 2x-5y-5 \geq 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x+3y \geq -3 \\ 2x-y-9 \geq 0 \\ 2x-5y-5 \geq 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x+3y \geq -3 \\ 2x-y-9 \leq 0 \\ 2x-5y-5 \geq 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x+3y \leq -3 \\ 2x-y-9 \geq 0 \\ 2x-5y-5 \leq 0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 2x+3y \leq -3 \\ 2x-y-9 \leq 0 \\ 2x-5y-5 \leq 0 \end{cases}$$

75. Resolver los sistemas de inecuaciones lineales siguientes, encontrando los vértices de su región solución.

$$a) \begin{cases} 5x+15y \leq 150 \\ 6x+8y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x+3y \geq 50 \\ 9x+8y \geq 0 \\ 3x+4y \geq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x+y \leq 10 \\ x+3y \leq 12 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x+y \geq 14 \\ 2x+3y \geq 36 \\ 4x+y \geq 16 \\ x-3y \geq 0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x+y \geq 5 \\ y \leq x+3 \\ 3y+x \geq -1 \\ y+2x \leq 16 \\ 4y-x \leq 22 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \geq 2 \\ x+y \leq 10 \\ 2x+y \geq 3 \end{cases}$$

5.6 Sistemas de inecuaciones no lineales

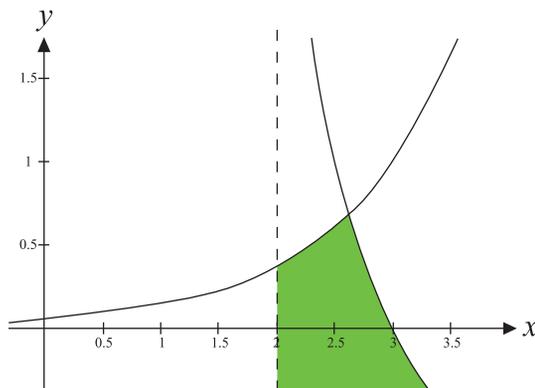
76. La región del plano cartesiano que corresponde al conjunto solución del sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 9 \\ y \geq |x| \\ y+x^2 \geq 0 \end{cases}, \text{ es un subconjunto de los cuadrantes:}$$

- a) I y IV b) II y IV c) II y III d) I y III e) I y II

77. Graficar la región solución del sistema: $\begin{cases} y \geq x^2 - 4x - 5 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$.

78. La región sombreada en el plano cartesiano adjunto, representa el conjunto solución del sistema de desigualdades dado por:



- a) $\begin{cases} \log_2(x-2) \geq y \\ e^{x-3} \leq y \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \leq y \\ 2^{x-3} \leq y \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log_3(x-2) \geq y \\ e^{x-3} \geq y \end{cases}$
- d) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq y \\ 2^{x-3} \leq y \end{cases}$ e) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq y \\ e^{x-3} \geq y \end{cases}$

79. En los siguientes ejercicios, haga la gráfica del conjunto solución de cada sistema de desigualdades dado:

- a) $\begin{cases} xy \geq 4 \\ y \geq x^2 + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y < \log_2(x) \\ y + x > 0 \\ y < 4 - x^2 \end{cases}$

80. Si $p(x, y): \begin{cases} y \geq x^2 - 2x \\ y > 1 - |x - 1| \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, entonces es verdad que:

- a) $Ap(x, y) \subseteq \{(x, y) / x \geq 0, y \geq 0\}$ d) $Ap(x, y) \subseteq \{(x, y) / x > 0, y \in \mathbb{R}\}$
 b) $(1, 3) \notin Ap(x, y)$ e) $Ap(x, y) \subseteq \{(x, y) / x \in \mathbb{R}, y > 0\}$
 c) $(1, 1) \in Ap(x, y)$

81. Si $\text{Re}_x = \text{Re}_y = \mathbb{R}$ y $p(x, y)$ es la conjunción de los siguientes predicados

$$\begin{cases} y \geq x^2 + 1 \\ x + y < 2 \\ y - x > 2 \end{cases}, \text{ entonces } Ap(x, y) \text{ tiene elementos:}$$

- a) En el I y II cuadrante del plano cartesiano.
 b) En el II y III cuadrante del plano cartesiano.
 c) Sólo en el II cuadrante del plano cartesiano.
 d) Sólo en el I cuadrante del plano cartesiano.
 e) En todos los cuadrantes del plano cartesiano.