

6.1 Números complejos

- Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
a) Verdadero b) Falso
- $(\sqrt{1-\sqrt{3}})^2 = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$.
a) Verdadero b) Falso
- Sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Si $f(x) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$, $f(i) = 0$ y $f(1+i) = 0$, al sumar los coeficientes a_1, a_2, a_3, a_4 , se obtiene:
a) 2 b) 1 c) -2 d) 4 e) -4
- Sean $Re = \mathbb{C}$ y $p(x) \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8x & 2 \\ -1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0$. La suma de los elementos de $Ap(x)$ es:
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{5}{8}$ e) $\frac{3}{8}$

6.2 Operaciones

- Halle x e y que satisfagan la igualdad: $\frac{2i}{x} + iy - 2 = 3i - \frac{3}{x} + y$.
- Halle los números reales x e y de las ecuaciones siguientes.
 - $3 + 2i + 3yi = 8i + x - 2y$.
 - $(1-i)x + (2+i)y = 4 + 2i$.
 - $\frac{8i}{x} + iy - 2 = 7i - \frac{10}{x} + y$.
- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 1-i & 1 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encuentre $\det(A - \overline{A})$.
- Calcule los números m y n que verifiquen la igualdad: $\frac{-4+mi}{2-3i} = n-2i$.
- Si $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ y $z_2 = -1+i\sqrt{3}$, el número $2\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$ es:
a) $1+i\sqrt{3}$ b) $1-i\sqrt{3}$ c) $-1+i\sqrt{3}$ d) $-1-i\sqrt{3}$ e) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. Hallar el valor real de k para que $z = \frac{4+ki}{2+i}$ sea o real puro o imaginario puro.

11. Hallar las raíces de la ecuación: $x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = 0$.

12. Demostrar algebraicamente que si $\sqrt{a+ib} = u+iv$, entonces

$$u = \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} \quad \text{y} \quad v = \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}.$$

13. Expresar en forma rectangular los siguientes números complejos:

a) $(1 - 4i)(3 + 11i) - (1 + i)^{-1}$

d) $\frac{i}{1+i} + \frac{1+i}{i}$

b) $(1 - i)^3(1 + i)$

e) $[1 + i\sqrt{3} + (1 - \sqrt{3}i)]^3$

c) $\left[\frac{2i}{1+i}\right]^4$

14. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a)
$$\begin{cases} (2+3i)x - (1+i)y = 3+4i \\ (1-3i)x - (1-2i)y = -2-6i \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (2+i)x + 2y = 1+7i \\ (1-i) + yi = 0 \end{cases}$$

15. Calcule la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1+i & 2+i & 4+i \\ 0 & 1 & 2 \\ -i & 0 & i \end{pmatrix}$.

16. Halle el valor de los siguientes determinantes:

a)
$$\begin{vmatrix} 1+i & 2+i & 4+i \\ 0 & 1 & 2 \\ -i & 0 & i \end{vmatrix}$$

b)
$$\begin{vmatrix} 1-i & 0 & i \\ 2-i & 1 & 0 \\ 4-i & 2 & -i \end{vmatrix}$$

17. Exprese los siguientes números complejos en la forma rectangular:

a) $\frac{(3+5i)(2-i)^3}{-1+4i}$

d) $\frac{(1+i)(2+i)(3+i)}{1-i}$

b) $(2+3i)(3-4i)^2$

e) $(2+5i)^3$

c) $\frac{1}{2}(1+i)(1+i^{-8})$

18. Demostrar que: $Re\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right) + Re\left(\frac{z_2}{z_1+z_2}\right) = 1$.

19. Si z satisface la ecuación $\sqrt{z} = \frac{2}{1-i} + 1 - 4i$, exprese z en la forma rectangular.

20. ¿Cuál debe ser la relación entre x e y para que el producto $(x+iy)(2+3i)$ sea un número real?

6.3 Representación geométrica

21. Expresar en forma polar los siguientes números complejos:

a) $-\sqrt{3}+i$

b) $3-3i$

c) $1+i\sqrt{3}$

22. Calcular el módulo, la parte real e imaginaria de: $\frac{1+\cos(\beta)+i\operatorname{sen}(\beta)}{1+\cos(\beta)-i\operatorname{sen}(\beta)}$.

23. Demostrar que para todo entero positivo "n"

$$\left[\frac{\operatorname{sen}(\alpha)+i\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)-i\cos(\alpha)} \right]^n = \cos\left[2n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right] + i\operatorname{sen}\left[2n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$$

24. Identifique cuál de las siguientes proposiciones es falsa:

a) $i^{25} = i$

b) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

c) $\forall (x, y) \in \mathbb{C}, [(x, y)(0, 1) = (x, y)]$

d) $\forall z \in \mathbb{C}, z \cdot z = z^2$

6.4 Notación de Euler

25. ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}\right)^{10}$?

a) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

c) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

e) $-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

26. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z|=1$. Halle el desarrollo de $(z+z^{-1})^5$ según el teorema del binomio. A partir de ello, demuestre que:

$$\cos^5(\theta) = \frac{1}{16}(n\cos(5\theta) + m\cos(3\theta) + \lambda\cos(\theta)) \text{ y } m, n, \lambda \text{ son enteros positivos.}$$

27. Expresar en forma polar:

a) $\left[\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^4$

b) $\left[3\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\right]^{-3}$

28. Sea $z = 2+2i$, halle e interprete geoméricamente el producto zi .

29. Si $z - \frac{1}{z}$ es real, demostrar que z es real.

30. Realizar las operaciones y reducir a una forma más simple:

(i) $[1+i\sqrt{3} + (1-\sqrt{3})i]^3$

(ii) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$

(iii) $[\sin(\alpha) - \sin(\beta) + i(\cos(\alpha) - \cos(\beta))]^n$

31. Hallar el módulo, la parte real e imaginaria de:

a) $e^{-\pi i}$ b) $e^{1-i\frac{\pi}{6}}$ c) e^{1+i}

32. Si $z_1=7-i$ y $z_2=3+i$, entonces el módulo del número complejo $e^{\frac{z_1}{z_2}}$ es:

a) e b) e^{-1} c) $2e$ d) 10 e) e^2

33. Sea $z \in \mathbb{C}$, tal que $z = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} + \dots$, encuentre el valor que más se aproxima a z^2 .

34. Expresar los siguientes números complejos en forma rectangular:

a) $e^{i\pi}$ b) $-2e^{-i\pi}$ c) $i+e^{\frac{3\pi}{2}}$ d) $e^{\frac{\pi}{4}}-e^{\frac{-\pi}{4}}$ e) $e^{\frac{\pi}{3}}+e^{\frac{-5\pi}{6}}$

35. Expresar en forma polar los siguientes números complejos:

a) $2e^{\frac{\pi}{8}i}$ b) e^{2+i} c) $2e^{1-\frac{\pi}{4}i}$ d) 2^{3i} e) $3^{-\frac{1}{2}}$ f) 5^{1+i} g) 10^{1-i}

36. Verificar que:

a) $(\cos(30^\circ)+isen(30^\circ))^2 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+isen\left(\frac{\pi}{3}\right)$

b) $\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+isen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^3 = i$

37. Encontrar las cuartas potencias de:

(i) $2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ (ii) $\sqrt{3} \operatorname{cis} 225^\circ$ (iii) $\frac{1}{2}e^{i15^\circ}$

38. Hallar las raíces indicadas y graficarlas en el plano complejo.

(i) Raíces cúbicas de $27 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$. (iii) Raíces cuartas de i .

(ii) Raíces cuartas de -1 . (iv) Raíces cúbicas de $64 \operatorname{cis} \pi$.

6.5 Aplicaciones

39. Un vértice de un hexágono regular centrado en el origen es $(0,2)$, encuentre el resto de sus vértices.

40. Calcule $\sqrt[4]{8 + i8\sqrt{3}}$.

41. Halle el número complejo z , igual al cuadrado de su conjugado.

42. Determine las raíces de las siguientes ecuaciones. Considere $\text{Re}=\mathbb{C}$.

a) $x^2 - 6x + 13 = 0$

b) $2x^2 + 5x + 6 = 0$

c) $x^2 - 2(1+i)x + (2i-1) = 0$

d) $x^3 - 2x + 4 = 0$

e) $x^2 - 3x + (3-i) = 0$

f) $x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$

43. Demostrar que si z y \bar{z} es un par de números complejos conjugados, entonces z^3 y $(\bar{z})^3$ son también conjugados.

44. Explicar cómo están distribuidos en el plano los puntos complejos, que satisfacen la desigualdad:

$$\log_{\frac{1}{2}}|z| + \log_{\frac{1}{2}}(|z|+1) < \log_{\frac{1}{2}}(|z|+5)$$

45. Resolver la desigualdad: $-2 < 2 \log_{\frac{1}{3}}|x+1-i\sqrt{5}| < -\log_3 2 - 1$.

46. Descomponer en un par de factores lineales complejos el trinomio a^2+ab+b^2 .