ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL
Instituto de Ciencias Matemáticas
Examen de Mejoramiento de Algebra Lineal

Nombre: Cristian Arias .... Febrero 23 del 2006
Firma: .... Paralelo:..........

1.- (20 ptos.) Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas. En cada caso justifique formalmente su calificación.

a) Si T un isomorfismo sobre un espacio V, entonces T es diagonalizable. (FALSO)

Si $A_T=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ es la matriz asociada a T, entonces

$\det A_T = 9 \neq 0 \Rightarrow$ T es un isomorfismo.

$\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (\lambda-3)^2=0$; $\left(\begin{array}{cc|c} \overset{a}{0} & \overset{b}{1} & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}\end{array}\right) \Rightarrow E_{\lambda=3}=\left\{\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} / a\in\mathbb{R}\right\}$

$\Rightarrow \beta_{E_{\lambda=3}}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow mg(\lambda=3)=1 \neq ma(\lambda=3)=2$

$\Rightarrow A_T$ no es diagonalizable (FALSO)

b) Existe un único valor para α que permite al siguiente conjunto $S = \{ (0,1, \alpha), (1, \alpha, 1), (\alpha, 1, 0) \}$ ser una base de R^3.

(FALSO).

Si $\begin{vmatrix}0 & 1 & \alpha\\ 1 & \alpha & 1\\ \alpha & 1 & 0\end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow S$ es una base de $\mathbb{R}^3$

$+\alpha+\alpha(1-\alpha^2)\neq 0$

$\Rightarrow 2\alpha-\alpha^3\neq 0$

$\Rightarrow \neg\left[\alpha(2-\alpha^2)=0\right]$

$\Rightarrow \neg\left[\alpha=0 \vee \alpha=\sqrt{2} \vee \alpha=-\sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow \alpha\neq 0 \wedge \alpha\neq\sqrt{2} \vee \alpha\neq-\sqrt{3}$

2.- (20 ptos) Considere la siguiente matriz A

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$$

$$A^n=\begin{cases}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}, & n\in \text{impares}\\[2mm] \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, & n\in \text{pares}\end{cases}$$

a) Demuestre que A es diagonalizable
b) Utilice la información anterior para encontrar A^9 y A^{10}
c) Generalice el resultado anterior, determinando la matriz A^n, para cualquier número natural n.

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ 3 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda+2)+3=0 \Rightarrow \lambda^2-1=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=-1\end{cases}$$

$$E_{\lambda=1}=\overset{\Sigma}{0}\quad \begin{array}{cc} a & b\end{array}\ \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ 3 & -3 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}\end{array}\right)\to a=b \qquad \beta_{E_{\lambda=1}}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$E_{\lambda=-1}=\overset{\Sigma}{0}\quad \begin{array}{cc} a & b\end{array}\ \left(\begin{array}{cc|c}3 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}3 & -1 & 0\\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}\end{array}\right)\to b=3a. \qquad \beta_{E_{\lambda=-1}}=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & a\\ 1 & 3 & b\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & a\\ 0 & 2 & -a+b\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & a+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\end{array}\right)$$

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D=C^{-1}AC$$

$$A=CDC^{-1}\Rightarrow A^n=\underbrace{A\cdot A\cdots A}_{n \text{ veces}}$$

$$\Rightarrow A^n=CD\underbrace{\cancel{C^{-1}}\cdot\cancel{C}}_{I}D\underbrace{\cancel{C^{-1}}\cdots\cancel{C}}_{I}DC^{-1}\Rightarrow \boxed{A^n=CD^nC^{-1}}$$

$$A^9=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^9=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^9=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ 6 & -4\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{A^9=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}}$$

$$A^{10}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{10}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$$

3.- (20 ptos) Construya, de ser posible, un operador lineal T en P_2 tal que:

a) $T(x + x^2) = T(x^2)$

b) $\operatorname{Im}(T) = E_{\lambda=-1} = \mathcal{L}\{1 - x, 3 - x^2\}$

$$T(x+x^2) - T(x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} T(x) = 0 \\ T(1-x) = x-1 \\ T(3-x^2) = x^2-3 \end{cases}$$

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(1-x) + \alpha_3(3-x^2) = ax^2+bx+c$$

$$\Rightarrow (-\alpha_3)x^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)x + (\alpha_2 + 3\alpha_3) = ax^2+bx+c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha_3 = a \longrightarrow \boxed{\alpha_3 = -a} \\ \alpha_1 - \alpha_2 = b \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 = c \longrightarrow \alpha_2 = c - 3\alpha_3 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 3a + c} \end{cases}$$

$$T(ax^2+bx+c) = \alpha_1 \cancel{T(x)}^{0} + \alpha_2 \underbrace{T(1-x)}_{x-1} + \alpha_3 \underbrace{T(3-x^2)}_{x^2-3}$$

$$\Rightarrow T(ax^2+bx+c) = (3a+c)(x-1) + (-a)(x^2-3)$$

$$\Rightarrow \boxed{T(ax^2+bx+c) = (-a)x^2 + (3a+c)x + (-c)}$$

4.- (20 ptos) Sea V el espacio vectorial definido por:

$V = \{ f : A \to \mathbb{R} \ / \ A = \{a,b,c\} \}$ con las operaciones usuales entre funciones. Considere las siguientes funciones f, g y h de V definidas por:

x	f(x)	g(x)	h(x)
a	0	1	1
b	1	0	1
c	1	1	0

a. Determine el vector neutro de V
b. Determine si el conjunto S = {f, g, h} es linealmente independiente
c. Determine un conjunto de vectores de V que sea linealmente dependiente y no generador
d. ¿Es V un espacio vectorial de dimensión finita?

a) $\exists\, \bar{O}(x) \in V \ \forall f(x) \in V \ [\bar{O} + f = f]$

$\bar{O}(x) + f(x) = f(x) \Rightarrow \boxed{\bar{O}(x) = 0}$

b) $\{f, g, h\}$ es lin. ind. en V $\equiv \alpha_1 f + \alpha_2 g + \alpha_3 h = \bar{O}(x) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Para $x = a \Rightarrow \alpha_1 \underbrace{f(a)}_{0} + \alpha_2 \underbrace{g(a)}_{1} + \alpha_3 \underbrace{h(a)}_{1} = 0 \Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

Para $x = b \Rightarrow \alpha_1 \underbrace{f(b)}_{1} + \alpha_2 \underbrace{g(b)}_{0} + \alpha_3 \underbrace{h(b)}_{1} = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_3 = 0$

Para $x = c \Rightarrow \alpha_1 \underbrace{f(c)}_{1} + \alpha_2 \underbrace{g(c)}_{1} + \alpha_3 \underbrace{h(c)}_{0} = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0$

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to \alpha_1 = 0 \\ \to \alpha_2 = 0 \\ \to \alpha_3 = 0 \end{array}$$

$\therefore$ S es lin. ind. en V.

c) $\{f, 2f\}$ es un conjunto lin. dep. en V y no genera a V.

d) $\beta_V = \{f, g, h\} \Rightarrow \dim V = 3$

5.- (20 ptos) Sea $V = R^4$, con el producto interno convencional.
Sean U, H y W los siguientes subconjuntos:

$U = \{ (x,y,z,w) \,/\, 2x + y + z + w = 0 \}$
$H = \{ (x,y,z,w) \,/\, 2x + y - z = 2 \}$
$W = \{ (x,y,z,w) \,/\, 2x - y - z = w \}$

a) Justifique por qué uno de estos subconjuntos no es un subespacio de V.
b) Encuentre la proyección ortogonal del vector (1,1,1,1) sobre la intersección de los subconjuntos anteriores que sí son subespacios de V.

a.) $h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \in H \;\wedge\; h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 + h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin H$

b.) $U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \omega \end{pmatrix} \Big/ \begin{matrix} 2x+y+z+\omega=0 \\ 2x-y-z-\omega=0 \end{matrix} \right\}$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \omega \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2\;(-2) & -1\;(-1) & -1\;(-1) & -1\;(-1) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \omega \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \rightarrow x = 0 \\ \rightarrow y = -z-\omega \end{matrix}$$

$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -z-\omega \\ z \\ \omega \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \beta_{U\cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$v_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \|v_1'\| = \sqrt{2} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_2' = v_2 - \langle v_2 / u_1 \rangle u_1 \Rightarrow v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \left(\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ +1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|v_2'\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$\mathrm{proy}_{U\cap W} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{0} \left(\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}_{0} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{proy}_{U\cap W} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$