



Nombre:

Paralelo:

Firma:

7 de febrero de 2008.

1. (20 pts) Califique como verdaderas o falsas a las siguientes proposiciones. **Justifique sus respuestas.**

a. Una transformación lineal cuyo núcleo es $\{0_v\}$ es invertible. (FALSO)

Contraejemplo: $T: P_2 \rightarrow M_{2 \times 2}$

$$T(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Nu}(T) = \{0x^2+0x+0\} \wedge \text{Im}(T) = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \neq M_{2 \times 2}$$

$\Rightarrow T$ es lineal $\wedge T$ no es sobreyectiva

$\Rightarrow T$ no es invertible

b. $\forall r, t \in \mathbb{R}: A = \begin{pmatrix} r \sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & -r \sin(t) \end{pmatrix}$ es ortogonal. (FALSO)

A es Ortogonal $\equiv A^{-1} = A^T$ (Definición).

Por Teorema: $A_{n \times n}$ es Ortogonal \equiv las Columnas de A , son una Base Ortonormal de \mathbb{R}^n

$$* \left\langle \begin{pmatrix} r \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} \cos t \\ -r \sin t \end{pmatrix} \right\rangle = r \sin t \cos t - r \sin t \cos t = 0 \checkmark$$

$$* \left\langle \begin{pmatrix} r \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} r \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle = r^2 \sin^2 t + \cos^2 t \neq 1 \quad \left(\text{Ej: } t = \frac{\pi}{2}, r = 2 \right)$$

$\Rightarrow A$ no es ortogonal.

Contraejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ no es Ortogonal.

c. Sea V un espacio vectorial real con producto interno, sean $u, v \in V$ dos vectores ortonormales. Si los vectores $\alpha u + \beta v$ y $\alpha u - \beta v$ son ortogonales, entonces $|\alpha| = |\beta|$. (VERDADERO)

$u, v \in V$ dos vectores ortonormales $\Rightarrow \langle u/v \rangle = 0 \wedge \|u\| = 1 \wedge \|v\| = 1$

$$* \langle \alpha u + \beta v / \alpha u - \beta v \rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha u / \alpha u \rangle - \langle \alpha u / \beta v \rangle + \langle \beta v / \alpha u \rangle - \langle \beta v / \beta v \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 \underbrace{\langle u/u \rangle}_1 - \alpha \beta \underbrace{\langle u/v \rangle}_0 + \alpha \beta \underbrace{\langle u/v \rangle}_0 - \beta^2 \underbrace{\langle v/v \rangle}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2} = \sqrt{\beta^2}$$

$$\Rightarrow |\alpha| = |\beta|$$

d. Si λ es un valor propio de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, entonces $(A + A^{-1})^\lambda = 2^\lambda A$. (VERDADERO)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -1 ; A \text{ es simétrica ; } A = A^{-1}$$

$$* \text{ Para } \lambda = 1 : (A + A)^\lambda = 2^\lambda A \Rightarrow (2A)^1 = 2^1 A \Rightarrow \underline{\underline{2A = 2A}} \checkmark$$

$$* \text{ Para } \lambda = -1 : (A + A)^{-1} = 2^{-1} A \Rightarrow (2A)^{-1} = 2^{-1} A$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & -2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2A} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & -1/2 \end{pmatrix}}_{(2A)^{-1}}$$

$$\Rightarrow (2A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} A = 2^{-1} A \checkmark$$

2. (15 puntos) Sea $L: M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que: $L \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, y

$L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determine:

a. $\text{Nu}(L)$, $\text{Im}(L)$.

b. La matriz asociada a L respecto a las bases canónicas.

* $L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; * $L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

* $L \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

* $L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $A_L = \begin{pmatrix} [L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}]_{\beta_C} & [L \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}]_{\beta_C} & [L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}]_{\beta_C} & [L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]_{\beta_C} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$L \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b L \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow L \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+d \\ c+d \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Nu}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / c+d=0 \right\}$

$\Rightarrow \text{Nu}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -c \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \beta_{\text{Nu}(L)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

* $\text{Im}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} c+d \\ c+d \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{Im}(L) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{Im}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \right\}$

3. (15 pts) Sea $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$. Determine:

- a. Los valores propios de A .
 b. Una base para cada espacio propio de A .

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \alpha-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\alpha-\lambda) \left[(\lambda-\alpha)^2 - 1 \right] - [(\alpha-\lambda)-1] + [1 - (\alpha-\lambda)] = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha-\lambda) \left[(\lambda-\alpha)^2 - 1 \right] + 2(\lambda-\alpha+1) = 0 \Rightarrow \frac{(\lambda-\alpha)}{\uparrow} (\lambda-\alpha-1) (\lambda-\alpha+1) + 2(\lambda-\alpha+1) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-\alpha+1) \left[(\lambda-\alpha)(\lambda-\alpha-1) - 2 \right] = 0$$

$\lambda = -1 + \alpha$

$$\Rightarrow (\lambda-\alpha) \left[(\lambda-\alpha) - 1 \right] - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-\alpha)^2 - (\lambda-\alpha) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-\alpha) = \frac{(\lambda-\alpha) \pm \sqrt{(\lambda-\alpha)^2 - 4(\lambda-\alpha)(-2)}}{2(\lambda-\alpha)}$$

$$\Rightarrow (\lambda-\alpha) = \frac{(\lambda-\alpha) \pm (\lambda-\alpha)\sqrt{1+8}}{2(\lambda-\alpha)}$$

$$\Rightarrow (\lambda-\alpha) = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \lambda-\alpha = 2 \vee \lambda-\alpha = -1$$

$\lambda = 2 + \alpha \vee \lambda = -1 + \alpha$

$E_{\lambda=-1+\alpha} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b & c & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_{\lambda=-1+\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} / a = -b - c \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow \beta E_{\lambda=-1+\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$E_{\lambda=2+\alpha} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & | & 0 \\ -2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ -2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} a & b & c & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{\lambda=2+\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} / a = c, b = c \right\}$$

$\Rightarrow \beta E_{\lambda=2+\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

4. (5ptos) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determine si A es diagonalizable.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda) \left[\overbrace{(\lambda-1)^2 - 1}^{\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1} \right] = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

\Rightarrow A es diagonalizable puesto que todos sus valores propios son diferentes $\Rightarrow m_A(\lambda_i) = m_G(\lambda_i) \Rightarrow$ A tiene 3 vectores propios lin. ind. en $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ A es diagonalizable.

5. (15 pts) Sea $V = \mathbb{R}^3$, y $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / 3x - 2y + 6z = 0 \right\}$ $Z = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$

a. Determine W^\perp . Utilice el producto interno estándar.

b. Si $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, determine la proyección de v en W .

a) $W^\perp = \sum$

1.) $\beta_W = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow W = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$

2.) Condiciones

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow 2a - c = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}c$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow 3b + c = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{3}c$$

3.) $W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} / \begin{matrix} a = \frac{1}{2}c \\ b = -\frac{1}{3}c \end{matrix} \right\} \Rightarrow W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c \\ -\frac{1}{3}c \\ c \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow \beta_{W^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ $\Rightarrow \|u\| = \sqrt{9+4+36} \Rightarrow \|u\| = 7$

$\Rightarrow \beta_{O.N.} = \left\{ \begin{pmatrix} 3/7 \\ -2/7 \\ 6/7 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\text{proy}_{W^\perp} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$(-9) + (-2) + (24)$

$\Rightarrow \text{proy}_{W^\perp} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{13}{49} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\text{proy}_W \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -39/49 \\ 26/49 \\ -78/49 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{proy}_W \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -186/49 \\ 75/49 \\ 118/49 \end{pmatrix}$