



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

Aproximación numérica de un modelo usado para la simulación de
la transferencia de masa y calor en un secador de azúcar.

PROYECTO INTEGRADOR

Previo a la obtención del Título de:

Matemático

Presentado por:

Franklin Andres Bolaños Flores

Frank Anthony Herrera Nolivos

GUAYAQUIL - ECUADOR

Año: 2021

DEDICATORIA

A mis padres y hermano.

Frank Herrera Nolivos

A mi familia.

Franklin Bolaños Flores

AGRADECIMIENTOS

Mi más sincero agradecimiento a mi familia por apoyarme durante toda mi carrera.

Agradezo a mis maestros por compartir sus conocimientos y ayudarme a crecer como profesional.

A mis compañeros de carrera, los cuales fueron apoyo en todas las materias que cursamos. Agradezco a mi compañero de tesis Franklin Bolaños por su esfuerzo y dedicación a todos los trabajos que realizamos a lo largo de la carrera.

Frank Herrera Nolivos

AGRADECIMIENTOS

A mi familia por ser mi soporte emocional.

A todos mis maestros, los cuales me han ayudado a crecer como profesional y persona, con su ejemplo y enseñanza.

A todos mis amigos, a los que conocí en el pre o a lo largo de la carrera, quienes me ayudaron en incontables jornadas de estudio y alegraron en momentos difíciles.

A mis tutores, PhD. Wilfredo Angulo y PhD. Dany De Cecchis, por toda su ayuda y consejos en largas jornadas de trabajo; también, a la coordinadora de carrera, PhD. Luz Marchán por su apoyo durante toda la carrera.

Franklin Bolaños Flores

DECLARACIÓN EXPRESA

"Los derechos de titularidad y explotación, nos corresponde conforme al reglamento de propiedad intelectual de la institución; Frank Herrera y Franklin Bolaños damos nuestro consentimiento para que la ESPOL realice la comunicación pública de la obra por cualquier medio con el fin de promover la consulta, difusión y uso público de la producción intelectual"



Frank Anthony Herrera Nolivos



Franklin Andres Bolaños Flores

EVALUADORES



Firmado electrónicamente por:
**LUZ ELIMAR
MARCHAN
MENDOZA**

Ph.D. Luz Elimar Marchan

Profesora de la Materia

WILFREDO
ANTONIO
ANGULO
SANCHEZ

Firmado digitalmente
por WILFREDO
ANTONIO ANGULO
SANCHEZ
Fecha: 2021.10.12
19:51:08 -05'00'

Firmado digitalmente por
DANY DE CECCHIS DE
LEON
Motivo: Suscribo el
contenido de la solicitud
Fecha: 2021.10.12 19:51:08
-05'00'

Ph.D. Wilfredo Antonio Angulo

TUTOR

Ph.D. Dany De Cecchis De Leon

COTUTOR

RESUMEN

El secado es un proceso en la industria sensible a cambios en las variables y parámetros que lo definen, por este motivo un modelado matemático para su simulación numérica puede emplearse para analizar el efecto de estos cambios. Contreras y Torrealba (2001), plantean un modelo matemático asociado a la transferencia de masa y calor para un secador piloto para el material granular que resulta en un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales. Por tal motivo en Angulo y Apoung (2021) se propuso la adimensionalización del modelo, mediante transformaciones en las variables de estado, obteniendo un sistema hiperbólico de leyes conservadas con término de fuente no lineal. En este trabajo para obtener la solución aproximada se usa el Método de Galerkin Discontinuo (DG) para la variable espacial y Low Storage Runge Kutta (LSRK) para la temporal. Los experimentos numéricos muestran estabilidad y buen comportamiento de las soluciones con lo esperado físicamente en los procesos de secado. Las simulaciones conseguidas podrían permitir una mejor toma de decisiones para los empresarios que manejen procesos de secado, especialmente en la industria azucarera.

Palabras claves: Secador Rotatorio, Sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales, Galerkin Discontinuo, Sistemas Hiperbólicos, Método de Líneas, Runge Kutta.

ABSTRACT

The industry process of drying is sensitive to changes of its variables and parameters. For this reason a mathematical modeling for its numerical simulation can be used to analyze the effect of these changes. For this reason, in Contreras and Torrealba (2001) a mathematical model associated with the heat and mass transfer is proposed for a pilot dryer for granular material that results in a system of non-linear differential equations. Hence, the adimensionalization of the model was proposed in Angulo and Apoung (2021), through transformations in the state variables, obtaining a hyperbolic system of conserved laws with a non-linear source term. To obtain the approximate solution, the Galerkin Discontinuous Method (DG) was used for the spatial variable and Low Storage Runge Kutta (LSRK) for the temporal one. The numerical experiments show stability and good behavior of the solutions with what is physically expected in the drying processes. The simulations obtained could allow better decision-making for entrepreneurs who manage drying processes, especially in the sugar industry.

Key words: Rotary Dryer, System of Partial Differential Equations, Galerkin Discontinuous, Hyperbolic Systems, Method of Lines, Runge Kutta.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	I
Abstract	II
CAPÍTULO 1	1
1 Introducción	1
1.1 Descripción del problema	1
1.2 Justificación del problema	3
1.3 Objetivos	4
1.3.1 <i>Objetivo general</i>	4
1.3.2 <i>Objetivos específicos</i>	4
1.4 Marco Teórico	5
1.4.1 Secadores	6
1.4.2 <i>Leyes de conservación</i>	7
1.5 <i>Modelo Matemático</i>	9
1.5.1 <i>Modelo adimensional</i>	12
1.6 <i>Métodos para ecuaciones de conservación</i>	13
1.6.1 <i>Método de Galerkin Discontinuo</i>	14
1.6.2 <i>Método de líneas</i>	17
1.7 <i>Existencia y unicidad del problema estacionario</i>	19
CAPÍTULO 2	20
2 Metodología	21

2.1	<i>Análisis del modelo matemático</i>	21
2.2	<i>Métodos numéricos aplicados al modelo</i>	22
2.2.1	<i>Criterio de selección de los métodos</i>	22
2.2.2	<i>Discretización del modelo</i>	23
CAPÍTULO 3		23
3	Resultados y Análisis	24
3.1	<i>Análisis del modelo</i>	24
3.2	<i>Discretización de los Benchmarks</i>	25
3.2.1	<i>Benchmark 1</i>	25
3.2.2	<i>Benchmark 2</i>	26
3.2.3	<i>Benchmark 3</i>	27
3.3	<i>Implementación de los Métodos Numéricos</i>	28
3.4	<i>Resultados Numéricos de los Benchmarks</i>	29
3.4.1	<i>Benchmark 1</i>	29
3.4.2	<i>Benchmark 2</i>	30
3.4.3	<i>Benchmark 3</i>	31
3.5	<i>Resultados Numéricos del modelo</i>	33
3.5.1	<i>Caso estacionario y dinámico</i>	39
CAPÍTULO 4		42
4	Conclusiones y Recomendaciones	43
4.1	Conclusiones	43
4.2	Recomendaciones	44
5	BIBLIOGRAFÍA	45

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1	Norma L^2 del error correspondiente a la solución aproximada con polinomios de grado 5 para DG y 100 particiones del espacio. . . .	30
3.2	Norma L^2 del error correspondiente a la solución aproximada con polinomios de grado 1 para DG y 100 particiones del espacio. . . .	31
3.3	Norma L^2 del error correspondiente a la solución aproximada con polinomios de grado 5 para DG y 100 particiones del espacio. . . .	33
3.4	Solución aproximada de la Temperatura y Humedad del Gas, obtenida con 100 elementos; proyectada sobre el eje X para distintos tiempos.	35
3.5	Solución aproximada de la Temperatura y Humedad del Sólido, obtenida con 100 elementos; proyectada sobre el eje X para distintos tiempos.	36
3.6	Solución aproximada de la Temperatura y Humedad del Gas, obtenida con 100 elementos; proyectada sobre el eje t para distintos x.	37
3.7	Solución aproximada de la Temperatura y Humedad del Sólido, obtenida con 100 elementos; proyectada sobre el eje t para distintos x.	38
3.8	Solución del modelo matemático del secador rotatorio en estado estacionario, usando LSRK	41
3.9	Solución del modelo matemático del secador rotatorio en estado dinámico, usando LSRK	42

ÍNDICE DE CUADROS

1.1	Comparación de Métodos	14
3.1	Error L^2 para DG y MOL. T=2	29
3.2	Error L^2 para DG y MOL. T=0.5	31
3.3	Error L^2 para DG y MOL. T=0.25	32
3.4	Tabla de parametros	34

CAPÍTULO 1

1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo se propone la solución aproximada de un modelo matemático empleado para simular el fenómeno de transferencia de calor y masa de un secador rotatorio mediante un método numérico adecuado para el tipo de ecuaciones que describen al modelo. En este capítulo, primero se plantea el problema que surge en el proceso de secado industrial y su importancia. Luego, se introduce a las ecuaciones con las que se trabaja y su teoría. Se describe el modelo matemático que se propone aproximar, y se presentan los métodos que se usaron para la solución numérica del modelo elegido.

1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Actualmente, la sociedad demanda una mejor calidad en los productos de consumo diario, mayor productividad, así como también operaciones más amigables con el ambiente, mayor eficiencia energética y reducción de desperdicio de material. "El proceso de secado es, sin duda, una de las operaciones más intensas en cuanto al uso de energía en la industria, pues la mayoría de los secadores operan con baja eficiencia térmica"(Yliniemi et al., 1998).

El control de las variables de operación (como la temperatura y la humedad)

en el proceso de secado industrial del azúcar es necesario para mantener las tasas de transferencia de masa y calor, con el fin de garantizar un producto final con los estándares de calidad. Por lo tanto, la simulación dinámica de estos fenómenos de transferencia, mediante un modelo matemático, es una herramienta fundamental para establecer las estrategias de control sobre el proceso.

Modelos matemáticos y simulaciones para procesos de secado a nivel industrial han sido desarrollados para ser aplicados a diversos productos (Castaño et al. 2012). Para el secado de azúcar se han propuesto modelos y simulaciones como los que han presentado Savaresi et al. (2001), Sheehan et al.(2005) y Britton et al.(2006), pero en estado estacionario. Por otro lado, Douglas et al.(1993) y Contreras y Torrealba (2001) han presentado modelos y simulaciones dinámicas para la transferencia de masa y calor en secadores rotatorios aplicados para el secado de azúcar, pero en estos trabajos no se analizó desde el punto de vista matemático el planteamiento del modelo y los métodos numéricos empleados. Recientemente, Souza et al.(2021) presenta el modelado y la simulación de la transferencia de masa y calor en un secador rotatorio industrial, pero en estado estacionario y empleando un *software* comercial que implementa un método numérico de colocación.

En la actualidad, no se han encontrado publicaciones sobre la propuesta de métodos numéricos apropiados para la aproximación de estos modelos en estado dinámico. Por lo antes expuesto, en este trabajo se propone la aproximación de un modelo dinámico mediante un método numérico apropiado, para la simulación de la transferencia de masa y calor en un proceso industrial de secado de azúcar.

1.2 JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

La agroindustria azucarera es uno de los principales sectores productivos del país, con la mayor producción en los ingenios azucareros ubicados en las provincias Guayas, Los Ríos y Cañar. Dentro de todos los procesos en los ingenios azucareros, el de secado es importante para obtener un producto terminado, con un nivel adecuado para el comercio. (Souza et al., 2021)

El proceso de secado es delicado, pues un cambio en cualquier variable relacionada con el transporte del material a través del equipo de secado, tal como la retención de partículas o la tasa de flujo de entrada, resulta en una variación significativa de las tasas de transferencia de calor y masa necesarias para lograr un secado adecuado. Por ejemplo, un alto contenido de humedad da como resultado azúcar que se solidifica así como una temperatura de salida alta da como resultado azúcar que cambia de color. El resultado de este trabajo puede proporcionar una herramienta de soporte que ayude a establecer estrategias de control sobre las variables que afectan a estos fenómenos, durante el tiempo de secado.

El propósito de este trabajo es proponer la aproximación de un modelo matemático relacionado con la transferencia de masa y calor de un proceso de secado industrial de azúcar, mediante un método numérico apropiado. Esta aproximación permite generar simulaciones que servirían de soporte en las decisiones que toman los empresarios para garantizar estándares de calidad y por tanto maximizar las utilidades, ejecutando ensayos menos invasivos, en menor tiempo, con resultados más acordes a la realidad.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 *Objetivo general*

Resolver un modelo matemático utilizado para la simulación de la transferencia de masa y calor en un secador de azúcar, mediante un método numérico.

1.3.2 *Objetivos específicos*

1. Analizar el modelo matemático de transferencia de masa y calor en un secador rotatorio para su clasificación.
2. Usar un método numérico apropiado para la discretización del modelo de transferencia de masa y calor.
3. Implementar en un computador el método numérico, para la simulación de transferencia de masa y calor del proceso de secado industrial de azúcar.

1.4 MARCO TEÓRICO

El proceso de secado de sólidos consiste en extraer pequeñas cantidades de agua u otros líquidos de un material sólido, con el fin de reducir el porcentaje de humedad presente en el mismo, hasta llegar a niveles aceptables dependiendo del producto. Cuando un sólido húmedo es sujeto al proceso de secado, ocurren dos fenómenos a la vez, hay una transferencia de calor del gas para evaporar la superficie húmeda del sólido, y una transferencia de humedad interna a la superficie del sólido, para su subsecuente evaporación. (Mujumdar, 1995)

En este proceso de secado de azúcar, intervienen fenómenos de transferencia de masa y de calor que son modelados mediante balances macroscópicos de estas cantidades. De estos balances se obtiene modelos matemáticos formulados en términos de ecuaciones diferenciales parciales no lineales hiperbólicos con condiciones de frontera y condiciones iniciales (Contreras y Torrealba, 2001). El tipo de no-linealidad en estos modelos, conlleva el uso de métodos numéricos apropiados para aproximar la solución. Además, el término de convección requiere un tratamiento adecuado para evitar inestabilidad numérica en las aproximaciones. Por esta razón se ha desarrollado una familia de métodos numéricos específicos para la solución de sistemas hiperbólicos de leyes conservadas (LeVeque y Levque, 1992). Dentro de esta familia se tiene a los métodos variacionales aproximados y estabilizados. Uno de estos métodos es el de Galerkin discontinuo, el cual se usa en este trabajo para obtener la aproximación de la solución de las ecuaciones que rigen la transferencia de masa y calor.

1.4.1 Secadores

Según Treybal et al.(1988), los métodos de secado se pueden clasificar, por su método de operación, en secado por lotes y en secado continuo.

El secado por lotes es de carácter no estacionario. En este tipo de método la operación del secador termina en el momento en que se extrae todo el material ingresado, luego se carga con más material y empieza de nuevo la operación. Esta operación puede ser costosa, por lo que es poco usada a nivel industrial, se limita a operaciones pequeñas, a plantas de prueba, a investigaciones, o para el secado de materiales costosos.

Por otro lado, en el secado continuo se añade el material y el gas continuamente, y se obtiene el material seco sin interrupción. Este método se clasifica de acuerdo con la obtención de calor en: directo, donde el secado se da por contacto entre los sólidos y el gas caliente; e indirecto, donde el calor se transfiere a partir del contacto entre una pared con un sólido. En consecuencia, el secado continuo tiene ventajas, por ejemplo, requiere un equipo pequeño en comparación con la cantidad del producto que puede secar, y este último a su vez tiene un contenido más uniforme de humedad, ya que funciona todo el tiempo con los mismos parámetros, y el costo de secado por unidad de producto es pequeño.

Además, en el método de secado continuo el sólido se mueve a través del secador mientras que está en contacto con una corriente de gas. El gas y el sólido pueden fluir en isocorriente o en contracorriente. Si el calor no se proporciona

dentro del secador ni se pierde hacia el entorno, la operación se dice adiabática; entonces, el gas perderá calor y se enfriará mientras la humedad que se evapora del sólido absorbe calor latente de evaporación. Si el calor se proporciona dentro del secador, el gas puede mantenerse a temperatura constante. (Treybal et al., 1988)

1.4.2 *Leyes de conservación*

En la mayoría de las aplicaciones de la física o ingeniería, el sistema físico de estudio se rige por un conjunto de leyes de conservación. Las ecuaciones que gobiernan la dinámica de la transferencia de masa y energía corresponden a la conservación de masa, momento y energía.

Estas leyes de conservación a menudo se escriben en forma de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, tal como se aprecia en Toro, 2013, esto es:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0$$

con

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \\ \vdots \\ u_m(x,t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ es un vector de cantidades conservadas o variables de estado,

como masa, momento y energía; y $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ es el flujo de la variable de estado.

Haciendo la función de *flujo*: $\mathbf{F} = \mathbf{AU}$, obtenemos el sistema lineal

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{AU}_x = 0, \quad (1.1)$$

con $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y solución $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Para dar contexto físico, diremos que el fenómeno se desarrolla en un dominio Ω y en un intervalo de tiempo determinado.

La ecuación (1.1) puede ser aumentada al agregar condiciones iniciales, es decir, el estado del fenómeno en el tiempo inicial, dando como resultado su variante más sencilla, conocida como ***problema de Cauchy***,

$$\begin{cases} \mathbf{U}_t + \mathbf{AU}_x = 0 \\ \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x) \end{cases} \quad (1.2)$$

Además, según Toro (2013), se dice que el *problema de Cauchy* es ***hiperbólico*** en los puntos (x, t) , si la matriz \mathbf{A} es diagonalizable, tiene m valores propios reales, y su correspondiente conjunto de m vectores propios es linealmente independiente.

1.4.2.1 Ecuación de advección en una dimensión.

Para el caso particular donde $m = 1$ y $f = au$, la ecuación se transforma en:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + a\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u(0,t) = u^0(t), \end{cases} \quad (1.3)$$

conocida como **Ecuación de Advección 1D**, la cual es una ecuación diferencial parcial que gobierna el movimiento de un campo escalar conservado cuando es influenciado por una velocidad conocida.

En caso de tener un *término de fuente* en el sistema, la ecuación (1.3) se escribe como:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + a\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = s(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u(0,t) = u^0(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

y se dice que tiene una *Ecuación de Advección no homogénea*. (LeVeque y LeVeque, 1992)

1.5 MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático surge como una herramienta para entender el fenómeno o caso de estudio, referente a secado industrial. Para este propósito, en Contreras y Torrealba (2001) se usaron balances microscópicos de masa y energía sobre el sólido y el aire caliente, circulando en isocorriente dentro de un secador

rotatorio.

Se considera el caso dinámico en una dimensión, donde la longitud del secador es la dimensión característica. Las variables de estado involucradas fueron la temperatura y humedad tanto del sólido como del aire caliente. El modelo planteado es: Encontrar $X : [0, Z] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $Y : [0, Z] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $T_S : [0, Z] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ y $T_G : [0, Z] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ tales que:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_S \phi_D X) + \frac{\partial}{\partial z}(S_S X) = -\frac{h_c a}{\lambda}(T_G - T_S), \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho_G(1 - \phi_D)Y] + \frac{\partial}{\partial z}(G_S Y) = \frac{h_c a}{\lambda}(T_G - T_S), \quad (1.6)$$

$$(1.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}[\rho_S \phi_D (C_S + C_A X)(T_S - T_0)] + \\ & \frac{\partial}{\partial z}[S_S (C_S + C_A X)(T_S - T_0)] = h_c a (T_G - T_S), \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}[\rho_S \phi_G (1 - \phi_D) [(C_S + C_A X)(T_S - T_0) + \lambda Y]] \\ & + \frac{\partial}{\partial z}[G_S [(C_G + C_V Y)(T_G - T_0) + \lambda Y]] = -h_c a (T_G - T_S), \end{aligned} \quad (1.9)$$

en donde:

- X : humedad del sólido;
- Y : humedad del gas (aire caliente y seco);
- T_S : temperatura del sólido;
- T_G : temperatura del gas;
- ρ_S : densidad del sólido;
- ρ_G : densidad del gas;

□ ϕ_D : factor de retención volumétrica definido por la relación constitutiva:

$$\phi_D = \frac{0.0037S_S}{\rho_S m N^{0.9} D} \pm \frac{9.33 \times 10^{-5} G_S}{\rho_S d_p^{0.5}}$$

siendo: S_S la velocidad del flujo de sólido a seco, G_S la velocidad del flujo de gas a seco, m la pendiente del secador, N la velocidad de rotación del secador, D el diámetro del secador y d_p es el diámetro de la partícula.

□ h_c : constante de transferencia de calor por convección;

□ a_c : área de transferencia de calor;

□ λ : calor latente de evaporación.

Finalmente, las condiciones iniciales, en $t = 0$, fueron impuestas para las variables de estado primales: $X(z, 0) = X^0(z)$, $Y(z, 0) = Y^0(z)$, $T_S(z, 0) = T_S^0(z)$ y $T_G(z, 0) = T_G^0(z)$; siendo éstas las soluciones en el estado estacionario para todo $z \in [0, L]$. También, fueron impuestas condiciones del tipo Dirichlet en $z = 0$ para todo $t \in (0, T]$: $X(0, t) = X_0(t)$, $Y(0, t) = Y_0(t)$, $T_G(0, t) = T_{G,0}(t)$, $T_S(0, t) = T_{S,0}(t)$. En estas notaciones $Z > 0$ representa la longitud del secador y $T > 0$ es una constante que denota el tiempo final considerado en la simulación dinámica del secador.

La solución de este sistema en Contreras y Torrealba (2001) fue aproximada numéricamente empleando métodos de diferencias finitas retrógradas en el espacio y el tiempo.

1.5.1 Modelo adimensional

Identificando los parámetros críticos y estimando valores físicos realistas para el caso de estudio, en Angulo y Apoung (2021), se logra una adimensionalización del sistema. También mapean las variables de estado primales en otro sistema de variables de estado, a partir del cual se verifica que dicho modelo altamente no lineal es equivalente a otro modelo semi-lineal respecto a un nuevo sistema de variables $\bar{\mathbf{u}} : [0, \bar{Z}] \times [0, \bar{T}] \rightarrow (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)^t \in \mathbf{R}^4$. Así, el sistema hiperbólico no lineal y no homogéneo adimensional (1.10), es equivalente al sistema hiperbólico semi-lineal no homogéneo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{t}} + \bar{A} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{z}} &= \bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{u}}), \quad \forall (\bar{z}, \bar{t}) \in (0, \bar{Z}] \times (0, \bar{T}], \\ \bar{\mathbf{u}}(\bar{z}, 0) &= \bar{\mathbf{u}}^0(\bar{z}), \quad \forall \bar{z} \in (0, \bar{Z}], \\ \bar{\mathbf{u}}(0, \bar{t}) &= \bar{\mathbf{u}}_0(\bar{t}), \quad \forall \bar{t} \in (0, \bar{T}], \end{aligned} \quad (1.10)$$

en donde $\mathbf{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)^t \in \mathbf{R}^4$, $\bar{A} = \text{diag}(1, \frac{\mu}{v}, 1, \frac{\mu}{v})$ y la aplicación $\bar{\mathbf{u}} \rightarrow \bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{u}}) \in \mathbf{R}^4$ tiene por componentes las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} g_{1S}(\bar{\mathbf{u}}) &= \theta_{1S} - \frac{\beta_S(\bar{u}_4 + \bar{\lambda}\bar{u}_2 - \bar{\lambda}\zeta)}{(\sigma_G - \bar{u}_2)} + \frac{\gamma_S \bar{u}_3}{(\sigma_S + \bar{u}_1)}, \\ g_{1G}(\bar{\mathbf{u}}) &= \theta_{1G} - \frac{\beta_G(\bar{u}_4 + \bar{\lambda}\bar{u}_2 - \bar{\lambda}\zeta)}{\sigma_G - \bar{u}_2} + \frac{\gamma_G \bar{u}_3}{(\sigma_S + \bar{u}_1)}, \\ g_{2S}(\bar{\mathbf{u}}) &= \theta_{2S} + \frac{\delta_S(\bar{u}_4 + \bar{\lambda}\bar{u}_2 - \bar{\lambda}\zeta)}{\sigma_G - \bar{u}_2} - \frac{\varepsilon_G \bar{u}_3}{(\sigma_S + \bar{u}_1)}, \\ g_{2G}(\bar{\mathbf{u}}) &= \theta_{2G} - \frac{\delta_G(\bar{u}_4 + \bar{\lambda}\bar{u}_2 - \bar{\lambda}\zeta)}{\sigma_G - \bar{u}_2} + \frac{\varepsilon_G \bar{u}_3}{(\sigma_S + \bar{u}_1)}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde los parámetros físicos:

$$\mu, v, \beta_S, \gamma_S, \sigma_S, \delta_S, \varepsilon_S, \beta_G, \gamma_G, \sigma_G, \delta_G, \varepsilon_G, \theta_{1S}, \theta_{1G}, \theta_{2S} \text{ y } \theta_{2G}$$

son constantes, reales y fijas.

Las componentes \bar{u}_1 y \bar{u}_2 del vector $\bar{\mathbf{u}}$ representan el contenido de humedad del

sólido y del gas, respectivamente. Las componentes \bar{u}_3 y \bar{u}_4 son las densidades de transferencia de energía que están relacionados con la temperatura \bar{T}_S del sólido y la temperatura \bar{T}_G del gas respectivamente. Se tienen dos relaciones para calcular \bar{T}_S y \bar{T}_G dadas por:

$$\bar{T}_S = \left(\frac{\bar{u}_3}{\sigma_S + \bar{u}_1} \right) - \tau_S \quad \text{y} \quad \bar{T}_G = \left(\frac{\bar{u}_4 + \bar{\lambda} \bar{u}_2 - \bar{\lambda} \zeta}{\sigma_G - \bar{u}_2} \right) - \tau_G,$$

donde τ_S y τ_G son constantes.

1.6 MÉTODOS PARA ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

Según Duran y Marche (2014) hoy en día existe una amplia gama de modelos numéricos que pueden aproximar soluciones para (1.4). Por ejemplo, el método de diferencias finitas (DF) es uno de lo más sencillos, pero no es útil para trabajar en geometrías complejas. Los métodos de volúmenes finitos (VF) son muy eficientes y en particular tienen un bajo costo computacional. Sin embargo, estos métodos suelen, a menudo, ofrecer poca precisión, por lo que se requieren algunos métodos complementarios.

El método de Galerkin Discontinuo (DG) ha despertado un gran interés durante los últimos veinte años. Este tipo de método combina los antecedentes de los métodos de elementos finitos (EF), los métodos de volúmenes finitos y los *Riemman solvers*, teniendo en cuenta la física del problema. Estos métodos pueden lograr un orden de precisión arbitrario, mediante el uso de polinomios de alto orden en los elementos y pueden, además, manejar geometrías complejas con el uso de mallas no estructuradas.

La siguiente tabla, propuesta por Hesthaven y Warburton (2007), resalta las diferencias de los métodos ya mencionados:

Tabla 1.1: Comparación de Métodos

Método	Geometría compleja	Alta precisión	Forma explícita	Leyes conservadas
DF	✗	✓	✓	✓
VF	✓	✗	✓	✓
EF	✓	✓	✗	(✓)
DG	✓	✓	✓	✓

1.6.1 Método de Galerkin Discontinuo

Para entender el uso del método, se considera el problema base, definido sobre un dominio físico Ω , con condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ y función de flujo $f(u) = au$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad x \in [L, R] = \Omega. \quad (1.12)$$

Se discretiza Ω en K *elementos* de la forma $x \in [x_l^k, x_r^k] = D^k$ y se parametriza de la forma:

$$x \in D^k : x(r) = x_l^k + \frac{1+r}{2} h^k, \quad h^k = x_r^k - x_l^k, \quad r \in [-1, 1]$$

La *solución local* o aproximación elemental, se expresa como una combinación lineal de polinomios de orden $N = N_p - 1$, con N_p el número de puntos dentro del elemento

$$x \in D^k, \quad u_h^k(x(r), t) = \sum_{n=1}^{N_p} \hat{u}_n^k(t) \psi_n(r) = \sum_{i=1}^{N_p} u_h^k(x_i^k, t) l_h^k(r) \quad (1.13)$$

donde ψ y l denotan corresponden a polinomios ortonormales de Legendre y de Lagrange, respectivamente.

Bajo este enfoque, se define la *solución global* como la suma directa de las soluciones locales. No obstante, al tratarse de soluciones aproximadas, se define el residuo, de la forma

$$R_h(x,t) = \frac{\partial u_h}{\partial t} + \frac{\partial au_h}{\partial x} \quad (1.14)$$

La esencia del método de Galerkin consiste en pedir que el Residuo sea ortogonal al subespacio generado por todas las funciones de forma. En este caso, el espacio de las funciones de forma se conforma por el espacio de polinomios ortonormales. Esto quiere decir ,

$$\int_{D^k} R_h(x,t)l(x)dx = 0, \quad 1 \leq n \leq N_p \quad (1.15)$$

Al sustituir 1.14 en 1.15 y aplicar la integración por partes, se obtiene lo que se conoce como formulación fuerte semidiscreta, como:

$$M^k \frac{d}{dt} u_h^k + S^k a u_h^k = \left[l^k(x)(a u_h^k - (a u)^*) \right]_{x_l^k}^{x_r^k} \quad (1.16)$$

donde $M_{ij}^k = (l_i, l_j)_{D^k}$ y $S_{ij}^k = (l_i, \frac{dl_j}{dx})_{D^k}$ representan a las matrices *masas* y de *rigidez*, respectivamente.

Finalmente, para discretización temporal se puede usar el método de Runge Kutta de bajo almacenamiento (LSRK, por *Low Storage Runge Kutta*) a 1.16,

obteniendo así el esquema iterativo, de la forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{du_h}{dt} &= \mathcal{L}_h(u_h, t) \\
 \mathbf{p}^{(0)} &= u^n \\
 i \in [1, \dots, 5] : & \begin{cases} \mathbf{k}^{(i)} = a_i \mathbf{k}^{(i-1)} + \Delta t \mathcal{L}_h(\mathbf{p}^{(i-1)}, t^n + c_i \Delta t) \\ \mathbf{p}^{(i)} = \mathbf{p}^{(i-1)} + b_i \mathbf{k}^{(i)} \end{cases} \quad (1.17) \\
 u_h^{n+1} &= p^{(5)}
 \end{aligned}$$

1.6.1.1 Análisis de Estabilidad y Convergencia

Al discretizar un modelo, y obtener una solución aproximada u_h , en lugar de la exacta, surge la pregunta natural: ¿El método numérico está arrojando resultados acordes a la realidad? ¿Cómo podemos asegurar que los resultados son correctos?. Aquí intervienen tres conceptos fundamentales que aseguran la correcta implementación del método numérico: estabilidad, consistencia y convergencia.

Para este propósito en Hesthaven y Warburton (2007) se desarrolla una extensa teoría. Si se tiene un sistema hiperbólico de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.18)$$

donde A es una matriz diagonalizable. Se define el error $\varepsilon(x, t) = u(x, t) - u_h(x, t)$, para el cual se define la convergencia, de la siguiente manera:

$$\forall t : \quad \lim_{dof \rightarrow \infty} \|\varepsilon(t)\|_{\Omega, h} \rightarrow 0, \quad (1.19)$$

Donde dof significa *grados de libertad* o *degrees of freedom*, el cual hace referencia a que la convergencia se puede obtener haciendo disminuir el tamaño de

las celdas, aumentando el orden del polinomio de aproximación o ambas. Esto, en general, no es fácil de hacer, no obstante, en Hesthaven y Warburton (2007) se probó consistencia y estabilidad, por lo que la convergencia del método está garantizada. Para probar la consistencia, se realiza probando que

$$\begin{cases} \lim_{dof \rightarrow \infty} \|\varepsilon(0)\|_{\Omega,h} \rightarrow 0, \\ \lim_{dof \rightarrow \infty} \|T(u(t))\|_{\Omega,h} \rightarrow 0, \end{cases} \quad (1.20)$$

donde $T(u)$ representa el error de truncamiento.

Ahora, para estudiar la estabilidad, se muestra que

$$\lim_{dof \rightarrow \infty} \|L_{ht}\|_{\Omega,h} \leq C_h \exp(\alpha_h t), \quad t \geq 0 \quad (1.21)$$

donde C_h y α_h son constantes dependientes de h .

Finalmente, para asegurar que las ondas de velocidad sean estables, se sigue del esquema numérico descrito, que el paso de tiempo debe cumplir:

$$\Delta t \leq C \frac{1}{\max(\lambda(A))} \min_{k,i} \frac{h^k}{2} (\Delta_i r) \quad (1.22)$$

donde C es una constante, $\lambda(A)$ son los autovalores de la matriz A , h^k es la longitud del elemento y $\Delta_i r$ es el espaciado de la malla entre los nodos en el elemento estándar de -1 a 1.

1.6.2 Método de líneas

El método de líneas (MOL) permite resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales usando métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. La idea básica del MOL es reemplazar las derivadas espaciales de la ecuación diferencial con aproximaciones en Diferencias Finitas (DF). Una vez hecho esto,

las derivadas espaciales ya no se expresan explícitamente en términos de las variables espaciales, por lo que, sólo queda la variable temporal. Así tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que aproxima a la ecuación en derivadas parciales original.

Para ilustrar este procedimiento, se considera la solución MOL de la ecuación (1.12). El primer paso es reemplazar la derivada espacial $\frac{\partial u}{\partial x}$ por una aproximación en DF, como:

$$\frac{\partial u(x_i, t)}{\partial x} \approx \frac{\partial u_i(t)}{\partial x} = \frac{u_i(t) - u_{i-1}(t)}{h},$$

para $i = 1, \dots, n$ y h el tamaño de la discretización espacial. Así la aproximación por MOL de (1.12) queda:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = a \frac{u_{i-1}(t) - u_i(t)}{h},$$

Ahora, el problema se escribe como un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable independiente t . La ecuación original tiene una condición inicial y una condición de frontera que ahora se traducen como:

$$u(x_i, 0) = u_0(x_i), \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$u(x_0, t) = u^0(t),$$

Ahora, se puede aplicar algún algoritmo para EDO's de valor inicial (como LSRK) para calcular una solución numérica aproximada de la EDP.

1.7 EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL PROBLEMA ESTACIONARIO

En los modelos de procesos industriales, las soluciones del estado estacionario representan las condiciones en torno de las cuales se debe operar el proceso. Es por ello, que es importante estudiar la existencia y unicidad de las soluciones que se derivan del modelo, cuando la variación temporal se hace cero. En este caso, el modelo se reduce a un problema de valor inicial para un sistema de EDO. Por ello, se enuncian los teoremas que garantizan el buen planteamiento de las soluciones estacionarias, tomados de Barbu (2010).

Teorema 1.7.1 (Picard) *Se define el problema de Cauchy, $\mathbf{u}'_i = \mathbf{f}_i(t, \mathbf{u})$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ con condiciones iniciales $\mathbf{u}_i(t_0) = \mathbf{u}^0$, donde \mathbf{f} es una función definida sobre*

$$\Lambda := \{(t, \mathbf{u}); |t - t_0| \leq a, |\mathbf{u} - \mathbf{u}^0| \leq b\}$$

Asumamos que se cumplen las siguientes condiciones

- *La función \mathbf{f} es continua en Λ .*

- *La función \mathbf{f} satisface la condición de Lipschitz para la variable u .*

Entonces existe una solución única $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ para el problema de Cauchy, definida en el intervalo $|t - t_0| \leq \delta$, con

$$\delta := \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad M := \sup_{(t, \mathbf{u}) \in \Lambda} |\mathbf{f}(t, \mathbf{u})|$$

Del mismo modo, en Barbu, 2010 se describe el teorema de Peano.

Teorema 1.7.2 (Peano) Sea $\mathbf{f} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua, definida en

$$\Lambda := \{(t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \leq a, \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0\| \leq b\}$$

Entonces el problema de Cauchy admite al menos una solución en el intervalo

$$I := [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \quad \delta := \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad M := \sup_{(t, \mathbf{u}) \in \Lambda} |\mathbf{f}(t, \mathbf{u})|$$

CAPÍTULO 2

2 METODOLOGÍA

En el presente capítulo se presenta la metodología empleada, para realizar cada uno de los objetivos específicos planteados en este trabajo. Se expone la forma en cómo se analizó el problema matemático original, reescrito en términos de variables y parámetros adimensionales. Posteriormente se presenta el proceso de discretización del modelo, mediante los métodos numéricos utilizados aquí. Finalmente, se describe la metodología para obtener las simulaciones numéricas a partir del modelo discretizado.

Esta investigación parte del enfoque cuantitativo y forma parte del tipo de diseño *descriptivo y no experimental*, pues se usó un modelo matemático que se basa en las leyes de conservación de masa y de calor involucradas en el proceso de secado.

2.1 ANÁLISIS DEL MODELO MATEMÁTICO

Para el análisis del modelo matemático se siguió la teoría explicada en la sección 1.4.2, se probó que la ecuación tiene la forma de leyes de conservación, se identificó su flujo y los términos de fuente. Luego, se identificó a la matriz \bar{A} , se obtuvieron sus autovalores con el fin de clasificar al sistema según su tipo

(hiperbólico, elíptico o parabólico).

2.2 MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS AL MODELO

El caso de estudio consistía en un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no homogéneas no lineales, mismo que fue presentado en (1.10), el cual por su complejidad fue dividido en varios subproblemas, cuya resolución se usó para la implementación final.

Para comparar el desempeño de los métodos se usó la norma L^2 a la diferencia de la solución exacta y la aproximada $u_h(x, t) - u(x, t)$.

$$\|u_h(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} (u_h(x, t) - u(x, t))^2 dx}$$

2.2.1 Criterio de selección de los métodos

En base a la tabla de los métodos descritos en 1.6, del marco teórico, se determinó que el método numérico a usarse es Galerkin Discontinuo por ser un sistema de ecuaciones es hiperbólica y de leyes conservadas, tal como se verá en el siguiente capítulo. En Hesthaven y Warburton (2007) se hace un desarrollo exhaustivo de este método, aplicado a este tipo de problemas. Además, como comparación para DG, y por su simplicidad se usó como complemento el método de líneas descrito en 1.6.2, el cuál también puede ser aplicado a ecuaciones hiperbólicas de leyes conservadas.

2.2.2 *Discretización del modelo*

Con el propósito de evaluar el desempeño de los métodos numéricos elegidos, y verificar su correcta implementación, se diseñaron problemas con la ecuación de advección semi-lineal, los cuales fueron denominados Benchmarks. Para estos problemas se consideran las soluciones exactas empleando el método de las características, y se discretizaron utilizando los procedimientos descritos en las secciones 1.6.1 y 1.6.2.

Para los *benchmarks* se consideraron tres problemas de la ecuación de advección semi-lineal con distinto término de fuente, los cuales por su comportamiento servirán para resolver el problema referente al sistema. El primero, tiene término de fuente lineal. El segundo tiene término de fuente no lineal con una raíz. Finalmente, el tercero tiene término de fuente no lineal con término racional. Todos estos problemas fueron discretizados en su variable espacial con DG y MOL, y luego su variable temporal fue discretizada con LSRK. El desempeño de los problemas se evaluó usando la norma L^2 del error entre la función exacta u y la aproximación.

Luego se eligió el método que mejor se desempeño, tuvo menor error L^2 , en los *benchmarks* y con ese se realizó la discretización espacial del modelo 1.10, y la discretización temporal con LSRK.

Una vez discretizado el modelo matemático, se programó la discretización en el software **MATLAB**, se obtuvieron los resultados y las correspondientes gráficas.

CAPÍTULO 3

3 RESULTADOS Y ANÁLISIS

En el presente capítulo se presentan los resultados obtenidos en este proyecto. Este capítulo está dividido en 3 secciones, en la primera sección se presenta el análisis del modelo matemático. En la siguiente sección se utilizan los métodos numéricos previamente analizados; como Galerkin Discontinuo (DG) y Método de Líneas (MOL), aplicado a problemas de prueba con solución exacta conocida a los que llamaremos *Benchmarks*, con el objetivo de verificar que las aproximaciones se acerquen a la solución exacta y además medir el error en norma L^2 en cada experimento numérico. En la última sección se presentan los resultados de la solución aproximada del problema del secador rotario usando Galerkin Discontinuo (DG).

3.1 ANÁLISIS DEL MODELO

El sistema (1.10) es denominado Sistema Hiperbólico de leyes de conservación, debido a las siguientes razones:

- **Leyes de conservación:** El sistema proviene de la forma de la conserva-

ción de masa y energía:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial f_i(\bar{u}_i)}{\partial \bar{z}} = g_i(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4),$$

en donde cada \bar{u}_i es la masa o la energía, $f_i(\bar{u}_i)$ es la función de flujo de la cantidad \bar{u}_i y $g_i(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$ es la función fuente o de transferencia neta.

□ **Hiperbólico:** La matriz \bar{A} es diagonal y sus autovalores son reales:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{\mu}{v}, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = \frac{\mu}{v},$$

De hecho, todos son números reales estrictamente positivos, por lo tanto la imposición de condiciones de frontera de tipo entrante es consistente con este hecho.

3.2 DISCRETIZACIÓN DE LOS BENCHMARKS

3.2.1 Benchmark 1

Se consideró la ecuación diferencial en derivadas parciales,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} = r(u), \quad (3.1)$$

con condición inicial

$$u_0(x) = e^{-x} \text{sen}(x)$$

y frontera

$$u^0(t) = e^{-at} \text{sen}(at)$$

donde $r(u) = -u$ es lo que llamaremos *término de fuente no homogéneo*; cuya solución exacta es

$$u(x, t) = e^{-(x+0.5t)} \text{sen}(x - 0.5t)$$

Para encontrar la solución aproximada se colocó (3.1) en (1.15), obteniendo

$$M^k \frac{d}{dt} u_h^k + \frac{1}{2} S^k u_h^k - \int_{x_j^k}^{x_r^k} u_h^k l(x) dx = \left[l^k(x) \left(\frac{1}{2} u_h^k - \left(\frac{1}{2} u \right)^* \right) \right]_{x_j^k}^{x_r^k} \quad (3.2)$$

Para el término dentro de la integral, se consideró la siguiente relación

$$\begin{aligned} \int_{D^k} u_h^k(x, t) l_j(x) dx &= \int_{D^k} \left(\sum_{i=1}^{N_p} u_h^k(x_i^k, t) l_j^k(x) \right) l_j(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^{N_p} \left(\int_{D^k} l_i^k(x) l_j^k(x) \right) u_h^k(x_i^k, t) \\ &= h^k M_{ij}^k u_h^k(x_i^k, t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Transformando el esquema numérico (3.2) en

$$M^k \frac{d}{dt} u_h^k + \frac{1}{2} S^k u_h^k - h^k M_{ij}^k u_h^k = \left[l^k(x) \left(\frac{1}{2} u_h^k - \left(\frac{1}{2} u \right)^* \right) \right]_{x_j^k}^{x_r^k}$$

De igual forma, se obtuvo el esquema por MOL, resultando en:

$$\frac{du_i}{dt} = -1u_i + \frac{1}{2} \frac{u_{i-1} - u_i}{h} \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.4)$$

Ambos esquemas fueron implementados en MATLAB, usando **LSRK**, donde se obtuvo el error en norma L^2 .

3.2.2 Benchmark 2

Se consideró la ecuación diferencial en derivadas parciales, de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} = -2\sqrt{u}, \quad (3.5)$$

con condiciones de inicial y de frontera dadas por:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \exp\left(-\frac{0.3}{1-|x|^2}\right) \\ u^0(t) &= \frac{1}{4} \left[2\sqrt{\exp\left(-\frac{0.3}{1-|0.5t|^2}\right)} - 2t \right]^2 \end{aligned}$$

y solución exacta

$$u(x,t) = \frac{1}{4} \left[2\sqrt{\exp\left(-\frac{0.3}{1-|x-0.5t|^2}\right)} - 2t \right]^2$$

El esquema numérico de DG para este problema se obtuvo reemplazando (3.5) en (1.15), llegando a

$$M^k \frac{d}{dt} u_h^k + \frac{1}{2} S^k u_h^k - 2 \int_{x_l^k}^{x_r^k} \sqrt{u_h^k} l(x) dx = \left[l^k(x) \left(\frac{1}{2} u_h^k - \left(\frac{1}{2} u \right)^* \right) \right]_{x_l^k}^{x_r^k}$$

Para este esquema, el término integral no puede ser resuelto de forma analítica, por lo que se implementó una *Cuadratura Gaussiana*, obteniendo

$$M^k \frac{d}{dt} u_h^k + \frac{1}{2} S^k u_h^k - h^k w \cdot \sqrt{u_h^k} = \left[l^k(x) \left(\frac{1}{2} u_h^k - \left(\frac{1}{2} u \right)^* \right) \right]_{x_l^k}^{x_r^k}$$

Para su contraparte usando MOL, el esquema resultó en:

$$\frac{du_i}{dt} = -2\sqrt{u_i} + \frac{1}{2} \frac{u_{i-1} - u_i}{h} \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.6)$$

3.2.3 Benchmark 3

Un segundo ejemplo fue propuesto para hacer las mismas comparaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 5 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{u^2 + 3}, \quad (3.7)$$

con condición inicial

$$u_0(x) = \text{sen}(|x| + 10)$$

condición de frontera

$$u^0(t) = \sqrt{3} \tan \left(\sqrt{\frac{3}{2}} t + \arctan \left[\sqrt{\frac{1}{3}} \text{sen}(|5t| + 10) \right] \right)$$

y solución exacta

$$u(x,t) = \sqrt{3} \tan \left(\sqrt{\frac{3}{2}} t + \arctan \left[\sqrt{\frac{1}{3}} \text{sen}(|x - 5t| + 10) \right] \right)$$

Se procedió de la misma forma que se usó para el caso previo, obteniendo el

siguiente esquema numérico de DG

$$M^k \frac{d}{dt} u_h^k + 5S^k u_h^k + \frac{h^k}{2} w \cdot \frac{2}{(u_h^k)^2 + 3} = \left[l^k(x) \left(\frac{1}{2} u_h^k - \left(\frac{1}{2} u \right)^* \right) \right]_{x_l^k}^{x_r^k} \quad (3.8)$$

Con MOL se obtuvo:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{2}{(u_i)^2 + 3} + 5 \frac{u_{i-1} - u_i}{h} \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.9)$$

3.3 IMPLEMENTACIÓN DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Para la implementación computacional de los esquemas numéricos presentados en la sección anterior, se utilizó como base a los códigos desarrollados en Hesthaven y Warburton, 2007; adicional a esto, se desarrollaron distintas rutinas en Matlab, donde se da solución a los benchmarks y al modelo matemático de transferencia de masa y calor.

Para esto se creó un repositorio en **GitHub**, donde se almacenó la información y su descripción; el enlace es el siguiente https://github.com/frankandres98/Galerkin_Codes.git

3.4 RESULTADOS NUMÉRICOS DE LOS BENCHMARKS

3.4.1 Benchmark 1

En la tabla 3.1, se reportan los valores del error L^2 de las soluciones numéricas de los esquemas $P^1 - DG$, $P^2 - DG$ y $P^3 - DG$, y con el esquema MOL , para $t=2$.

Se pudo observar que con $LSRK$, en P^1 la aproximación por DG se dispara conforme aumentaron las particiones en el espacio, mientras que con MOL el error se reduce en un orden (de -02 a -03). Con P^2 , el error aún crece, pero tiene una reducción considerable. En P^3 ya se ve una reducción consistente en el orden de magnitud del error (de -03 a -04) conforme aumentan las particiones en el espacio, superando a MOL .

Tabla 3.1: Error L^2 para DG y MOL. T=2

$L^2 - error$		
	$LSRK$	
	DG	MOL
$P^1 - DG$		
10	4.76E-01	1.79E-02
20	5.45E-01	1.85E-02
50	2.33E+01	7.90E-03
100	8.18E+04	4.10E-03
$P^2 - DG$		
10	2.01E-02	1.79E-02
20	5.25E-02	1.85E-02
50	1.63E-01	7.90E-03
100	2.06E+00	4.10E-03
$P^3 - DG$		
10	4.80E-03	1.79E-02
20	2.40E-03	1.85E-02
50	9.84E-04	7.90E-03
100	4.84E-04	4.10E-03

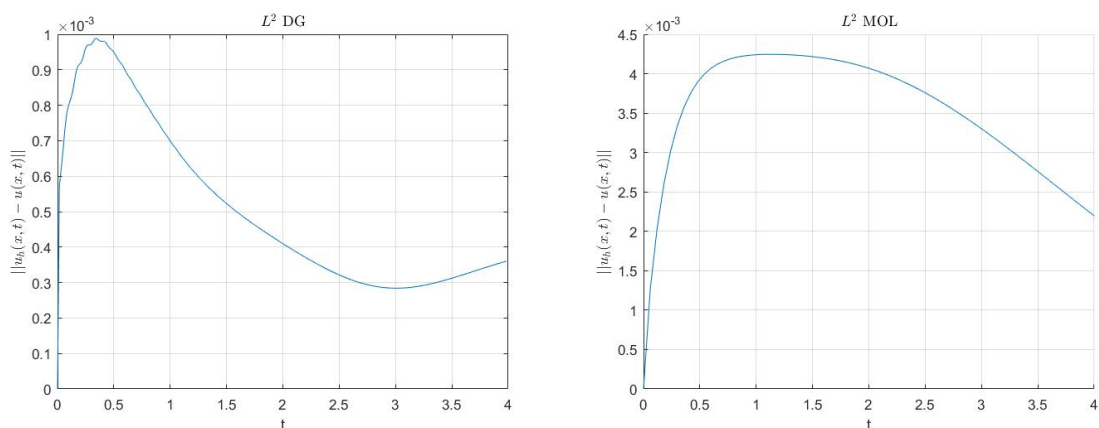


Figura 3.1: Norma L^2 del error correspondiente a la solución aproximada con polinomios de grado 5 para DG y 100 particiones del espacio.

3.4.2 Benchmark 2

En la tabla 3.2, se reportan los valores del error L^2 de las soluciones numéricas de los esquemas $P^1 - DG$, $P^2 - DG$ y $P^3 - DG$, y los valores con el esquema MOL , usando $LSRK$, para $t=0.5$.

Se pudo observar que con $LSRK$, en P^1 la aproximación por DG tuvo menor error comparado a MOL conforme aumentaron las particiones. Con P^2 , el error fue casi el mismo que antes para ambos casos. En P^3 hay una reducción en el orden de magnitud del error, pero no por mucha diferencia.

En este caso se pudo observar que en general la mejor aproximación fue con polinomios de grado uno, ya que aunque con $LSRK$ hubo una ligera mejora aumentando el orden de los polinomios, no justifica su coste computacional.

Tabla 3.2: Error L^2 para DG y MOL. T=0.5

$L^2 - error$		
	LSRK	
	DG	MOL
$P^1 - DG$		
10	1.41E-02	2.13E-02
20	7.50E-03	1.11E-02
50	3.10E-03	5.00E-03
100	1.60E-03	2.60E-03
$P^2 - DG$		
10	1.50E-02	2.13E-02
20	6.40E-03	1.11E-02
50	2.30E-03	5.00E-03
100	1.10E-03	2.60E-03
$P^3 - DG$		
10	1.13E-02	2.13E-02
20	4.90E-03	1.11E-02
50	2.00E-03	5.00E-03
100	9.89E-04	2.60E-03

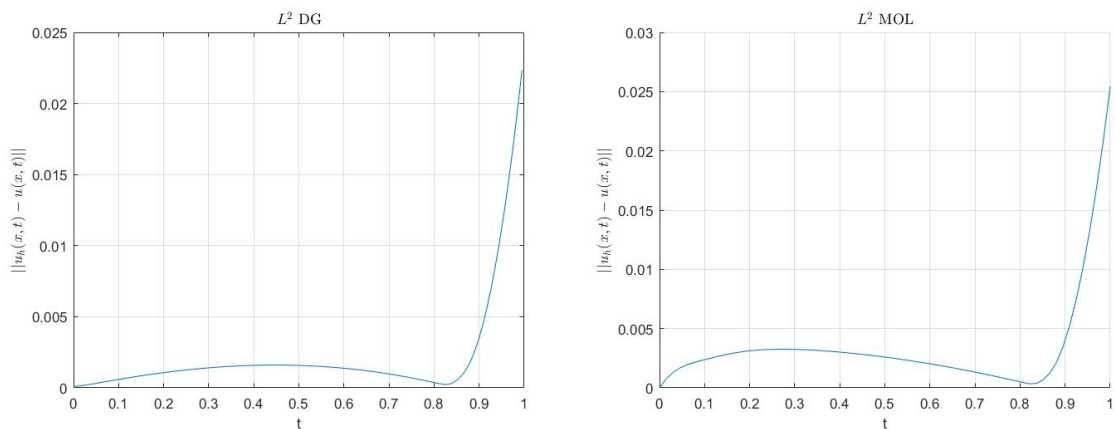


Figura 3.2: Norma L^2 del error correspondiente a la solución aproximada con polinomios de grado 1 para DG y 100 particiones del espacio.

3.4.3 Benchmark 3

En la tabla 3.3, se reporta los valores del error L^2 de las soluciones numéricas de los esquemas $P^1 - DG$, $P^2 - DG$ y $P^3 - DG$. A su vez se reportan los valores con el esquema MOL . En todos los casos usando $ODE45$ y $LSRK$, para $t=0.25$.

Se puede observar que con *LSRK*, en P^1 la aproximación por *DG* tiene un ligero aumento en el error, pero siempre se mantiene en el mismo orden, y esta es muy similar al error de *MOL* conforme aumentaron las particiones. Con P^2 , el error decrece, pero se mantiene en el mismo orden. En P^3 se ve un aumento en el error, comparado al anterior.

En este caso se pudo observar que la mejor aproximación fue con polinomios de grado 2, pero en general las aproximaciones no fueron las mejores debido a que el orden de aproximación siempre es -01.

Tabla 3.3: Error L^2 para DG y MOL. T=0.25

$L^2 - error$		
	LSRK	
	DG	MOL
$P^1 - DG$		
10	1.56E-01	1.57E-01
20	1.73E-01	1.71E-01
50	1.85E-01	1.82E-01
100	1.89E-01	1.87E-01
$P^2 - DG$		
10	1.40E-01	1.57E-01
20	1.38E-01	1.71E-01
50	1.36E-01	1.82E-01
100	1.36E-01	1.87E-01
$P^3 - DG$		
10	1.66E-01	1.57E-01
20	1.65E-01	1.71E-01
50	1.64E-01	1.82E-01
100	1.63E-01	1.87E-01

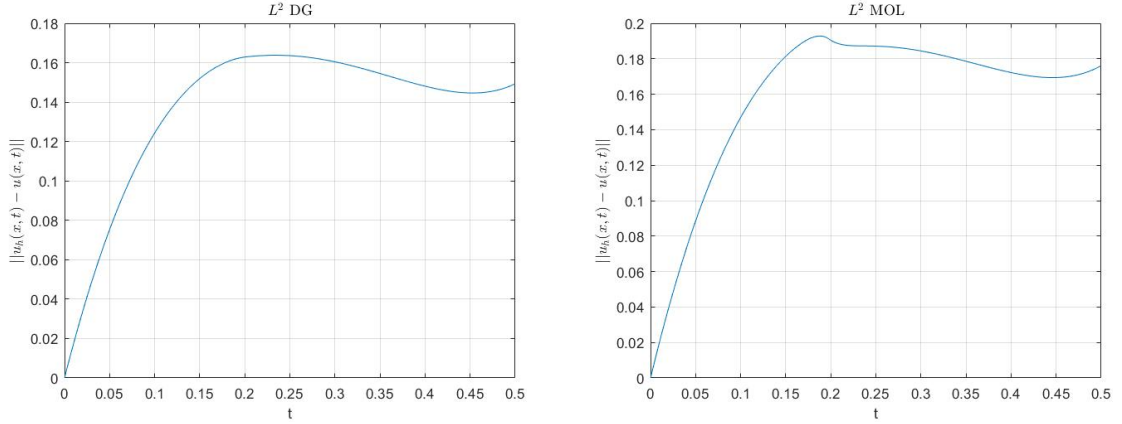


Figura 3.3: Norma L^2 del error correspondiente a la solución aproximada con polinomios de grado 5 para DG y 100 particiones del espacio.

3.5 RESULTADOS NUMÉRICOS DEL MODELO

En la presente sección se presentan los resultados de las simulaciones numéricas para el problema del secador rotatorio, mostrando las soluciones aproximadas para cada ecuación del modelo matemático.

Para el caso de estudio, el cual se encuentra en (1.10), las funciones de fuente $\bar{g}(\bar{u})$ dependen una de otra, por lo que se aplicó el esquema de DG para ecuaciones no homogéneas, obteniendo el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
 M^k \frac{d}{dt} u_h^k + S^k u_h^k + \int_{x_l^k}^{x_r^k} g_{1S}(u) l(x) dx &= \left[l^k(x) (u_h^k - (u)^*) \right]_{x_l^k}^{x_r^k} \\
 M^k \frac{d}{dt} u_h^k + \frac{\mu}{\nu} S^k u_h^k + \int_{x_l^k}^{x_r^k} g_{1G}(u) l(x) dx &= \left[l^k(x) \left(\frac{\mu}{\nu} u_h^k - \left(\frac{\mu}{\nu} u \right)^* \right) \right]_{x_l^k}^{x_r^k} \\
 M^k \frac{d}{dt} u_h^k + S^k u_h^k + \int_{x_l^k}^{x_r^k} g_{2S}(u) l(x) dx &= \left[l^k(x) (u_h^k - (u)^*) \right]_{x_l^k}^{x_r^k} \\
 M^k \frac{d}{dt} u_h^k + \frac{\mu}{\nu} S^k u_h^k + \int_{x_l^k}^{x_r^k} g_{2G}(u) l(x) dx &= \left[l^k(x) \left(\frac{\mu}{\nu} u_h^k - \left(\frac{\mu}{\nu} u \right)^* \right) \right]_{x_l^k}^{x_r^k}
 \end{aligned}$$

Para las simulaciones se usarán los parámetros de Angulo y Apoung, 2021 escritos en la tabla 3.4, también, tenemos las siguientes condiciones iniciales y

de contorno (constantes):

$$\bar{u}^0 = \bar{u}_0 = (1, 0, 0.21333, -0.83076)^t.$$

Tabla 3.4: Tabla de parametros

μ	18.54762
ν	1
β_S	5.61798
γ_S	5.61798
σ_S	0.20000
δ_S	0.04444
ε_S	0.04444
β_G	-5.61798
γ_G	-5.61798
σ_G	-0.70370
δ_G	-0.09877
ε_G	-0.09877
θ_{1S}	3.33067×10^{-16}
θ_{1G}	-3.33067×10^{-16}
θ_{2S}	-1.73472×10^{-18}
θ_{2G}	0
\bar{Z}	2
\bar{T}	0.75586
τ_S	0.177778
τ_G	0.177778

Gracias a la verificación con los ejercicios de prueba y el sistema homogéneo, donde ambos métodos numéricos están aproximando las soluciones acorde a lo esperado, llega el momento de implementar todo lo visto, en el problema referente al secador rotatorio, cuyo modelo matemático se encuentra descrito en (1.10). Sin embargo, debemos enunciar algunas consideraciones que se hicieron para la obtención de los resultados

- En los Benchmarks se observó un comportamiento similar entre GD y MOL en cuanto al error, por lo que usaremos GD con LSRK por su menor costo computacional.

- Se realizaron varias pruebas numéricas, con distintos refinamientos en el orden del polinomio y número de elementos, al final se determinó que con un polinomio de orden uno y con cien elementos, se obtenían los mejores resultados.

Proyecciones sobre el eje Espacial

Se obtuvieron **perfiles** de la solución aproximada, obtenida por el principal método de Galerkin Discontinuo, para esto fijamos valores en la variable espacial o temporal, y mostramos distintas proyecciones de la solución.

En la figura (3.4), se muestra la solución aproximada de T_G y \bar{u}_2 , temperatura y humedad del gas, para los tiempos 0, 0.25, 0.35, 0.51, 0.77568 sobre el eje correspondiente a la variable espacial.

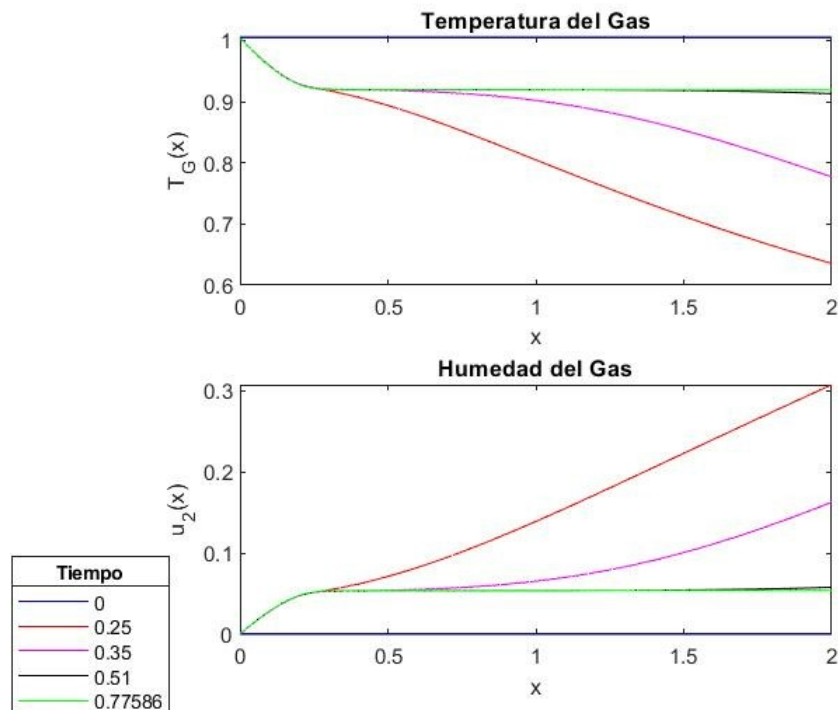


Figura 3.4: Solución aproximada de la Temperatura y Humedad del Gas, obtenida con 100 elementos; proyectada sobre el eje X para distintos tiempos.

Se observa que la temperatura del gas parte en su punto máximo en el tiempo inicial, mientras que la humedad en su punto mínimo, a medida que transcurre el proceso de intercambio de calor y humedad con el sólido, la temperatura disminuye, con ciertos picos, mientras que la humedad aumenta, pero ambas llegan a un punto donde el proceso se vuelve estacionario.

Se realizó el mismo análisis, con las variables que representan humedad y temperatura del sólido, es decir, \bar{u}_1 y T_S , fijando los mismos tiempos usados para el gas, obteniendo la figura (3.5)

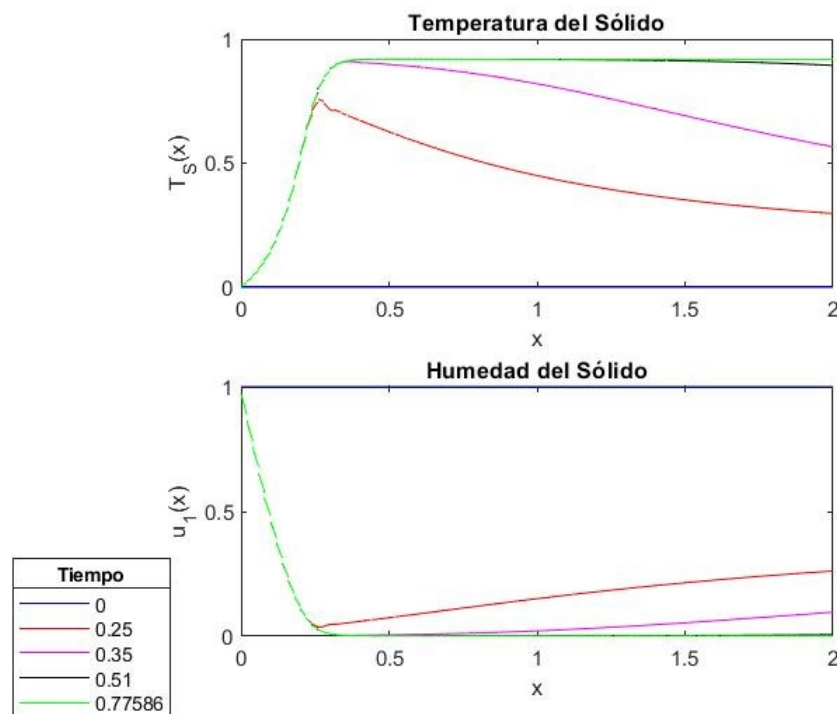


Figura 3.5: Solución aproximada de la Temperatura y Humedad del Sólido, obtenida con 100 elementos; proyectada sobre el eje X para distintos tiempos.

Notamos que la humedad del sólido comienza en su punto máximo, pues entra en el proceso de secado, a medida que transcurre el tiempo la humedad va

tendiendo a cero, dando el resultado esperado; además la temperatura aumenta hasta que al final de proceso tiende a un estado estacionario

Proyecciones sobre el eje Temporal

En la figura (3.6) se muestra la solución correspondiente a la humedad y temperatura del gas, para esto se fijaron distintos los valores para en el eje espacial, como 0, 0.2, 1 y 1.98 y se los proyecta sobre el eje temporal.

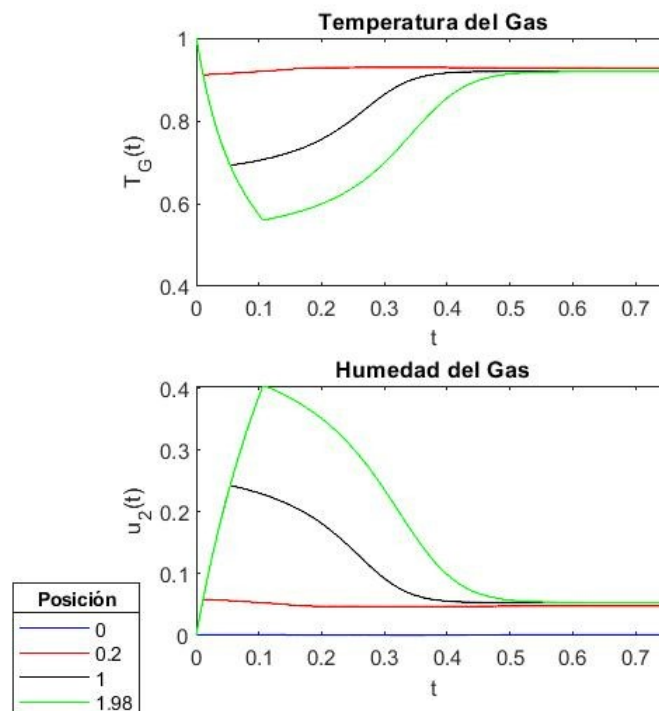


Figura 3.6: Solución aproximada de la Temperatura y Humedad del Gas, obtenida con 100 elementos; proyectada sobre el eje t para distintos x .

Se aprecia que para distintas posiciones en el eje de secado, la temperatura y humedad en el tiempo tienden a estabilizarse y llegar a un estado estacionario.

Del mismo modo, en la figura (3.7) se analizan las variables referentes al sólido, es decir, humedad y temperatura, obtenemos los siguientes resultados

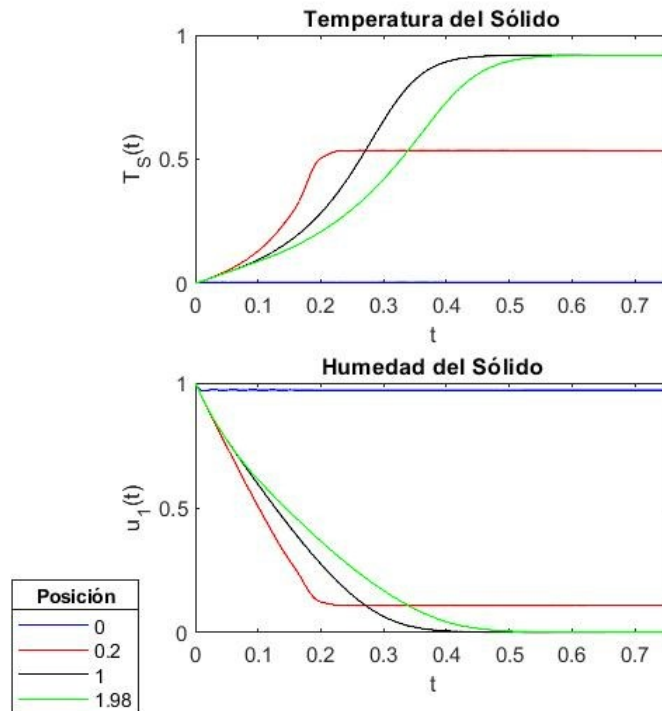


Figura 3.7: Solución aproximada de la Temperatura y Humedad del Sólido, obtenida con 100 elementos; proyectada sobre el eje t para distintos x .

Donde se ve que el sólido en su posición inicial comienza completamente húmedo en todo instante de tiempo, mientras que su temperatura es cero, cuando comienza a desplazarse sobre el secador se observa como humedad y temperatura disminuyen y aumentan respectivamente, sin embargo, en ambas soluciones el proceso tiende a ser estacionario, que es lo que esperaríamos de este proceso.

3.5.1 Caso estacionario y dinámico

En esta sección se analizará el problema en estado estacionario y dinámico, se plantea una proposición donde se demuestra la existencia y unicidad de la solución para ambos problemas, posteriormente se usa LSRK para encontrar la aproximación.

Estado Estacionario

Proposición 3.5.1 (Existencia y Unicidad en Estado Estacionario) *Considere el problema (1.10) en estado estacionario, es decir,*

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{1}{a}\bar{g}(\bar{u}); & x \in [0, x_f] \\ \bar{u}(0) = (1, 0, 0.21333, -0.83076) \end{cases} \quad (3.10)$$

donde g una función de variable real en cada componente definida sobre la región

$$\Delta := \{(t, x); 0 \leq t \leq 0.75586, 0 \leq x \leq 2\}$$

Entonces existe una solución única $u = u(t)$, definida sobre el intervalo $0 \leq t \leq \delta$,

con

$$\delta := \min\left(0.75586, \frac{2}{M}\right), \quad M := \sup_{(t,x) \in \Delta} |g(t,x)|$$

Demostración: La continuidad es inmediata, pues los puntos de discontinuidad se presentan en regiones externas a donde se plantea el problema.

Para verificar la condición de Lipschitz, tomamos la primera componente de (1.11),

del sistema (1.10). Sea $\mathbf{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$, $\mathbf{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)$, con $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$.

$$\begin{aligned}
\|g_{1S}(\mathbf{u}) - g_{1S}(\mathbf{v})\| &= \\
&= \left| \frac{1}{a} \right| \left\| \beta_S \left(\frac{\bar{u}_4 + \bar{\lambda} \bar{u}_2 - \bar{\lambda} \zeta}{\sigma_G - \bar{u}_2} - \frac{\bar{v}_4 + \bar{\lambda} \bar{v}_2 - \bar{\lambda} \zeta}{\sigma_G - \bar{v}_2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left| \frac{1}{a} \right| \gamma_S \left(\frac{\bar{u}_3}{\sigma_S + \bar{u}_1} - \frac{\bar{v}_3}{\sigma_S + \bar{v}_1} \right) \right\| \\
&\leq \left| \frac{1}{a} \right| \left\| \beta_S \right\| \frac{1}{\sigma_G - \bar{u}_2} \left\| \bar{u}_4 + \bar{\lambda} \bar{v}_2 - \bar{u}_4 - \bar{\lambda} \bar{u}_2 \right\| \\
&\quad + \left| \frac{1}{a} \right| \left\| \gamma_S \right\| \frac{1}{\sigma_S + \bar{u}_1} \left\| \bar{u}_3 - \bar{v}_3 \right\| \\
&\leq K_1 (\|\bar{v}_4 - \bar{u}_4\| + \bar{\lambda} \|\bar{v}_2 - \bar{u}_2\|) + K_2 \|\bar{v}_3 - \bar{u}_3\| \\
&\leq M \max_{1 \leq n \leq 4} \|\bar{u}_n - \bar{v}_n\|
\end{aligned}$$

Comprobando que la primera componente del sistema cumple la condición de Lipschitz, por ende usando el teorema de Picard, se demuestra que tiene solución $u_1(x)$. Esta demostración se puede replicar para las siguientes componentes del sistema para el caso dinámico, por lo que se ha probado el buen planteamiento del problema.

Del mismo modo se demostró la dependencia en las condiciones iniciales, bastó demostrar que

$$\|\bar{u}\|_\infty \leq \beta \|\bar{u}^0\|_\infty$$

Lo que resulta inmediato, usando el principio Arquimedeano de los números reales.

Simulación Numérica

El modelo matemático que usaremos es el descrito en (3.11), para el cual ya se probó que la solución existe y es única, por ello se usó LSRK para encontrar

las aproximaciones del sistema, las cuales se presentan en la figura (3.8)

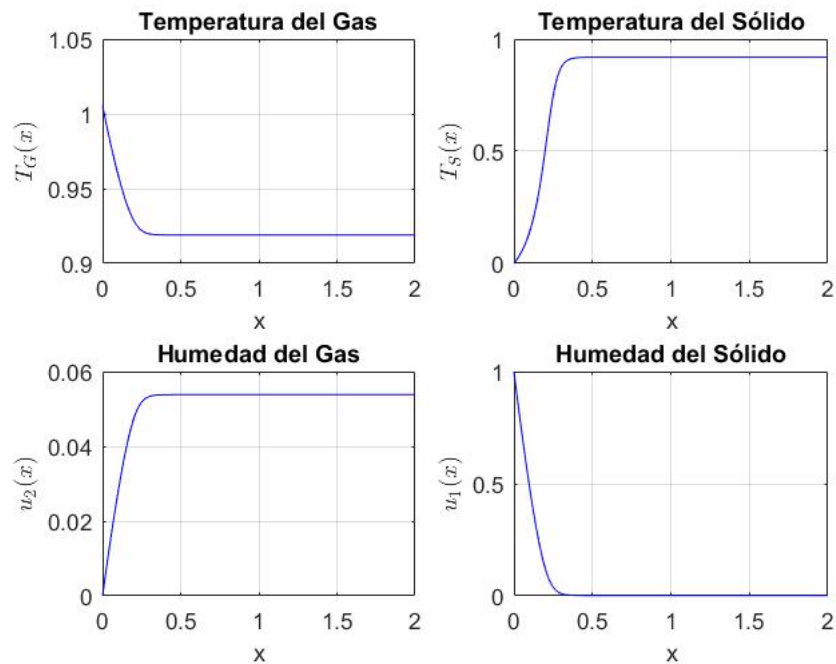


Figura 3.8: Solución del modelo matemático del secador rotatorio en estado estacionario, usando LSRK

Se aprecia que para las variables que representan temperatura y humedad del gas, T_G comienza en su punto máximo, mientras que u_2 en su valor mínimo; en el proceso de secado, la temperatura del gas disminuye y la humedad aumenta, hasta que ambas se estabilizan. Del mismo modo con humedad y temperatura del sólido, T_S comienza en cero, mientras que u_1 en su valor máximo; se aprecia que la temperatura aumenta hasta estabilizarse, mientras que la humedad disminuye hasta tender a cero, lo que se espera en este proceso.

Estado Dinámico

Se estudió el estado dinámico, es decir, supondremos que el modelo depende únicamente del tiempo, esto es

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{g}(\bar{u}); & x \in [0, x_f] \\ \bar{u}(0) = (1, 0, 0.21333, -0.83076) \end{cases} \quad (3.11)$$

Usando una adaptación de la proposición previa, se puede demostrar la existencia y unicidad de las soluciones para este caso. Por lo que se buscó la aproximación usando LSRK y los resultados se presentan en la figura (3.9).

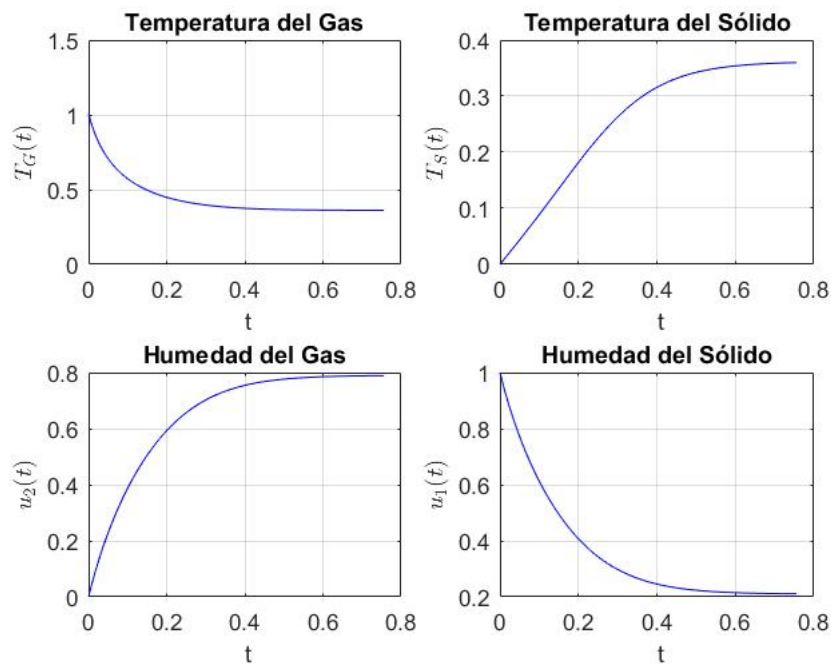


Figura 3.9: Solución del modelo matemático del secador rotatorio en estado dinámico, usando LSRK

Se observa que la temperatura del gas disminuye a lo largo del proceso, mientras que su humedad aumenta, producto del intercambio de calor con el material a ser secado. Por otro lado la temperatura del sólido aumenta y la humedad disminuye hasta tender a cero en el tiempo final, logrando el cometido.

CAPÍTULO 4

4 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones y recomendaciones de los resultados obtenidos en este trabajo, en donde se utilizó el método de Galerkin Discontinuo para hallar la solución aproximada de un modelo para un secador rotatorio.

4.1 CONCLUSIONES

- Transformar el modelo matemático del secador rotatorio, referente a sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parcial altamente no lineales en un sistema semilineal, permitió clasificar este modelo como un sistema hiperbólico y con ello aplicar los métodos numéricos que la literatura sugiere para esta clase de problemas.

- En todos los ejercicios de prueba el método de Galerkin Discontinuo demostró ser superior al Método de Líneas según lo observado en las tablas (3.1), (3.2) y (3.3), donde el error de la aproximación obtenida usando el método de Galerkin fue menor que en el método de Líneas, por lo que usando esta evidencia se optó por implementar este método en el problema del

secador rotatorio.

- ❑ Acorde a los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas, el sólido sale del secador completamente seco, de hecho el objetivo es alcanzado antes de completar la mitad del recorrido.
- ❑ Con las simulaciones se comprobó que el gas finaliza en un estado de equilibrio con menor temperatura y mayor humedad.

4.2 RECOMENDACIONES

- ❑ Se recomienda en futuros trabajos contrastar los resultados obtenidos con las simulaciones numéricas con datos recopilados de empresas azucareras, con el objetivo de medir la precisión de las aproximaciones implementadas y realizar ajustes de ser necesarios.
- ❑ Usar métodos menos complejos para problemas con condiciones de frontera e iniciales constantes, pues la evidencia nos dice que no se justifica el coste computacional.
- ❑ Para problemas con soluciones sencillas es conveniente usar polinomios de bajo orden, con el fin de evitar oscilaciones y posible fenómeno de Runge.

5 BIBLIOGRAFÍA

- Angulo, W. & Apoung, J.-B. (2021). *Sistema Hiperbolico de Leyes de Conservación y su Discretización de Volumen Finito para la Simulación de un Proceso de Secado de Sólidos Granulares*.
<https://arxiv.org/submit/3896601/start>.
- Barbu, V. (2010). *Differential Equations*. Springer Undergraduate Mathematics Series.
- Britton, P., Sheehan, M. & Schneider, P. (2006). A physical description of solids transport in flighted rotary dryers. *Powder Technology*, 165(3), 153-160.
- Castaño, F., Rubio, F. R. & Ortega, M. G. (2012). Modeling of a cocurrent rotary dryer. *Drying Technology*, 30(8), 839-849.
- Douglas, P., Kwade, A., Lee, P. & Mallick, S. (1993). Simulation of a rotary dryer for sugar crystalline. *Drying Technology*, 11(1), 129-155.
- Duran, A. & Marche, F. (2014). Recent advances on the discontinuous Galerkin method for shallow water equations with topography source terms. *Computers & Fluids*, 101, 88-104.
- Hesthaven, J. S. & Warburton, T. (2007). *Nodal discontinuous Galerkin methods: algorithms, analysis, and applications*. Springer Science & Business Media.

- J. Contreras, R. T. (2001). *Dinámica de la Transferencia de Materia y Energía en un Proceso de Secado*.
- LeVeque, R. J. & Leveque, R. J. (1992). *Numerical methods for conservation laws* (Vol. 132). Springer.
- Mujumdar, A. S. (1995). *Handbook of industrial drying, revised and expanded* (Vol. 2). CRC Press.
- Savaresi, S. M., Bitmead, R. R. & Peirce, R. (2001). On modelling and control of a rotary sugar dryer. *Control engineering practice*, 9(3), 249-266.
- Sheehan, M., Britton, P. & Schneider, P. (2005). A model for solids transport in flighted rotary dryers based on physical considerations. *Chemical Engineering Science*, 60(15), 4171-4182.
- Souza, G., Avendano, P., Francisquetti, M., Ferreira, F., Duarte, C. & Barrozo, M. (2021). Modeling of heat and mass transfer in a non-conventional rotary dryer. *Applied Thermal Engineering*, 182, 116118.
- Toro, E. F. (2013). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Springer Science & Business Media.
- Treybal, R. E., Garcia Rodriguez, A. Et al., (1988). *Operaciones de transferencia de masa*.
- Yliniemi, L., Koskinen, J. & Leiviskä, K. (1998). Advanced control of a rotary dryer. *IFAC Proceedings Volumes*, 31(23), 119-124.