CAPITULO 1

"Nuestras almas, cuyas facultades pueden comprender la maravillosa arquitectura del mundo, y medir el curso de cada planeta vagabundo, aún escalan tras el conocimiento infinito"

Christopher Marlowe.

VECTORES EN R^3

1.1 MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

Imaginémonos que queremos manejar el desplazamiento de un punto en el plano. Con un poco de creatividad podríamos comprender que el arreglo (a, b) sería suficiente para manejar este desplazamiento; donde el número real ***a*** representaría la sombra del desplazamiento sobre un eje horizontal (control horizontal del desplazamiento) y el número real ***b*** la sombra de este desplazamiento sobre un eje vertical (control vertical del desplazamiento); de esta forma convenimos que el "par ordenado" (a, b) representa la posición de un punto y solo uno en R^2 (Filosofía de Descartes). Con igual razonamiento un arreglo (a, b, c) representaría la posición de un punto en R^3 y así podríamos concluir que un arreglo $(a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n)$ representa la posición de uno y solo un punto en R^n.

Magnitudes, como el desplazamiento de un punto en un espacio cualquiera, que necesitan de un arreglo numérico para su identificación, se llaman **MAGNITUDES VECTORIALES** y el arreglo numérico que las representa es la **TERNA** del vector, los números reales que componen el arreglo son las coordenadas del vector, bajo este criterio en Física tenemos magnitudes vectoriales como la fuerza, velocidad, aceleración, etc. que necesitarían de una terna para su total identificación. Las magnitudes que con un simple valor numérico quedan totalmente identificadas, como cuatro estudiantes, dos árboles, cinco edificios, son **MAGNITUDES ESCALARES** y no necesitan de una terna para su identificación.

Un punto, un vector o una terna la identificaremos como una magnitud vectorial.

Emplearemos la siguiente notación para la recta real, el plano, el espacio tridimensional y el espacio n dimensional:

R^1 o simplemente R para la recta real
R^2 para todos los pares ordenados (x, y)
R^3 para todas las ternas ordenadas (x, y, z)
R^n para todas las ternas ordenadas $(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$

Ejemplo 1-1 La terna (2, 3, -6); representa un vector o punto en R^3.
La terna (-1, 4, -2, 8, 10); representa un vector o punto en R^5. ✓

Convenimos con los lectores en usar letras mayúsculas para representar magnitudes vectoriales (excepto i, j, k que se usan para representar los vectores unitarios en R^3 y e_i que usaremos para representar vectores unitarios en R^n), y minúsculas para representar magnitudes escalares. Con este criterio escribiremos al vector V en R^3 como: V = (x, y, z) o al vector V en R^n como: $V = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$ recordar que en la terna el orden de los números reales que la componen ***no puede cambiar***.

Decimos que dos vectores $V_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $V_2 = (x_2, y_2, z_2)$ son iguales si, y solo si:

$$\mathbf{x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2.}$$

Son paralelos si, y solo si:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Propiedades de la igualdad vectorial

$A = A$	Reflexiva
$A = B \Rightarrow B = A$	Simétrica
$A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$	Transitiva

EL VECTOR CERO, que lo designaremos como ϕ , será:

$\phi = (0,0) \in R^2$

$\phi = (0, 0, 0) \in R^3$

$\phi = (0, 0, 0, \ldots\ldots\ldots, 0) \in R^n$

NORMA DE UN VECTOR

Sea $A = (a_1, a_2, a_3, \ldots.. a_n) \in R^n$

$$\| A \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{1=1}^{n} a_i^2}$$

La norma de un vector será siempre un número real no negativo, la norma del vector ϕ es cero.

VECTOR UNITARIO

Si $\hat{V}$ es un vector unitario entonces $\| \hat{V} \| = 1$

Todo vector, que no sea el vector cero, puede hacerse unitario dividiéndolo para su norma:

$A = (a_1, a_2, a_3, ...a_n) \in R^n$

$$\hat{A} = \frac{A}{\|A\|}$$

$$\|\hat{A}\| = \left\| \frac{A}{\|A\|} \right\| = \frac{1}{\|A\|} \times \|A\| = 1$$

Los vectores unitarios son importantes para dar la característica vectorial a cualquier magnitud escalar.

Ejemplo 1-2 Encontrar un vector unitario en la dirección del vector V = (2, -4, 1)

Solución:

$$\hat{V} = \frac{(2,-4,1)}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2}}$$

$$\hat{V} = \frac{(2,-4,1)}{\sqrt{21}}$$

$$\hat{V} = \left(\tfrac{2}{\sqrt{21}}, \tfrac{-4}{\sqrt{21}}, \tfrac{1}{\sqrt{21}}\right)$$

1.2 SISTEMA COORDENADO TRIDIMENSIONAL, GRÁFICO DE PUNTOS EN R3.

Los puntos en el espacio R^3 pueden representarse de manera análoga a como se lo hace en el plano cartesiano. Para realizar esta representación escogemos tres rectas dirigidas perpendiculares entre sí que se corten en un punto común del espacio, a estas rectas se las conoce como: ***eje x***, ***eje y***, ***eje z***, y el punto común de corte se lo llama origen, como se muestra en la *figura 1-1*. Se define una escala adecuada sobre cada uno de los ejes y se representan los números reales de la terna (x, y, z) de tal forma que el valor de <u>x</u> se lo representa sobre el eje x, positivos adelante del origen y negativos atrás, el valor <u>y</u>, sobre el eje y, positivos a la derecha del origen y negativos a la izquierda, el valor <u>z</u>, sobre el eje z, positivos arriba del origen y negativos abajo es común llamar a este conjunto de ejes como <u>*Sistema de Coordenadas Cartesianas en el Espacio*</u>, la característica de este sistema es que existe una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio R^3 y la terna (x, y, z).

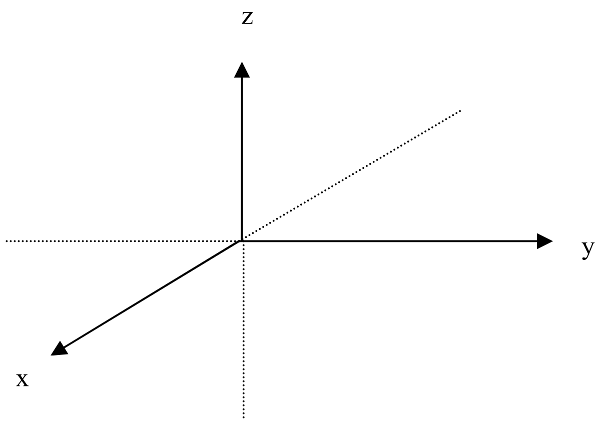


Figura 1-1

La *figura 1-2* representa el gráfico de los puntos (2, -1, 5), (-2, 3, 6) y (3, 5, -4)

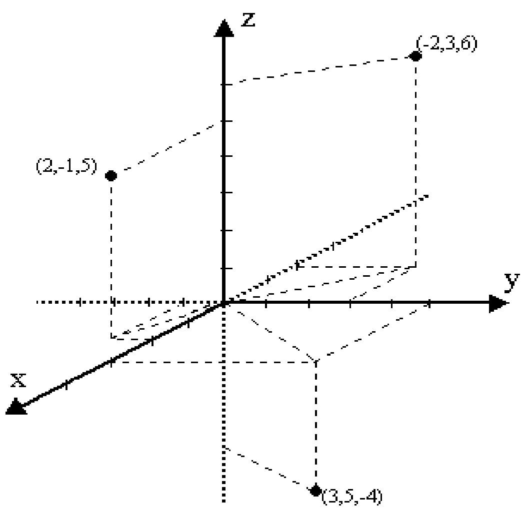


Figura 1-2

1.3 ÁLGEBRA VECTORIAL

SUMA VECTORIAL (+)

Dados los vectores:

$A = (a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n) \in R^n$,

$B = (b_1, b_2, b_3, \ldots , b_n) \in R^n$, el vector suma A + B; es el vector definido por:

$$\mathbf{A + B = (a_1 + b_1 , a_2 + b_2 , a_3 + b_3 , \ldots , a_n + b_n) \in R^n}$$

***CONDICIÓN*:** Para que exista la suma vectorial los vectores a sumar deben pertenecer al mismo espacio.

Sean A y B dos vectores cualquiera en R^2, $C = A + B$ es un vector que cierra el polígono formado por los vectores A y B (*figura 1-3*) colocados uno a continuación de otro, el vector B será la diferencia entre los vectores C y A; esto es el vector posición entre los puntos C y A.

Entonces dados dos puntos P_1 (x_1, y_1, z_1) y P_2 (x_2, y_2, z_2) el vector posición entre estos puntos o vector P_1P_2 es:

$P_1P_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

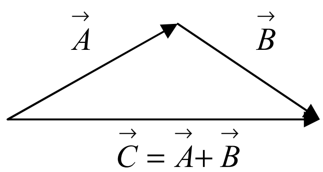


Figura 1-3

***Propiedades*:**

1. $A + B = B + A$ Conmutativa
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ Asociativa
3. $A + \phi = A$ Idéntico aditivo
4. $A + A' = \phi$; A' es el vector opuesto de A Cancelativa

Ejemplo 1-3 Dados los vectores A = (3, -6, 1) , B = (-1, 10, -5)

Solución: A + B = (3 + (-1), (-6) + 10, 1 + (-5)) = (2, 4, -4)

PRODUCTO POR UN ESCALAR (α)

Dado el escalar $\alpha \in$ R y el vector A = (a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n) $\in$ R^n, el producto por un escalar esta definido por:

$\alpha A = (\alpha a_1 , \alpha a_2 , \alpha a_3 , \; .... , \alpha a_n) \in R^n$

A’ = (- 1) A : opuesto de A

***Propiedades*:**

1. α A = A α — Conmutativa
2. α (β A) = ($\alpha\beta$)A — Asociativa
3. ($\alpha + \beta$)A = α A + β A — Distributivas
   α(A + B) = αA + αB
4. 0A = ϕ — Cancelativa

Ejemplo 1-4 Dados los vectores A = (2, 5, -2), B = (-3, -1, 7), encontrar 3A - 2B

Solución:

3A – 2B = 3(2, 5, -2) + (-2)(-3, -1, 7)
3A – 2B = (6, 15, -6) + (6, 2, -14)
3A – 2B = (12, 17, -20)

1.4 DEFINICIONES IMPORTANTES DEL ÁLGEBRA LINEAL

A pesar de que no es nuestro objetivo estudiar los tópicos del Álgebra Lineal, es importante que analicemos ciertas definiciones de esta rama de las matemáticas que se consideran importantes para la mejor asimilación de los conceptos del Cálculo Vectorial:

ESPACIO VECTORIAL

Imaginémonos que un club juvenil organiza una fiesta para jóvenes de ambos sexos entre 18 y 28 años a la cual se le imponen las condiciones de acudir en pareja y en traje formal, con un poco de esfuerzo podemos notar que en este ejemplo hay un conjunto que son los jóvenes de ambos sexos entre 18 y 28 años, y dos condiciones: el tener que acudir en pareja y vestir traje formal; como podemos ver esta estructura de un conjunto y dos condiciones definen esta fiesta juvenil.

De igual forma se define un espacio vectorial @; como un conjunto de objetos que se los llama vectores, aunque en algunos casos pueden ser matrices o funciones, y dos condiciones que son:

Una operación denotada con + que para cada par de vectores V_1, V_2 en el espacio @ asocia otro vector $V_1 + V_2$ que también pertenece al espacio @, llamado suma.

Una operación llamada multiplicación por un escalar, que para cada escalar α perteneciente a R y cada vector V perteneciente al espacio @ asocia un vector α V que también pertenece al espacio @.

La estructura algebraica $\{V, +, \alpha\}$ define un espacio vectorial.

$$\left[\; \overbrace{V}^{elementos} \quad ; \quad \underbrace{+ \;\; ; \;\; \alpha}_{condiciones} \;\right]$$

SUBESPACIO VECTORIAL

Es todo subconjunto de un espacio vectorial que cumple con las mismas condiciones de suma y multiplicación por un escalar.

COMBINACIÓN LINEAL

Sean $(V_1, V_2, V_3, ..., V_n) \in R^n \quad \wedge \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n) \in R$, cualquier adición de la forma $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 + ... + \alpha_n V_n$ se llama **combinación lineal** de los n vectores en R^n.

Ejemplo 1-5 Escribir (-3, 5, -5) como combinación lineal de los vectores (-1, 1, 0), (0, 1, -1) y (1, 0, 2)

Solución: Encontremos valores c_1, c_2, c_3 tales que:
(-3, 5, -5) = c_1(-1, 1, 0) + c_2(0, 1, -1) + c_3(1, 0, 2)

de aquí:

-3 = $-c_1 + c_3$
5 = $c_1 + c_2$
-5 = $-c_2 + 2c_3$; que da como solución $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = -1$

$\Rightarrow$ (-3, 5, -5) ✓

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Dada la combinación lineal del vector cero:

$$\phi \quad = \quad \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 + ... + \alpha_n V_n$$

Si $\exists\, \alpha_i \neq 0$ tal que la combinación lineal anterior, del vector cero, se cumpla $\Rightarrow$ $V_1, V_2, V_3, ..., V_n$ son vectores **linealmente dependientes.**

De lo contrario si la combinación lineal anterior del vector cero solo es posible $\forall \alpha_i = 0$, entonces se dice que los vectores V_i son **linealmente independientes.**

Ejemplo 1-6 Demostrar que los vectores (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) son linealmente independientes.

Solución: (0, 0, 0) = α_1(1, 0, 0) + α_2 (0, 1, 0) + α_3(0, 0, 1)
(0, 0, 0) = (α_1, 0, 0) + (0, α_2 , 0) + (0, 0, α_3)
(0,0,0) = (α_1, α_2 , α_3) ✓

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

Una base de un espacio vectorial la constituye el menor número posible de vectores linealmente independientes capaz de generar todo el espacio vectorial, los vectores i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1) constituyen una base de R^3 y se la llama *base canónica* de R^3, e_1 = (1, 0, 0, ……. ,0), e_2 = (0, 1, 0, ………., 0), …. e_n = (0, 0, 0, ……… , 1) constituyen la *base canónica* de R^n.

Ejemplo 1-7 Demostrar que los vectores i , j , k, constituye una base en R^3

Solución: $V = (a, b, c) \in R^3$

$$(a,b,c) = (a,0,0) + (0,b,0) + (0,0,c)$$
$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) \quad \forall$$
$$(a,b,c) = ai + bj + ck$$

Por lo tanto cualquier vector en R^3 puede expresarse como una combinación lineal de i, j, k así: $\Rightarrow \quad (1,-1,4) = i - j + 4k$

La mayor cantidad de vectores linealmente independientes que se pueden definir en un Espacio Vectorial determina la dimensión del espacio.

1.5 PRODUCTO INTERNO, PRODUCTO PUNTO O PRODUCTO ESCALAR

Conocido como $A \bullet B$ o también $\langle A; B \rangle$

Sean:

$$A = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) \in R^n$$
$$B = (b_1, b_2, b_3, ..., b_n) \in R^n$$
$$\Rightarrow (A \bullet B) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, ..., + a_n b_n) \in R$$

Entonces $A \bullet B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

Propiedades:

a) $(A \bullet B) = (B \bullet A)$ — Conmutativa

b) $A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)$ — Distributiva de la suma vectorial

c) $A \bullet \phi = 0$ — Cancelativa

d) $(A \bullet A) = \|A\|^2$

e) $|(A \bullet B)| \leq \|A\|\|B\|$ — Desigualdad de Swartz

✓ Demostración de la propiedad (d) :

$$(A \bullet A) = \|A\|^2$$
$$(A \bullet A) = (a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3,\ldots.,+a_na_n)$$
$$(A \bullet A) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2} = \|A\|^2$$

✓ Demostración de la propiedad (e):

Sea A y B ∈ R^n

$$|(A \bullet B)| \leq \text{IIAII IIBII}$$
$$A \bullet B = \|A\| \times \|B\| \cos \theta$$
$$|A \bullet B| = \|A\| \times \|B\| |\cos \theta|$$

$0 \leq |\text{Cos } \theta| \leq 1$ por lo tanto $|(A \bullet B)| \leq$ IIAII IIBII

El lector debe probar demostrar las propiedades a, b, c.

Ejemplo 1-8 Encontrar el producto escalar de los vectores A = (-1, 4, -7) y B = 2i + 4j - k

Solución: $A \bullet B$ = (-1) x (2) + (4) x (4) + (-7) x (-1) = 21 ✓

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO ESCALAR:

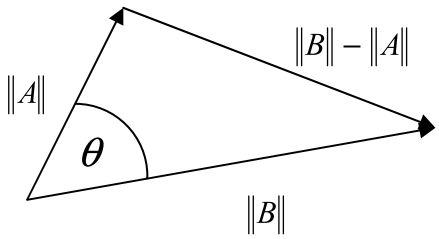


Figura 1-4

En la *figura 1-4*, aplicando la ley del coseno a los lados del triángulo que son las normas de los vectores, tenemos:

$$\|B - A\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2\|A\|\|B\|\cos\theta$$

Aplicando la propiedad (d) del producto escalar:

$$(B - A)\bullet(B - A) = (A \bullet A) + (B \bullet B) - 2\,\|A\|\,\|B\|\cos\theta$$

Aplicando la propiedad distributiva

$$(B \bullet B) - (B \bullet A) - (A \bullet B) + (A \bullet A) = (A \bullet A) + (B \bullet B) - 2\|A\|\|B\|\cos\theta$$

Como el producto escalar es conmutativo

$$-\,2(A \bullet B) = -2\,\|A\|\,\|B\|\,\cos\theta$$

$$\boxed{A \bullet B = \|A\|\|B\|\cos\theta}$$

APLICACIONES

1. El producto escalar sirve para determinar si dos vectores son ortogonales o no.

$$\text{Si } A \perp B \Rightarrow (A \bullet B) = 0$$
$$i \bullet j = j \bullet i = i \bullet k = k \bullet i = j \bullet k = k \bullet j = 0$$
$$i \bullet i = j \bullet j = k \bullet k = 1$$

2. El producto escalar sirve para encontrar el ángulo que forman dos vectores.

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(A \bullet B)}{\|A\|\|B\|}\right)$$

Para encontrar proyecciones: $\begin{cases} \text{Escalar} \\ \text{Vectorial} \end{cases}$

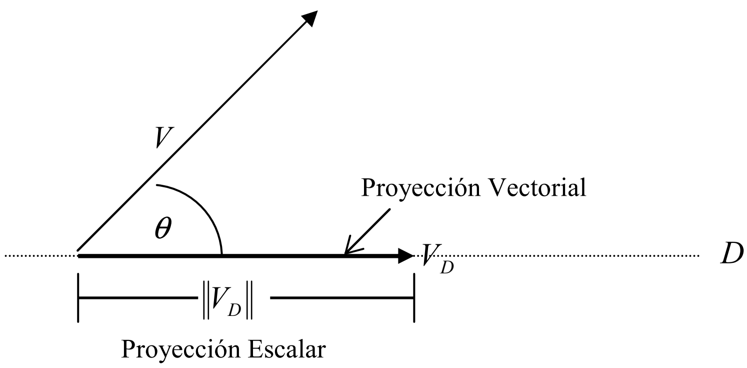


Figura 1-5

$$\|V_D\| = \|V\|\cos\theta = \frac{\|V\|\,|V \bullet D|}{\|V\|\|D\|} = \left|V \bullet \frac{D}{\|D\|}\right|$$

$$\|V_D\| = \left|V \bullet \hat{D}\right| \Rightarrow \text{Proyección Escalar}$$

$$V_D = \|V\|\hat{D} \Rightarrow \text{Proyección Vectorial}$$

Ejemplo 1-9 Determinar la proyección del vector (1, -3, 7) en la dirección P_1P_2, donde $P_1(2, 3, 4)$ y $P_2:(1, 5, -1)$

Solución: D = (1 - 2, 5 - 3, -1 - 4) = (-1, 2, -5)

$$\hat{D} = \frac{(-1,2,-5)}{\sqrt{30}}$$

$$\|V_D\| = |1\times(-1)+(-3)\times 2+7\times(-5)|\frac{1}{\sqrt{30}} = \frac{42}{\sqrt{30}}$$

$$V_D = \frac{42}{\sqrt{30}}\cdot\frac{(-1,2,-5)}{\sqrt{30}} = \frac{(-42,84,-210)}{30}$$

$$V_D = \left(\tfrac{-7}{5}, \tfrac{14}{5}, -7\right)$$

COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR EN R^3

Si V es un vector cualquiera en el espacio R^3, entonces, Como se observa en la *figura 1-6*

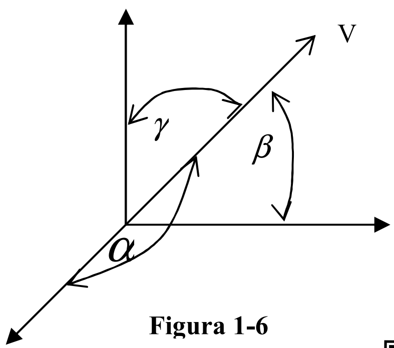


Figura 1-6

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos } \alpha\\ \text{Cos } \beta\\ \text{Cos } \gamma\end{array}\right\}$$ Son los cosenos directores del vector V

Esto implica que:

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Cos } \alpha = (\hat{V}\bullet i)\\ \text{Cos } \beta = (\hat{V}\bullet j)\\ \text{Cos } \gamma = (\hat{V}\bullet k)\end{array}\right.$$

Se sugiere al lector demostrar las expresiones de los cosenos directores del vector V.

Ejemplo 1-10 Demostrar que para cualquier vector:

$$\text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta + \text{Cos}^2\gamma = 1$$

Solución: Sea $V = (v_1, v_2, v_3)$; Cos α = $(\hat{V} \bullet i) = \dfrac{v_1}{\|V\|}$; $\text{Cos}\,\beta = \dfrac{v_2}{\|V\|}$

$$\text{Cos}\,\gamma = \frac{v_3}{\|V\|} \quad ; \quad \hat{V} = \frac{(v_1, v_2, v_3)}{\|V\|}$$

$$\hat{V} = \frac{v_1}{\|v\|} i + \frac{v_2}{\|v\|} j + \frac{v_3}{\|v\|} k$$

$$\frac{v_1^{\,2}}{\|V\|^2} + \frac{v_2^{\,2}}{\|V\|^2} + \frac{v_3^{\,2}}{\|V\|^2} = \frac{\|V\|^2}{\|V\|^2} = 1$$

1.6 PRODUCTO EXTERNO, PRODUCTO CRUZ O PRODUCTO VECTORIAL.

Sean A y B dos vectores del espacio R^3 el producto externo, producto cruz o producto vectorial denotado por $A \times B$, es un vector que tiene como módulo o norma:

$$\| A \times B \| = \| A \| \, \| B \| \, \text{Sen}\,\theta$$

Su dirección es perpendicular al plano formado por los vectores A y B y su sentido sigue la regla de la mano derecha o del tornillo.

Propiedades:

a) $(A \times B) \neq (B \times A)$ — No es conmutativa

b) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ — Asociativa; siempre que no se cambie el orden

c) $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$ Distributiva

d) $A \times \phi = 0$ Cancelativa

e) Si A es paralelo a B $\Rightarrow (A \times B) = 0$

APLICACIONES:

1. Para encontrar el vector normal a otros dos (aplicación importante)
2. Para hallar el área del paralelogramo que forman 2 vectores.

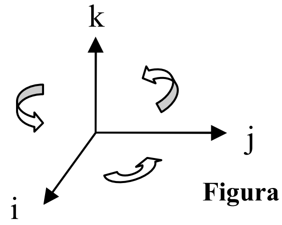


Figura 1-7

i x j = k j x i = -k
j x k = i k x j = -i
k x i = j i x k = -j

i x i = j x j = k x k =0

$A = (a_1, a_2, a_3)$

$B = (b_1, b_2, b_3)$

$A \times B = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$

$A \times B = a_1b_1(i \times i) + a_1b_2(i \times j) + a_1b_3(i \times k) + a_2b_1(j \times i) + a_2b_2(j \times j) + a_2b_3(j \times k) +$
$a_3b_1(k \times i) + a_3b_2(k \times j) + a_3b_3(k \times k)$

$A \times B = a_1b_2\hat{k} - a_1b_3\hat{j} - a_2b_1\hat{k} + a_2b_3\hat{i} + a_3b_1\hat{j} - a_3b_2\hat{i}$

$A \times B = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$

$$\boxed{A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}$$

Ejemplo 1-11 Determine el producto vectorial de los vectores A = (1 , 2 , 4); B = (2 , -1 , -3)

Solución: (1 , 2 , 4) x (2 , -1 , -3)

$$A \times B = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = (-2\ ,\ 11\ ,\ -5)$$ ✓

|| A x B || $\rightarrow$ representa o mide el área del paralelogramo que forman los vectores A; B , ver *figura 1-8*

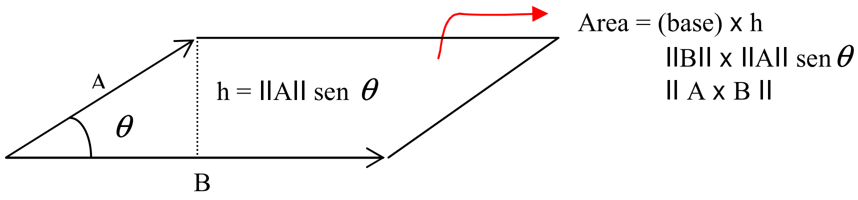


Figura 1-8

1.7 PRODUCTOS TRIPLES

A • B x C $\rightarrow$ Producto Triple Escalar
A x B x C $\rightarrow$ Producto Triple Vectorial
A • B • C $\rightarrow$ No Existe

Considerando las propiedades de los productos escalar y vectorial; existen 6 formas posibles del triple producto escalar, estas son:

- ✓ A • B x C
- ✓ A • A x C
- ✓ B • A x C
- ✓ B • C x A
- ✓ C • A x B
- ✓ C • B x A

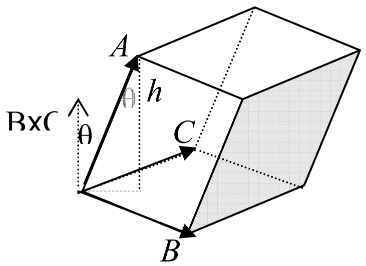
Probemos que cualquiera de estos triples productos escalares es un determinante; por ejemplo el producto (A • B x C)

$$A=(a_1,a_2,a_3) \qquad B=(b_1,b_2,b_3) \qquad C=(c_1,c_2,c_3)$$

$$(B\times C)=(b_2c_3-b_3c_2)\hat{i}-(b_1c_3+b_3c_1)\hat{j}+(b_1c_2-b_2c_1)\hat{k}$$
$$A\bullet(B\times C)=(b_2c_3-b_3c_2)a_1-(b_1c_3+b_3c_1)a_2+(b_1c_2-b_2c_1)a_3$$
$$A\bullet(B\times C)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

- Si cambiamos el orden lo único que ocurre es que se permutan dos filas del determinante y este cambia de signo.

  ∴ | A x B • C | no cambia en todas las formas posibles, y representa el volumen del paralelepípedo formado por los 3 vectores



$$h=\|A\|Cos\theta$$
$$Vol.=(area\,base)\times h$$
$$area\,base=\|B\times C\|$$
$$Vol.=\|B\times C\|\,\|A\|Cos\theta$$
$$Vol.=|A\bullet(B\times C)|=(B\times C)\bullet A$$

Figura 1-9

EJERCICIOS

Para los primeros diez problemas usar los vectores en R^3: **A** = 3i+ 4j; **B** = 2i + 2j – k; **C** = 3i+ 4k

1. Encontrar ||A||, ||B||, ||C||
2. A + B; A – C; 2A + 3B - 5C

3. $\|A + B - C\|$

4. ¿Con qué valores de α es $\|\alpha B\| = 1$?

5. Obtenga los vectores unitarios que tengan la misma dirección de A, B y C

6. Tomando A y C como vectores posición de los puntos respectivos, grafique dichos puntos y compruebe gráficamente el vector suma A + C

7. Determine el ángulo que forman los vectores A con B; A con C y B con C

8. Encuentre las proyecciones escalares y vectoriales de B sobre A y C

9. Encuentre los cosenos directores de A, B y C

10. Calcule el área del paralelogramo formado por los vectores B y C y el volumen del paralelepípedo formado por A, B y C

11. Determine todos los vectores unitarios perpendiculares al plano "XZ"

12. Escriba el vector P_1P_2 como combinación lineal de los vectores i, j, k; si $P_1 : (3,4,7)$; $P_2 : (4,-1,6)$

13. Sean: V1 = i + j + k, V2 = i + j - k y V3 = i – j. Determine los escalares s, t, y r; tales que $4i + 6j - k = sV_1 + tV_2 + rV_3$

14. ¿Cuáles son los cosenos directores del vector 2i – 2j + k?

15. Demuestre la identidad $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

16. Dado los vectores A = 2i + 4j + 6k; B = (1,-3,2), encontrar un vector perpendicular unitario a estos dos.

17. Dados los vectores *A, B, C* en $\Re^3$, indicar cuál de las siguientes es falsa:

    a) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

    b) $|A \bullet B| \leq \|A\|\|B\|$

    c) $(B \bullet C)A = B(C \bullet A)$

    d) $\|A + B\|/2$ es el área del triángulo formado por *A,B.*

    e) $A \bullet (B \times C) = B \bullet (C \times A) = C(A \bullet B)$

18. Hallar el ángulo formado por la diagonal principal de un cubo y una de sus caras.

19. Calcule el área del triangulo que tiene sus vértices en los puntos $(-3,2,4)$; $(2,1,7)$; $(4,2,6)$.

20. Encuentre un vector de componentes positivas, magnitud 2 y ángulos directores iguales.

21. Si la proyección vectorial de un vector A en la dirección de un vector unitario **e** es 4**e** , y la proyección vectorial de B en la dirección de **e** es 5**e**. ¿Cuál es? :

    a) La componente escalar de A sobre **e.**
    b) La proyección vectorial de A - B sobre **e.**
    c) La componente escalar de A + B sobre **e.**

22. Averiguar si los vectores (1,0); (0,1); (1,-1) son o no linealmente independientes.

23. Averiguar si los vectores (1, -1, 0); (0, 1, 1); (3, -5, -2) constituyen o no una base de R^3.

24. Averiguar si los vectores (1, 0, 1); (-1, 2, 3); (0, 1, -1) constituyen o no una base en R^3 .

25. Demuestre que, generalmente, tres vectores en R^2 son siempre linealmente dependientes.

26. Demuestre que cualquier conjunto de vectores que contenga al vector ϕ es linealmente dependiente.