CAPITULO 2

"Espero que la posteridad me juzgue con benevolencia, no solo por las cosas que he explicado, sino también por aquellas que he omitido intencionadamente, para dejar a los demás el placer de descubrirlas"

René Descartes.

GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL ESPACIO

2.1 ECUACIÓN DEL PLANO EN R^3

Como podemos apreciar en la *figura 2-1*, toda superficie plana tiene como característica común su vector normal; por cuanto este es constante sobre todo el plano π (las superficies que no sean planas no tienen un vector normal constante), aprovechando esta característica, supongamos que el plano π tiene como vector normal: **N** : (a, b, c) y contiene al punto P_0 : (x_0, y_0, z_0). El punto P : (x, y, z) representa un punto cualquier del plano π ; entonces:

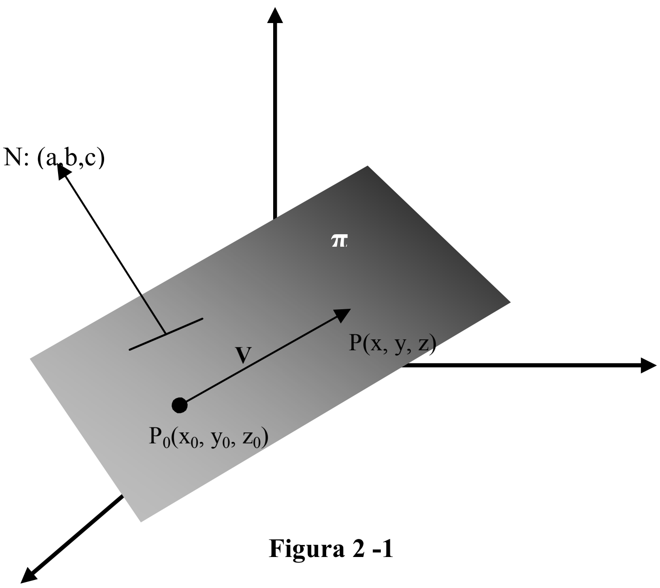


Figura 2 -1

$V = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

Como **V** pertenece a π , es perpendicular a **N** $\Rightarrow$ **V** $\bullet$ **N** = 0

$\mathbf{V} \bullet \mathbf{N} = a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

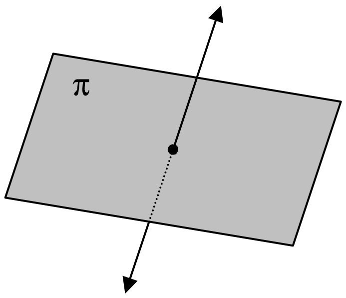
$ax + by + cz + d = 0$; donde

$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$

$\boxed{\mathbf{ax + by + cz + d = 0}}$ $\Rightarrow$ Ecuación del plano π en R^3.

Donde: **a, b, c** son las coordenadas del vector normal y **d** se puede calcular remplazando en la ecuación del plano el punto P_0.

Recordemos que para encontrar la ecuación matemática de los puntos que pertenece a un plano, se utiliza como referencia el vector normal al plano. Todo plano tiene dos vectores normales, como lo indica la *figura 2-2*:



Para efecto de encontrar la ecuación del plano nos podemos referir a cualquiera de estos vectores normales indistintamente

Figura 2-2

Un plano está definido por:

a) Su vector normal y un punto del plano
b) Tres puntos no alineados
c) Una recta y un punto fuera de ella
d) Dos rectas que se corten
e) Dos rectas paralelas no alabeadas

Caso (a):

Ejemplo 2-1 Encontrar la ecuación del plano perpendicular al vector $2i - j + 4k$ y que contiene al punto (1, -1, 2).

Solución: N : (2, -1, 4)

Entonces:

$2x - y + 4z + d = 0$
$2(1) - (-1) + 4(2) + d = 0$
$d = -11$

$\mathbf{2x - y + 4z = 11}$, es la ecuación del plano

Caso (b):

Ejemplo 2-2 Encontrar la ecuación del plano que contiene a los puntos: (2, 2, -3); (3, -1, 4); (-2, 5, 3)

Solución: Sin importarnos que la ubicación de los puntos no sea la correcta, razonemos este ejercicio con la ayuda de la *figura 2-3*

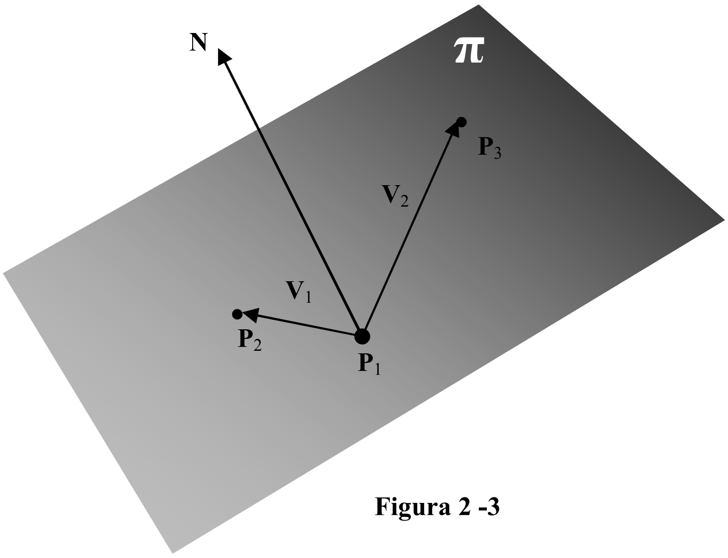


Figura 2 -3

P1 : (2, 2, -3) P2 : (3, -1, 4) P3 : (-2, 5, 3) V1 : (1, -3, 7) V2 : (-4, 3, 6)

$$N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 7 \\ -4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = (-39,-34,-9)$$

$$
\begin{aligned}
&-39x-34y-9z+d=0\\
&-39(2)-34(2)-9(-3)+d=0\\
&\Rightarrow d=119\\
&-39x-34y-9z+119=0\\
&39x+34y+9z=119
\end{aligned}
$$

Los casos **c**, **d** y **e** los revisaremos una vez que estudiemos la ecuación de la recta en R^3, sección 2-4

2-2 DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

Sea "**dis**" la distancia de un punto cualquiera a un plano; si el punto no pertenece al plano dis > 0, si el punto pertenece al plano dis = 0, para efecto del análisis que vamos hacer supongamos que el punto no pertenece al plano; entonces:

$$dis > 0 \Rightarrow P_o \notin \pi$$

$P_0(x_0, y_0, z_0) \notin \pi$, en la *figura 2-4* podemos ver el razonamiento de este procedimiento:

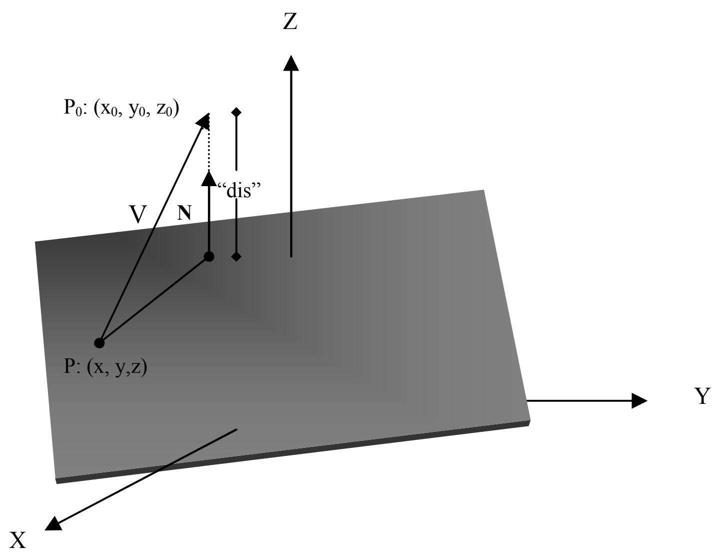


Figura 2-4

dis: Proyección escalar de **V** sobre **N**
Dado el plano ax + by + cz + d = 0 y el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$V : (x_o - x, y_o - y, z_o - z)$$
$$N : (a, b, c)$$

$$\hat{N} = \frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$dis = \left| (x_o - x, y_o - y, z_o - z) \bullet \frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$
$$dis = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \left| a(x_o - x) + b(y_o - y) + c(z_o - z) \right|$$
$$dis = \frac{\left| a(x_o) - ax + b(y_o) - by + c(z_o) - cz \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\boxed{dis = \frac{| ax_o + by_o + cz_o + d |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Ejemplo 2-3 Encontrar la distancia del punto P_0 : (-1, 2, -4) al plano que contiene a los puntos (2, -2, 4); (1, 1, 1); (-2, 3, 1)

Solución: Encontremos primero la ecuación del plano; V1, V2 son vectores del plano y N es su vector normal

$$V_1 = (1,1,1) - (2,-2,4) = (-1,3,-3)$$
$$V_2 = (-2,3,1) - (2,-2,4) = (-4,5,-3)$$
$$N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = (6,9,7)$$

$$
\begin{aligned}
&6x + 9y + 7z + d = 0 \\
&6 + 9 + 7 + d = 0 \Rightarrow d = -22 \\
&6x + 9y + 7z - 22 = 0
\end{aligned}
$$

Analicemos si P_0 pertenece o no al plano.

$$
\begin{aligned}
&6(-1) + 9(2) + 7(-4) - 22 = 0 \\
&-6 + 18 - 28 - 22 \neq 0
\end{aligned}
$$

$P_0 \notin$ al plano; $d > 0$.

Encontremos un vector V, que une un punto del plano con P_0.

$$
\begin{aligned}
&V = (-1,2,-4) - (1,1,1) = (-2,1,-5) \\
&dis = \left| V \bullet \hat{N} \right| \\
&\hat{N} = \frac{(6,9,7)}{\sqrt{166}} \\
&d = \frac{1}{\sqrt{166}} \left| (-2,1,-5) \bullet (6,9,7) \right| \\
&d = \frac{1}{\sqrt{166}} \left| -12 + 9 - 35 \right| = \frac{38}{\sqrt{166}}
\end{aligned}
$$

2-3 FORMAS DE EXPRESAR LA RECTA EN R^3

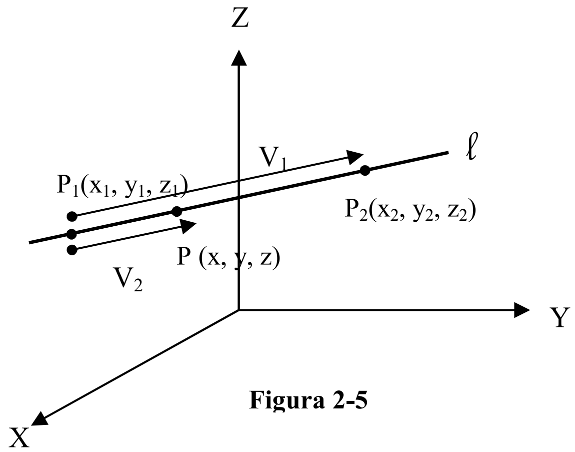


Figura 2-5

Para definir una recta en R^3 se requiere como mínimo de dos ecuaciones lineales; por cuanto una recta en el espacio es la intersección de dos planos, entonces las condiciones mínimas para definirla son:

1. Dos planos que se corten
2. Dos puntos
3. Vector directriz y un punto

Partamos del hecho que dos puntos definen una recta en R^3, En la *figura 2-5* podemos ver que V_1 es el vector P_1P_2, V_2 es el vector P_1P, que son paralelos por estar sobre la misma recta ℓ y P es un punto cualquiera de la recta ℓ.

$P \in \ell$
$V_1 = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$
$V_2 = (x-x_1, y-y_1, z-z_1)$
$V_1 // V_2$

$$\text{Si } V_1 // V_2 \Rightarrow \begin{cases} x_2 - x_1 = t(x - x_1) \\ y_2 - y_1 = t(y - y_1) \\ z_2 - z_1 = t(z - z_1) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{x_2 - x_1}{x - x_1} \\ t &= \frac{y_2 - y_1}{y - y_1} \\ t &= \frac{z_2 - z_1}{z - z_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x_2 - x_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z - z_1}$$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

Forma general de las ecuaciones de la recta en R^3.

V_1: Se conoce como vector directriz de la recta ℓ, se lo simboliza con la letra D.
D = (a, b, c)

$$\Rightarrow \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

✓Ecuación de la recta cuando se conoce el vector directriz y un punto de ella.

$$\frac{x_2 - x_1}{a} = t \Rightarrow x = at + x_1$$
$$\frac{y_2 - y_1}{b} = t \Rightarrow y = bt + y_1$$
$$\frac{z_2 - z_1}{c} = t \Rightarrow z = ct + z_1$$

✓Forma Paramétrica de la ecuación de la recta en R^3

La recta en R^3 también puede estar dada por la intersección de dos planos

$$l : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + z_1 c + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + z_2 c + d_2 = 0 \end{cases}$$

✓Forma de las ecuaciones de la recta como la intersección de dos planos.

En la *figura 2-6* hacemos la siguiente interpretación geométrica

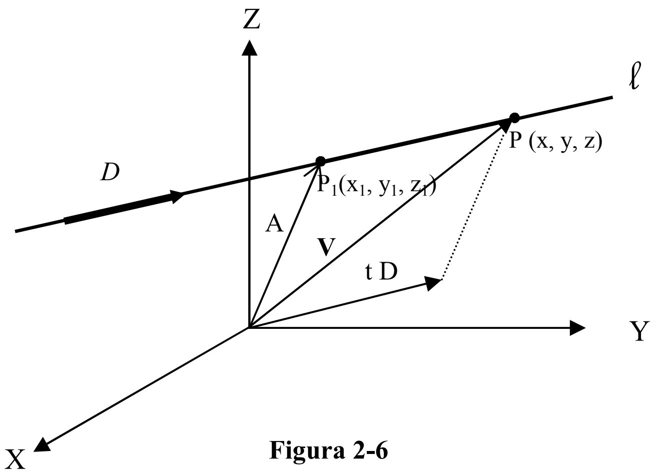


Figura 2-6

D: vector directriz de la recta
V: vector posición de un punto cualquiera de la recta
A: vector posición de un punto fijo de ℓ
En el paralelogramo de la figura 2-6:

$$V = A + tD$$
$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

✓Forma vectorial de la ecuación de la recta, que si el lector lo analiza detenidamente es la misma forma paramétrica descrita anteriormente.

Ejemplo 2-4 Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1,-1,2); (2,3,-4)

Solución: Vector directriz: $D = (2,3,-4) - (1,-1,2) = (1,4,-6)$

Tomando el punto (1,-1,2), tenemos:

$$\Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-6}$$

En forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{1} = t \\ \dfrac{y+1}{4} = t \\ \dfrac{z-2}{-6} = t \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x = t+1 \\ y = 4t-1 \\ z = -6t+2 \end{cases}$$

Como un sistema de dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{4} \\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{z-2}{-6} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} 4x - y = 5 \\ 6x + z = 8 \end{cases}$$

En forma vectorial:

$$(x, y, z) = (1,-1,2) + t(1,4,-6)$$
$$(x, y, z) = (1+t,-1+4t,2-6t)$$

Ejemplo 2-5 Dada la recta $\begin{cases} 3x + y - z = 3 \\ 2x - 3y + 5z = -2 \end{cases}$, encontrar la forma general, paramétrica y vectorial de la misma.

Solución: El razonamiento lo podemos observar en la *figura 2-7*, donde, independientemente de si son o no los planos dados, vemos como el producto vectorial de los vectores normales de cada plano N_1, N_2 da el vector directriz D de la recta.

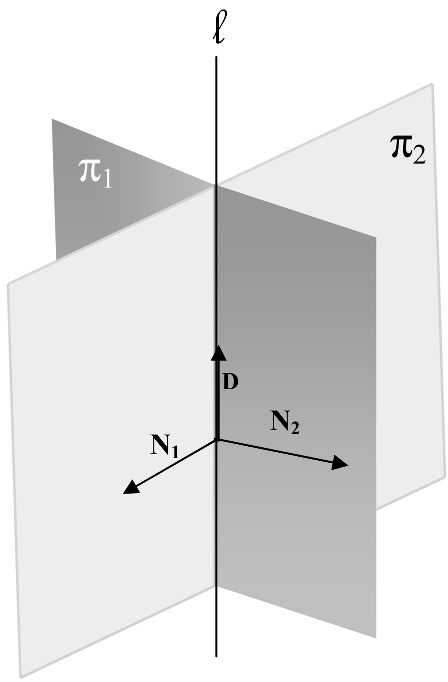


Figura 2-7

Sea π_1 el primer plano con N_1 como su vector normal y π_2 el segundo plano con N_2 como su vector normal; entonces:

$$D = N_1 \times N_2$$

$$D = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = i(5-3) - j(15+2) + k(-9-2)$$

$$D = 2i - 17j - 11k$$

Ahora necesitamos un punto de la recta y este lo podemos obtener haciendo Z = 0 y resolviendo el sistema para las otras variables:

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - 3y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{7}{11} \\ y = \frac{12}{11} \end{matrix}$$

$$\frac{x - \frac{7}{11}}{2} = \frac{y - \frac{12}{11}}{-17} = \frac{z}{-11}$$

$$\begin{cases} x = 2t + \frac{7}{11} \\ y = -17t + \frac{12}{11} \quad \text{Forma paramétrica} \\ z = -11t \end{cases}$$

2-4 RECTAS Y PLANOS EN R^3

Los planos en R^3 pueden ser paralelos a los planos coordenados o paralelos a los ejes coordenados, veamos como se observa este efecto en la ecuación del plano. La *figura 2-8* indica tanto el paralelismo con respecto al plano $"xy"$; $z = k$ (caso a) como el paralelismo con respecto al eje $"x"$; $by + cz + d = 0$ (caso b).

Viendo esta figura podemos concluir:

a = 0 $\Rightarrow$ indica paralelismo con respecto al "eje x", *figura 2-8 (b)*
b = 0 $\Rightarrow$ indica paralelismo con respecto al "eje y"
c = 0 $\Rightarrow$ indica paralelismo con respecto al "eje z"

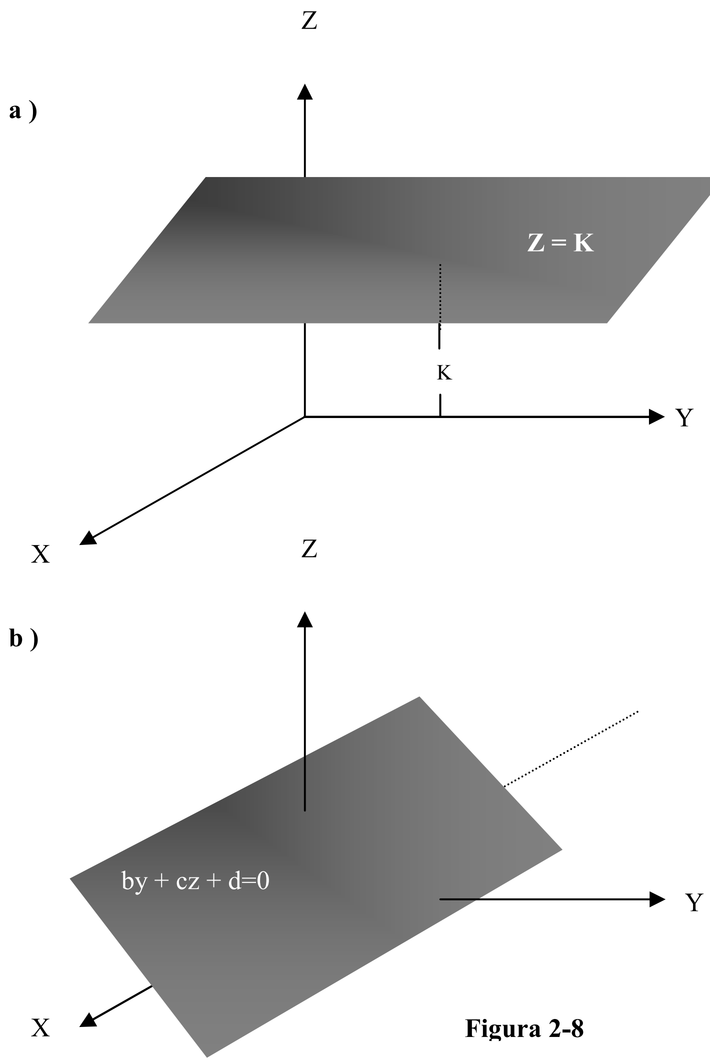


Figura 2-8

La coordenada del vector normal que es cero indica la naturaleza del eje coordenado al cual el plano es paralelo.

De igual forma podemos comprender que:

$a = 0, b = 0 \Rightarrow$ indica paralelismo con respecto al plano "xy", *figura 2-8 (a)*
$a = 0, c = 0 \Rightarrow$ indica paralelismo con respecto al plano "xz"
$b = 0, c = 0 \Rightarrow$ indica paralelismo con respecto al plano "yz"

Las coordenadas del vector normal que son cero indican la naturaleza del plano coordenado al cual el plano es paralelo.

De igual forma la recta en R^3 puede ser paralela a los planos o a los ejes coordenados; veamos en la *figura 2-9* este efecto sobre las ecuaciones de la recta.

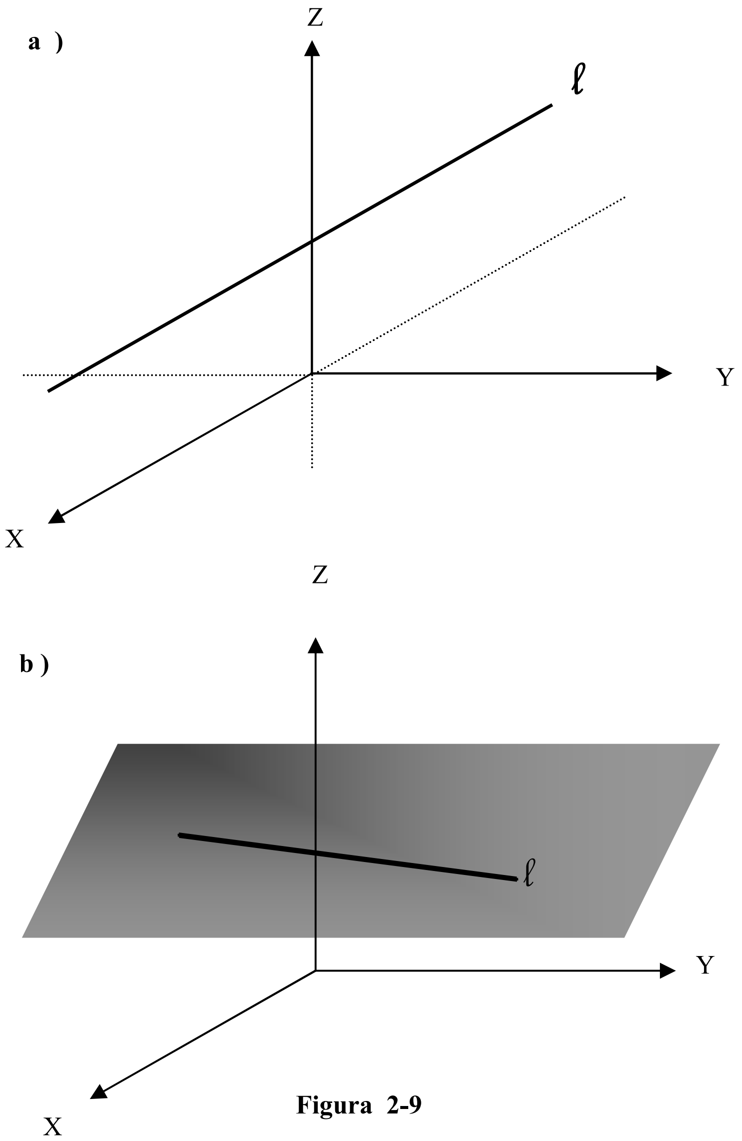


Figura 2-9

Viendo este gráfico, el caso (a) representa paralelismo con respecto al “eje x” y el caso (b) representa paralelismo con respecto al plano “xy”; para el caso (a) como la recta es paralela al eje x el vector directriz es el vector ai; o $\boldsymbol{a}(1, 0, 0)$, esto no permite expresar las ecuaciones de la recta en forma general por cuanto tendríamos división para cero en el segundo y tercer término. En forma paramétrica la recta estará dada por:

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

De igual forma en el caso (b) el vector directriz es de la forma $ai + bj$, esto también no permite expresar esta recta en forma general por tener división para cero en su tercer término. En forma paramétrica la recta estará dada por:

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

Esta observación nos permite hacer la siguiente conclusión:

a = 0 $\Rightarrow$ indica paralelismo con respecto al plano “yz”
b = 0 $\Rightarrow$ indica paralelismo con respecto al plano “xz”
c = 0 $\Rightarrow$ indica paralelismo con respecto al plano “xy”

Las coordenadas del vector directriz que no son cero indican la naturaleza del plano coordenado al cual la recta es paralela.

De igual forma podemos comprender que:

a = 0, b = 0 $\Rightarrow$ indica paralelismo con respecto al eje “z”
a = 0, c = 0 $\Rightarrow$ indica paralelismo con respecto al eje “y”
b = 0, c = 0 $\Rightarrow$ indica paralelismo con respecto al eje “x”

La coordenada del vector directriz que no es cero indica la naturaleza del eje coordenado al cual la recta es paralela.

A más de esto también las rectas en R^3 pueden ser concurrentes o paralelas y en caso de paralelas pueden ser superpuestas, paralelas propiamente dichas o alabeadas, la *figura 2-10* indica cada uno de estos casos.

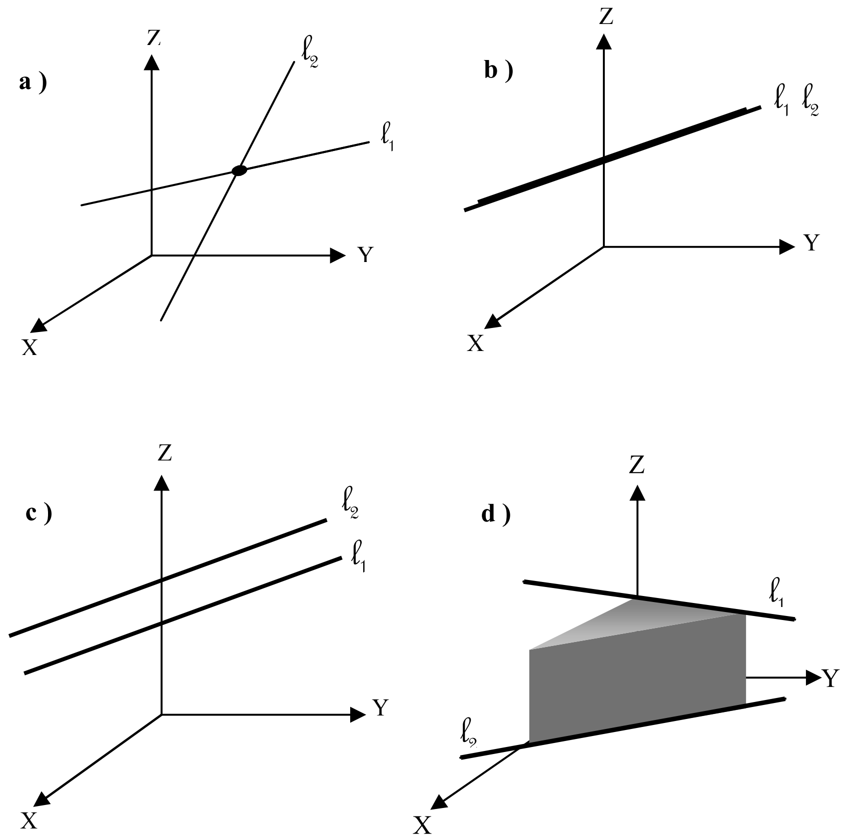


Figura 2-10

El caso (a) indica dos rectas concurrentes, tienen un punto en común (se cortan), el caso (b) indica dos rectas coincidentes o superpuestas, el caso (c) indica dos rectas paralelas tienen sus vectores directrices paralelos y el caso (d) indica dos rectas alabeadas, como se puede apreciar en la *figura 2-10*, pertenecen a planos paralelos y a pesar de que sus vectores directrices no son paralelos ellas no tienen un punto en común y jamás se cortan.

Ejemplo 2-6 Dadas las rectas:

$$l_1 = \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x - 5y - z + 1 = 0 \end{cases} \qquad l_2 = \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x - 9y + 3z + 55 = 0 \end{cases}$$

Probar si son o no concurrentes, si lo son encontrar su punto común y su ángulo agudo de intersección.

Solución: Armemos un sistema de ecuaciones con los 2 planos de la recta ℓ_1 y un plano de la recta ℓ_2:

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x - 5y - z = -1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{-1}{3} \\ y = \frac{7}{3} \\ z = -11 \end{matrix}$$

Si las rectas son concurrentes este punto debe satisfacer la cuarta ecuación:

$$3(\tfrac{-1}{3}) - 9(\tfrac{7}{3}) + 3(-11) = -55$$

Como si satisface, entonces las rectas son concurrentes y el punto calculado anteriormente es su punto de intersección.

Ahora calculemos el ángulo agudo de intersección.
Encontremos sus vectores directrices:

$$D_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = (1,2,-9)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -9 & 3 \end{vmatrix} = (3,-3,-12)$$

$$D_1 \bullet D_2 = \|D_1\|\|D_2\|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{D_1 \bullet D_2}{\|D_1\|\|D_2\|} = \frac{(1,2,-9)\bullet(3,-3,-12)}{\sqrt{86}\sqrt{162}} = \frac{105}{18\sqrt{43}} = \frac{35}{6\sqrt{43}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{35}{6\sqrt{43}}\right) = 27.2^\circ$$

Ejemplo 2-7 Encontrar el ángulo de intersección de dos planos

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Solución: θ de π_1, π_2 = θ entre sus vectores normales; N1, N2.

$N_1 = (a_1, b_1, c_1)$
$N_2 = (a_2, b_2, c_2)$

$$N_1 \bullet N_2 = \|N_1\|\|N_2\|\cos\theta$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{N_1 \bullet N_2}{\|N_1\|\|N_2\|}\right)$$

Ahora estamos en condiciones de analizar los casos c, d y e que quedaron pendientes en la sección 2-1.

Caso c:

Ejemplo 2-8 Encontrar la ecuación del plano que contiene a la recta $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + 4z = 5 \end{cases}$ y al punto P_0 $(1,-1,3)$

Solución: La *figura 2-11* indica el razonamiento de este caso:

Encontremos el punto P que es un punto cualquiera de la recta;

Para z = 0 resolvemos el sistema: $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{-1}{3} \end{matrix}$

Entonces P es el punto $(\frac{7}{3}, \frac{-1}{3}, 0)$

$$V = \overrightarrow{PP_0} = (\tfrac{-4}{3}, \tfrac{2}{3}, -3)$$

El vector directriz de la recta es:

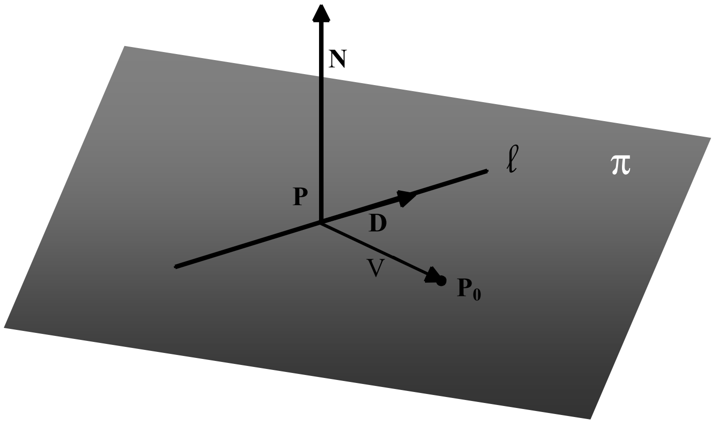


Figura 2-11

$$D = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (3,-6,-3)$$

$$N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{-4}{3} & \frac{2}{3} & -3 \\ 3 & -6 & -3 \end{vmatrix} = (-20,-13,6)$$

Entonces la ecuación del plano es de la forma:

$$ax + by + cz + d = 0$$
$$-20x - 13y + 6z + d = 0$$
$$-20(\tfrac{7}{3}) - 13(\tfrac{-1}{3}) + d = 0 \Rightarrow d = \tfrac{127}{3}$$
$$-20x - 13y + 6z + \tfrac{127}{3} = 0$$

$$\boxed{60x + 39y - 18z = 127}$$

Caso d:

Ejemplo 2-9 Encontrar la ecuación del plano que contiene a las rectas:

$$l_1 \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = 3t + 2 \end{cases} \qquad l_2 \begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = t + 2 \end{cases}$$

Solución: En la *figura 2-12* veamos el razonamiento de este caso:

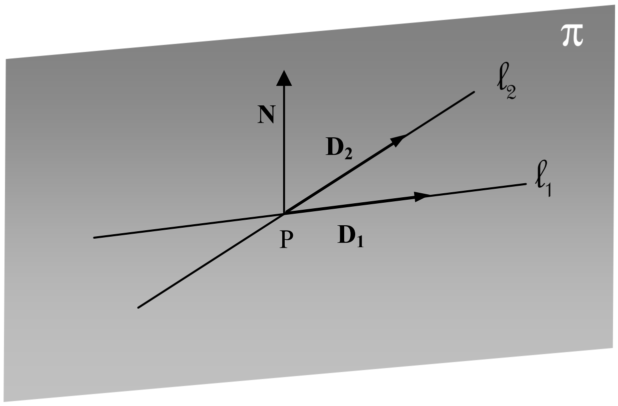


Figura 2-12

El punto P, común a las rectas, lo calculamos para un valor del parámetro de 0:

$$t = 0 \Rightarrow x = 1, y = -1, z = 2$$

Como se puede apreciar es un punto común a las dos rectas; entonces:

$$\hat{D}_1 = (2,1,3) \qquad P:(1,-1,2) \qquad \hat{D}_2 = (5,2,1)$$

$$N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-5,13,-1)$$

La ecuación del plano es:

$$ax + by + cz + d = 0$$
$$-5x + 13y - 1z + d = 0$$
$$-5(1) + 13(-1) - (2) + d = 0 \Rightarrow d = 20$$

$$\boxed{5x - 13y + z = 20}$$

Caso e:

Ejemplo 2-10 Encontrar la ecuación del plano que contiene a las rectas:

$$l_1 \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 4t + 2 \\ z = t - 3 \end{cases} \quad l_2 \begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = 8t + 1 \\ z = 2t - 2 \end{cases}$$

Solución: En la *figura 2-13* veamos el razonamiento de este caso:

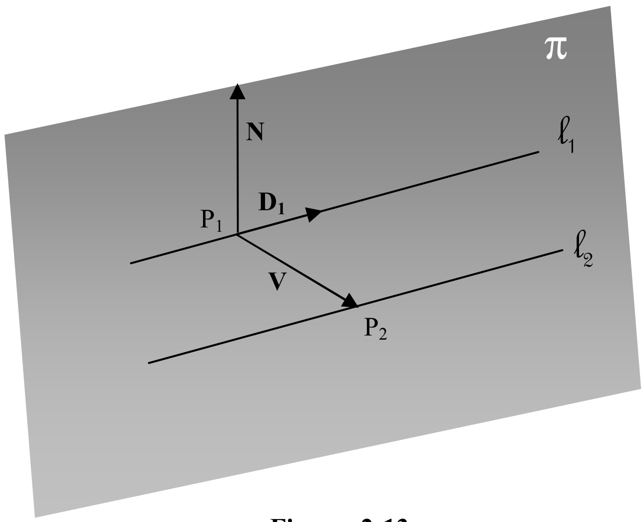


Figura 2-13

En ℓ_1 para t = 0 $P_1 = (-1,2-3)$; y en ℓ_2 también para t = 0, $P_2 = (-2,1,-2)$; $D_1 = (2,4,1)$

$$V = (-1,-1,1)$$

$$N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-5,3,-2)$$

La ecuación del plano es:

$$ax + by + cz + d = 0$$
$$-5x + 3y - 2z + d = 0$$
$$-5(-1) + 3(2) - 2(-3) + d = 0 \Rightarrow d = -17$$

$$\boxed{5x - 3y + 2z = -17}$$

2-5 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA Y ENTRE RECTAS

Sea ℓ una recta cualquiera en R^3 y P_0 un punto exterior a ella, la distancia del punto P_0 a ℓ es el segmento de perpendicular a la recta, en el plano que contiene al punto y a ℓ, que separa al punto de la recta. La *figura 2-14* nos permite razonar la forma de encontrar esta distancia:

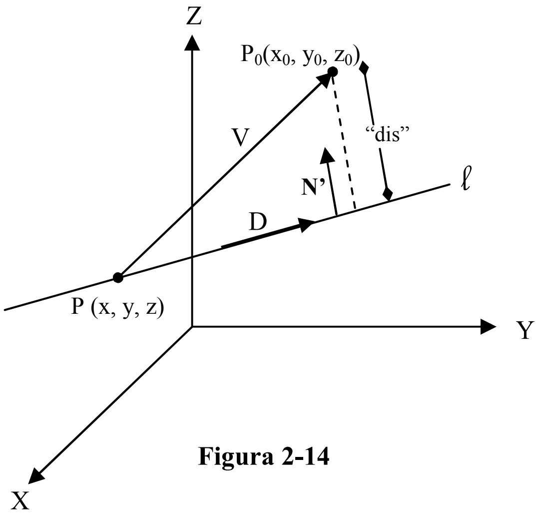
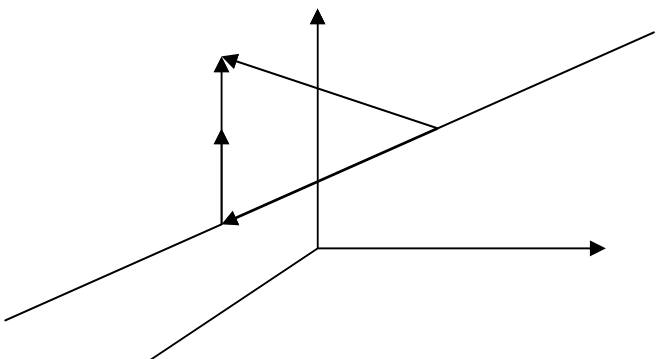


Figura 2-14



N’ es ⊥ a ℓ y debe pertenecer al plano que contiene a P_0 y ℓ.

Hay dos formas para encontrar esta distancia. Sin usar ninguna fórmula veamos en el ejemplo 2-11 el razonamiento de cada uno de estos métodos:

Ejemplo 2-11 Encontrar la distancia del punto P_0 : (-1, 2, -3) a la recta $l = \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - y - 2z = 2 \end{cases}$

Solución: En la *figura 2-14* podemos entender el razonamiento de las dos formas que expondremos para encontrar esta distancia.

FORMA VECTORIAL

- ✓ Primero averigüemos si el punto pertenece a la recta o no; si perteneciera a ℓ la distancia es cero:

$$P_0 \notin l \Rightarrow d > 0$$

Encontremos el punto de la recta P; para z = 1 resolvamos el sistema de las ecuaciones de la recta:

$$z = 1$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -4 \\ y = -8 \end{matrix}$$

$$p : (-4, -8, 1)$$

$$V = (-1, 2, -3) - (\text{-}4, \text{-}8, 1) = (3, 10, -4)$$

Encontremos el vector directriz de la recta:

$$N_1 : (2, -1, 1)$$

$$N_2 : (1, -1, -2)$$

$$D : N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (3, 5, -1)$$

N' es el triple producto vectorial entre V, D y D; así:

$$N' = (D \times V) \times D$$

$$D \times V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 5 & -1 \\ 3 & 10 & -4 \end{vmatrix} = (-10,9,15)$$

$$N' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -10 & 9 & 15 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (-84,35,-77)$$

$$dis = \left| V \bullet \hat{N}' \right|$$

$$dis = \frac{1}{119.21} \left| (3,10,-4) \bullet (-84,35,-77) \right|$$

$$dis = \frac{1}{119.21} \left| -252 + 350 + 308 \right| = \tfrac{406}{119.21} = 3.41$$

$$\Rightarrow dis = 3.41$$

FORMA ESCALAR

V_D : Proyección de V sobre D

$$V_D = \left| V \bullet \hat{D} \right| = \tfrac{1}{\sqrt{35}} \left| (3,10,-4) \bullet (3,5-1) \right| = \tfrac{63}{\sqrt{35}}$$

$$dis = \sqrt{\left\| V \right\|^2 - V_D^2} = \sqrt{125 - \tfrac{3969}{35}} = 3.41$$

La distancia entre dos rectas paralelas o alabeadas es el segmento de perpendicular a las dos rectas que las separa.

Ejemplo 2-12 Encontrar la distancia entre las rectas:

$$l_1 = \begin{cases} x + y - z = 2 \\ -x + 3y - 2z = 1 \end{cases} \qquad l_2 = \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3t + 4 \end{cases}$$

Solución: Primero debemos comprobar que las rectas no sean concurrentes; para eso, la forma paramétrica de ℓ_2 debe satisfacer las ecuaciones de ℓ_1:

$$(t)+(1-2t)-(3t+4)=2 \Rightarrow t=\tfrac{-4}{5}$$
$$-(t)+3(1-2t)-2(3t+4)=1 \Rightarrow t=\tfrac{-6}{13}$$

Las rectas no tienen punto común y pueden ser paralelas o alabeadas dependiendo de sus vectores directrices. Ahora encontremos los vectores directrices de las rectas:

$$D_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=(1,3,4)$$
$$D_2=(1,-2,3)$$

Como los vectores directrices no son paralelos, las rectas son alabeadas, para encontrar la distancia entre ellas fijemos un punto P_1 de ℓ_1 y un punto P_2 de ℓ_2, con estos puntos tenemos el vector V que une dos puntos cualquiera de las rectas, la distancia ("dis") será la proyección de este vector sobre el normal a las dos rectas N':

$$N'=D_1\times D_2$$
$$N'=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=(17,1,-5)$$

$$P_1 : \left(\tfrac{5}{4}, \tfrac{3}{4}, 0\right)$$
$$P_2 : (0, 1, 4)$$
$$V : \left(\tfrac{-5}{4}, \tfrac{1}{4}, 4\right)$$

$$dis=\left|V\bullet \hat{N}'\right|$$

$$dis = \frac{1}{\sqrt{315}} \left| \left(\tfrac{-5}{4}, \tfrac{1}{4}, 4\right) \bullet (17,1,-5) \right|$$
$$dis = \frac{41}{\sqrt{315}} = 2.31$$

2-6 FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Una función de varias variables es de la forma $f(x): R^n \rightarrow R^m$, donde:

R^n : Es el espacio dominio de f.

R^m : Es el espacio rango o Imagen de f.

$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n) \in R^n$, es un vector del dominio de f, y:

$\vec{f(x)} = (f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots\ldots\ldots, f_m(x)) \in R^m$, es un vector del rango de f.

Las funciones de varias variables se pueden clasificar en dos grandes grupos: funciones escalares y funciones vectoriales de acuerdo a la dimensión del rango; cuando m = 1 se trata de funciones escalares o campos escalares de la forma $f(x): R^n \rightarrow R$, cuando m > 1 se trata de funciones vectoriales o campos vectoriales de la forma $F(x): R^n \rightarrow R^m$. De igual forma cada una de estos grupos se pueden subdividir en dos mas, en cada caso, de acuerdo a la dimensión del dominio; funciones escalares de variable escalar que son las funciones de variable real que se estudiaron en el cálculo básico de una dimensión que son de la forma $f(x): R \rightarrow R$, funciones escalares de variable vectorial que genéricamente son las superficies en el espacio y son a las que nos dedicaremos de una forma prioritaria en este texto, son de la forma $f(x): R^n \rightarrow R$, las más comunes de estas son las superficies en R^3 que son de la forma $z = f(x, y): R^2 \rightarrow R$. En el otro grupo tenemos las funciones vectoriales de variable escalar que constituyen todas las curvas o trayectorias en el espacio, son de la forma $\sigma(t): R \rightarrow R^m$, seria importante que entendiera el lector que las curvas planas expresadas en forma paramétrica son de este grupo, pues, serían de la forma $\sigma(t) = (x(t), y(t)): R \rightarrow R^2$, las mas comunes de estas son las curvas en el espacio que son de la forma $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)): R \rightarrow R^3$, y finalmente las funciones vectoriales de variable vectorial que son de la forma general expresada al inicio de esta sección, en este grupo las más comunes para los fines de este texto son las superficies en el espacio tridimensional que son de la forma:

$$\phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : R^2 \to R^3$$

De igual forma sería importante que el lector entendiera que a este grupo pertenecen las superficies $z = f(x, y)$ expresadas en forma paramétrica.

El siguiente cuadro resume todo lo dicho sobre esta clasificación de las funciones de varias variables.

	CON RESPECTO A LA DIMENSIÓN DEL RANGO	CON RESPECTO A LA DIMENSIÓN DEL DOMINIO

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES $\mathbf{R^n \longrightarrow R^n}$

- ✶ **ESCALARES** (Campos escalares) $R^n \longrightarrow R$
  - **DE VARIABLE ESCALAR** $R \longrightarrow R$ (Funciones de variable Real)
  - **DE VARIABLE VECTORIAL** $R^n \longrightarrow R$, $n > 1$ (Superficies en el espacio)
- ✶ **VECTORIALES** (Campos vectoriales) $R^n \longrightarrow R^m$, $m > 1$
  - **DE VARIABLE ESCALAR** $R \longrightarrow R^m$ (Trayectorias o curvas en el espacio)
  - **DE VARIABLE VECTORIAL** $R^n \longrightarrow R^m$, $n > 1$

Podemos citar algunos ejemplos de todos estos tipos de funciones:

✓Una función de una variable es la relación entre dos magnitudes; por ejemplo el espacio y el tiempo $f : D \subset R \to R$; $f : t \to s$; $s \to f(t)$, la gráfica de una función de una variable es una curva en el plano, *figura 2-15*. Hay que tomar en cuenta que, para que una relación de una variable sea una función debe existir una relación uno a uno, el gráfico de una función no puede tener dos puntos en una misma vertical, esto hace que una circunferencia no sea una función; pero si la separamos en dos, la semicircunferencia superior y la semicircunferencia inferior, estas si son funciones, como lo podemos apreciar en la *figura 2-16* para la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

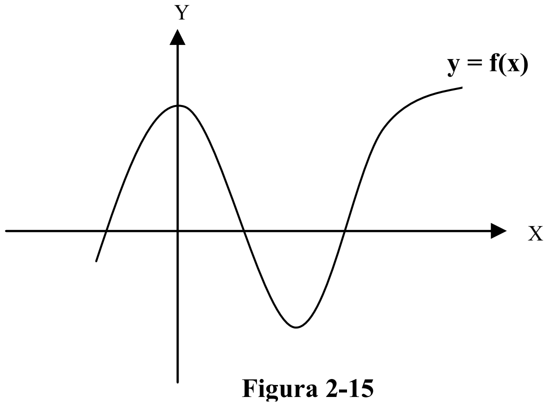


Figura 2-15

✓Los campos escalares representan superficies en el espacio y podemos verlas hasta las que se puedan graficar en el espacio tridimensional por la capacidad de nuestros sentidos, un ejemplo de estas es el área de un rectángulo en función de la base y la altura, $a = f(b,h)$, es de la forma $(x,y) \to z$, $z = f(x,y)$, $f : U \subset R^2 \to R$, el volumen de un paralelepípedo en función de sus tres dimensiones x, y, z, $V = f(x,y,z)$, es de la forma $(x,y,z) \to w$, $w = f(x,y,z)$, $f : U \subset R^3 \to R$, una función de costos en una fábrica donde se producen 5 productos distintos el costo total será dependiente de los costos de producción de cada uno de los 5 productos que se fabrican y de los costos fijos CF; $CT = C_{v1}Q_1 + C_{v2}Q_2 + C_{v3}Q_3 + C_{v4}Q_4 + C_{v5}Q_5 + CF$, es de la forma $CT = f(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)$, $f : U \subset R^5 \to R$.

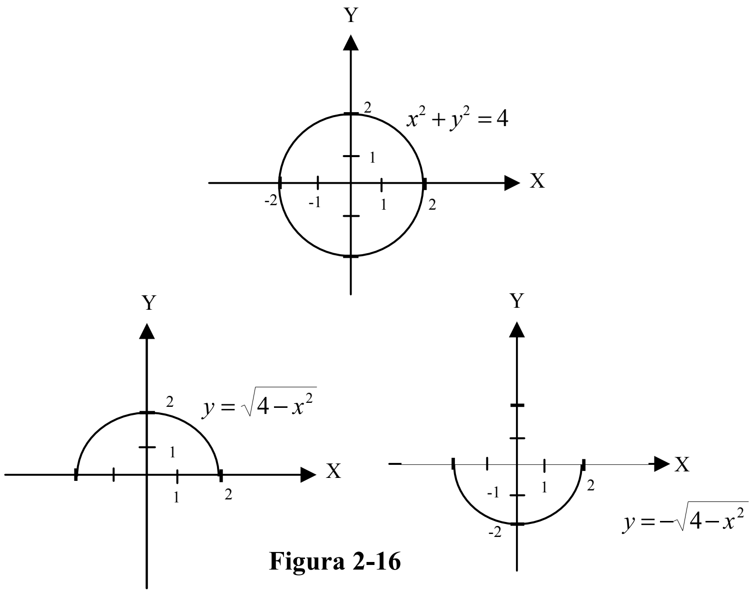


Figura 2-16

✓Las funciones vectoriales de variable escalar representan trayectorias o curvas en el espacio y también podemos apreciar su gráfico hasta las que se pueden graficar en R^3, un ejemplo de estas es la parametrización de una parábola $\sigma(t) = (t, t^2)$, $F : D \subset R \to R^2$, su gráfico es el de la parábola $y = x^2$ en R^2, la trayectoria de un proyectil en el espacio $t \to (x(t), y(t), z(t))$, $F : D \subset R \to R^3$, su gráfico es una curva en R^3, como lo indica la *figura 2-17*.
✓

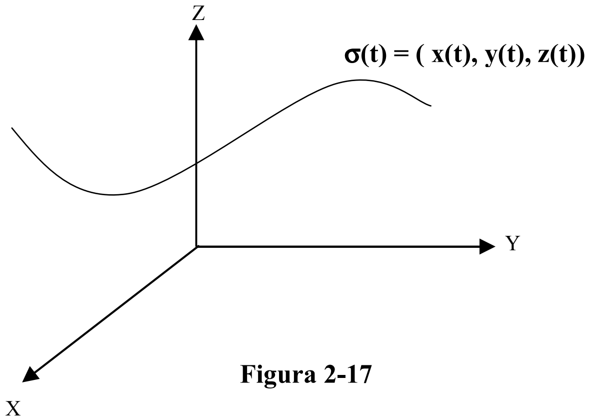


Figura 2-17

✓Las funciones vectoriales de variable vectorial son funciones más abstractas y son difíciles de obtener su gráfico, solo debemos imaginarnos la relación que representan cuando su rango esta en dimensión mayor a R^3, un ejemplo de estas es una función que determine la velocidad de las partículas en el interior de un fluido, $F(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$, $F : U \subset R^3 \to R^3$. En este grupo están las superficies parametrizadas y estas son las mismas superficies de las que se hablo en los campos escalares solo que expresadas en forma paramétrica estas son de la forma $\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ $F : D \subset R^2 \to R^3$, el gráfico de estas son superficies en R^3, en el capítulo 8 las estudiaremos con más detenimiento.

2.7 SUPERFICIES CUADRATICAS EN R^3

Como hemos dicho en la sección anterior, las funciones de la forma $z = f(x, y)$, representan superficies en R^3, dentro de estas superficies están las superficies cuádricas que son funciones escalares de la forma anterior con regla de correspondencia cuadrática, estudiaremos en forma general las más importantes por su utilidad en el estudio del cálculo de varias variables; comencemos primero estudiando dos definiciones importantes que nos permiten manejar gráficamente una función escalar.

Definición de gráfico de una función escalar.

Sea $f(x): U \subset R^n \to R$ una función escalar continua en U, se llama gráfico de $f(x)$ al conjunto de puntos:

$$\{(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, f(x)) \in R^{n+1} / (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U \wedge z = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n\}$$

Analizando la definición anterior es importante que hagamos las siguientes observaciones:

1. El gráfico de una función escalar esta definida en una dimensión mas uno de la dimensión de su dominio.
2. Esto nos permite observar, hasta el gráfico de funciones escalares en R^2 y son superficies en R^3.
3. El gráfico de una función de variable real esta en R^2 y son curvas planas.
4. Estamos imposibilitados para ver el gráfico de funciones cuyo dominio esta en dimensiones de R^3 a R^n, estos estarían en espacios de R^4 a R^{n+1}.

Para ganar una dimensión más en la observación gráfica del comportamiento de una función escalar planteamos la siguiente definimos conjuntos de nivel.

Definición de conjunto de nivel para una función escalar.

Sea $f(x): U \subset R^n \to R$ una función escalar continua en U, se llama conjunto de nivel de $f(x)$ al conjunto de puntos:

$$\{(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \in R^n / f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k; k \in R\}$$

De igual forma que en el caso anterior el análisis de esta definición nos lleva a las siguientes observaciones:

1. El conjunto de nivel de una función escalar esta definido en la misma dimensión de su dominio.
2. Por igualar la función a un valor constante, los conjuntos de nivel representan geométricamente cortes del gráfico de la función original.
3. Ahora se nos presenta la opción de observar, hasta los conjuntos de nivel de funciones escalares en R^3 y son superficies en R^3, comúnmente se las conoce como ***superficies de nivel***.

4. Los conjuntos de nivel de funciones escalares en R^2, están en R^2 y son curvas planas, comúnmente se las conoce como ***curvas de nivel***.
5. Los conjuntos de nivel de funciones de variable real serían puntos en R.

Hablando del comportamiento gráfico de una función podemos resumir diciendo que a las funciones: $z = f(x, y) : U \subset R^2 \to R$, les podemos observar su gráfico y el de sus conjuntos de nivel, mientras que a funciones: $w = f(x, y, z) : U \subset R^3 \to R$, solo les podemos observar sus conjuntos de nivel o superficies de nivel. La *figura 2-18* indica el gráfico de una superficie y el de sus curvas de nivel en R^3.

Ejemplo 2-13 Dada la función escalar $f(x, y) = x + y - 2$, analizar su gráfico y sus curvas de nivel

Solución:

El gráfico es un plano que corta a los ejes coordenados en (2,0,0); (0,2,0); (0,0,-2), como lo indica la *figura 2-18 (a).*

Sus conjuntos de nivel son rectas paralelas de la forma;

$f(x, y) = k$;

$x + y - 2 = k$:

k = 0; x + y = 2
k = 1; x + y = 3
k =-1; x + y = 1
k = 2; x + y = 4
k =-2; x + y = 0

Como se puede apreciar en la *figura 2-18 (b)* ✓

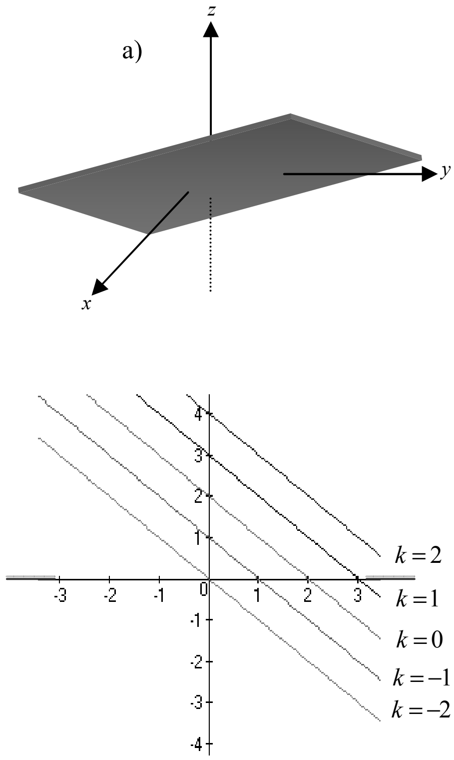


Figura 2-18

Una superficie cuádratica es el lugar geométrico de los puntos (x,y,z) que satisfacen una ecuación de segundo grado de la forma:

$$* \ Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Lz + M = 0$$

Esta misma ecuación se puede escribir en forma matricial como:

$$(1, x, y, z)\begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & q_{03} \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{30} & q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Donde:

$$\begin{array}{llll} A = q_{11} & B = q_{22} & C = q_{33} & M = q_{00} \\ D = q_{21} + q_{12} & E = q_{31} + q_{13} & F = q_{32} + q_{23} & \\ G = q_{10} + q_{01} & H = q_{20} + q_{02} & L = q_{30} + q_{03} & \end{array}$$

$Q = (q_{ij})$ es la matriz que define la función cuadrática.

Tomando en consideración la ecuación *, que es la forma general de la ecuación cuadrática, podemos revisar un grupo selecto de superficies en R^3 que se las conoce con el nombre de SUPERFICIES CUADRATICAS o simplemente CUADRICAS.

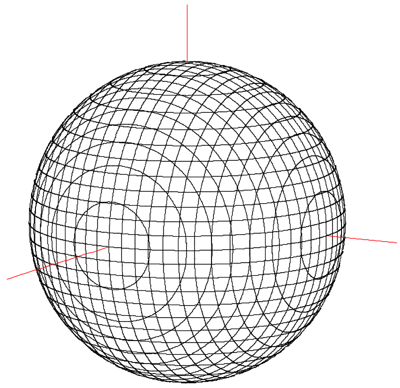
Las cuádricas más comunes son: la esfera, el elipsoide, los hiperboloides de una hoja y de dos hojas, el paraboloide, el paraboloide hiperbólico, el cono y el cilindro. Analicemos las características más sobresalientes de cada una de ellas.

La Esfera:

Si en la fórmula general los coeficientes A, B y C son iguales, mayores que cero y la fórmula general puede escribirse de la forma:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = R^2$$

Entonces la función cuadrática representa una superficie esférica de centro en el punto (h, k, l) y radio $R \rightarrow R \geq 0$. Si el centro esta en origen la superficie esférica es de la forma $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, la *figura 2-19* representa a esta última.



Sus curvas de nivel, tomando $z = f(x,y)$, son circunferencias al igual que los cortes con planos paralelos a los planos coordenados.

Figura 2-19

El Elipsoide:

Si en la fórmula general los coeficientes A, B y C son diferentes, mayores que cero y la fórmula general puede escribirse de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

Entonces la función cuadrática representa un elipsoide de centro en el punto (h,k,l) y semiejes a, b, y c.

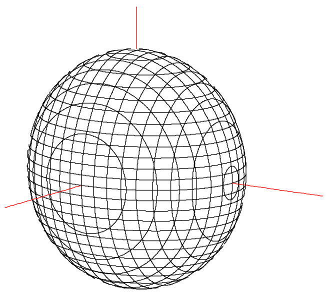


Figura 2-20

Si el centro esta en origen el elipsoide es de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, la *figura 2-20* representa este caso.

Sus curvas de nivel, tomando $z = f(x,y)$, son elipses al igual que los cortes con planos paralelos a los planos coordenados, aunque algún corte pude ser una circunferencia si el elipsoide es de revolución.

Hiperboloide de una hoja:

Si en la fórmula general los coeficientes A, B y C son iguales o diferentes, uno de ellos negativo y la fórmula general puede escribirse de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$$

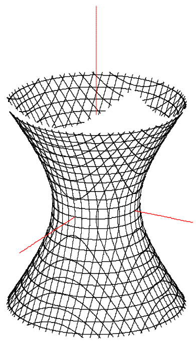


Figura 2-21

Entonces la función cuadrática representa un hiperboloide de una hoja de centro en el punto (h,k,l), la dirección del eje de simetría lo da la variable cuyo coeficiente lleva el signo negativo (en este caso el eje de simetría es paralelo al eje "Z").

Si el centro esta en origen el hiperboloide de una hoja es de la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, la *figura 2-21* representa este caso.

Sus curvas de nivel, tomando $z=f(x,y)$, son elipses o circunferencias si el hiperboloide es de revolución, en cambio los cortes con planos paralelos a los planos coordenados son hipérbolas, de ahí su nombre de hiperboloide.

Hiperboloide de dos hojas:

Si en la fórmula general los coeficientes A, B y C son iguales o diferentes, dos de ellos negativo y la fórmula general puede escribirse de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$$

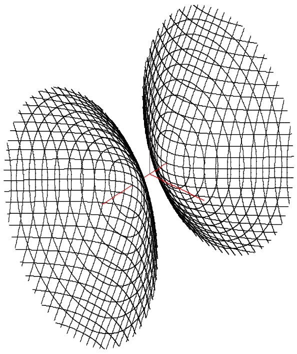


Figura 2-22

Entonces la función cuadrática representa un hiperboloide de dos hojas de centro en el punto (h,k,l), la dirección del eje de simetría lo da la variable cuyo coeficiente es positivo (en este caso el eje de simetría es paralelo al eje "X").

Si el centro esta en origen el hiperboloide de dos hojas es de la forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, *la figura 2-22* representa este caso.

Sus curvas de nivel tomando, $x=f(y,z)$, son elipses o circunferencias si el hiperboloide es de revolución, en cambio los cortes con planos paralelos a los planos coordenados son hipérbolas, de ahí su nombre de hiperboloide.