CÁLCULO II

Cálculo de Varias Variables

Material didáctico empleado para el estudio del Cálculo de Varias Variables (ICM-01966)

ssolis@espol.edu.ec
GUAYAQUIL - ECUADOR

La intersección de tres rectas perpendiculares entre sí llamadas ejes coordenados, forman el sistema de coordenadas rectangular en tres dimensiones.

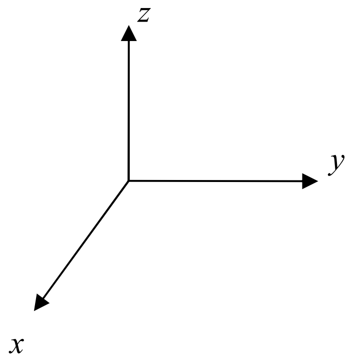
Las rectas reciben nombres de **eje X**, **eje Y** y **eje Z** respectivamente. Los ejes combinados de dos en dos forman tres planos llamados planos coordenados y son:

XY, XZ y YZ que dividen el espacio en ocho **octantes**.

Por convención, cualquier punto P de coordenadas (x, y, z) se grafica de tal forma que:

x es la distancia del punto al plano YZ
y es la distancia del punto al plano XZ
z es distancia del punto al plano XY

Obs. Se entiende por distancia la longitud del segmento perpendicular que une el punto P con el plano coordenado. La ubicación del punto determina el signo de la coordenada.



LUGARES GEOMETRICOS ESPECIALES

- Recta paralela al eje Z. Se define como $x=K_1$; $y=K_2$. Penetra al plano XY en $(K_1, K_2, 0)$.
- Recta paralela al eje X. Se define como $y=K_1$; $z=K_2$. Penetra al plano YZ en $(0, K_1, K_2)$
- Recta paralela al eje Y. Se define como $x=K_1$; $z=K_2$. Penetra al plano XZ en $(K_1, 0, K_2)$

- Plano paralelo al plano YZ. Se define como x=K. Corta al eje X en (K, 0, 0)
- Plano paralelo al plano XZ. Se define como y=K. Corta al eje Y en (0, K, 0)
- Plano paralelo al plano XY. Se define como z=K. Corta al eje Z en (0, 0, K)

Obs. $K \in \mathbf{R}$.

2.1 LA RECTA EN R^3

Definición vectorial.- Sea $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ un punto que pertenece a la recta L, con vector director **d** diferente del vector cero dado por (a, b, c). Se define a L como el conjunto de puntos $P(x, y, z)$ tales que la dirección del vector P_0P es paralela a **d**.

Esto es $P_0P = (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = t(a, b, c)$; $t \in \mathbf{R}-\{0\}$ (1)

A partir de la ecuación (1) se obtiene $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

que se denominan las ecuaciones paramétricas de L con parámetro t.

Como t satisface a las tres coordenadas simultáneamente para un punto dado, se puede despejar e igualar t, obteniendo de esta forma las ecuaciones simétricas:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c};\quad a,b,c\in \mathrm{R}-\{0\}$$

Para rectas especiales: $\perp$ al eje X $\rightarrow$ $b=0 \wedge c=0$
$\perp$ al eje Y $\rightarrow$ $a=0 \wedge c=0$
$\perp$ al eje Z $\rightarrow$ $a=0 \wedge b=0$

$\perp$ al plano XY $\rightarrow$ $c=0$
$\perp$ al plano XZ $\rightarrow$ $b=0$
$\perp$ al plano YZ $\rightarrow$ $a=0$

Ej. 1) Determine si los puntos P(2,0,0) $\wedge$ Q(3,1,1) $\in$ a L si L: $\begin{cases} x=2+t \\ y=-3t \\ z=t \end{cases}$

Ej. 2) Hallar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta tal que:

a) Contiene al punto $(-2,1,0)$ y es paralela al vector $(1,-1,3)$
b) Contiene los puntos $P(-1,2,3) \wedge Q(1,3,5)$
c) Contiene al punto $(2,-1,1)$ y es paralela al eje Y
d) Contiene al punto $(-4,0,3)$ y es perpendicular al plano XY.

<u>Definiciones sobre rectas</u>

Rectas Paralelas.- Si y sólo su sus vectores directores son paralelos.
Rectas Perpendiculares.- Si y sólo si sus vectores directores son ortogonales.
Rectas alabeadas.- Si y sólo si no son coplanares.
Rectas secantes.- Si y sólo sí se intersecan en un punto.

Ej. 3) Encuentre de ser posible las coordenadas del punto de intersección de las rectas:

$L_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=5+4t \end{cases}$; $L_2: \begin{cases} x=7+3u \\ y=2+2u \\ z=1-2u \end{cases}$

Ej. 4) Determine que tipo de rectas son L_1 y L_2.

$L_1: \begin{cases} x=-7+3t \\ y=-4+4t \\ z=-3-2t \end{cases}$; $L_2: \begin{cases} x=21+6s \\ y=-5-4s \\ z=2-s \end{cases}$

Ej. 5) Encuentre el baricentro del triángulo definido por (1, 2, 1) ; (2, 3, 3); (3, –2, 3).

<u>2.2 EL PLANO EN R^3</u>

Definición vectorial.- Sea $P_0(x_0, y_0, z_0) \in R^3$ y sea **n** un vector de coordenadas (a, b, c) diferente del vector cero. Se define el plano que contiene a P_0 y es normal a **n**, como el conjunto de puntos $P(x, y, z)$ tales que P_0P forma una dirección ortogonal a **n**. Esto es:

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\bullet(a, b, c)=0 \quad \text{(ecuación vectorial)}$$
$$\equiv a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$\equiv ax+by+cz+d=0 \quad \text{(ecuación general)}$$

Además, si $d=0$ el plano contiene al origen.

Para definir un plano es suficiente:

i) Tres puntos no colineales del plano.
ii) Dos rectas secantes no coincidentes del plano
iii) Dos rectas paralelas no coincidentes del plano.
iv) Un punto del plano y una recta del plano
v) Dos puntos del plano y un vector paralelo al plano.
vi) Un punto del plano y una recta perpendicular al plano.

Ej. 1) Hallar el plano que contiene a los puntos (2,1,1) ; (0,4,1); (–2,1,4).

Ej. 2) Hallar la ecuación general del plano que contiene a las rectas:

a) $L_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{cases}$ $\qquad L_2: \begin{cases} x = 2+3t \\ y = -2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

b) $L_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{cases}$ $\qquad L_2: \begin{cases} x = 1- t \\ y = -2+3t \\ z = 3 - t \end{cases}$

Ej. 3) Hallar la ecuación general del plano que contiene al punto (–1, 4, –1) y es normal a la recta $\dfrac{2x-1}{3} = \dfrac{2-y}{4} = \dfrac{4-2z}{2}$.

<u>Ángulo entre dos planos</u>.- Es el ángulo formado por los vectores normales respectivos.

<u>Intersección de dos planos secantes</u>.- Dos planos son secantes si se intersecan en una recta que satisface a las ecuaciones de los dos planos simultáneamente.

Ej1) Hallar el ángulo formado por los planos π_1: $x - 2y + z = 0$ y π_2: $2x + 3y - 2z = 0$

Ej2) Hallar la ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2 del ejercicio anterior.

Planos perpendiculares.- Dos planos son perpendiculares si y sólo si sus vectores normales son ortogonales.

Planos paralelos.- Dos planos son paralelos si y sólo si sus vectores normales son paralelos. Pueden ser paralelos coincidentes o no coincidentes. ¿Cómo se reconoce esto?

Traza de un plano.- Es la recta que se produce cuando un plano se interseca con alguno de los planos cartesianos:
$z = 0$: se obtiene traza con el plano XY
$x = 0$: se obtiene traza con el plano YZ
$y = 0$: se obtiene traza con el plano XZ

Ej. Hallar las trazas de los siguientes planos:

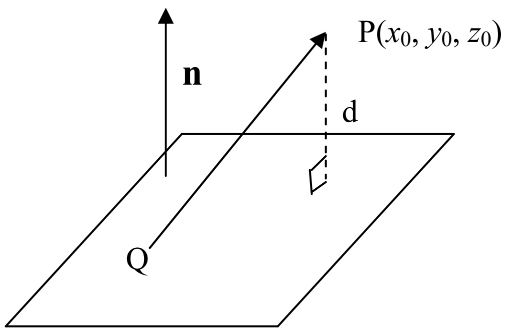
a) $2x - 3y + z = 1$
b) $x + 2y - z = 0$
c) $x + 3y = 0$

DEBER: "Cálculo Vectorial" de W. Armas. Pág. 65 – 70. Ejercicios del 1-45.

2.3 DISTANCIAS ENTE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS

Teorema: Sea el plano con ecuación general π: $ax + by + cz + d = 0$ y sea $P(x_0, y_0, z_0) \in R^3$ un punto que **NO** ∈ π. La distancia de P a π está dada por

$$\boxed{\frac{|ax_0 + by_0 + cz \ \ + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$



Demostración: $d(P,\pi) = |\, proy_{\mathbf{n}} \overrightarrow{QP}\, |$, donde $Q(x_1, y_1, z_1)$ es un punto cualquiera del plano π.

$$d(P, \pi) = \frac{|\overrightarrow{QP} \bullet n|}{\|n\|} = \left| \frac{(x_0 - x_1)a + (y_0 - y_1)b + (z_0 - z_1)c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz \ \ + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ej.) Hallar la distancia del punto (1, 5, –4) al plano $3x - y + 2z = 5$

Aplicación del teorema.

1) Hallar la distancia entre dos planos paralelos no coincidentes.
   π_1: $3x - y + 2z - 6 = 0$
   π_2: $6x - 2y + 4z + 4 = 0$

2) Hallar la distancia entre una recta paralela a un plano.
   $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -6 + 8t \\ z = 7 - 3t \end{cases}$; π: $-2x + y + 2z + 4 = 0$

3) Encontrar la ecuación del lugar geométrico formado por los puntos $P(x, y, z)$, cuya distancia al plano $4x - 3y + z = 10$ es igual a 4u.

4) Hallar el valor de **k** ∈ R para que el punto (5,–2, 5) diste 3 u al plano $11x + \mathbf{k}y - 2z = 0$

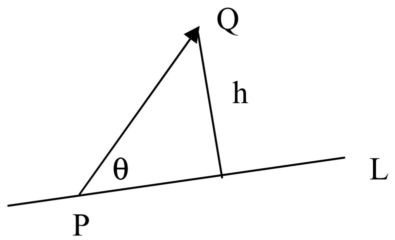
5) Hallar la altura del tetraedro cuyos vértices son A(−1,1,2); B(−1,1,0); C(2,–1,3) y D(2,–3,1), y la base esta formada por los vértices BCD.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA EN R^3

Sea L la recta con vector director **d** (a, b, c) y un punto de L $P(x_1, y_1, z_1)$. Sea $Q(x, y, z) \in R^3$ externo a L. La distancia de Q a L está dada por:

$$\boxed{D(L,Q) = \frac{\left\|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{d}\right\|}{\|d\|}}$$

Demostración:



Por Pitágoras, $h = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \operatorname{sen}\theta$.

Por el teorema del producto cruz: $\left|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{d}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \left|\mathbf{d}\right| \operatorname{sen}\theta = h\left|\mathbf{d}\right|$

Ej. 1) Calcular la distancia del punto (3, −1, 4) a la recta

$$\begin{cases} x = -2+3t \\ y = -2t \\ z = 1+4t \end{cases}$$

Caso de rectas alabeadas $D_{l_1,l_2} = \left|proy_{d_1 x d_2} P_1P_2\right|$

Ej. 2) Hallar la distancia entre las rectas L_1: $x = 4 + 5t$; $y = 5 + 5t$; $z = 1 - 4t$ y
L_2: $x = 4 + u$; $y = -6 + 8u$; $z = 7 - 5u$. (Verifique que son alabeadas)

Ej. 3) L_1: $x = 1 + \alpha$; $y = 2\alpha - 1$; $z = 3\alpha$ y L_2: $x = \beta - 1$; $y = 2\beta + 2$; $z = 3\beta + 4$

Ej. 4) Escriba la ecuación del lugar geométrico descrito por los puntos $Q(x, y, z)$ cuya distancia a la recta L: $\{x = 3t\ ,\ y = 2 - t\ ,\ z = -1 + t\}$ es igual a la unidad.

2.4 SUPERFICIES EN R^3

Es un conjunto de puntos de R^3 que satisface una ecuación de hasta tres variables.

- Superficies cuadráticas
- Cilindros
- Superficies de revolución.

Superficie cuadrática.- Es el conjunto de puntos $P(x, y, z)$ que satisfacen la ecuación de segundo grado $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$.

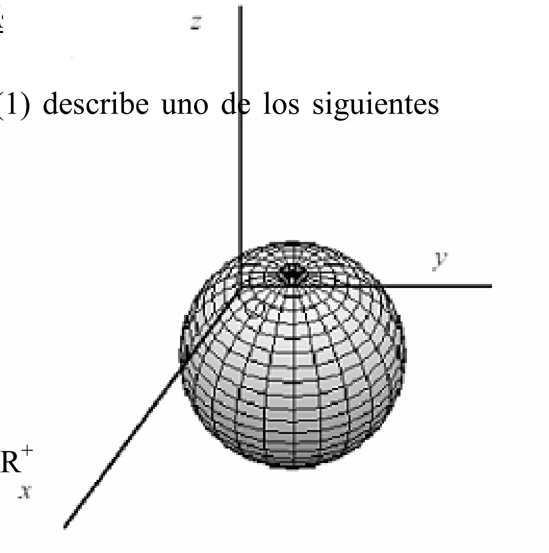
A través de una rotación de ejes principales (véase *formas cuadráticas* en el curso de álgebra lineal), es posible eliminar los términos mixtos y obtener la ecuación:

$$\underline{A}x^2 + \underline{B}y^2 + \underline{C}z^2 + \underline{D}x + \underline{E}y + \underline{F}z + \underline{G} = 0. \quad (1)$$

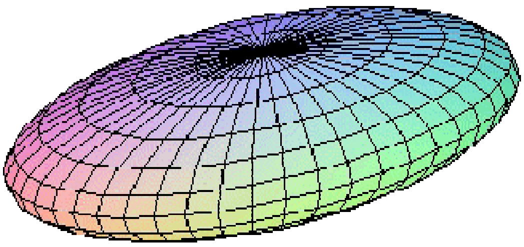
En (1) se puede completar trinomios cuadrados perfectos para las variables x, y, z respectivamente y obtener de esta forma cualquiera de los siguientes lugares o superficies.

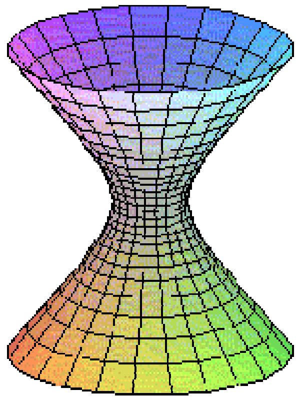
Tipos de superficies.- La ecuación general cuadrática (1) describe uno de los siguientes lugares:

-Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ o $(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$



-Elipsoide: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1 \qquad a, b, c \in \mathrm{R}^+$





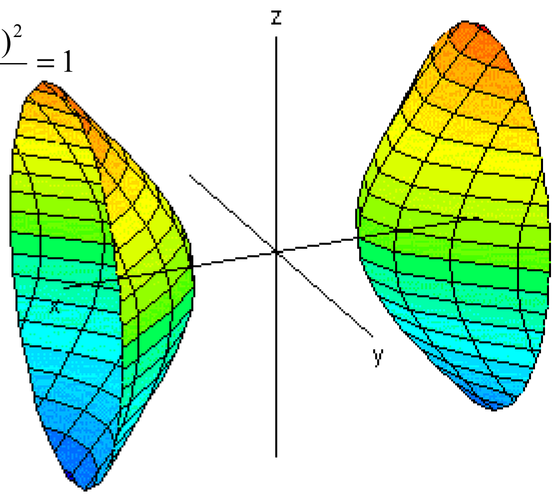
-Hiperboloide de una hoja: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-1)^2}{c^2} = 1$

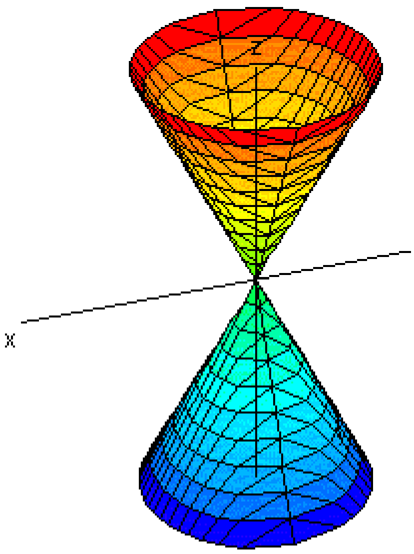
El eje del hiperboloide corresponde a la variable con coeficiente negativo.

-Hiperboloide de dos hojas: $-\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$

El eje del hiperboloide corresponde a la variable con coeficiente positivo.

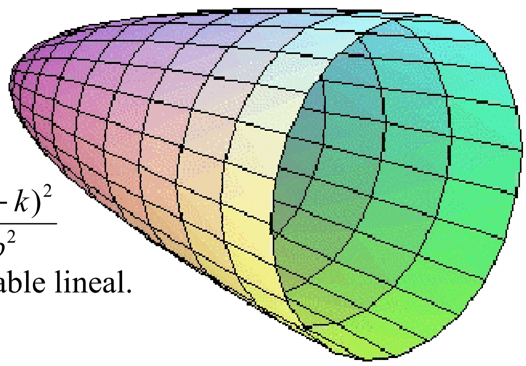
La figura muestra la gráfica de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$





-Cono elíptico: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 0$

El eje del cono corresponde a la variable con coeficiente negativo.



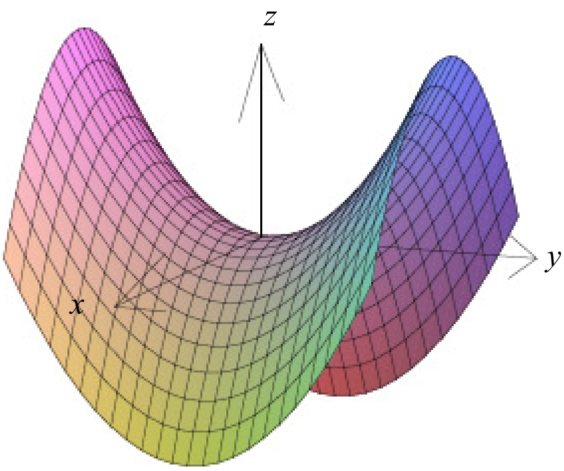
-Paraboloide elíptico: $z - l = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}$

El eje del paraboloide corresponde a la variable lineal.

-Paraboloide hiperbólico $\quad z - l = -\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2}$

Construcción del Edificio de Acceso al Parque Oceanográfico (Valencia-España)

Gráfica de $\quad z = y^2 - x^2$



- O una superficie degenerada en:
  - Un punto
  - Conjunto vacío
  - Par de planos
  - Par de rectas

Ej. 1) Identifique y describa los siguientes lugares representados por:

a) $16x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 32x - 36y + 36 = 0$

b) $4x^2 + y^2 - z^2 - 16x - 6y - 16z + 9 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8x + 8y - z + 10 = 0$

Ej. 2) Encuentre la traza de la superficie $z = \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9}$ con el plano $2x + 3y - z = 0$

Ej. 3) Encuentre la traza de la superficie $4x^2 - 3y^2 + 12z^2 + 12 = 0$ con los planos coordenados y grafíquelas. Interprete físicamente este resultado.

Ej. 4) Represente las siguientes regiones en R^3

a) $R = \{(x,y,z): z \geq 2\sqrt{x^2 + y^2} \ \wedge z \leq 2\}$

b) $R = \{ (x,y,z): x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0 \ \wedge \ z \leq 2 - x \}$

Cilindros.- Sea C una curva en un plano y L una recta secante al plano. Se dice que el conjunto de todas las rectas **paralelas** a L que se **intersecan** con C es una superficie cilíndrica de curva directriz C y recta generatriz L (o alguna otra recta paralela L).

Cilindros con generatrices paralelas a los ejes coordenados
Se obtiene la ecuación de un cilindro con generatriz paralela a los ejes coordenados si existen sólo dos variables. La variable ausente determina el eje coordenado que es paralelo a la generatriz del cilindro y C pertenece al plano de las dos variables de la ecuación.

Ej.) Grafique los cilindros:

a) $z = y^2$
b) $z = senx$, $0 \leq x \leq 2\pi$
c) $x^2 + y^2 = 16$
d) $z = e^y$

<u>**Superficies de revolución.-**</u> Sea f la función que define una curva sobre alguno de los planos cartesianos. Si la gráfica de f gira alrededor del eje coordenado que corresponde a la variable independiente de f, se obtiene una superficie de revolución cuya ecuación está dada por:

i) $x^2 + z^2 = [f(y)]^2$ si f gira alrededor de y.
ii) $x^2 + y^2 = [f(z)]^2$ si f gira alrededor de z.
iii) $y^2 + z^2 = [f(x)]^2$ si f gira alrededor de x.

Ej.1) Escriba la ecuación para la superficie de revolución generada al girar la curva dada alrededor del eje especificado.

a) $y = \frac{1}{z}$ en torno al eje Z.
b) $9x^2 = y^3$ en torno al eje Y.
c) $z = \ln x$ en torno al eje X.

Ej. 2) Encuentre una generatriz para la superficie de revolución dada y especifique el eje de revolución.

a) $x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$; b) $x^2 + y^2 - 2z = 0$

<u>2.5 SISTEMA DE COORDENADAS CILINDRICAS.</u>

Sea P un punto de R^3 con coordenadas (x, y, z). El punto P puede representarse por la terna (r, θ, z) tal que (r, θ) es la proyección de P sobre el plano XY en coordenadas polares y z es la distancia de P al plano XY.

Ecuaciones de conversión entre coordenadas cilíndricas y rectangulares
$x = r\cos\theta,\quad y = r\,\text{sen}\,\theta,\quad z = z$
$r^2 = x^2 + y^2,\quad \theta = \arctan\frac{y}{x},\quad z = z$

(0,0,0) es conocido como el polo.

Lugares geométricos especiales

i)	$r = k \geq 0$	: cilindro con eje Z y radio de sección k
ii)	$\theta = k \in R$	: semiplano que contiene el eje Z
iii)	$z = k \in R$	: plano paralelo al plano XY

Ej1) Escriba la ecuación en coordenadas cilíndricas de las superficies cuadráticas dadas.

a) $x^2 + y^2 = 4z^2$

b) $y^2 = x$

Ej2) Escriba la ecuación en coordenadas rectangulares de las ecuaciones dadas en coordenadas cilíndricas.

a) $r^2 \cos 2\theta + z^2 + 1 = 0$

b) $r = 2sen\theta$

c) $r = \frac{1}{2}z$

d) $z = r^2 sen^2\theta$

e) $\theta = \frac{\pi}{6}$

2.6 SISTEMA DE COORDENADAS ESFERICAS

Sea P un punto de R^3 con coordenadas (x, y, z). El punto P puede representarse por la terna (ρ, θ, φ) tal que:

i) ρ es la distancia de P al origen ($\rho \geq 0$)

ii) θ es el ángulo del sistema polar en XY.

iii) φ es el ángulo que forma el segmento $\overline{OP}$ con el eje z positivo ($0 \leq \varphi \leq \pi$).

Ecuaciones de conversión entre coordenadas esféricas y rectangulares

$$x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \ ; \quad y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \quad ; \quad z = \rho \cos\varphi$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad ; \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad ; \quad \varphi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Lugares geométricos especiales

i)	$\rho = k > 0$	: Esfera de radio k
ii)	$\theta = k \in R$	: semiplano que contiene el eje Z
iii)	$\varphi = k \in [0,\pi]$	: Cono con generatriz a k radianes del eje Z

Regiones en coordenadas esféricas y cilíndricas.

a) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq z \leq 4$

b) $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 3$, $0 \leq z \leq r\cos\theta$

c) $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$, $0 \leq \rho \leq 4\sec\varphi$

d) $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq 1$

3.1 CONCEPTOS ASOCIADOS A LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Def.- La función **f** de la forma $\overrightarrow{\mathbf{f}(\mathbf{x})} : R^n \longrightarrow R^m$ tal que:

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ es el vector dominio de **f** y $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)) \in R^m$ es el vector rango de **f** y a **x** le corresponde uno y solamente un elemento de R^m, se dice que es una función vectorial de varias variables.

Clasificación de las funciones de varias variables

Escalares (o campos escalares) $R^n \longrightarrow R$
- De variable escalar: $R \longrightarrow R$ (FVR)
- De variable vectorial: $R^n \longrightarrow R$, $n > 1$

Vectoriales (o campos vectoriales) $R^n \longrightarrow R^m$, $m > 1$
- De variable escalar: $R \longrightarrow R^m$ (Trayectorias o Curvas)
- De variable vectorial: $R^n \longrightarrow R^m$, $n > 1$

Gráficas de funciones de varias variables.

i) Si $f: R \to R$ se obtiene una curva en R^2, como por ejemplo $y = x^2$
ii) Si $f: R^2 \to R$ se obtiene una superficie en R^3, como por ejemplo $z = 2x^2 + 3y^2$
iii) Si $f: R \to R^3$ se obtiene una curva o trayectoria en R^3

Ej. 1) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = t \end{cases}$ Ej2) $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

En general, una trayectoria es función de un solo parámetro $\mathbf{f}(t) = (\, x(t), y(t), z(t)\,)$

Para el caso de funciones de $R^m \to R^m$, n, m > 1 (campos vectoriales), la gráfica no es posible de realizar y su interpretación depende de factores físicos (fuerza, flujo, velocidad, etc.)

Ej. 3) f: $R^3 \to R^3$ puede representar el vector velocidad de las partículas de un fluido en función de las coordenadas de dicha partícula en el espacio.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\, f(x, y, z)\, ;\, g(x, y, z)\, ;\, h(x, y, z)\,) = f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k}$$

Gráfico de una función escalar

Sea $f(\mathbf{x})$: $U \subseteq R^n \to R$ una función escalar definida en U, se denomina gráfico de f al conjunto de puntos $P \in R^{n+1}$ de la forma $(x_1, x_2, x_3, \ldots, f(\mathbf{x}))$ con $x \in U$ y $f(\mathbf{x}) \in R$.

Los gráficos observables son aquellos que $U \subseteq R$ o $U \subseteq R^2$.

En el primer caso la grafica es una curva en R^2 y el otro caso es una superficie en R^3.

Conjunto de nivel para funciones escalares.

Sea f: $U \subseteq R^n \rightarrow R$ y sea $k \in R$. El conjunto de nivel de f correspondiente al valor k es el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in U$ tales que $f(\mathbf{x}) = k$. Esto es

$$CN_k = \{ \mathbf{x} \in U \ / \ f(\mathbf{x}) = k \} \subseteq R^n$$

Para obtener un conjunto de nivel se iguala la variable del rango a una constante. Esto da los siguientes conjuntos de nivel:

i) En R: un punto de la recta numérica.
ii) En R^2: una curva en el plano (llamada también curva de nivel)
iii) En R^3: una superficie en el espacio (llamada también superficie de nivel).

Obs.- La gráfica de una función escalar de R^n requiere puntos de (n + 1) coordenadas y las curvas de nivel requieren puntos de n coordenadas.

Ej.) Para las funciones dadas grafique sus curvas de nivel con la constante especificada.

a) $f(x, y) = x + y - 2$; k = 0, k =1, k = 2, k = –1, k = –2.
b) $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$; k = 6, k = 12, k = 24.
c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, k =0, k=1, k=4, k=9
d) $f(x, y) = x^2 - y^2$; k= 0, k= ±1, k= ±4.
e) La función de producción de Cobb-Douglas para cierta empresa es $f(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$ en la que es x es el número de unidades de trabajo y y es el numero de unidades de capital. Determine la curva de posibilidades de producción para los niveles de producción u_1=80000 y u_2=160000.
f) Dibujar isotermas de una placa con temperatura $T(x, y) = 600 - 0.75x^2 - 0.75y^2$

Graficar (Práctica de Laboratorio)

a. $f(x, y) = \dfrac{-4x}{x^2 + y^2 + 1}$

b. $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$

c. $f(x, y) = \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

d. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$

e. $f(x, y) = \dfrac{2x^2y}{x^2 + y^2}$

f. $f(x, y) = e^{(1-x^2-y^2)}$

g. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

3.2 DOMINIO DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

- Si f es escalar, su dominio natural es el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in R^n$ tal que $f(\mathbf{x})$ sea un número real (es decir que f exista en R).

Ej1) Hallar el dominio de:

a. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}$

b. $f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}$

c. $f(x,y) = ln\left(16-4x^2-y^2\right)$

Corolario: Las funciones polinómicas tienen como dominio todo R^n.

- Si **f** es vectorial, su dominio debe satisfacer cada una de los componentes del vector rango. En este caso se deben intersecar los dominios de todas las componentes y el problema se reduce a hallar dominios de funciones escalares.

Ej. 2) Hallar el dominio de:

a. $\mathbf{f}(x,y) = (2x^2-y^2, \sqrt{xy})$

b. $\mathbf{f}(x,y,z) = \dfrac{3x^2}{y}\hat{i} + 2xy\hat{j} + \ln x^2 y\hat{k}$

c. $\mathbf{f}(x,y,z,w) = \left(\dfrac{xy}{z-w}, x+yz-w\right)$

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Def. De bola abierta (o disco abierto).- Sea $\mathbf{x_0} \in R^n$ y sea $\delta \in R^+$, se dice que la bola abierta de centro $\mathbf{x_0}$ y radio δ, es el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in R^n$ tales que:

$$B(\mathbf{x_0},\delta) = \| \mathbf{x} - \mathbf{x_0} \| < \delta.$$

Ej.1) en R^1 es un intervalo abierto. Esto es $B(\mathbf{x_0},\delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x / |x - x_0| < \delta\}$

Ej. 2) En R^2 es un círculo sin la circunferencia. Esto es

$$B((x_0, y_0),\delta) = \left\{(x,y) : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\right\}$$

Ej. 3) En R^3 es el interior de una superficie esférica. Esto es:

$$B((x_0, y_0, z_0),\delta) = \left\{(x,y,z) : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta\right\}$$

En general en R^n $B(\mathbf{x_0},\delta) = \{\mathbf{x} \in R^n / (x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + \ldots + (x_n - x_{0n})^2 < \delta^2\}$

Ej. 4) Determine si $(2, -1) \in B(\,(1,1);\, 4\,)$.

Def. de punto interior.- Sea $\mathbf{x_0} \in R^n$ y sea $U \subset R^n$. Se dice que $\mathbf{x_0}$ es un punto interior de $U \Leftrightarrow \exists\, B(\mathbf{x_0},\delta)$ totalmente contenida en U.

Def. de punto exterior.- Sea $\mathbf{x_0} \in R^n$ y sea $U \subset R^n$. Se dice que $\mathbf{x_0}$ es un punto exterior de U $\Leftrightarrow \exists\, B(\mathbf{x_0},\delta)$ totalmente fuera de U.

Def. de punto de frontera.- Sea $\mathbf{x_0} \in R^n$ y sea $U \subset R^n$. Se dice que $\mathbf{x_0}$ es un punto de frontera de U $\Leftrightarrow$ no es interior ni exterior de U.

Def. de conjunto abierto.- $U \subset R^n$ es un conjunto abierto $\Leftrightarrow$ todos sus puntos son interiores.

Def. de conjunto cerrado.- $U \subset R^n$ es un conjunto cerrado $\Leftrightarrow$ su complemento es abierto.

Ej 1) $x^2 + y^2 \geq 1$ es cerrado porque su complemento es abierto.
Ej 2) $x^2 + y^2 < 1$ es abierto.
Ej 3) $1 \leq x^2 + y^2 < 4$ ni abierto ni cerrado.
Ej 4) $1 \leq x \leq 4 \quad 2 \leq y \leq 5; \quad 0 \leq z \leq 3$. Cerrado.

3.3 LÍMITE DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

Def.- Sea $\mathbf{f}: U \subseteq R^n \to R^m$ una función definida en una región abierta U, excepto en algún $\mathbf{x_0} \in$ U o de la frontera de U. Sea $\mathbf{L} \in R^m$. Se dice que el límite de **f** es **L** cuando **x** se aproxima a $\mathbf{x_0}$, denotado por $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \mathbf{f}(x) = \mathbf{L}$, si sólo si el siguiente enunciado es verdadero:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{L}, \varepsilon).$$

Ej. 1) Demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

Por hipótesis $\sqrt{x^2+y^2} < \delta \equiv \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} < \delta \Rightarrow \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} < \delta \Rightarrow \delta = \varepsilon.$

Ej. 2) Demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^2 y}{x^2+y^2} = 0$

Teorema de la unicidad del límite.- Sea $\mathbf{f}: R^n \to R^m$ definida en algún conjunto abierto U. Sea $\mathbf{x_0} \in$ U o de la frontera de U. Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \mathbf{f}(x) = \mathbf{L} \wedge \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \mathbf{f}(x) = \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{M}.$

Ej. 3) Demuestre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ No existe

a) Por la ruta y=0
b) Por la ruta y=x

Ej. 4) Determine si la función $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ tiene límite en (0,0).

Límites empleando coordenadas polares. ((*x*,*y*)→(0,0) ≡ *r*→ 0).

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

b. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

c. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

d. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

e. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^2y}$

f. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+2y^6}$

<u>**Propiedades de los límites.-**</u> Sean **f** y **g** dos funciones de $R^n \to R^m$ tales que $\lim\limits_{x\to x_0} \mathbf{f}(x)=\mathbf{A}$ y $\lim\limits_{x\to x_0} \mathbf{g}(x)=\mathbf{B}$. Entonces:

i. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\mathbf{f}(x)\pm\mathbf{g}(x)\right]=\mathbf{A}\pm\mathbf{B}$

ii. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha\mathbf{f}(x)=\alpha\mathbf{A}$

iii. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\mathbf{f}(x)\bullet\mathbf{g}(x)\right]=\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}$

iv. $\lim\limits_{x\to x_0}\left\|\mathbf{f}(x)\right\|=\left\|\mathbf{A}\right\|$

<u>3.4 CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES</u>

<u>**Def.**</u> **de continuidad.-** Sea **f**: $R^n \longrightarrow R^m$ con U dominio de **f**. Sea $\mathbf{x_0} \in$ U, **f** es continua en $\mathbf{x_0}$ si y sólo si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{f}(\mathbf{x_0})$.

<u>Obs1.</u> **f** es continua en U ⇔ es continua es continua en cada **x** ∈ U.
<u>Obs2.</u> Para m > 1, **f** es continua ⇔ todos las funciones componentes de **f** son continuas.

Teorema de la continuidad de las funciones vectoriales.- Una función $\mathbf{f}: U \subseteq R^n \to R^m$ es continua ⇔ cada una de sus componentes escalares es continua.

Ej.) Analice la continuidad de $f(x,y,z)=\left(x^2yz,\dfrac{x^2+1}{x^2+y^2+z^2+2},x+y+z\right)$.

Teorema de la continuidad de una función compuesta.- Sean las funciones de varias variables **g**: $U \subseteq R^n \rightarrow R^p$ y **f**: $R^p \rightarrow R^m$ tales que **fog** (**f**(**g**(**x**)) existe. Sea $\mathbf{x_0} \in U$. Si **g** es continua en $\mathbf{x_0}$ y **f** es continua en $\mathbf{g}(\mathbf{x_0})$, entonces **fog** es continua en $\mathbf{x_0}$.

Ej.)

a) $f(x,y) = sen(x^2 y)$

b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

c) $f(x,y) = \dfrac{e^{x+y}}{x+y}$

d) $f(x,y) = \ln\left(\cos(x^2 + y^2)\right)$

Tipos de discontinuidad $\begin{cases}\text{Evitable}\\ \text{No evitable}\end{cases}$

Ej.1) Analizar la continuidad de $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Ej. 2) Determine si la función f: $R^2 \rightarrow R$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \vee y \leq 0 \\ 0 & \text{en otros puntos} \end{cases}$ es continua. En caso de no serlo identifique el tipo de discontinuidad.

Ej. 3) En caso de ser posible, escriba una regla de correspondencia para la función f: $R^2 \rightarrow R$ dada por $f(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ para que sea continua en R^2.

Ej. 4) En caso de ser posible, vuelva continua la función f: $R^3 \rightarrow R$ dada por $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - z}$ en R^3.

Ej. 5) Qué valor debe tomar la constante real A para que la función:

$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2 y}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ A & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ sea continua en R^2.

3.5 DERIVABILIDAD Y DIFENCIABILIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

Def. Derivada direccional de una función escalar.- Sea la función f: $U \subseteq R^n \to R$ tal que U es abierto. Sean $\mathbf{x_0} \in U \wedge h \in R$. Sea $\mathbf{v}$ un vector unitario $\in R^n$. La derivada direccional de f en $\mathbf{x_0}$ respecto a la dirección de $\mathbf{v}$ denotada por $f'(\mathbf{x_0}, \mathbf{v})$ está dada por:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x_0} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x_0})}{h}$$ si y sólo si este límite existe.

Ej.) Calcular la derivada direccional de $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ en el punto (1, 2) y en la dirección: a) (1,–1) ; b) (0, 1) ; c) (1, 0).

Def. Derivadas parciales para una función escalar.- Sea la función f: $U \subset R^n \to R$ y $\mathbf{x_0} \in U$ dado por $\mathbf{x_0} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. La derivada parcial de f respecto a la variable x_j denotada por $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ o f_{xj} en el punto $\mathbf{x}_0$ está dada por:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_j + h, ..., x_n) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$ si y sólo si este límite existe.

Obs.1 Las derivadas parciales son casos particulares de las derivadas direccionales cuando $\mathbf{v}$ es el vector canónico correspondiente a la variable j.

Obs.2 Para obtener la derivada parcial de manera directa, se emplean los teoremas de derivación para F.V.R. considerando constantes las variables respecto a las que NO se deriva.

Obs.3 En caso de presentarse formas indeterminadas se debe emplear la definición dada.

Ej. 1) Dada $f(x, y) = x^2 y + y^3$, hallar f_x , f_y $\forall$ $(x, y) \in R^2$.
Ej. 2) Obtener f_x , f_y, f_z si $f(x, y, z) = \cos xy + \cos xz + \text{sen } yz$.
Ej. 3) Hallar f_x , f_y en (0,0) si $f(x, y) = x^{1/3} y^{1/3}$.

Def. Diferencial de funciones de R^n en R^m.- Sea $\mathbf{f}$: $U \subseteq R^n \to R^m$ y $\mathbf{x_0} \in U$. El diferencial de $\mathbf{f}$ denotado por $d\mathbf{f}$ en $\mathbf{x_0}$ es la matriz de tamaño mxn $\mathbf{T}$ evaluada en $\mathbf{x_0}$, multiplicada por el vector incremento $(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})$. Esto es

$$\mathbf{df} = \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \cdots & \partial f_2/\partial x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial f_m/\partial x_1 & \partial f_m/\partial x_2 & \cdots & \partial f_m/\partial x_n \end{pmatrix}_{\mathbf{x_0}} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}$$ si y sólo si la matriz $\mathbf{T}$ existe en $\mathbf{x_0}$.

Ej. 1) Hallar $d\mathbf{f}$ $\mathbf{x_0} = (0,0)$ si $\mathbf{f}(x, y) = (e^{x+y}, y^2 x, y)$.
Ej. 2) Hallar $d\mathbf{f}$ (0,0,0) si $\mathbf{f}(x, y, z) = (ze^x, -ye^z)$

Ej. 3) Escriba el diferencial de $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$; $f(x,y)=1$, $(x,y)=(0,0)$; en términos de $\mathbf{h}=(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}$ en cualquier $(x\,,y)\neq(0,0)$ y para $(x\,,y)=(0,0)$.

<u>Def.</u> de diferenciabilidad de funciones de $\mathbf{R^n\to R^m}$.- Sea **f**: $U\subseteq R^n\to R^m$ una función de varias variables definida en el conjunto abierto U. Sea $\mathbf{x_0}\in$ U. Se dice que **f** es diferenciable en $\mathbf{x_0}$ si las derivadas parciales de **f** existen en $\mathbf{x_0}$ y

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}}\frac{\left\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x_0})-\mathbf{T}(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})\right\|}{\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x_0}\right\|}=0 \qquad (1)$$

(1) también se expresa por

$$(2)\quad \lim_{h\to 0}\frac{\left\|\mathbf{f}(\mathbf{x_0}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x_0})-\mathbf{Th}\right\|}{\left\|\mathbf{h}\right\|}=0.\ \text{ En este caso }\ \mathbf{h}=\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \vdots\\ \Delta x_n\end{pmatrix}$$

Ej. 1) Determine si $f(x,y)=4-x^2-y^2$ es diferenciable en (1,1).

Ej. 2) Dada la función $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{-3xy}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$.

a) Encuentre f_x y f_y en (0,0)

b) Use el resultado anterior para determinar si f es diferenciable en (0,0). Use (2)

<u>Obs.</u> De este ejemplo puede concluirse que derivabilidad ≠ diferenciabilidad

Ej. 3) Demuestre que la función $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & ,x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$ tiene todas sus derivadas direccionales en (0,0), pero no es diferenciable en este punto.

<u>Teorema</u>: Sea **f**: $U\subset R^n\to R^m$. Si todas las derivadas parciales de **f** son continuas en una vecindad de $\mathbf{x}\in$ U, entonces **f** es diferenciable en **x**.

Ej. 1) Las funciones expresadas en términos de polinomios o senoidales.
$f(x,y,z)=(2x^2y,x+y-z^2,x^3y+3z^2)$ Es diferenciable en todo R^3.

Ej. 2) $f(x,y)=3x^3-4x^2y+3xy^2+\sin xy^2$

Ej3) Empleando el teorema demuestre que $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & ,x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$ es diferenciable en (0,0).

Obs. El Teorema es unidireccional.

Ej.) Demuestre que $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ es diferenciable en (0,0) pero sus derivadas parciales no son continuas en (0,0).

Teorema: Si f: U$\subseteq$ $R^n \to R$ es diferenciable en $\mathbf{x_0} \in$ U, entonces existen todas sus derivadas direccionales en $\mathbf{x_0}$ y f es continua en $\mathbf{x_0}$.

Obs. El teorema es unidireccional.

Diferenciabilidad de la función compuesta (Regla de la cadena).

Sean **g**(**x**): U $\subseteq R^n \to R^p \wedge$ **f**(**x**): V$\subseteq R^p \to R^m$ tal que U $\wedge$ V son conjuntos abiertos. Si **g** es diferenciable en $\mathbf{x_0} \in$ U $\wedge$ **f** es diferenciable en $\mathbf{g}(\mathbf{x_0}) \in$ V, entonces **fog** es diferenciable en $\mathbf{x_0}$ y su diferencial es:

$$\mathbf{d}(\mathbf{f}_o\mathbf{g})_{(\mathbf{x}_0)} = D[\mathbf{f}_o\mathbf{g}]_{\text{mxn}(\mathbf{x_0})}\mathbf{h} = D[\mathbf{f}]_{\text{mxp}(\mathbf{g}(\mathbf{x_0}))}.\, D[\mathbf{g}]_{\text{pxn}(\mathbf{x_0})}\mathbf{h} \quad \text{(Producto de matrices)}$$

Ej. 1) Sean $\mathbf{f}(u,v,w)=(u^2vw, v^2-w^2, w^3, uvw)$ y $\mathbf{g}(x,y,z)=\left(x^2y, xy^2z, e^{-xz}\right)$. Calcular D(**fog**)(1,1,0).

Ej. 2) Dadas $\mathbf{g}(x,y)=(x^2+1,y^2)$ y $\mathbf{f}(u,v)=(u+v,u,v^2)$, calcule la matriz derivada de **fog** en (1,1).

Ej. 3) Encuentre una expresión general para hallar D($f$og) si f de la forma $f(u,v,w)$ es un campo escalar y **g** es un campo vectorial de la forma **g**(x, y, z)=($u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$).

Use este resultado para hallar D(fo**g**) si $f(u,v,w)=u^2+v^2-w$ y $\mathbf{g}(x,y,z)=(x^2y,y^2,e^{-xyz})$.

Ej. 4) (Si g es de variable escalar). Encuentre una expresión general para hallar D($f$og) si f es escalar de la forma $f(x, y, z)$ y **g** es de la forma **g**(t)=($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$). Use el resultado con $f(x,y,z)=3x^2y+z$ y $\mathbf{g}(t)=(t^2,2t-1,t^3)$.

Derivación implícita en funciones de varias variables.

Sea f una función de $x_1, x_2, ..., x_n$, n variables, tal que no es posible expresar f en términos explícitos. Entonces se puede escribir $F(x_1, x_2, ..., x_n, f) = 0$ y derivar cada término respecto a x_j empleando regla de la cadena de funciones escalares (F) conociendo que $\frac{\partial x_j}{\partial x_j} = 1 \wedge$ $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 0, (i \neq j) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_j} = f'x_j$

Ej. 1) Sea $z = f(x,y)$ y la relación $\sin(x^2 + y^2 + z^2) + x^2 y^3 z^2 = 3$. Obtenga $\frac{\partial z}{\partial x} \wedge \frac{\partial z}{\partial y}$

Ej. 2) Sea u = f(x, y, z) y la función $e^{xyzu} + \tan(x^2 + y^2 + u^2) - \ln(xy) = x^2 yz^3 u.$ Obtenga $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

Derivación de orden superior

Derivadas de orden superior:

- Parciales iteradas. $\frac{\partial^n f}{\partial x_i{}^n}$
- Parciales cruzadas o mixtas $\frac{\partial^n f}{\partial x_n ... \partial x_2 \partial x_1}$ (o en otro orden).

Ej. 1) Si $f(x,y) = xy + (x + 2y)^2$. Hallar:

a. Las segundas derivadas parciales iteradas y cruzadas
b. Las terceras derivadas parciales iteradas.

Teorema de igualdad de derivadas parciales cruzadas.- Si f es una función de $x_1, x_2, ..., x_n$ n variables, y si f es de la clase C^n (n veces continuamente diferenciable), entonces las derivadas parciales cruzadas son iguales. Esto es

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_n ... \partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^n f}{\partial x_n ... \partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^n f}{\partial x_1 ... \partial x_{n-1} \partial x_n}$$

Ej. 1) Verifique el teorema para $f(x,y) = xe^y + yx^2$

Ej. 2) Verifique el teorema para $f(x,y,z) = x^3 y^2 z + z\cos(x^2 + y^2) + e^{xy} + 1$

Con $\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} \wedge \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y}$.

3.6 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES DIFERENCIABLES

Aplicación de las funciones Diferenciables
- Aproximaciones con diferenciales
- Teorema de la derivada direccional y el vector gradiente
- Plano tangente y vector normal a superficies de nivel

Aproximaciones con diferenciales para funciones escalares

Se emplea el diferencial de una función escalar: $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$

Ej. 1) Una caja abierta tiene 4m de largo, 2m de ancho y 1m de alto. La caja se recubre con un material que cuesta \$0.1 el m^2 lateral y \$0.2 el m^2 de fondo. Estime la variación en el costo si el largo disminuye 2%, el ancho 1%, y el alto 3%.

Ej. 2) Aproxime $(3.01)^{2.05}$; $\sqrt{(12.1)(3.7)}$; Sen 59º. Cos 32º

Vector gradiente de un campo escalar

Si f: U $\subset$ R^n $\rightarrow$ R es un campo escalar diferenciable en U, el gradiente de f denotado por $\nabla f(x)$ es un vector en R^n dador por:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$ Que corresponde a la <u>matriz diferencial</u>.

Ej.) Encuentre el ∇f en el punto (0,0,0) si $f(x,y,z) = e^{xyz} + z\cos(x^2+y^2) + x^2 + y^2 + z^2$.

Teorema de derivada direccional y el vector gradiente

Si f: U $\subseteq$ R^n $\rightarrow$ R es un campo escalar diferenciable en U. Sea $\mathbf{x_0} \in$ U $\wedge$ $\mathbf{v} \in R^n$ un vector unitario. La derivada de f en $\mathbf{x_0}$ sobre la dirección de **v** esta dada por:

$$f'(\mathbf{x_0}, \mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{x_0}) \bullet \mathbf{v}$$

Ej. 1) Hallar la derivada direccional de $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ en el punto (1,2) sobre la dirección del vector $(1, -1)$.

Ej. 2) Hallar la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2 + xyz + z^2$ en la dirección $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ en el punto (1, 2, 1).

Teorema de la variación máxima de función escalar

Si f: U $\subseteq$ $R^n \rightarrow$R es un campo escalar diferenciable en U. Sea $\mathbf{x_0} \in$ U. Entonces $\nabla f(\mathbf{x_0})$ apunta al mayor crecimiento de f y este valor es $\|\nabla f(\mathbf{x_0})\|$

Encuentre la máxima derivada direccional de la función escalar $f(x,y) = 2x^2 + 3xy$ en el punto (1, 2) y en que dirección se produce esta máxima variación de f.

<u>Obs</u>. f decrece mas rápido en la dirección de $-\nabla f(\mathbf{x_0})$

Teorema del vector normal a una superficie en R^3

Sea f: $U \subseteq R^3 \to R$ y sea $f(\mathbf{x})=k$ una superficie de nivel de S en R^3, tal que S es diferenciable en $\mathbf{x_0}$, entonces $\nabla f(\mathbf{x_0})$ es normal a S en $\mathbf{x_0}$.

Plano tangente a S en R^3.
Si $z = f(x,y)$ es una superficie diferenciable en (x_0, y_0, z_0), la ecuación del plano tangente a S en (x_0,y_0,z_0) es:

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \quad \wedge \quad F(x,y,z) = 0$$

Ej. 1) Hallar la ecuación del plano tangente a $f(x,y,z)=3xy + z^2$ en el punto (1,1,1).

Ej. 2) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $4x^2 + y^2 = 16z$ en el punto (2,4,2).

Unidad 4: OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES ESCALARES

Fórmula de Taylor de primer orden.- Sea f: $U \subseteq R^n \to R$, diferenciable en $x_0 \in R^n$, la fórmula de Taylor de 1º orden en una vecindad de x_0 esta dado por:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \bullet (x - x_0) + R_1(x, x_0).$$

Matriz Hessiana $H[f(x)]$.- Sea f(x): $U \subset R^n \to R$ del tipo C^2 en una vecindad de $\mathbf{x_0}$, la matriz Hessiana de f en $\mathbf{x_0}$, denotada por H de nxn está dada por:

$$H[f(x)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Obs.- H es simétrica.

Formula de Taylor de segundo orden.- Sea f: $U \subseteq R^n \to R$, dos veces diferenciable en $\mathbf{x_0} \in R^n$, la fórmula de Taylor de 2º orden para una vecindad de $\mathbf{x_0}$ esta dada por:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \bullet (x - x_0) + \frac{1}{2}[H(f(x_0))(x - x_0)] \bullet (x - x_0) + R_2(x, x_0).$$

Obs. $R_1 \wedge R_2$ son un infinitésimo de orden $2 \wedge 3$ respectivamente y cumple la propiedad $\lim_{x \to x_0} \frac{R(x, x_0)}{\|x - x_0\|^2} = 0$.

Ej. 1) Escriba la formula de Taylor de 2º orden para aproximar:

a. $\sin(0.1 + 2(0.05))$; (0,0)
b. $e^{0.1}\cos 0.2$

4.1 EXTREMOS RELATIVOS DE FUNCIONES ESCALARES DE VARIAS VARIABLES

Def.- Sea $f: U \subseteq R^n \to R \wedge \mathbf{x_0} \in U$. Sea la bola abierta $B(\mathbf{x_0};\rho)$ una vecindad de $\mathbf{x_0}$. Se dice que $f(\mathbf{x_0})$ es un máximo relativo de $f \Leftrightarrow f(\mathbf{x_0}) \geq f(\mathbf{x})\ \forall \mathbf{x} \in B$.

Similarmente, $f(\mathbf{x_0})$ es un mínimo relativo de $f \Leftrightarrow f(\mathbf{x_0}) \leq f(\mathbf{x})\ \forall \mathbf{x} \in B$.

Punto de Silla.- Si $\exists \mathbf{x} \in B$: $f(\mathbf{x_0}) \geq f(\mathbf{x}) \wedge \exists \mathbf{x} \in B$: $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$, se dice que $f(\mathbf{x_0})$ es un punto de silla.

<u>Teorema de la Primera derivada</u>.- Si f: $U \subseteq R^n \to R$ es diferenciable en $\mathbf{x_0}$, tal que $\mathbf{x_0}$ es un extremo local de $f \wedge U$ es abierto, entonces $\nabla f(\mathbf{x_0}) = 0$.

<u>Teorema de la segunda derivada para extremos relativos</u>.- Si f: $U \subseteq R^n \to R$ es de clase C^3, $\mathbf{x_0}$ es un punto crítico de f y H es la matriz Hessiana de f definida en $\mathbf{x_0}$, si H tiene:

i) $\lambda i > 0$, se dice que H $f(\mathbf{x_0})$ es positiva y $f(\mathbf{x_0})$ es un mínimo de f.
ii) $\lambda i < 0$, se dice que H $f(\mathbf{x_0})$ es negativa y $f(\mathbf{x_0})$ es un máximo de f.
iii) $\lambda i \neq 0$ y no todos positivos (o negativos), se dice que el signo de H f($\mathbf{x_0}$) no está definido y $\mathbf{x_0}$ es un punto de silla (no es extremo).
iv) $\lambda i \geq 0$, se dice que H $f(\mathbf{x_0})$ es semipositiva y $f(\mathbf{x_0})$ "podría ser" mínimo.
v) $\lambda i \leq 0$, se dice que H $f(\mathbf{x_0})$ es seminegativa y $f(\mathbf{x_0})$ "podría ser" máximo.

Ej. 1) Aplicar el criterio de la segunda derivada para analizar los extremos de:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$
b) $f(x,y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$
c) $f(x,y) = x^2 - y^2$
d) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + x^3 + y^3$

<u>Obs.</u> Si f NO es de clase C^2 en un punto crítico $\mathbf{x}_0$, no se puede usar el Hessiano. En este caso se debe usar la definición de extremos o gráficas.

Ej. 2) Determinar los extremos relativos de $f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3}$.

4.2 OPTIMIZACIÓN CON EL TEOREMA DEL VALOR EXTREMO

Sea f: $D \subseteq R^n \to R$ continua en D, sea D un conjunto cerrado. Entonces f tiene un máximo y un mínimo absoluto en D.

Ej. 1) Hallar los valores extremos de $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en el conjunto $x^2 + y^2 \leq 1$.

Ej. 2) Hallar el máximo y el mínimo absoluto de $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ en la región $R = \{(x,y) : x, y \leq 0 \wedge x + y \geq -3\}$

4.3 EXTREMOS CON RESTRICCIONES Y MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

Teorema de Lagrange.- Sea f: U $\subseteq R^n \rightarrow R$ una función de clase C^1 definida en el conjunto abierto U. Sean $g_1, g_2, \ldots, g_m$: U $\subseteq R^n \rightarrow R$, m funciones de clase C^1 (m < n). Si $\mathbf{x_0} \in$ U es un extremo relativo de f $\wedge$ $\nabla gi(x_0) \neq 0$, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda m$ $\in$ R tales que $\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x_0)$, i = 1, 2,…,m. $\wedge$ $g_i = c$

APLICACIONES DE OPTIMIZACION:

1) Una caja rectangular descansa sobre el plano xy con un vértice en el origen y su vértice opuesto pertenece al plano 6x + 4y + 3z = 24. Hallar las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo.
2) Un beneficio se obtiene produciendo *x* unidades del producto A $\wedge$ *y* unidades del producto B; modelado por:

   $$B(x, y) = 8x + 10y - (0.001)(x^2 + xy + y^2) - 10000.$$

   Hallar el nivel de producción que permite obtener el máximo beneficio.
3) Sea la superficie $g(x, y) = \dfrac{1}{xy}$ en R^3. Hallar los puntos de g que estén más cercanos al origen.

Unidad 5: FUNCIONES VECTORIALES

Funciones vectoriales $\begin{cases} \text{Variable escalar (curvas)} \\ \text{Variable vectorial (campos vectoriales)} \end{cases}$

5.1 FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE ESCALAR.

Se denomina **r** una función vectorial de variable escalar, a cualquier función de la forma $\mathbf{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$. Esto es:

$$\mathbf{r}: \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n$$

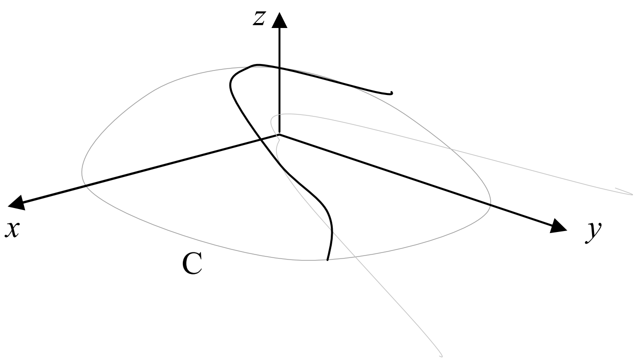
En R^2: $\mathbf{r}(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}}$ representa una curva en el plano

En R^3: $\mathbf{r}(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} + h(t)\hat{\mathbf{k}}$ representa una curva en el espacio

Ej. 1) Dibujar la curva representada por $\mathbf{r}(t) = (4\cos t, 4\sin t, t)$; t ∈ $[0, 4\pi]$.

Ej. 2) Describir los puntos que ∈ a la curva $\mathbf{r}(t) = (2+t)\hat{\mathbf{i}} + (3t)\hat{\mathbf{j}} + (4-t)\hat{\mathbf{k}}$

Ej. 3) Representar mediante una función vectorial la curva C, intersección del semielipsoide $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{24} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad z \geq 0$ con el cilindro $y = x^2$



$$x = t$$
$$y = t^2$$
$$z = \sqrt{\frac{24 - 2t^2 - t^4}{6}}$$

<u>Propiedades de las funciones vectoriales:</u>
Al igual que los vectores, se pueden sumar funciones vectoriales entre sí y se pueden multiplicar por un escalar.

<u>Límite de una función vectorial.</u>

Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} + h(t)\hat{\mathbf{k}}$ es una función vectorial tal que $\lim\limits_{t \to a} f(t), \quad \lim\limits_{t \to a} g(t) \wedge \lim\limits_{t \to a} h(t)$ existen, entonces:

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \lim_{t \to a} f(t)\hat{\mathbf{i}} + \lim_{t \to a} g(t)\hat{\mathbf{j}} + \lim_{t \to a} h(t)\hat{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{L}}$$

Esto es $\left\| \mathbf{r}(t) - \vec{\mathbf{L}} \right\| \to 0$ si t→ a.

Continuidad de una función vectorial.- **r** es continua en t=$a \Leftrightarrow \lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(a)$.

Evalué los siguientes límites:

a) $\lim_{t\to 2}\left(t\hat{\mathbf{i}}+\frac{t^2-4}{t^2-2t}\hat{\mathbf{j}}+\frac{1}{t}\hat{\mathbf{k}}\right)$

b) $\lim_{t\to 0}\left(e^t\hat{\mathbf{i}}+\frac{\sin t}{t}\hat{\mathbf{j}}+e^{-t}\hat{\mathbf{k}}\right)$

c) $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\hat{\mathbf{i}}+\cos(t)\hat{\mathbf{j}}+\sin(t)\hat{\mathbf{k}}\right)$

d) $\lim_{t\to\infty}\left(e^{-t}\hat{\mathbf{i}}+\frac{1}{t}\hat{\mathbf{j}}+\frac{t^2}{t^2+1}\hat{\mathbf{k}}\right)$

Encuentre los intervalos de continuidad de las funciones vectoriales:

a) $\mathbf{r}(t)=\sqrt{t}\ \hat{\mathbf{i}}+\sqrt{t-1}\ \hat{\mathbf{j}}$

b) $\mathbf{r}(t)=t\hat{\mathbf{i}}+\arcsin(t)\hat{\mathbf{j}}+\frac{1}{t}\hat{\mathbf{k}}$

Propiedades de los límites de funciones vectoriales.- Si $\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)$ y $\lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)$ existen.

i) $\lim_{t\to a}\left(\mathbf{r}(t)+\mathbf{u}(t)\right)=\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)+\lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)$

ii) $\lim_{t\to a}\left(\alpha\,\mathbf{r}(t)\right)=\alpha\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)\quad;\alpha\in\mathbf{R}$

iii) $\lim_{t\to a}\left(\mathbf{r}(t)\times\mathbf{u}(t)\right)=\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)\times\lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)$

iv) $\lim_{t\to a}\left(\mathbf{r}(t)\bullet\mathbf{u}(t)\right)=\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)\bullet\lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)$

v) $\lim_{t\to a}\|\mathbf{r}(t)\|=\left\|\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)\right\|$

Derivación de funciones vectoriales.

Def. de derivada de una función vectorial r.- La derivada de una función vectorial **r** se define por $\mathbf{r}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}$, si y sólo si este límite existe.

Ej.) Si $\mathbf{r}(t)=f(t)\hat{\mathbf{i}}+g(t)\hat{\mathbf{j}}+h(t)\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{r}'(t)=f'(t)\hat{\mathbf{i}}+g'(t)\hat{\mathbf{j}}+h'(t)\hat{\mathbf{k}}$

Ej. 1) Hallar la derivada de las siguientes funciones vectoriales:

a) $\mathbf{r}(t)=\frac{1}{t}\hat{\mathbf{i}}+\ln(t)\hat{\mathbf{j}}+e^{2t}\hat{\mathbf{k}}$

b) $\mathbf{r}(t)=2t^3\hat{\mathbf{i}}+\cos(2t)\hat{\mathbf{j}}-\sin^3(3t)\hat{\mathbf{k}}$

Ej. 2) Si $\mathbf{r}(t)=\cos(t)\hat{\mathbf{i}}+\sin(t)\hat{\mathbf{j}}+(2t)\hat{\mathbf{k}}$, hallar $\mathbf{r}'(t)$ $\quad b)\mathbf{r}'(t)\bullet\mathbf{r}''(t)\quad c)\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)$

Propiedades de la derivada de una función vectorial

Si **r'**(t) y **u'**(t) existen y f es una función de variable real derivable, entonces:

i) $[\alpha\mathbf{r}(t)]' = \alpha\mathbf{r}'(t)$

ii) $[\mathbf{r}(t)+\mathbf{u}(t)]' = \mathbf{r}'(t)+\mathbf{u}'(t)$

iii) $[\mathbf{r}(t)\bullet\mathbf{u}(t)]' = \mathbf{r}'(t)\bullet\mathbf{u}(t)+\mathbf{r}(t)\bullet\mathbf{u}'(t)$

iv) $[\mathbf{r}(t)\times\mathbf{u}(t)]' = \mathbf{r}'(t)\times\mathbf{u}(t)+\mathbf{r}(t)\times\mathbf{u}'(t)$

v) $[\mathbf{r}(f(t))]' = \mathbf{r}'(f(t))\bullet f'(t)$

Demostrar iii) si $\mathbf{r}(t) = f_1(t)\hat{\mathbf{i}}+g_1(t)\hat{\mathbf{j}}+h_1(t)\hat{\mathbf{k}} \;\wedge\; \mathbf{u}(t) = f_2(t)\hat{\mathbf{i}}+g_2(t)\hat{\mathbf{j}}+h_2(t)\hat{\mathbf{k}}$

Ej. 1) Si $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{t}\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}+\ln(t)\hat{\mathbf{k}} \;\wedge\; \mathbf{u}(t) = t^2\hat{\mathbf{i}}-(2t)\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$, calcular:

a) $Dt[\mathbf{r}(t)\bullet\mathbf{u}(t)]$

b) $Dt[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{u}'(t)]$

Velocidad, aceleración y rapidez.

Sea **r** una función derivable dos veces dada por **r**(t)=(f(t),g(t),h(t)). Se define como vector velocidad al vector $\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t)$; y
al vector aceleración como $\mathbf{a}(t)=\mathbf{r}''(t)$.

La Rapidez se define como = $\|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\|$

Ej. 1) Una partícula se mueve a lo largo de una curva C descrita por:
$\mathbf{r}(t) = t\hat{\mathbf{i}}+t^3\hat{\mathbf{j}}+3t\hat{\mathbf{k}},$ $t \geq 0$. Determine su velocidad, aceleración y rapidez en t = 1.

Ej. 2) Un objeto parte del reposo del punto (1,2,0) y se mueve con una aceleración $\mathbf{a}(t) = \hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}.[pies/seg^2]$. Hallar su vector velocidad y su vector posición.

Ej. 3) Una partícula se mueve a lo largo de una curva C descrita por:
$\mathbf{r}(t) = t^2\hat{\mathbf{i}}+\cos t\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}},$ $t \geq 0$. En el instante t=2 segundos sale de la trayectoria C y continua en dirección recta. Determine su posición después de 3 segundos.

Vectores tangentes y normales a una trayectoria C.

Vector tangente unitario.- Sea C una curva suave representada por **r** en un intervalo abierto I. El vector tangente unitario a C en t se define por:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|};\;\; \mathbf{r}'(t)\neq 0.$$

Ej. 1) Hallar el vector **T**(t) a la curva $\mathbf{r}(t) = t\hat{\mathbf{i}} + t^2\hat{\mathbf{j}}$ en t = 1.

Ej. 2) Hallar la ecuación de la recta tangente a la hélice $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\ \hat{\mathbf{i}} + 2\sin t\ \mathbf{j} + t\ \hat{\mathbf{k}}$ en t=π/4.

Teorema del vector normal principal a C.
Si una curva C se define por **r**(t), entonces **T** ’(t) es normal a C en t ∧ **T’**(t) ≠ 0.

Demostración:
$$\mathbf{T}(t) \bullet \mathbf{T}(t) = 1 \equiv \mathbf{T}'(t) \bullet \mathbf{T}(t) + \mathbf{T}(t) \bullet \mathbf{T}'(t) = 0 \equiv 2\mathbf{T}'(t) \bullet \mathbf{T}(t) = 0 \equiv \mathbf{T}'(t) \bullet \mathbf{T}(t) = 0 \equiv \mathbf{T}'(t) \perp \mathbf{T}(t)$$

Definición del vector normal unitario a C.- Sea C una curva representada por **r** en un intervalo abierto I, si **T’**(t) ≠ 0, el vector normal unitario a C en t se define por $\mathbf{N}(t) = \dfrac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$

Ej. 1) Hallar **N**(t) para $C: \mathbf{r}(t) = 3t\hat{\mathbf{i}} + 2t^2\hat{\mathbf{k}}$

Ej. 2) Hallar **N**(t) para $C: \mathbf{r}(t) = 2\cos t\hat{\mathbf{i}} + 2\sin t\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}$

Vector aceleración y sus componentes tangencial y normal a C.

Sea C: **r**(t) una curva cuya aceleración en t es **a**(t)=**r’’**(t). Sus componentes tangencial y normal están dadas por:

$$a_{\mathrm{T}} = \mathbf{a}(t) \bullet \mathbf{T}(t) = \mathbf{a}(t) \bullet \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \mathbf{a}(t) \bullet \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}$$
$$a_{\mathrm{N}} = \mathbf{a}(t) \bullet \mathbf{N}(t) = \frac{\|\mathbf{a}(t) \times \mathbf{v}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \sqrt{\|\mathbf{a}(t)\|^2 - a_T{}^2} \quad \text{(componente centrípeta)}$$

Ej. 1) Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración para $\mathbf{r}(t) = 3t\hat{\mathbf{i}} - t\hat{\mathbf{j}} + t^2\hat{\mathbf{k}}$.

Ej. 2) Representar la aceleración de $\mathbf{r}(t) = b\cos t\hat{\mathbf{i}} + b\sin t\hat{\mathbf{j}} + ct\hat{\mathbf{k}}, b > 0$ como la suma de las componentes tangencial y normal.

Longitud de arco y curvatura.

Def. de longitud de arco.- Sea C una curva suave dada por **r**(t) definida en el intervalo cerrado [a,b]. La longitud de arco viene dada por $s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$

Función de longitud de arco.- $s(t)=\int_a^t \|\mathbf{r}'(\tau)\| d\tau$ aquí s es una variable.

Teorema de la derivada de la función longitud de arco.- Sea C una curva suave dada por **r**(t) en [a,b]. La derivada de la función $s(t)=\int_a^t \|\mathbf{r}'(\tau)\| d\tau$ esta dada por $\frac{ds}{dt}=\|\mathbf{r}'(t)\|$ es decir: $ds=\|r'(t)\|dt$.

Ej. Sea $\mathbf{r}(t)=(3-t)\hat{\mathbf{i}}+4t\hat{\mathbf{j}}$, $t\in[0,1]$. Determine:

a) La función longitud de arco
b) Escriba **r**(t) en términos de s.
c) Calcule $\|\mathbf{r}'(s)\|$

Curvatura (Una aplicación del parámetro longitud de arco.)

Def. Sea C una curva dada por r(s), donde s es el parámetro longitud de arco. Se denomina curvatura en s a

$$k=\left\|\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds}\right\|=\|\mathbf{T}'(s)\| \quad \text{en este caso} \quad \mathbf{T}(s)=\frac{\mathbf{r}'(s)}{\|\mathbf{r}'(s)\|}$$

Obs. En las rectas, $k=0$

Ej. 1) Hallar la curvatura de $\mathbf{r}(s)=\left(3-\frac{3}{5}s\right)\hat{\mathbf{i}}+\frac{4}{5}s\hat{\mathbf{j}}$

Ej. 2) Hallar la curvatura de un círculo de radio R.

Ej. 3) Sea la hélice $\mathbf{r}(t)=(2\cos t, 2sent, t)$

a) Encuentre los puntos tales que $s=\sqrt{5}$; $s=4$ desde t=0.
b) Exprese la longitud de arco s como función de t y parametrice **r** en función de s.
c) Con el resultado anterior calcule la curvatura k.

Otras fórmulas de curvaturas.- Si **r**(t) es la representación de una curva suave C, $k=\frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}=\frac{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$

Ej.) Hallar la curvatura de $\mathbf{r}(t)=\left(2t, t^2, -\frac{1}{3}t^3\right)$

5.2 FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE VECTORIAL ($R^n \to R^n$)

Definición.- Sean M, N, P funciones de tres variables *x*, *y*, *z* definidas en alguna región Q del espacio. Se llama campo de vectores en Q a cualquier función *F* definida por $F(x,y,z) = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$.

Similarmente, si M, N están definidas en alguna región de R^2, se denomina a *F* campo vectorial de R^2 dado por $F(x,y) = M(x,y)\hat{i} + N(x,y)\hat{j}$.

Ej.) Encuentre el campo de vectores formado por los gradientes de:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$
b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

Gráfico de un campo vectorial.- Se toma la $\|F\| = c$ (constante de longitud)

a) $F(x,y) = -y\hat{i} + x\hat{j}$
b) $F(x,y) = 2x\hat{i} + y\hat{j}$

Campos vectoriales conservativos.- Un campo **F** se dice que es conservativo si existe una función diferenciable f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

En este caso se dice que *f* es la función potencial del campo F y existe.

Ej. 1) Demuestre que el campo vectorial $F(x,y) = 2x\hat{i} + y\hat{j}$ es conservativo con la función potencial $f(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$

Ej. 2) Determine en caso de ser posible, la existencia de la función potencial *f* si el campo vectorial está dado por:

a) $F(x,y) = x^2y\hat{i} + xy\hat{j}$
b) $F(x,y) = 2x\hat{i} + y\hat{j}$

Teorema para campos vectoriales conservativos en el plano.- Sean M y N dos funciones con derivadas parciales continuas en alguna bola abierta B de R^2. $F(x,y) = M\hat{i} + N\hat{j}$ es un campo vectorial conservativo $\Leftrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ (en este caso *f* existe)

Ej. 1) Verifique el teorema para los ejercicios anteriores.
Ej. 2) Hallar de ser posible una función potencial para $F(x,y) = 2xy\hat{i} + (x^2 - y)\hat{j}$

Rotacional de un campo vectorial.- Sea F una función vectorial dada por $F(x,y,z)=M\hat{i}+N\hat{j}+P\hat{k}$. Se dice que $rotF(x,y,z)$ es un vector denotado por

$$\nabla xF(x,y,z)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ M & N & P\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}\right)\hat{i}-\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Obs. Si rotF=0, se dice que F es irrotacional.

Teorema para campos conservativos en el espacio.- Sea F una función vectorial de clase C^1 en alguna bola abierta B de R^3. El campo vectorial $F(x,y,z)=M\hat{\mathbf{i}}+N\hat{\mathbf{j}}+P\hat{\mathbf{k}}$ es conservativo $\Leftrightarrow$ $rotF(x,y,z)=\mathbf{0}$

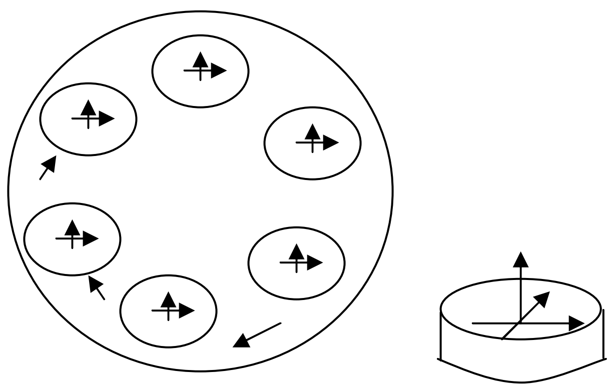
Ej.) Dada la función vectorial $F(x,y,z)=2xy\hat{\mathbf{i}}+(x^2+z^2)\hat{\mathbf{j}}+2yz\hat{\mathbf{k}}$

a) Demuestre que F es conservativo.
b) Encuentre la función potencial *f*.

Teorema del Rotacional de un gradiente.- Para cualquier función f de clase C^2, $\nabla x(\nabla f)=\mathbf{0}$. Es decir que el rotacional de cualquier gradiente es el vector **0**.

Ej.) Demuestre que $V(x,y)=y\hat{\mathbf{i}}-x\hat{\mathbf{j}}$ no es campo gradiente.

Significado físico del rotacional.



La rueda de aspas no gira alrededor de su eje. En este caso hay traslación de los puntos pero **no hay rotación** y por tanto el campo de velocidades $V=\dfrac{y\hat{\mathbf{i}}-x\hat{\mathbf{j}}}{x^2+y^2}$ es **irrotacional**. Verifique $\forall(x,y)\neq(0,0)$.

Divergencia de un campo vectorial.- Sea F una función vectorial dada por $F(x,y,z)=M\hat{\mathbf{i}}+N\hat{\mathbf{j}}+P\hat{\mathbf{k}}$. Se dice que la divergencia de F es un campo escalar denotado por

$$\nabla\bullet F(x,y,z)=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Ej.) Determine la divergencia de las siguientes funciones.

a) $F(x,y,z) = x^2 y\hat{\mathbf{i}} + z\hat{\mathbf{j}} + xyz\hat{\mathbf{k}}$

b) $F(x,y) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$

c) $F(x,y) = x\hat{\mathbf{i}} - y\hat{\mathbf{j}}$

Teorema de la divergencia de un rotacional.- Para cada función vectorial F de clase C^2, $div(rotF) = \nabla \bullet (\nabla \times F) = 0$.

Es decir, la divergencia de cualquier rotacional es cero.

Ej.) Demuestre que el campo $F(x,y,z) = x\hat{\mathbf{i}} + y\tilde{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ no es rotacional de algún campo vectorial.

<u>Def. del operador de Laplace.-</u> Si f es una función escalar en R^3, se dice que el operador de Laplace denotado por ∇^2 esta dado por

$$\nabla^2 f = \nabla \bullet (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

<u>Obs.</u> Toda función f tal que $\nabla^2 f = 0$, se dice que es armónica.

Ej.) Demuestre que $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ es una función armónica.

Significado físico de la divergencia.
En un campo de velocidades de un fluido (o gas) **F**, la div **F** representa la tasa de expansión (o compresión) del fluido por unidad de volumen.

Si div **F** < 0 el fluido se está comprimiendo
Si div **F** > 0 el fluido se está expandiendo
Si div **F** = 0 el fluido es incompresible.

En R^2, la div **F** es la tasa de expansión o compresión del área bajo el flujo.

<u>Propiedades (Identidades) Básicas</u>.- Si F y G son campos vectoriales y f, g son funciones escalares, entonces:

i) $div(F+G) = divF + divG$
ii) $Div(f\,F) = f\ divF + F \bullet \nabla f$
iii) $div(F \times G) = G \bullet rotF - F \bullet rotG$
iv) $div(rotF) = 0$
v) $\nabla^2(fg) = f\ \nabla^2 g + g\ \nabla^2 f + 2(\nabla f \bullet \nabla g)$
vi) $div(\nabla f \times \nabla g) = 0$
vii) $div(f\ \nabla g - g\ \nabla f) = (f\ \nabla^2 g - g\ \nabla^2 f)$
viii) $rot(F+G) = rotF + rotG$
ix) $rot(f\,F) = f\,rotF + \nabla f \times F$
x) $rot(\nabla f) = 0$

Rotacional en coordenadas cilíndricas

$$\nabla \mathbf{xF} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{e_r} & r\mathbf{e_\theta} & \mathbf{e_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & rN & P \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{\partial (rN)}{\partial z}\right)\mathbf{e_r} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial r}\right)\mathbf{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rN)}{\partial r} - \frac{\partial M}{\partial \theta}\right)\mathbf{e_z}$$

Rotacional en coordenadas esféricas

$$\nabla \mathbf{xF} = \left(\frac{1}{\rho sen\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(sen\phi N) - \frac{1}{\rho sen\phi}\frac{\partial P}{\partial \theta}\right)\mathbf{e_r} + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho P)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial M}{\partial \phi}\right)\mathbf{e_\theta} + \left(\frac{1}{\rho sen\phi}\frac{\partial M}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho N)}{\partial \rho}\right)\mathbf{e_\varphi}$$

Divergencia en coordenadas cilíndricas

$$\nabla \bullet \mathbf{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rM)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

Divergencia en coordenadas esféricas

$$\nabla \bullet \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial (r^2 M)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho sen\phi}\frac{\partial (sen\phi P)}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho sen\phi}\frac{\partial N}{\partial \theta}$$

Laplaciano en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

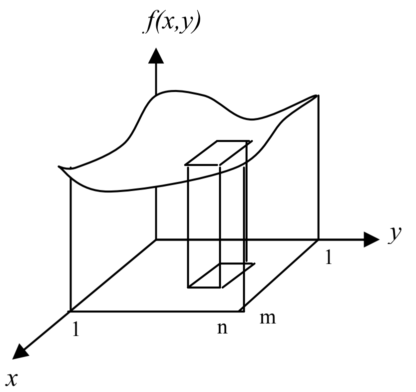
Laplaciano en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\rho^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Unidad 6: INTEGRACIÓN MÚLTIPLE

6.1 INTEGRALES DOBLES

Def. de volumen bajo una superficie.- El volumen del sólido sobre la región R del plano xy y debajo de la grafica de f se denomina integral doble de f sobre R denotado por:



$$\iint_R f(x,y)dA \text{ o } \iint_R f(x,y)dxdy \text{ o } \iint_R f(x,y)dydx$$

Sobre cada partición rectangular $\hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{j}}$ de R, se selecciona algún valor de f con lo que el volumen de un paralelepípedo V_{ij} esta dado por

$$\Delta V_{ij} = f(x_i, y_j)\Delta x \Delta y$$

Tomando y fijo se evalúa el volumen de una lámina j haciendo $\Delta V_{ij} = \left[\sum_{i=1}^{m} f(x_i, x_j)\Delta x\right]\Delta y$

Y tomando en cuenta la sumatoria de todas las láminas j se obtiene $V_R \cong \sum_{j=1}^{n} \Delta V_j$

Esto es $V_R \cong \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} f(x_i, x_j)\Delta x\right]\Delta y \quad \wedge \quad V_R \cong \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{j=1}^{n} \left[\lim_{\Delta y \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(x_i, x_j)\Delta x\right]\Delta y \quad \wedge$

$$\Delta x = \frac{b-a}{m} \wedge \Delta y = \frac{d-c}{n}$$

Integrales dobles iteradas.- La integral doble $\iint_R f(x,y)dA$ puede evaluarse:

i) Tomando cortes perpendiculares a eje y $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$ o

ii) Tomando cortes perpendiculares al eje x $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$ siendo $R = \{(x,y)/ a \le x \le b \wedge c \le y \le d\}$.

Ej. 1) Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$ y sea $R = \{(x,y)/|x| \le 1 \wedge |y| \le 2\}$. Solucione la $\iint_R f(x,y)dA$ con los dos sentidos.

Ej. 2) Calcular $\int_0^1 \int_0^2 (xye^{x+y})dydx$:

a) En el orden indicado.
b) Cambiando el orden de la integral iterada.

Función integrable en $\mathbf{R^2}$ - Si en la partición de R en i x j rectángulos se toma n=m, se puede expresar la sumatoria del volumen de la definición L como $Sn = \sum_{i=j=1}^{n} f(Cij)\Delta x \Delta y$.

En este caso se dice que *f* es integrable en $R \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} Sn$ existe.

> **Taller**
> Implemente un algoritmo computacional para calcular la integral del Ej. 2) empleando particiones de 10, 100, 1000 y 5000 en cada eje, respectivamente.

Teorema 1.- Cualquier función $f: R^2 \to R$ continua definida en una región R cerrada de *xy* es integrable.

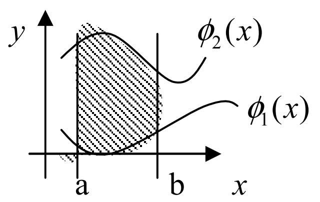
Teorema 2.- Cualquier función $f: R^2 \to R$ acotada definida en una región R acotada de *xy* es integrable.

Teorema de Fubini.- Sea f una función continua con dominio rectangular $R = [a,b]\times[c,d]$, entonces $\iint_R f(x,y)dA$ es igual a:

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$$

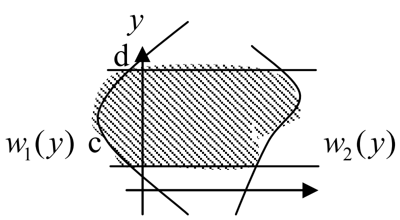
Integrales dobles sobre regiones más generales

Región tipo 1.



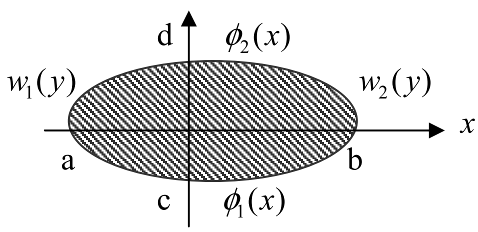
$$\int_a^b \left[\int_{\phi_1}^{\phi_2} f(x,y)dy\right]dx$$

Región tipo 2



$$\int_c^d \left[\int_{w_1}^{w_2} f(x,y)dx\right]dy$$

Región de tipo 3



Se puede expresar como cualquiera de las otras dos regiones.

<u>Obs.</u> Todas estas regiones se denominan regiones elementales.

Una integral sobre una región elemental se le puede redefinir sobre un rectángulo R* que la contenga de tal forma:

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y)\in R \\ 0 & \text{si } (x,y)\notin R \end{cases} \qquad \wedge \qquad \iint_{R^*} f^*(x,y)dA=\iint_R f(x,y)dA.$$

En este caso los límites de la primera integral son variables y el teorema de Fubini se puede aplicar empleando la función *f** y las propiedades de la integrales dobles que se describen a continuación.

Propiedades de las integrales dobles.- Si $f \wedge g$ son integrales sobre R.

i) Linealidad $\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dA=\iint_R f(x,y)dA+\iint_R g(x,y)dA$

ii) Homogeneidad $\iint_R cf(x,y)dA=c\iint_R f(x,y)dA$ si c ∈ R

iii) Monotonía $\iint_R f(x,y)dA\geq\iint_R g(x,y)dA$ si $f(x,y)\geq g(x,y) \quad \forall (x,y)\in R$

iv) Aditividad Si $R=R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_k$, $\iint_R f(x,y)dA=\sum_{i=1}^{k}\iint_{R_i} f(x,y)dA$

Ej. 1) $\int_0^1\int_1^{e^x}(x+y)dydx$

Ej. 2) $\int_{-1}^{1}\int_{-2|x|}^{|x|}(e^{x+y})dydx$

Ej. 3) $\int_0^1\int_{y^2}^{y}(x^2+y^2)dxdy$

Ej. 4) $\int_1^2\int_0^{\ln x}(x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\,dydx$

Ej. 5) $\iint_R \sec^5 x dA$ si $R=\left\{(x,y)/\arctan y\leq x\leq\frac{\pi}{4}, 0\leq y\leq 1\right\}$.

Ej.6) Calcular el volumen del sólido debajo de la superficie representada por $z+2y+3x=6$ y sobre la región $R=\left\{(x,y)/\frac{y^2+2}{2}\leq x\leq -|y|+5\right\}$

Teorema del valor medio para integrales dobles.- Sea *f*: D ⊂ R^2→R continua y sea R una región elemental. Entonces ∃(x_0,y_0) ∈ D : $\iint_R f(x,y)dA=f(x_0,y_0)A_R$ en este caso A_R es el área de la región R.

Ej.) Verificar el teorema para $\int_0^1\int_0^{3y}(e^{x+y})dxdy$

6.2 INTEGRALES TRIPLES

Def.- Sea f una función acotada de tres variables definida en una bola B$\subset$ R^3. Si $S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=j=k=1}^{n} f(C_{ijk})\Delta V$ existe, se dice que f es integrable en B y se denomina a S la integral triple de f sobre B, denotada por $\iiint_B f(x,y,z)dV$.

Integrales triples iteradas.- Sea f(x,y,z) integrable en la caja $B = [a\times b]\times[c\times d]\times[p\times q]$. Entonces la integral triple de f sobre B $\iiint_B f(x,y,z)dV$ está dada por:

$$\int_p^q\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz = \int_p^q\int_a^b\int_c^d f(x,y,z)dydxdz = \int_a^b\int_p^q\int_c^d f(x,y,z)dydzdx = \ldots.$$ (En total hay seis opciones).

Ej. 1) Evaluar $\iiint_B (x+2y+3z)dxdydz$ Si $B = [0,1]\times\left[-\frac{1}{2},0\right]\times\left[0,\frac{1}{3}\right]$.

Integrales triples por integración iterada en regiones generales.- Suponga que B es una región elemental de R^3 con funciones $z_1(x,y) \wedge z_2(x,y)$ respectivamente, definidas sobre una región R elemental de (x,y) como las de las integrales dobles, entonces:

$$\iiint_W f(x,y,z)dzdydx = \int_a^b\left[\int_{\phi_1}^{\phi_2}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dy\right]dx.$$ o con cualquier otro orden que sea conveniente.

Ej. 1) Evaluar $\iiint_W xdv$ si $W = \{(x,y,z)/x,y \geq 0 \wedge x^2+y^2 \leq z \leq 2\}$.

a) $dv = dxdydz$
b) $dv = dzdydx$

Ej. 2) Analice la $\iiint_W 2dv$ si $W: \begin{cases} z \geq x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2 \leq 2 \end{cases}$ con:

a) $dv = dzdydx$
b) $dv = dzdxdy$
c) $dv = dydxdz$

Ej. 3) Calcule $\iiint_W (1-z^2)dxdydz$ si W es la pirámide con vértice en (0,0,1) y base definida por (0,0,0); (1,0,0); (0,1,0); (1,1,0).

Aplicación 1: La temperatura en los puntos de un cubo $S=[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$ es proporcional al cuadrado de la distancia entre el punto y el origen.

a) Hallar la temperatura promedio del cubo.
b) En que puntos del cubo la temperatura es igual al promedio.

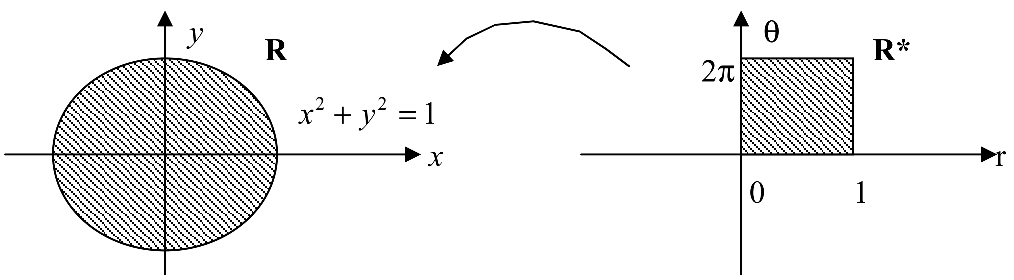
Aplicación 2: La función de densidad conjunta para las variables x y y es

$$f(x,y)=\begin{cases} cx & 0\le x\le y\,;\,0\le y\le 1 \\ 0 & otros\ \ puntos \end{cases}$$. Determine el valor de c.

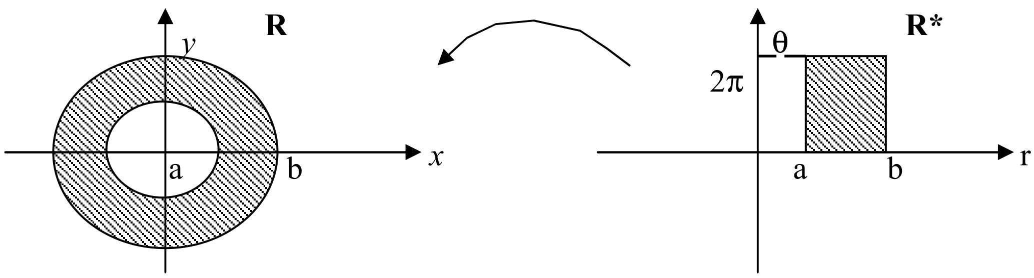
6.3 CAMBIO DE VARIABLE DE FUNCIONES DE R^n A R^n

El objetivo es transformar la función sub-integral y los límites de la integral de dimensión n, en otra integral de la misma dimensión pero con límites y función de integración más sencilla, de tal forma que el valor sea el mismo.

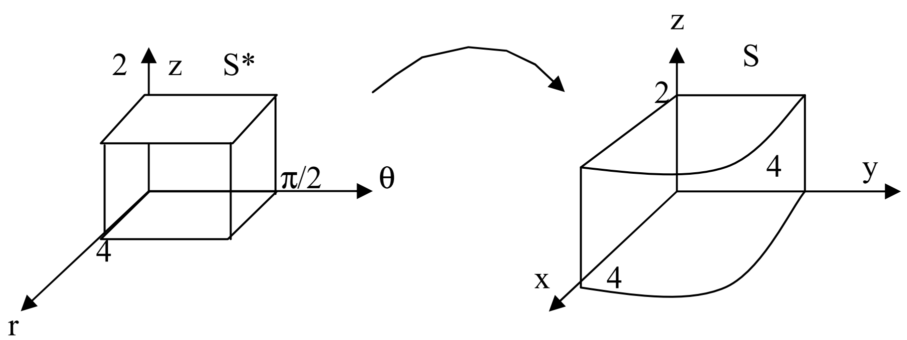
Ej.1) La transformación T: $R^2 \to R^2$ definida por $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ $\big((x,y)\neq(0,0)\wedge(0,0)$ si $(x,y)=(0,0)\big)$ convierte la región R* en la región R.



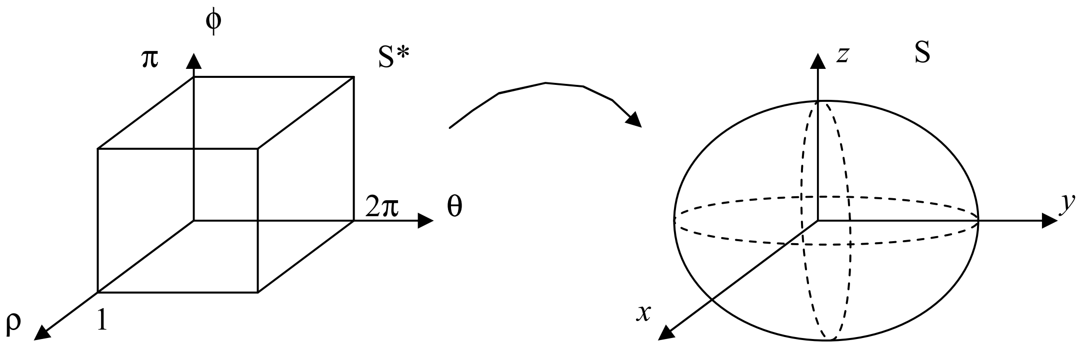
Ej. 2)



Ej. 3) T: $R^3 \to R^3$, $T(r,\theta,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ convierte la caja S* en el cilindro S.



Ej. 4) T: $R^3 \to R^3$, $T(\rho,\theta,\phi) = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$ convierte la caja S* en la esfera S:



Otras transformaciones:

Ej. 1) Sea $T(x,y) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x-y}{2}\right) = (x^*, y^*)$ con $R^* = [-1,1]\times[-1,1]$

a) Grafique R*
b) Grafique la imagen de R.

Ej. 2) Sea R* la región limitada por: $\begin{cases} x-2y=0 \\ x-2y=-4 \\ x+y=4 \\ x+y=1 \end{cases}$ y sean $u = x+y \wedge v = x-2y$.

a) Grafique R* en xy.
b) Grafique R en uv.

Def. de Transformación 1–1.- La función T: $R^n \to R^n$ es uno a uno en $D^* \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D^*, T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Def. de Transformación sobre.- La función T: $R^n \to R^n$ es sobre en $D \Leftrightarrow \forall y \in D \exists x \in D^* : y = T(x)$.

Def. de transformación Biyectiva.- La función T: $R^n \to R^n$ es biyectiva ⇔ es 1 – 1 y es sobre.

Ej. 1) $x = r\cos\theta \wedge y = r\sin\theta$ es biyectiva con $r > 0 \wedge \theta \in [0, 2\pi]$

Ej. 2) $T(x,y) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x-y}{2}\right)$ es biyectiva para $\forall x, y \in R$.

Teorema de cambio de variable de R^n a R^n.- Sea T: D*→D con D*,D ⊂ R^n una función biyectiva y diferenciable en D*. Sea f: D → R integrable en D tal que la integral $\iint\cdots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n$ se la puede expresar como una integral sobre D*, entonces la integral sobre D es igual a $\iint\limits_{D^*}\cdots\int foT\left|D_T(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right|dx_1^*,dx_2^*,\ldots,dx_n^*$ donde $D_T(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ es la matriz derivada de T denominada el Jacobiano de T dado por $\dfrac{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)}$.

Ej. 1) Encuentre el determinante del Jacobiano de las siguientes transformaciones:

a) $T(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)=(x,y)$
b) $(x,y,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$
c) $(x,y,z)=(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$

Ej. 2) Con el resultado anterior, evalúe $\iint\limits_D \log(x^2+y^2)dxdy$ donde D es la región comprendida entre las circunferencias $x^2+y^2=a^2 \ \wedge \ x^2+y^2=b^2, \ 0<a<b$

Ej. 3) Calcular $\iiint\limits_W xdv$ si $W=\left\{(x,y,z)/\,x,y\geq 0 \wedge x^2+y^2\leq z\leq 2\right\}$.

Ej. 4) Evaluar:

a) $\iiint\limits_D e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}dv$ donde D es la esfera unitaria en R^3.

b) $\iiint\limits_D \dfrac{dv}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}}$

Ej. 5) Sea **R** la región cuadrada de vértices (0,1); (1,2); (2,1); (1,0). Empleando un cambio de variable adecuado calcular $\iint\limits_R (x+y)^2\sin^2(x-y)dA$.

Ej. 6) Empleando un cambio de variable adecuado, calcule:

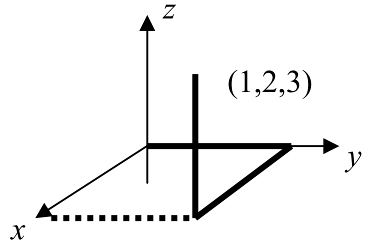
a) El área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ a,b > 0

b) El volumen del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$; a,b,c > 0.

Unidad 7: INTEGRALES DE LINEA

Def. de curva suave a trozos.- Una curva $C = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}} \quad \forall t \in [a,b]$, es suave si $dx/dt, dy/dt, dz/dt$ son continuas en $[a,b]$ y no simultáneamente nulas en (a,b). Así mismo, si C se la puede dividir en subintervalos para que sea suave en cada uno de ellos, se dice que C es suave a trozos.

Ej.1) Parametrice C de tal forma que sea suave a trozos si se desea representar la siguiente trayectoria partiendo desde el origen.



Ej.2) Determine los intervalos $[a,b]$ en los que la hipocicloide $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ es suave, considere $t \in [0,2\pi]$.

Ej.3) Una bola de billar en una mesa cuadrada sigue la trayectoria $\mathbf{C} : [-1,1] \to R^3$ definida por $\mathbf{C}(t) = \left(|t|, \left| t - \frac{1}{2} \right|, 0 \right)$. Reparametrice $\mathbf{C}$ para que sea suave por trozos.

Def. de Integral de Línea.- Sea **F** un campo vectorial de R^3 continuo sobre la trayectoria $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Se define la integral de línea de **F** a lo largo de la trayectoria **r** a la

$$\int_c \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)dt \Leftrightarrow \text{la integral existe.}$$

Otra expresión para evaluar la integral de línea $\int_c \mathbf{F} \bullet \mathbf{r}'(t)dt$ **.-** Se la rescribe como

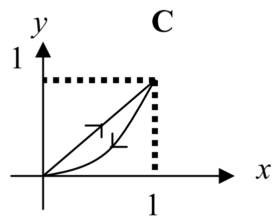
$$\int_c \mathbf{F} \bullet \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_c \mathbf{F} \bullet \mathbf{T}(t) ds = \int_c f(x,y,z) ds.$$ Recuerde que $ds = \|\mathbf{r}'(t)dt\|$.

<u>Obs.</u> En caso de que **r** sea una curva suave por trozos, se debe evaluar la integral como la suma de las integrales de cada intervalo.

Ej. 1) Sea $\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0,2\pi]$ y el campo $\mathbf{F} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$. Calcular $\int_c \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$.

Ej. 2) Sea $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, sen^3 t, 0)$ y la función vectorial $\mathbf{F} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$.

Ej. 3) Calcular $\int_c x ds$ si **C** es la trayectoria mostrada en la figura. (Arco parabólico)



Ej. 4) Calcular el trabajo realizado por el campo $F(x,y,z) = -\frac{1}{2}\cos t\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\sin t\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{4}\hat{\mathbf{k}}$ para mover una partícula por $\mathbf{r}(t) = \cos t\hat{\mathbf{i}} + \sin t\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}} \wedge t \in [0,3\pi]$.

Forma Diferencial de una integral de Línea

En forma diferencial, $\int F \bullet d\mathbf{r} = \int Mdx + \int Ndy + \int Pdz$.

Ej. 5) Calcular $\int_c y^3dx + (x^3 + 3xy^2)dy$ si $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\hat{\mathbf{i}} + 3\sin t\hat{\mathbf{j}} \wedge t \in [0,2\pi]$.

Ej. 6) $\int_c ydx + x^2dy + 2xzdz$ si $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ del punto (0,0,0) al punto (1,1,1)

Campos vectoriales conservativos e independencia del camino.

<u>Teorema fundamental de las integrales de línea.-</u> Si **C** es una curva suave a trozos contenida en una bola abierta B, dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}$ y $F(x,y,z) = M\hat{\mathbf{i}} + N\hat{\mathbf{j}} + P\hat{\mathbf{k}}$ es conservativo y M, N, P son continuas en B, entonces $\int_c F \bullet d\mathbf{r} = \int_c \nabla f \bullet dr = f(P_f) - f(P_o)$, donde *f* es la función potencial de F y P_f, P_o son la posición final e inicial de la trayectoria, respectivamente.

Obs. En este caso se dice que la $\int_c F \bullet d\mathbf{r}$ es independiente del camino escogido.

Ej. 1) Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x,y) = \left(\frac{1}{2}xy, \frac{1}{4}x^2\right)$ sobre una partícula que se mueve desde (0,0) hasta (1,1) a lo largo de:

a) $C_1 : y = x$
b) $C_2 : x = y^2$
c) $C_3 : y = x^3$
d) En caso de ser posible, empleando la función potencial *f*.

Ej. 2) Para el campo de fuerzas $F(x,y,z) = e^x\cos y\hat{\mathbf{i}} - e^x\sin y\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$,

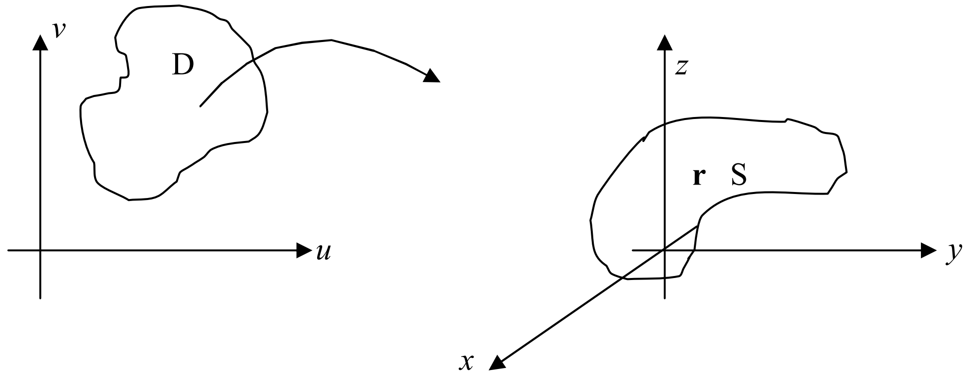
a) Demuestre que **F** es conservativo.
b) Calcule el trabajo que realiza **F** al mover una partícula de $\left(0, \frac{\pi}{2}, 1\right)$ a $(1, \pi, 3)$.

<u>Teorema de equivalencia.-</u> Si $\mathbf{F}(x,y,z) = M\hat{\mathbf{i}} + N\hat{\mathbf{j}} + P\hat{\mathbf{k}}$ es de clase C^1 en una región abierta conexa B y C es suave a trozos en B, las siguientes condiciones son equivalentes:

i) F es conservativo
ii) $\int_c F \bullet dr$ es independiente del camino
iii) $\int_c F \bullet dr = 0$ si C es cerrada en B.

<u>Def.</u> de superficie como una función vectorial de variable vectorial de $R^2 \to R^3$.

Sean x, y, z tres funciones de u y v, continuas en algún dominio D del plano uv. Se dice que el conjunto de puntos (x,y,z) tales que $\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\hat{\mathbf{i}} + y(u,v)\hat{\mathbf{j}} + z(u,v)\hat{\mathbf{k}}$ es una superficie paramétrica. En este caso, las ecuaciones $x = x(u,v)$; $y = y(u,v)$; $z = z(u,v)$ son las ecuaciones paramétricas de la superficie S.



<u>Gráfica de una superficie paramétrica</u>.- Identificar y dibujar:

a) $r(u,v) = 3\cos u\hat{\mathbf{i}} + 3\sin u\hat{\mathbf{j}} + v\hat{\mathbf{k}}$ con $0 \le u \le 2\pi \wedge 0 \le v \le 4$

b) $r(u,v) = \sin u \cos v\hat{\mathbf{i}} + \sin u \sin v\hat{\mathbf{j}} + u\hat{\mathbf{k}}$; $0 \le u \le \pi \wedge 0 \le v \le 2\pi$

c) $r(u,v) = u\cos v\hat{\mathbf{i}} + u\sin v\hat{\mathbf{j}} + u\hat{\mathbf{k}}$; $0 \le u \le 4 \wedge 0 \le v \le 2\pi$

d) Dada la superficie de revolución obtenida al girar $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x \in [1,10]$ alrededor del eje x, escriba una parametrización para S.

<u>Vector normal a una superficie suave</u>

Si S es una superficie paramétrica suave definida por $r(u,v) = x(u,v)\hat{\mathbf{i}} + y(u,v)\hat{\mathbf{j}} + z(u,v)\hat{\mathbf{k}}$ sobre una región abierta D del plano uv, se dice que un vector normal a S en el punto (x_0, y_0, z_0) esta dado por

$$\vec{\mathbf{N}} = r_u(u_0,v_0) \times r_v(u_0,v_0) = \left. \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{vmatrix} \right|_{(u_0,v_0)}$$

Ej.) Hallar la ecuación del plano tangente al paraboloide $r(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$ en el punto (1,2,5).

<u>8.1 ÁREA DE UNA SUPERFICIE EN R^3</u>

Puede calcularse de dos formas, dependiendo si la superficie está:

- Dada en forma paramétrica
- Dada en forma cartesiana

Área de S en forma paramétrica.- Sea S una superficie paramétrica suave dada por una región abierta D $\in$ *uv*. Si a cada punto de S le corresponde uno y solamente un punto de D, el área de S sobre D es:

$$As = \iint ds = \iint_D \|r_u \times r_v\| dA = \iint_D \|\vec{\mathbf{N}}\| dA$$

Donde $\vec{\mathbf{r}}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial u}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial u}\hat{\mathbf{k}} \ \wedge \ \vec{\mathbf{r}}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial v}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial v}\hat{\mathbf{k}}$

Área de S en forma cartesiana .- Sea $z = f(x, y)$ tal que f y sus primeras derivadas parciales son continuas sobre una región cerrada y acotada del plano *xy*, el área de la superficie S definida por $z = f(x, y)$ sobre ***R*** es:

$$As = \iint_R ds = \iint_R \sqrt{1 + f_x^{\,2}(x, y) + f_y^2(x, y)}\, dA$$

Obs. Esta formula se deduce de la definición anterior con $x = x$; $y = y$; $z = f(x,y)$

Ej. 1) Calcular el área de la esfera unitaria dada por $r(u, v) = \sin u \cos v\hat{\mathbf{i}} + \sin u \sin v\hat{\mathbf{j}} + \cos u\hat{\mathbf{k}}$ con $D = \{(u, v)/0 \le u \le \pi; 0 \le v \le 2\pi\}$

Ej. 2) Calcular el área del sólido definido por $r(u, v) = ((2 + \cos u)\cos v, (2 + \cos u)\sin v, \sin u)$
$0 \le \theta \le 2\pi \ \wedge \ \theta = u \vee v$

Ej. 3) Hallar el área de la porción del plano $z = 2 - x - y$ situado sobre el círculo $x^2 + y^2 \le 1$ y ubicado en el primer cuadrante.

Ej. 4) Calcular el área de la superficie del paraboloide $z = 1 + x^2 + y^2$ sobre el círculo unitario en *xy*.

Ej. 5) Hallar el área del hemisferio $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ situado sobre el círculo $x^2 + y^2 \le 9$

8.2 INTEGRALES DE SUPERFICIE

Permiten desarrollar aplicaciones físicas o mecánicas. Por la naturaleza del fenómeno a medir se clasifican en integrales de superficie:

- Escalar
- Vectorial

Def. de integral de superficie escalar.- Sea S una superficie de ecuación $z = f(x, y)$ y ***R*** su proyección sobre el plano *XY*. Si f, f_x, f_y son continuas en ***R*** y g es continua en S, la integral de superficie de g sobre S está dada por.

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_R g(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^{\,2}(x, y)}\, dA$$

$$\text{o} \quad \iint_S g(x, y, z) dS = \iint_R g(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|r_u \times r_v\| dA$$

Ej. 1) Calcular $\iint_S (y^2+2yz)dS$ donde S es la porción del plano $2x+y+2z=6$ ubicada en el I cuadrante.

Ej. 2) Calcular $\iint_S (x+z)dS$ donde S se define por $r(u,v)=u\hat{\mathbf{i}}+3\cos v\hat{\mathbf{j}}+3\sin v\hat{\mathbf{k}}$. $u\in[0,1]\wedge v\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

<u>Def.</u> de superficie orientada.- Se dice que S es una superficie orientada si S tiene dos lados, llamados el lado exterior o positivo y el otro es el lado interior o negativo. En cada punto (x,y,z) de S hay 2 vectores normales unitarios $n_1 \wedge n_2$ donde $n_1=-n_2$.

Ejemplo de funciones orientadas: Cilindros, esferas, paraboloides, planos.

Ejemplo de una superficie no orientada: La banda de Morbius.

<u>Def. de Integrales de superficie vectorial.-</u> Sea F un campo vectorial definido en una superficie S, tal que S es orientada por un vector normal unitario **N.** Sea F de clase C^1, la integral de flujo de **F** a través de S se define por:

$\iint_S \mathbf{F}\bullet d\vec{S}=\iint_R \mathbf{F}\bullet(-g_x(x,y),-g_y(x,y),1)dA$, siendo $z=g(x,y)$: o

$\iint_S \mathbf{F}\bullet d\vec{S}=\iint_D \mathbf{F}\bullet(r_u\times r_v)dA$, si S es $r(u,v)$:

En este caso $d\vec{\mathbf{S}}=dS\vec{\mathbf{N}}$

Ej. 1) Sea S la porción del paraboloide $z=4-x^2-y^2$ sobre xy orientada con el vector hacia afuera. Sea $F(x,y,z)=x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}+z\hat{\mathbf{k}}$. Calcule el flujo de F a través de S.

Ej. 2) Calcular el flujo del campo $F(x,y,z)=\frac{q\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$ donde $\vec{r}=x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}+z\hat{\mathbf{k}}$ a través de la superficie esférica $S: x^2+y^2+z^2=a^2$ orientada hacia afuera. Emplee las ecuaciones paramétricas $\vec{r}(u,v)=x(u,v)\hat{\mathbf{i}}+y(u,v)\hat{\mathbf{j}}+z(u,v)\hat{\mathbf{k}}$ dadas por

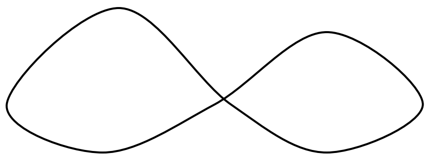
$$r(u,v)=a\cos u\cos v\hat{\mathbf{i}}+a\cos u\sin v\hat{\mathbf{j}}+a\sin u\hat{\mathbf{k}}$$

TAREA: Pág. 1361 1 – 6 , 15 – 28

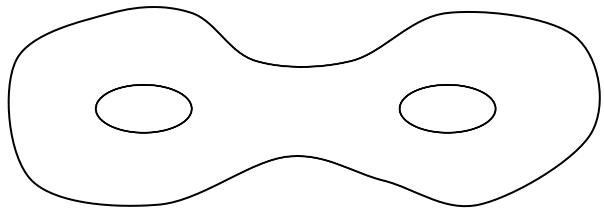
$$\begin{cases}\text{Teorema de Green}\\ \text{Teorema de Stokes}\\ \text{Teorema de Gauss}\end{cases}$$

9.1 TEOREMA DE GREEN.

Def. de región simple y conexa.- Se dice que una curva C es simple si no se corta consigo mismo y una región R en el plano es simplemente conexa si su contorno es una curva cerrada simple.



Curva no Simple



No conexa

Teorema.- Sea R una región del plano simplemente conexa cuyo borde es una curva suave C, a trazos y orientada en sentido antihorario o con R a la izquierda del recorrido, Si M y N son funciones con derivadas parciales continuas en alguna región abierta que contiene a R, entonces $\int_C Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$

Ej. 1) Empleando el teorema de Green, evalúe $\int_c y^3 dx + (x^3 + 3xy^2)dy$ donde C va de (0,0) a (1,1) por el camino de $y = x^3$ $\wedge$ de (1,1) va a (0,0) por un trayecto recto.

Ej. 2) El campo $F(x,y) = y^3\hat{\mathbf{i}} + (x^3 + 3xy^2)\hat{\mathbf{j}}$ actúa sobre una partícula que da una vuelta completa a un círculo de radio 3. Encuentre el trabajo realizado por F.

Ej. 3) Sea R la región interior a la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ y exterior al círculo $x^2 + y^2 = 1$ Calcular $\int_c 2xydx + (x^2 + 2x)dy$

Teorema de la Integral de línea para el área de una región R.

Si R es una región acotada como la del teorema de Green y C es el contorno de R, entonces $A_R = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx$

Ej.) Hallar el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

9.2 TEOREMA DE STOKES

Sea S una superficie orientada con vector normal unitario $\vec{\mathbf{N}}$, acotada por una curva cerrada simple C, suave a trazos. Si F es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a S $\wedge$ C, entonces.

$$\int_C F \bullet dr = \iint_S (rotF) \bullet d\vec{S}$$

Ej. 1) Sea C el triangulo orientado contenido en el plano $2x + 2y + z = 6$ ubicado en el I octante, y sea el campo $F = -y^2\hat{\mathbf{i}} + z\hat{\mathbf{j}} + x\hat{\mathbf{k}}$, calcular $\int_C F \bullet dr$

Ej. 2) Sea C la traza del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ en el plano xy y sea $F = 2z\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}} + y^2\hat{\mathbf{k}}$, calcule $\int_C F \bullet dr$

<u>Obs.</u> Si F es conservativo $\int_C F \bullet dr = 0$

Ej. 3) evalúe $\int_C - y^3dx + x^3dy - z^3dz$ donde C es la intersección de cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 1$.

Ej. 4) Sea S la porción del paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$ limitado por los planos z=0; z=1. Siendo $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ y σ_1, σ_2 las circunferencias que limitan estas superficies ubicadas en los planos z=1 y z=0 respectivamente. Evaluar $\iint_s \nabla \times F.ndS$ siendo F el campo vectorial definido por F(x, y, z)=$(z^2 + x^2, 3xy + z^2, y^2 - z^2)$.

9.3 TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

Sea Q una región sólida acotada por una superficie cerrada S, orientada por vectores normales unitarios dirigidos hacia el exterior de Q. Si F es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en Q, entonces:

$$\iint_S F \bullet Nds = \iiint_Q (divF)dv$$

Ej. 1) Sea Q la región sólida acotada por los planos coordenados y por el plano $2x + 2y + z = 6$ y sea $F = x\hat{\mathbf{i}} + y^2\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$. Calcular

$\iint_S F \bullet d\vec{s}$ Donde S es la superficie de Q.

Ej. 2) Calcular $\iint_S F \bullet Nds$ si S es la superficie del solido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, el plano $x + z = 6$ $\wedge$ z = 0.