2.4. Conservación de la cantidad de movimiento lineal.

1. Una pelota de béisbol de 273g se mueve hacia el bateador con una velocidad de 13.4 m/s, y al ser bateada, sale en dirección contraria con una velocidad de 26.8 m/s. Encuentre el impulso y la fuerza media ejercida sobre la pelota si el bate estuvo en contacto con la pelota por un lapso de 0.01 s.

SOLUCIÓN

Supongamos que la pelota inicialmente se mueve hacia la izquierda, y posteriormente hacia la derecha, vea la figura 163.

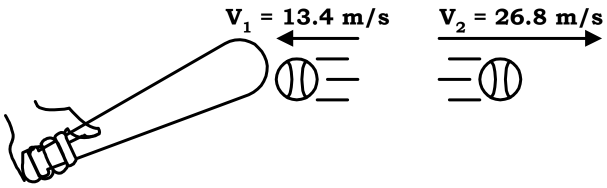

Figura 163

El impulso está dado por el cambio (o la variación) del impulso, o sea,

$$\mathbf{I} = \Delta \mathbf{p}$$
$$\mathbf{I} = m\mathbf{v}_{FINAL} - m\mathbf{v}_{INICIAL}$$

Si el sistema de referencia lo consideramos positivo hacia la derecha, entonces la velocidad inicial, V_1, será negativa, y la velocidad final, V_2, será positiva.

$$\mathbf{I} = (0.273\text{kg})[26.8 - (-13.4)]\text{m/s}$$
$$\mathbf{I} = 10.97 \text{ Ns}$$

2. Un hombre de 75 kg salta desde una altura de 5 m a una piscina, y transcurre un tiempo de 0.45 s para que el agua reduzca la velocidad del hombre a cero. ¿Cuál fue la fuerza promedio que el agua ha ejercido sobre el hombre?

SOLUCIÓN

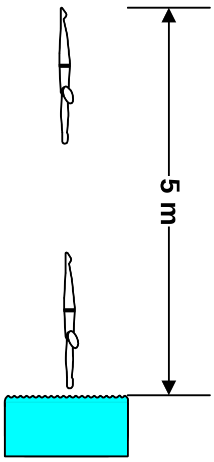

Figura 164

La figura 164 muestra un gráfico que representa la situación descrita en el enunciado del problema. Calcularemos primero la magnitud de la velocidad con la que el clavadista ingresa al agua, utilizando el teorema de conservación de la energía mecánica.

$$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$$
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$
$$v = \sqrt{2gh}$$
$$v = \sqrt{2(9.8m/s^2)(5m)}$$
$$v = 9.90\ m/s$$

Utilizamos, luego, la ecuación que relaciona al impulso y el cambio de la cantidad de movimiento lineal.

$$\mathbf{I} = \Delta \mathbf{p}$$
$$\mathbf{F}\Delta t = m(\mathbf{v}_{FINAL} - \mathbf{v}_{INICIAL})$$

Debido a que el sistema de referencia lo consideramos positivo verticalmente hacia arriba, la velocidad final es cero y la inicial es – 9.90 m/s.

$$F = \frac{m(v_{FINAL} - v_{INICIAL})}{\Delta t}$$
$$F = \frac{75kg[0-(-9.90)]\hat{j}m/s}{0.45s}$$

$$F = 1650\hat{j}\,[N]$$

3. Una fuerza de impulso unidimensional actúa sobre un objeto de 2 kg como se muestra en la figura 165. Encuentre el instante en que la velocidad de la partícula es cero, si tenía al tiempo t = 0 una velocidad de – 6.0 m/s.

SOLUCIÓN

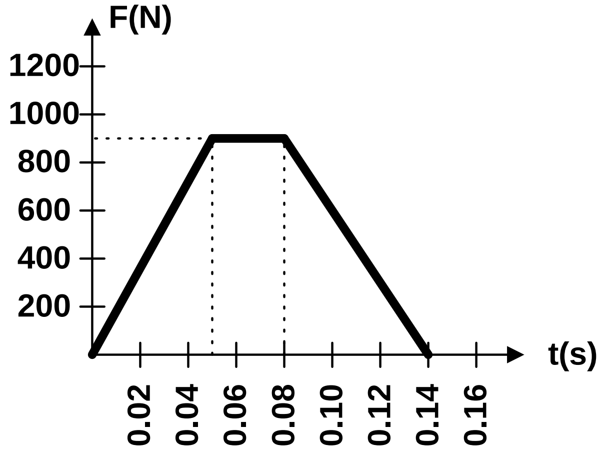

Figura 165

En un gráfico Fuerza versus tiempo, el área representa el impulso aplicado sobre la partícula, por tanto utilizaremos primero la definición de Impulso, y a partir de allí relacionamos con el área que abarque hasta una velocidad de cero, y posteriormente de 20 m/s.

$$\mathbf{I} = \Delta\mathbf{p}$$
$$\mathbf{I} = m\mathbf{v}_{FINAL} - m\mathbf{v}_{INICIAL}$$

Debido a que el área representa el impulso, tenemos que

$$A = -\,m\mathbf{v}_{INICIAL}$$
$$A = -\,(2kg)(-\,6m/s)$$
$$A = 12\ Ns$$

El área de la figura es ½(base*altura)= Ft/2

Por lo tanto Ft = 2(12 Ns) = 24 Ns

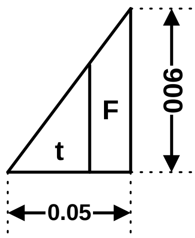

Figura 166

La figura 166 muestra que desde t = 0 hasta t = 0.02 s la figura geométrica es un triángulo, cuya área es 22.5 Ns, por lo que podemos concluir que el tiempo en el que se alcanza el reposo es menor a 0.05 s, este valor lo hallaremos utilizando el criterio de los triángulos semejantes. A continuación se muestra la relación entre F y t, a partir de los datos presentes en la figura 4

$$\frac{900}{0.05} = \frac{F}{t}$$
$$F = 18000t$$

Reemplazamos el último resultado obtenido en la ecuación anterior

$$Ft = 24\ Ns$$
$$(18000t)t = 24$$

$$t = 0.036\ s$$

4. Una pelota de masa 0.1 Kg se suelta desde una altura de 2 m y, después de chocar con el suelo, rebota hasta 1.8 m de altura. Determinar la cantidad de movimiento justo un instante antes de llegar al suelo y el impulso recibido al chocar con el suelo.

SOLUCIÓN

El gráfico mostrado en la figura 167, representa la caída de la pelota y la altura a la que llegó después del rebote.

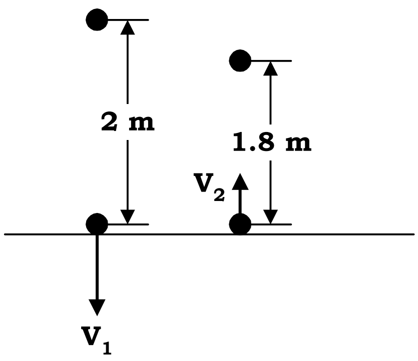

Figura 167

Las velocidades v_1 y v_2 las calcularemos por medio de la conservación de la energía, colocando como nivel de referencia el piso (si usted prefiere calcular las velocidades por medio de las ecuaciones de cinemática, lo puede hacer obteniendo el mismo resultado).

CÁLCULO DE V_1.

$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$

$mgh_1 = ½ mv_1^2$

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

$$v_1 = \sqrt{2(9.8m/s^2)(2m)}$$

$$v_1 = 6.26m/s$$

CÁLCULO DE V_2.

$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$

$½ mv_2^2 = mgh_2$

$$v_2 = \sqrt{2gh_2}$$

$$v_2 = \sqrt{2(9.8m/s^2)(1.8m)}$$

$$v_2 = 5.94m/s$$

La pelota tiene una cantidad de movimiento lineal que es igual a

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{p} = (0.1kg)(-6.26\hat{j})m/s$$

$$\vec{p} = -0.626\hat{j}\ \text{Ns}$$

El impulso dado a la pelota está dado por

$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$

$$\vec{I} = m(\vec{v_2} - \vec{v_1})$$

$$\vec{I} = 0.1kg[(-5.94\hat{j}) - (-6.26\hat{j})]m/s$$

$$\vec{I} = 0.032\hat{j}\ \text{Ns}$$

5. Un cuerpo de 0.10 Kg de masa cae desde una altura de 3 m sobre un montón de arena. Si el cuerpo penetra 3 cm antes de detenerse, ¿qué fuerza constante ejerció la arena sobre él?

SOLUCIÓN

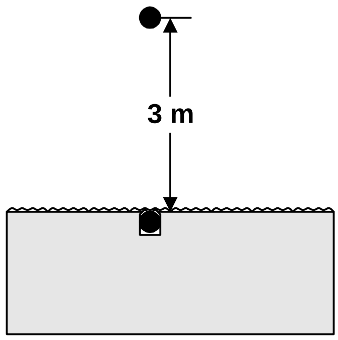

Figura 168

El gráfico presentado en la figura 168, representa esquemáticamente el enunciado del problema.

Calcularemos primero la velocidad que lleva la partícula justo un instante antes de hacer contacto con la arena.

El nivel de referencia que tomaremos es el del piso (arena).

$$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$v = \sqrt{2(9.8m/s^2)(3m)}$$

$$v = 7.67m/s$$

De acuerdo a la referencia que estamos utilizando (positiva verticalmente hacia arriba), la velocidad es (-7.67 $\hat{j}$)m/s

Para el ejercicio asumimos una fuerza constante, por lo tanto, también una aceleración constante. Para calcular el valor de la fuerza que detiene al cuerpo podemos utilizar la definición de impulso, o la segunda ley de Newton. Para el presente problema utilizaremos la definición de impulso.

$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$
$$\vec{F}\Delta t = m(\vec{v_2} - \vec{v_1})$$
$$\vec{F}\Delta t = (0.10kg)[0 - (-7.67\hat{j})]m/s$$

EL intervalo de tiempo en el que ocurre el frenado del cuerpo lo podemos calcular por la ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente variado.

$$\Delta y = \left(\frac{v_f + v_0}{2}\right)\Delta t$$
$$\Delta t = \frac{2\Delta y}{v_f + v_0}$$
$$\Delta t = \frac{2(-0.03)}{(0 - 7.67)m/s}$$
$$\Delta t = 0.078\ s$$

Por lo tanto la fuerza media para detener al cuerpo una vez haya recorrido 3 cm en la arena es:

$$F = \frac{(0.10kg)(-7.67\hat{j}m/s)}{(0.078s)}$$

$$F = 9.83\hat{j}N$$

6. Un astronauta de 80 kg queda varado en el espacio a 30 m de su nave. A fin de retornar a ella, lanza una llave de 0.5 kg con una rapidez de 20 m/s en dirección opuesta a donde se encuentra la nave. ¿Cuánto tiempo le toma al astronauta en llegar hasta donde se encuentra la nave?

SOLUCIÓN

Si en un sistema de partículas no actúan las fuerzas externas, la cantidad de movimiento lineal permanece constante, esto es, la cantidad de movimiento lineal inicial es igual a la cantidad de movimiento final.

$\vec{p}_{INICIAL} = \vec{p}_{FINAL}$

$m_{LLAVE}v_{LLAVE} + M_{ASTRONAUTA}V_{ASTRONAUTA} = m_{LLAVE}v_{LLAVE\ FINAL} + M_{ASTRONAUTA}V_{ASTRONAUTA\ FINAL}$

$0 + 0 = (0.5kg)(20m/s) + (80kg)(V_{ASTRONAUTA\ FINAL})$

$10kg\ m/s = -80kg(V_{ASTRONAUTA\ FINAL})$

$$V_{ASTRONAUTA\ FINAL} = -0.125\ m/s$$

El signo negativo representa que el astronauta de mueve en dirección opuesta a la dirección en que se lanzó la llave.

7. ¿Qué impulso sobre una masa de 2 kg le provoca una cambio en su cantidad de movimiento de 50 Ns?
   a. 25 Ns
   b. 50 Ns
   c. 100 Ns
   d. – 25 Ns
   e. – 50 Ns

SOLUCIÓN

Sabemos que el impulso es igual precisamente al cambio de la cantidad de movimiento lineal, por lo tanto el impulso que provoca un cambio de 50 Ns en la cantidad de movimiento es también 50 Ns. **Respuesta: b)**.

8. Una bola de tenis de 180 g lleva una rapidez horizontal de 15 m/s cuando es golpeada por la raqueta. Si luego del impacto la pelota viaja en una dirección de 25º con la horizontal, y alcanza una altura de 10 m, medida a partir de la altura de la raqueta, determine el impulso neto de la raqueta sobre la bola. Desprecie el peso de la bola durante el impacto.
   a. - 8.5 Ns; - 17º
   b. 17 Ns; 22º
   c. 8.5 Ns; 17º
   d. 10.2 Ns; 35º
   e. 23.1 Ns; 14º

SOLUCIÓN

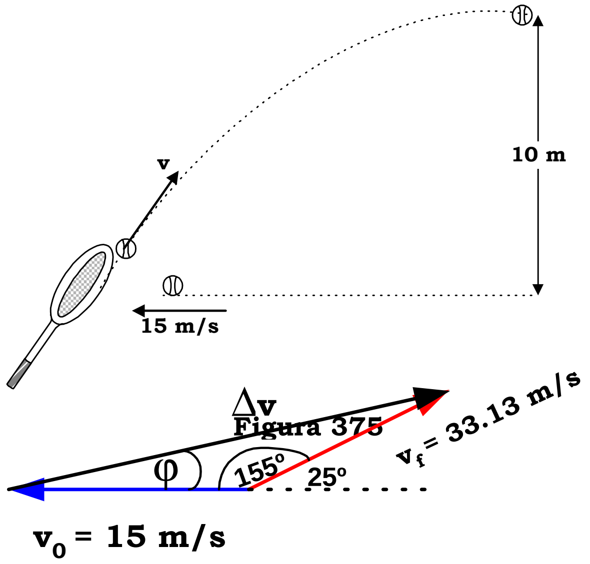

Figura 169

la figura 169 representa la situación que ocurre antes del impacto de la pelota con la raqueta, y posterior al impacto. El impulso es igual al cambio de la cantidad de movimiento lineal, o sea,

$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$

Para calcular el impulso necesitamos conocer cuál fue la velocidad con la que la pelota salió de la raqueta, un instante posterior al impacto con ella; este cálculo lo realizamos por medio de las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente variado.

$$v_{fy}^2 = v_{0y}^2 + 2a_y\Delta y$$
$$0 = v_y^2 - 2\left(9.8m/s^2\right)(10m)$$
$$v_y = 14m/s$$

Por lo tanto el valor de v lo calculamos sabiendo que

$$v_Y = v\text{sen}25º \Rightarrow v = 14/\text{sen}25º = 33.13 \text{ m/s}$$
$$\vec{I} = m\left(\vec{v_f} - \vec{v_0}\right)$$

La figura 8 muestra a los vectores velocidad, y al vector cambio de velocidad. El cambio de la velocidad lo obtenemos por medio de la ley del coseno

$$\Delta v = \sqrt{15^2 + 33.13^2 - 2(15)(33.13)\cos 155º}$$
$$\Delta v = 47.15\ m/s$$

El ángulo que forma el cambio en la velocidad, Δv, y por consiguiente el impulso lo calculamos por medio de la ley del seno.

$$\frac{Sen\varphi}{33.13} = \frac{Sen155º}{47.15}$$
$$\varphi = sen^{-1}\left(\frac{33.13Sen155º}{47.15}\right)$$
$$\varphi = 17.27º$$

Reemplazando los valores obtenidos para el cambio en la velocidad, y el ángulo que forma éste con la horizontal, en la ecuación que relaciona el impulso y el cambio en la cantidad de movimiento lineal tenemos que

I = 0.180 kg(47.15)m/s; 17.27º
I = 8.49 Ns; 17.27º

Respuesta: c

9. La fuerza que actúa sobre una partícula de 6 kg varía con la posición como se muestra en la figura 170. Si la rapidez en x = 3 m es 2 m/s, encuentre el impulso a los 15 m.

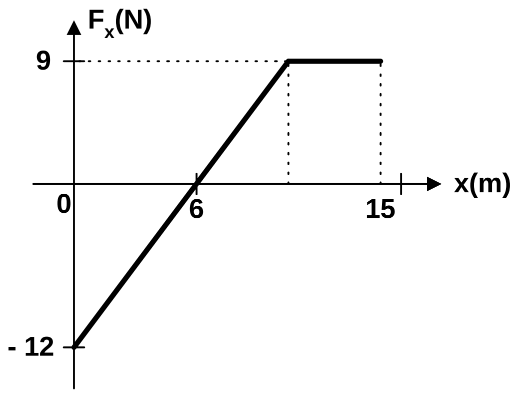

Figura 170

SOLUCIÓN

Para un gráfico Fuerza versus posición, la región (el área) debajo de la curva representa el trabajo neto realizado sobre la partícula a la que representa el gráfico. Además del teorema de trabajo energía sabemos que el trabajo neto es igual al cambio de la energía cinética, hecho con el que podemos calcular la velocidad de la partícula a los 15 m.

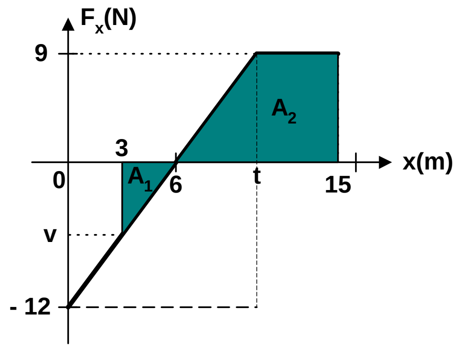

Figura 171

En la figura 171 se muestra que el trabajo neto está dado por la suma de las áreas A_1 y A_2, pero para hacer el cálculo respectivo hace falta determinar los valores de v y t, valores que determinaremos por medio de los triángulos semejantes.

Para calcular v tenemos

$$\frac{v}{12} = \frac{3}{6}$$
$$\therefore v = -6m/s$$

Para calcular t se presenta la relación entre los lados del triángulo, formado por la recta de pendiente positiva y las líneas punteadas

$$\frac{9}{21} = \frac{t-6}{t}$$
$$9t = 21t - 126$$
$$126 = 12t$$
$$t = 10.5s$$

Por tanto el trabajo neto será igual a

$$W_{NETO} = A_1 + A_2$$
$$W_{NETO} = \frac{base \times altura}{2} + \left(\frac{base\ mayor + base\ menor}{2}\right) \times altura$$
$$W_{NETO} = \frac{(3m)\times(-6N)}{2} + \left(\frac{9+4.5}{2}\right) m \times 9N$$
$$W_{NETO} = 51.75[J]$$

Por lo tanto la velocidad de la partícula cuando esté en la posición x = 15 m está dada por

$W_{NETO} = \Delta K$
$W_{NETO} = ½\ m(v_f^2 - v_o^2)$
$51.75\ [J] = ½\ (6\ kg)v_f^2 - ½\ (6\ kg)(2m/s)^2$
$v_f = 4.61\ m/s$

Por lo tanto el impulso será

$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$
$$\vec{I} = m(\vec{v_2} - \vec{v_1})$$
$$\vec{I} = (6\ kg)(4.61 - 2)\ m/s$$

$$\vec{I} = 15.66\ Ns$$

10. Un proyectil de 50 g impacta sobre un árbol con rapidez de 200 m/s y penetra perpendicularmente 10 cm hasta detenerse. Calcular la fuerza promedio que ejerce el árbol sobre el proyectil. ¿Cuánto tiempo tarda en penetrar esa longitud? (Examen parcial de Física I, I término 2001 – 2002)

SOLUCIÓN

Sabemos que el impulso es igual al cambio de la cantidad de movimiento lineal, y al mismo tiempo es igual al producto de la fuerza promedio por el intervalo de tiempo que ha demorado la penetración del proyectil en el árbol.

$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$
$$\vec{F}\Delta t = m(\vec{v_2} - \vec{v_1})$$

El intervalo de tiempo, Δt, podemos calcularlo utilizando las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente variado, asumiendo que la desaceleración del proyectil es constante.

$$\Delta x = \left(\frac{v_0 + v_f}{2}\right)\Delta t$$
$$\Delta t = \frac{2\Delta x}{v_0 + v_f}$$
$$\Delta t = \frac{2(0.1m)}{200m/s}$$

$$\Delta t = 0.001\ s$$

La fuerza promedio será, entonces,

$$F = \frac{m(v_2 - v_1)}{\Delta t}$$
$$F = \frac{(0.05kg)(0 - 200)m/s}{0.001s}$$
$$F = 10\ kN$$

11. Un proyectil de 10 g es disparado con una velocidad de 75.2 m/s a un ángulo de 34.5º por encima de la horizontal, a lo largo de un campo de tiro plano. Encuentre el impulso después de 1.50 s haber sido disparado el proyectil.

SOLUCIÓN

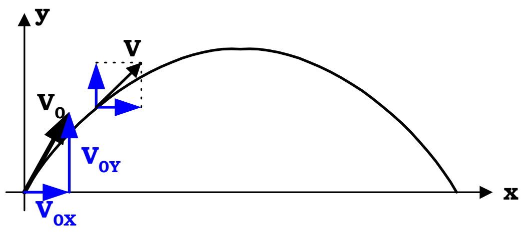

Figura 172

Para encontrar el impulso necesitamos calcular la velocidad de la partícula cuando ha pasado 1.50 s. La figura 172 muestra la trayectoria de la partícula

La velocidad de la partícula en el eje x es constante y está dada por

Vx = (75.2m/s)(Cos 34.5º) = 62.0 m/s

En el eje de las y el movimiento es uniformemente variado, por tanto la velocidad en el eje de las y, cuando han transcurrido 1.5 s es

$V_y = V_{oy} + a_y t$
$V_y = (75.2 m/s)(Sen\ 34.5^o) + (-9.8\ m/s^2)(1.5s)$
$V_y = 27.9$ m/s

Por lo tanto la velocidad total para t = 1.5 s está dada por

$$v = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2}$$
$$v = \sqrt{62.0^2 + 27.9^2}$$
$$v = 68 m/s$$

El ángulo que forma con la horizontal es

$$Tan\phi = \frac{v_y}{v_x}$$
$$\phi = Tan^{-1}\left(\frac{27.9}{62.0}\right)$$
$$\phi = 24.2^o$$

En la figura 173 se muestran ambos vectores velocidad, la velocidad inicial y la final. Con estos dos vectores calculamos el cambio de la velocidad y posteriormente el impulso.

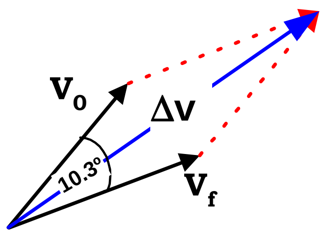

Figura 173

El ángulo entre los vectores es de 10.3º, sale de la diferencia de los ángulos que forma cada vector con el eje horizontal. El cambio en la velocidad, Δv, lo calculamos por medio de la ley de los cosenos.

$$\Delta v = \sqrt{75.2^2 + 68^2 + 2(75.2)(68)\cos 10.3^o}$$
$$\Delta v = 142.62\ m/s$$

El ángulo que forma el vector cambio de la velocidad, Δv, con el vector velocidad final, v_f, lo calculamos por medio de la ley del seno.

$$\frac{Sen\varphi}{75.2} = \frac{Sen169.7^o}{142.62}$$
$$\varphi = Sen^{-1}\left(\frac{75.2 Sen169.7^o}{142.32}\right)$$
$$\varphi = 5.42^o$$

Por lo tanto el impulso será igual a :

$\vec{I} = \Delta\vec{p}$

$\vec{I}$ = m $(\Delta \vec{v})$

$\vec{I}$ = (0.01kg)(142.62 m/s); 29.62º

29.62º es el resultado de la suma del ángulo que forma el vector vf con la horizontal, 24.2º con el ángulo que forma el vector vf con el cambio de la velocidad

$$\bar{I} = 1.43 \text{ Ns}; 29.62º$$

12. Un tanque de guerra de masa 3000 kg se mueve con una velocidad de 10 m/s. Lanza una granada de 10 kg con una velocidad de 600 m/s en la misma dirección de su movimiento. ¿Cuál es la nueva velocidad del tanque?

SOLUCIÓN
Utilizamos la conservación de la cantidad de movimiento lineal antes de que el tanque lance la granada.

$$P_{SISTEMA} \text{ antes} = P_{SISTEMA} \text{ después}$$
$$m_{TANQUE}v_{1TANQUE} + m_{GRANADA}v_{1GRANADA} = m_{TANQUE}v_{2TANQUE} + m_{GRANADA}v_{2GRANADA}$$

Antes de que se lanzara sólo el tanque tenía movimiento.

$$m_{TANQUE}v_{1TANQUE} + 0 = m_{TANQUE}v_{2TANQUE} + m_{GRANADA}v_{2GRANADA}$$
$$v_{2TANQUE} = \frac{m_{TANQUE}v_{1TANQUE} - m_{GRANADA}v_{2GRANADA}}{m_{TANQUE}}$$
$$v_{2TANQUE} = \frac{(3000kg)(10m/s) - (10kg)(600m/s)}{3000kg}$$
$$v_{2TANQUE} = 8 \text{ m/s}$$

13. Un proyectil de 10 g es disparado horizontalmente contra un bloque de madera de 4 kg, inicialmente en reposo en una superficie horizontal. El proyectil tiene una velocidad de 500 m/s un instante antes de penetrar al bloque, y sale de él con una velocidad de 200 m/s. El bloque desliza 10 cm antes de detenerse. Encuentre el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano.

SOLUCIÓN
La figura 174 muestra la situación expuesta en el enunciado del problema.
Utilizamos la conservación de la cantidad de movimiento lineal para determinar la velocidad con la que el bloque sale del reposo, después del impacto con el proyectil.

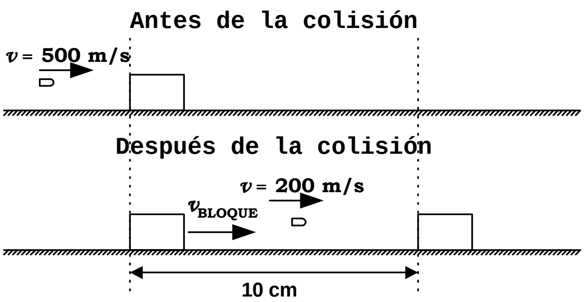

Figura 174

$$P_{SISTEMA} \text{ antes} = P_{SISTEMA} \text{ después}$$
$$m_{PROYECTIL}v_{1PROYECTIL} + m_{BLOQUE}v_{1BLOQUE} = m_{PROYECTIL}v_{2PROYECTIL} + m_{BLOQUE}v_{2BLOQUE}$$
$$m_{PROYECTIL}v_{1PROYECTIL} + 0 = m_{PROYECTIL}v_{2PROYECTIL} + m_{BLOQUE}v_{2BLOQUE}$$
$$(0.01kg)(500m/s) = (0.01kg)(200m/s) + 4kg(v_{2BLOQUE})$$
$$v_{2BLOQUE} = 0.75 \text{ m/s}$$

A partir de este momento utilizamos el teorema general de energía y trabajo.

$$W_{FNC} = E_{FINAL} - E_{INICIAL}$$
$$- f_k d = 0 - \tfrac{1}{2} m_{BLOQUE}v^2_{2BLOQUE}$$
$$\mu m_{BLOQUE} g d = \tfrac{1}{2} m_{BLOQUE}v^2_{2BLOQUE}$$
$$\mu(9.8m/s^2)(0.1m) = \tfrac{1}{2}(0.75m/s)^2$$

$$\mu = 0.287$$

14. Una bala de 10 g se mueve hacia un péndulo de 0.8 kg que se encuentra en reposo. Si la bala queda empotrada en el péndulo, y el sistema péndulo – bala sube hasta una altura de 45 cm, encuentre la velocidad de la bala antes de entrar al péndulo.

SOLUCIÓN

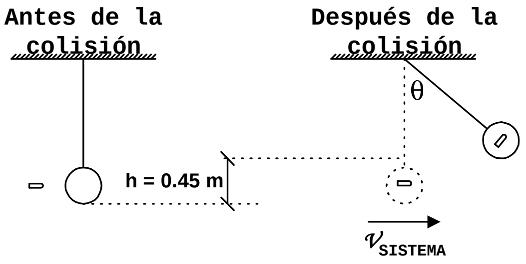

Figura 175

En la figura 175 se encuentran los datos que se enuncian en el problema. Primero calculamos la magnitud de la velocidad que el sistema bala – péndulo adquirirá posterior a la colisión, mediante la conservación de la energía.

$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$
$½\, m_{SISTEMA}V^2 = m_{SISTEMA}gh$
$½\, V^2 = (9.8m/s^2)(0.45m)$
$V = 2.97\ m/s$

Posterior a esto, la velocidad de la bala, antes de la colisión con el péndulo, podemos calcularla por medio de la conservación de la cantidad de movimiento lineal.

$P_{SISTEMA}$ antes = $P_{SISTEMA}$ después
$m_Bv_B + m_{BL}v_{BL} = (m_B + m_{BL})V$
$(0.01kg)v_B + 0 = (0.01 + 0.8)kg(2.97m/s)$

$v_B = 240.56\ m/s$

15. Una esfera de masa m, suspendida como se muestra en la figura 176, se suelta desde una altura h y golpea a una masa M, inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción, cuando alcanza el punto más bajo de su trayectoria. Encuentre la velocidad V de la masa M y la velocidad *v* de la masa m, inmediatamente después del impacto, suponiendo que la colisión es perfectamente elástica.

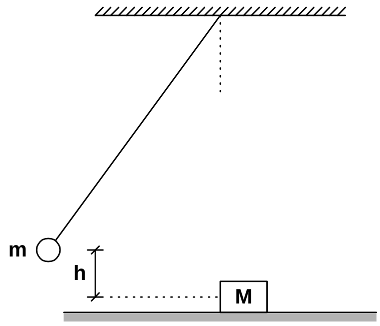

Figura 176

SOLUCIÓN
Si la colisión es elástica, se conserva la cantidad de movimiento lineal y la energía cinética del sistema, antes y después de la colisión. El coeficiente de restitución para una colisión elástica es igual a 1. Recuerde que el coeficiente de restitución, e, es la relación de las velocidades relativas antes y después de la colisión entre las partículas, o sea,

$$e = \frac{v_{B2} - v_{A2}}{v_{A1} - v_{B1}}$$

donde v_{B2} es la velocidad de la partícula B después de la colisión, v_{B1} es la velocidad de la partícula B antes de la colisión, v_{A2} es la velocidad de la partícula A después de la colisión, y v_{A1} es la velocidad de la partícula A antes de la colisión. Para los datos del problema tenemos

$$1 = \frac{V - v}{v_{m1} - 0}$$
$$v_{m1} = V - v \quad (1)$$

Por conservación de la cantidad de movimiento lineal tenemos

$mv_{m1} + Mv_{M1} = mv + MV$
$mv_{m1} + 0 = mv + MV$
$mv_{m1} = mv + MV$

Dividimos la ecuación anterior por m

$v_{m1} = v + (M/m)V \qquad (2)$

Sumamos las ecuaciones (1) y (2)

$v_{m1} = -\,v + \quad V$

$v_{m1} = \;\; v + (M/m)V$

$2\,v_{m1} = (1 + M/m)V \qquad (3)$

Ahora, calculamos la velocidad de la esfera, v_{m1}, justo un instante antes de que colisione con el bloque, por medio de conservación de la energía.

$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$

$mgh = ½\, mv^2_{m1}$

$v_{m1} = \sqrt{2gh}$

Reemplazando este valor en la ecuación (3) tenemos

$$2\sqrt{2gh} = \left(1+\frac{M}{m}\right)V$$

$$2\sqrt{2gh} = \left(\frac{m+M}{m}\right)V$$

$$\boxed{V = \left(\frac{2m}{m+M}\right)\sqrt{2gh}}$$

Y el valor de la velocidad v lo obtenemos reemplazando estos dos últimos valores en la ecuación (1)

$$\sqrt{2gh} = \left(\frac{2m}{m+M}\right)\sqrt{2gh} - v$$

$$v = \left(\frac{2m}{m+M}\right)\sqrt{2gh} - \sqrt{2gh}$$

$$v = \sqrt{2gh}\left(\frac{2m}{m+M} - 1\right)$$

$$v = \sqrt{2gh}\left[\frac{2m-(m+M)}{m+M}\right]$$

$$\boxed{v = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)\sqrt{2gh}}$$

16. Una bala de masa m y velocidad v atraviesa al péndulo de masa M y sale con una velocidad de ½ v, como se muestra en la figura 177. La cuerda que sostiene al péndulo tiene una longitud L. Calcule el valor mínimo de v para que el péndulo describa un círculo completo.

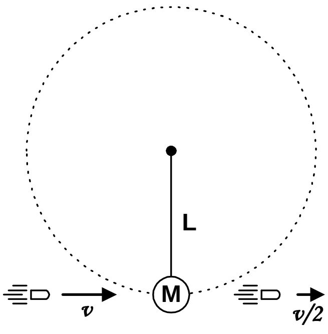

Figura 177

SOLUCIÓN

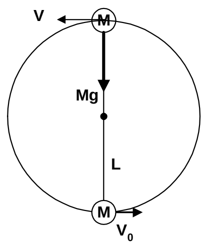

Figura 178

Para que el péndulo complete justo una vuelta, la velocidad en el punto más alto de la trayectoria circular es la denominada velocidad crítica, en este punto actúa solamente el peso sobre la esfera, observe la figura 178.

Figura 179

$$\sum Fy = ma_C$$
$$Mg = \frac{MV^2}{L}$$
$$V^2 = gL$$

Por medio de la conservación de la energía calculamos la velocidad con la que la esfera inicial el movimiento circular, posterior a la colisión con la bala.

$$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$$
$$\tfrac{1}{2} MV_o^2 = Mgh + \tfrac{1}{2} MV^2$$
$$V_o^2 = 2g(2L) + V^2$$
$$V_o^2 = 4gL + gL$$
$$V_0 = \sqrt{5gL}$$

Para calcular el valor de v utilizamos la conservación de la cantidad de movimiento lineal.

$$mv + MV_1 = m(v/2) + MV_o$$
$$mv - m(v/2) = M\sqrt{5gL}$$
$$\frac{1}{2}mv = M\sqrt{5gL}$$
$$v = \frac{2M}{m}\sqrt{5gL}$$

17. Los bloques A y B de la figura 179 chocan bajo las siguientes condiciones: a) En el primer choque B está en reposo mientras A se mueve hacia la derecha con una rapidez de 6 m/s; después de choque A rebota con una rapidez de 2 m/s mientras que B se mueve hacia la derecha con una rapidez de 4 m/s. b) En el segundo choque B está en reposo y A se carga con una masa de 3 kg y se dirige hacia B con una rapidez de 6 m/s; después del choque A queda en reposo y B se mueve hacia la derecha con una rapidez de 8 m/s. Encuentre la masa de cada bloque.

SOLUCIÓN

En el primer choque tenemos la siguiente situación

$$m_Av_A + m_Bv_N = m_AV_A + m_BV_B$$
$$6m_A = -2m_A + 4m_B$$
$$8m_A = 4m_B$$
$$2m_A = m_B$$

En la segunda colisión se presenta la siguiente situación

$$m_Av_A + m_Bv_N = m_AV_A + m_BV_B$$
$$6(m_A + 3) = 8m_B$$
$$3m_A + 9 = 4m_B$$
$$4m_B - 3m_A = 9$$
$$4(2m_A) - 3m_A = 9$$

$$m_A = 1.8 \text{ kg}$$

$$m_B = 3.6 \text{ kg}$$

18. Una esfera de 5 kg que se está moviendo a 6 m/s golpea a otra de 4 kg que está en reposo y continúa en la misma dirección a 2 m/s. Encuentre:
    a. La velocidad de la bola de 4 kg después del choque.
    b. El coeficiente de restitución.

SOLUCIÓN

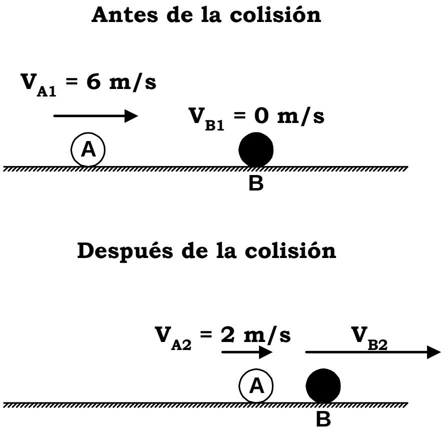

Figura 180

La figura 180 muestra la situación presentada en el enunciado del ejercicio.

a) Utilizamos la conservación de la cantidad de movimiento lineal para la situación presentada
$m_Av_A + m_Bv_N = m_AV_A + m_BV_B$
$(5kg)(6m/s) + (4kg)(0) = (5kg)(2m/s) + (4kg)(V)$

$$V = 5\ m/s$$

b) El coeficiente de restitución, e, es la relación (cociente) entre la velocidad relativa final y la velocidad relativa inicial entre las dos partículas

$$e = \frac{V_B - V_A}{v_A - v_B}$$
$$e = \frac{5m/s - 2m/s}{6m/s - 0}$$

$$e = 0.5$$

19. Entre dos cuerpos, uno de 30 kg que se está moviendo a 3 m/s a la derecha y el otro de 15 kg que se mueve a 6 m/s a la izquierda, ocurre un choque frontal directo. Si el coeficiente de restitución es e = 0.6 y el tiempo que dura el choque es de 0.02 s, determine la fuerza de choque promedio.

SOLUCIÓN
Para determinar la fuerza promedio de choque, necesitamos calcular el impulso, y para ello necesitamos las velocidades posteriores al choque ocurrido. Utilizaremos la conservación de la cantidad de movimiento lineal y el coeficiente de restitución. En la figura 181 se muestra una representación de la situación presentada.

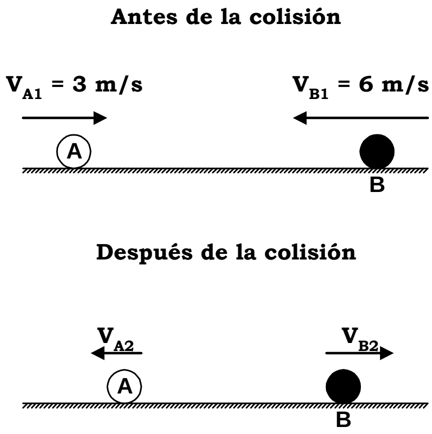

Figura 181

$m_Av_A + m_Bv_N = m_AV_A + m_BV_B$
$30kg(3m/s) + 15kg(-6m/s) = m_AV_A + m_BV_B$
$0 = 30V_A + 15V_B$
$V_B = -2V_A \qquad (1)$

$$e = \frac{V_B - V_A}{v_A - v_B}$$
$$0.6 = \frac{V_B - V_A}{3-(-6)}$$
$$5.4 = V_B - V_A \quad (2)$$

Reemplazamos la ecuación (1) en la (2)

$5.4 = -2V_A - V_A$
$V_A = -1.8\ m/s$

$V_B = 3.6\ m/s$

Para calcular la fuerza promedio en la colisión utilizamos la definición de impulso y la relación que existe entre éste y el cambio de la cantidad de movimiento lineal.

$F\Delta t = I$
$F\Delta t = \Delta p$
$F\Delta t = m(V_{FINAL} - V_{INICIAL})$
$F(0.02s) = 30kg(-1.8-3)m/s$

F = - 7200 N

Si calculamos para la segunda partícula

$F\Delta t = m(V_{FINAL} - V_{INICIAL})$
F(0.02s) = 15kg[3.6–(-6)]m/s
F = + 7200 N

La razón para que en una partícula el valor de la fuerza promedio salga positiva, y en la otra salga negativa es porque la fuerza en un caso es la acción y en el otro es reacción, por tanto la magnitud de la fuerza promedio para ambas partículas es

$$F_{PROMEDIO} = 7200 \text{ N}$$

20. Se deja caer una pelota sobre el suelo desde una altura de 1.5 m y rebota hasta una altura de 1 m. Encuentre el coeficiente de restitución entre la pelota y el suelo.

SOLUCIÓN

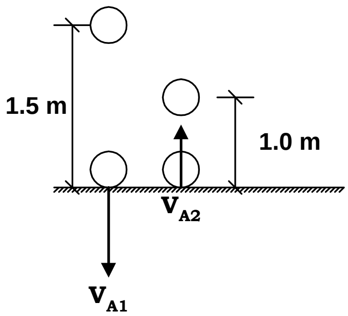

Figura 182

La figura 182 muestra el instante en que la partícula cae desde 1.5 m y luego rebota hasta 1m.

El coeficiente de restitución es la relación entre las velocidades relativas antes y después de la colisión entre dos partículas, o sea,

$$e = \frac{V_{TIERRA\ 2} - V_{PELOTA\ 2}}{V_{PELOTA\ 1} - V_{TIERRA\ 1}}$$

En ambos casos, antes del choque y posterior a él, la tierra permanece inmóvil, por tanto $V_{TIERRA2}$ y $V_{TIERRA1}$ valen cero. Las velocidades de la pelota, tanto en la caída como en la subida, las podemos calcular por medio de las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente variado, o por la conservación de la energía.

CAÍDA
$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$
$mgh_1 = ½ mv^2_{A1}$
$v_{A1} = -\sqrt{2gh_1}$

SUBIDA
$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$
$½ mv^2_{A2} = mgh_2$
$v_{A2} = +\sqrt{2gh_2}$

Reemplazamos estos valores en la ecuación del coeficiente de restitución

$$e = \frac{0 - \sqrt{2gh_2}}{-\sqrt{2gh_1} - 0}$$

$$e = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh1}} = \sqrt{\frac{2gh_2}{2gh1}}$$

$$e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{1m}{1.5m}}$$

$$e = 0.816$$

21. Un proyectil de masa m = 50g es disparado desde el suelo con una rapidez de 500 m/s a un ángulo de 40º sobre la horizontal. Al llegar a la altura máxima el proyectil impacta con el bloque de masa 2 kg, inicialmente en reposo, sobre una superficie horizontal rugosa, μ_k = 0.3. Producto del impacto el proyectil queda incrustado en el bloque. Determine cuanto recorre el bloque antes de detenerse. (Examen parcial de Física I, II Término 2003 – 2004)

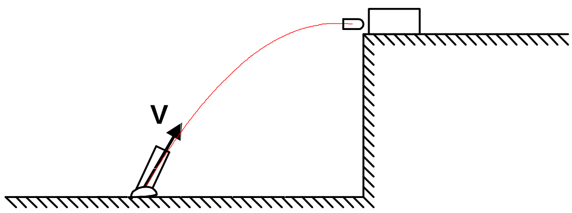

Figura 183

SOLUCIÓN

La velocidad con la que el proyectil impacta en el bloque es la componente de la velocidad en el eje x, porque al llegar a la altura máxima, la velocidad en el eje y es cero.

$Vx = V\cos 40^{\circ} = (500\ m/s)\cos 40^{\circ}$

Para calcular la velocidad con la que parte el sistema bloque – bala, utilizamos la conservación de la cantidad de movimiento lineal.

$m_{BALA}v_1 + m_{BLOQUE}v_{BLOQUE} = (m_{BALA} + m_{BLOQUE})V$

$0.05kg(500\ m/s)\cos 40^{\circ} = [(0.05 + 2)kg]V$

$V = 9.34\ m/s$

Para calcular la distancia recorrida por el bloque antes de detenerse, utilizamos la relación general entre el trabajo y la energía.

$W_{FNC} = EFINAL - EINICIAL$

$-f_k d = 0 - \frac{1}{2} mV^2$

$\mu_k N d = \frac{1}{2} mV^2$

$\mu_k g d = \frac{1}{2} V^2$

$0.3(9.8m/s^2)d = \frac{1}{2} (9.34m/s)^2$

$d = 14.84\ m$

22. Un bloque de masa m_1 = 0.5 kg se suelta desde el reposo desde una altura de 80 cm sobre el nivel horizontal, desde un plano inclinado liso como se muestra en la figura 184; en el plano horizontal liso choca de forma parcialmente elástica (e = 0.8) con otro bloque de masa m_2 = 1.5 kg, inicialmente en reposo.
   a. Hasta qué altura sube cada bloque después del choque en los dos planos inclinados.
   b. Qué porcentaje de energía se pierde durante el choque.

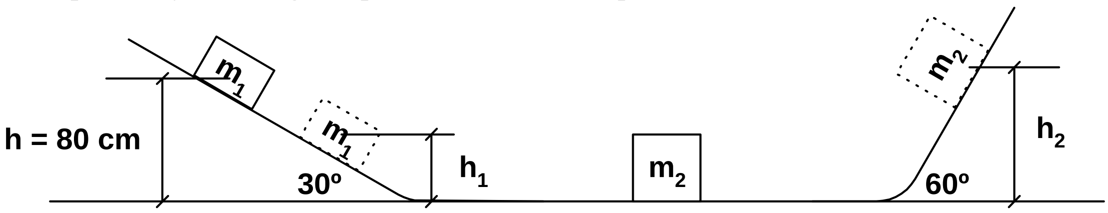

Figura 184

SOLUCIÓN

a) Calculamos las velocidades de los dos bloques, un momento antes de la colisión, por medio de conservación de la energía.

$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$

$mgh_1 = \frac{1}{2} mv^2_{1ANTES}$

$$v_{1ANTES} = \sqrt{2gh}$$
$$v_{1ANTES} = \sqrt{2\left(9.8m/s^2\right)\left(0.8m\right)}$$
$$v_{1ANTES} = 3.96m/s$$

Luego utilizamos la conservación de la cantidad de movimiento lineal y el coeficiente de restitución, para averiguar las velocidades ganadas después de la colisión.

$$m_1v_{1ANTES} + m_2v_{2ANTES} = m_1v_{1DESPUÉS} + m_2v_{2DESPUÉS}$$
$$(0.5kg)(3.96m/s) + 0 = (0.5kg)\,v_{1DESPUÉS} + (1.5kg)v_{2DESPUÉS}$$
$$3.96 = v_{1DESPUÉS} + 3v_{2DESPUÉS} \qquad (1)$$

$$e = \frac{v_{2DESPUÉS} - v_{1DESPUÉS}}{v_{1ANTES} - v_{2ANTES}}$$
$$0.8 = \frac{v_{2DESPUÉS} - v_{1DESPUÉS}}{3.96 - 0}$$
$$3.168 = v_{2DESPUÉS} - v_{1DESPUÉS} \qquad (2)$$

Sumamos las ecuaciones (1) y (2)

$$7.128 = 4v_{2DESPUÉS}$$
$$v_{2DESPUÉS} = 1.782\ m/s$$

Con este resultado reemplazamos en la ecuación (1) o en la ecuación (2), y obtenemos el valor de la velocidad de la partícula de masa m_1 después de la colisión.

$$V_{1DESPUÉS} = -\ 1.386\ m/s$$

Por medio de la conservación de energía calculamos la altura a la que sube cada bloque

$$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$$
$$\tfrac{1}{2}\ mv^2_{1DESPUÉS} = mgh_1$$
$$\tfrac{1}{2}\ (1.386m/s)^2 = (9.8m/s^2)h_1$$

$$h_1 = 9.8\ cm$$

$$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$$
$$\tfrac{1}{2}\ mv^2_{2DESPUÉS} = mgh_2$$
$$\tfrac{1}{2}\ (1.782m/s)^2 = (9.8m/s^2)h_2$$
$$h_2 = 16.2\ cm$$

b) El porcentaje de energía perdida es la relación de la energía cinética antes y después de la colisión y restada del 100% inicial.

$$\%ENERGÍA\quad PERDIDA = 100\% - \frac{K_{DESPUÉS}}{K_{ANTES}} \times 100\%$$
$$\%ENERGÍA\quad PERDIDA = 100\% - \frac{\frac{1}{2}m_1v_{1DESPUÉS}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2DESPUÉS}^2}{\frac{1}{2}m_1v_{1ANTES}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2ANTES}^2} \times 100\%$$
$$\%ENERGÍA\quad PERDIDA = 100\% - \frac{(0.5kg)(1.386m/s)^2 + (1.5kg)(1.782m/s)^2}{(0.5kg)(3.96m/s)^2} \times 100\%$$
$$\%ENERGÍA\quad PERDIDA = 27\%$$

23. Dos péndulos de igual longitud, L = 50 cm, están suspendidos del mismo punto. Son esferas de acero, de masas 140 g y 390 g. Una de ellas, la más grande, se hala hacia atrás hasta que se forme un ángulo de 15º con la vertical. Al soltarla choca de manera elástica contra la otra. ¿Cuál es el ángulo máximo que forman los péndulos, luego de la colisión?

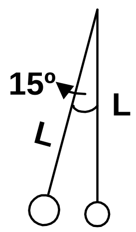

Figura 185

SOLUCIÓN

Podemos calcular la velocidad de la esfera grande, justo antes de hacer contacto, por medio de la conservación de la energía. La figura 186 muestra la situación en que la esfera de masa mayor se aleja 15º y luego se suelta.

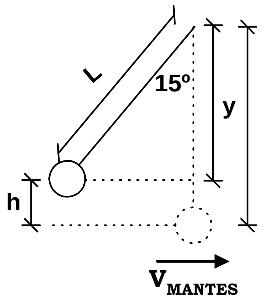

Figura 186

$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$
$Mgh = ½ Mv^2_{MANTES}$

En la figura 24 se puede apreciar también que

$$y + h = L$$

Además, del triángulo rectángulo se puede demostrar que y = Lcos15º, por lo tanto tenemos que

$L\cos 15^o + h = L$
$h = L – L\cos 15^o = L(1-\cos 15^o)$
$L = 0.5 \text{ m } (1-\cos 15^o)$

Por lo tanto la velocidad de la partícula al llegar al punto más bajo será

$(9.8 \text{ m/s}^2)[0.5(1-\cos 15^o)\text{m}] = ½ v^2_{MANTES}$
$v_{MANTES} = 0.578 \text{ m/s}$

La velocidad de la masa pequeña, después de la colisión, la calculamos con la conservación de la cantidad de movimiento lineal, por medio de la definición de coeficiente de restitución.

$Mv_{MANTES} + mv_{mANTES} = Mv_{MDESPUÉS} + mv_{mDESPUÉS}$
$(0.390\text{kg})(0.578\text{m/s}) = (0.390\text{kg})v_{MDESPUÉS} + (0.140\text{kg})v_{mDESPUÉS}$
$0.225 = (0.390\text{kg})v_{MDESPUÉS} + (0.140\text{kg})v_{mDESPUÉS}$ (1)

$$e = \frac{v_{MDESPUÉS} - v_{mDESPUÉS}}{v_{mANTES} - v_{MANTES}}$$

$$1 = \frac{v_{MDESPUÉS} - v_{mDESPUÉS}}{0 - 0.578}$$

$$-0.578 = v_{MDESPUÉS} - v_{mDESPUÉS}$$

$$v_{MDESPUÉS} = v_{mDESPUÉS} - 0.578 \qquad (2)$$

Reemplazamos la ecuación (2) en la ecuación (1)

$0.225 = (0.390)(v_{mDESPUÉS} – 0.578) + (0.140)v_{mDESPUÉS}$
$0.225 = 0.390v_{mDESPUÉS} – 0.225 + (0.140)v_{mDESPUÉS}$
$v_{mDESPUÉS} = 0.851 \text{ m/s}$

Con esta velocidad y la conservación de la energía, podemos calcular el ángulo hasta el cual se desplaza la masa m. Observe la figura 187, de la misma tomaremos los datos en la conservación de la energía

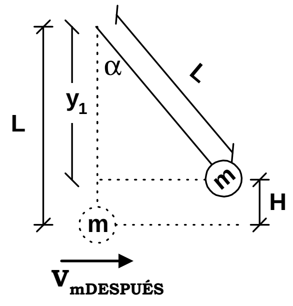

Figura 187

$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$
$mgH = \frac{1}{2} mv^2_{mDESPUÉS}$
$gL(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2} v^2_{mDESPUÉS}$

$$1-\cos\alpha = \frac{v^2_{mDESPUÉS}}{2gL}$$

$$\cos\alpha = 1-\frac{v^2_{mDESPUÉS}}{2gL}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(1-\frac{0.851^2}{2(9.8)(0.5)}\right)$$

$$\alpha = 22.16^o$$

24. Del extremo de la cuerda (L = 2 m) pende una esfera de 2 kg, como se muestra en la figura 188. Al llegar al punto más bajo choca con un bloque de 5 kg, inicialmente en reposo. Luego de la colisión la esfera sube hasta una altura de L/3 (medida a partir del punto más bajo de su trayectoria), mientras que el bloque se mueve hacia otro bloque, de masa 1 kg. Al colisionar los dos bloques se mueven con la misma velocidad sobre una superficie horizontal, rugosa en el tramo AB (μ_k = 0.23), hasta comprimir 15 cm un resorte de masa despreciable y de constante de fuerza k = 742 N/m, antes de quedar momentáneamente en reposo. Encuentre el ángulo θ.

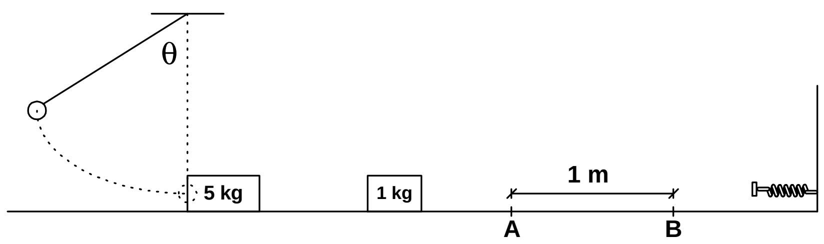

Figura 188

SOLUCIÓN

Resolveremos el problema partiendo desde la situación final. Por el teorema general de trabajo y energía calcularemos la velocidad que llevaban los bloques que comprimen juntos al resorte

$W_{FNC} = E_{FINAL} - E_{INICIAL}$
$- f_k d_{AB} = \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{2} m_{SISTEMA}v^2$
$- \mu_k N d_{AB} = \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{2} m_{SISTEMA}v^2$
$- \mu_k m_{SISTEMA} g d_{AB} = \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{2} m_{SISTEMA}v^2$
$-(0.23)(5kg+1kg)(9.8m/s^2)(1m) = 0.5(742N/m)(0.15m)^2 - 0.5(5kg+1kg)v^2$

v = 2.7 m/s

Con esta velocidad, que es la de los dos bloques que colisionaron de manera inelástica, determinamos la velocidad del bloque de 5 kg antes de la colisión con el bloque de 1 kg, por medio de la conservación de la cantidad de movimiento lineal.

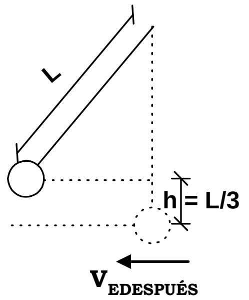

Figura 189

$MV + mv_1 = (M+m)v$
$5V = 6(2.7)$
$V = 3.24$ m/s

Con esta velocidad calculamos la velocidad con la que se movió la esfera después de la colisión, por medio de la conservación de la cantidad de movimiento lineal.

$m_E v_{EANTES} + m_B v_{BANTES} = m_E v_{EDESPUÉS} + m_B v_{BDESPUÉS}$
$2v_{EANTES} = 2v_{EDESPUÉS} + 5(3.24)$
$2v_{EANTES} = 2v_{EDESPUÉS} + 16.2$
$v_{EANTES} = v_{EDESPUÉS} + 8.1$

Por medio de la conservación de la energía podemos calcular la velocidad después del choque, observe la figura 189.

$$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$$
$$\tfrac{1}{2}\, m v^2_{EDESPUÉS} = mgh$$
$$\tfrac{1}{2}\, v^2_{EDESPUÉS} = (9.8 m/s^2)(2/3)m$$
$$v_{EDESPUÉS} = 3.615\ m/s$$

Con esta velocidad podemos calcular la velocidad de la esfera, justo antes de hacer impacto con el bloque de 5 kg, retomando la ecuación obtenida por la conservación de la cantidad de movimiento lineal. Debido a que la esfera rebota con el bloque, la velocidad es negativa.

$$v_{EANTES} = v_{EDESPUÉS} + 8.1$$
$$v_{EANTES} = -3.615 + 8.1$$
$$v_{EANTES} = 4.485\ m/s$$

Con este resultado aplicamos nuevamente la conservación de la energía para calcular el ángulo. Observe la figura 190. Al igual que en el ejercicio anterior, el valor de la altura sale de la diferencia entre L y el lado adyacente del triángulo rectángulo.

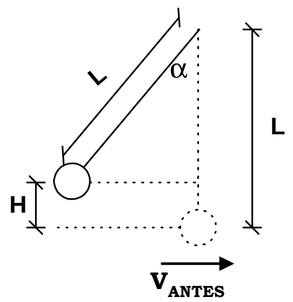

Figura 190

$$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$$
$$mgH = \tfrac{1}{2}\, m v^2_{ANTES}$$
$$gL(1-\cos\alpha) = \tfrac{1}{2}\, v^2_{ANTES}$$
$$1-\cos\alpha = \frac{v^2_{ANTES}}{2gL}$$
$$\cos\alpha = 1-\frac{v^2_{ANTES}}{2gL}$$
$$\alpha = \cos^{-1}\left(1-\frac{4.485^2}{2(9.8)(2)}\right)$$
$$\alpha = 61^{o}$$

25. El bloque de la figura 191 tiene una masa de 15 kg y se sostiene por dos resortes de constante de fuerza K = 200 N/m. Encuentre la velocidad mínima de la bala de masa 600 g para que quede incrustada en el bloque y apenas toque el suelo. Cada resorte tiene una longitud no deformado de 1 m.

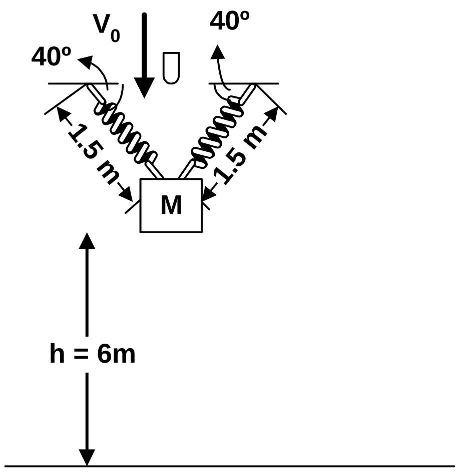

Figura 191

SOLUCIÓN

Calcularemos por conservación de la energía la velocidad con la que sale el sistema masa – bala, posterior al impacto (colisión). Cabe notar que hay dos resortes con las mismas características físicas, por tanto son dos las energías elásticas que debemos tomar en cuenta. En la figura 399 mostramos el instante en que la bala hace impacto con el bloque, y todo el sistema masa – bala sale con una velocidad inicial, $V_{oSISTEMA}$.

$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$

$2(½ kx^2_1) + (M+m)gh + ½ (M+m)V^2_{oSISTEMA} = 2(½ kx^2_2)$

Al inicio los resortes están alargados porque la longitud natural de ellos es 1 m, y en la figura 192 se muestra que en ese instante tienen una longitud de 1.5 m, por tanto x_1 = 0.5 m. Para calcular x_2, necesitamos calcular H y x, de tal manera que por el Teorema de Pitágoras calculamos L, y como consecuencia x_2.

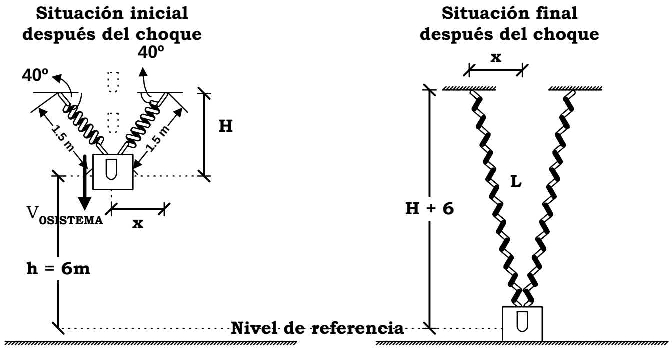

Figura 192

$$Sen40° = \frac{H}{1.5m}$$
$$H = (1.5Sen40°)m$$

El valor de x lo calculamos con el mismo triángulo rectángulo.

$$Cos40° = \frac{x}{1.5m}$$
$$x = (1.5Cos40°)m$$

La elongación (estiramiento) x_2 del resorte la calculamos por medio del Teorema de Pitágoras.

$$L^2 = x^2 + (H+6)^2$$
$$L = \sqrt{(1.5\cos 40°)^2 + (1.5Sen40° + 6)^2}$$
$$L = 7.06m$$

Por lo tanto x_2 = L – 1 = 6.06 m

Ahora reemplazamos estos valores obtenidos en la ecuación que relaciona el trabajo con la energía.

$(200N/m)(0.5m)^2+(15.6kg)(9.8m/s^2)(6m)+½(15.6kg)V^2_{oSISTEMA}=(200)(6.06m)^2$

$50+917.28+7.8\ V^2_{oSISTEMA}= 7344.72$

$V_{oSISTEMA} = 28.59m/s$

Con este resultado calculamos la velocidad que la bala tenía justo antes de impactar con el bloque, por medio de la conservación de la cantidad de movimiento lineal.

$mv + MV = (m+M)V_{oSISTEMA}$

$(0.600kg)v = (15.6kg)(28.59m/s)$

$v = 743\ m/s$

26. Una bala de 500 g golpea un bloque de 10 kg para luego salir con la mitad de su velocidad. El bloque que estaba momentáneamente en reposo resbala sobre una pista circular de radio R = 5m y logra ascender hasta una altura H = 5/3 R hasta el punto B, punto en el que pierde contacto con la pista. El carril presenta un fricción constante promedio de 8.6 N. Encuentre la velocidad de la bala. (Examen de mejoramiento de Física I, III Término 2002 – 2003)

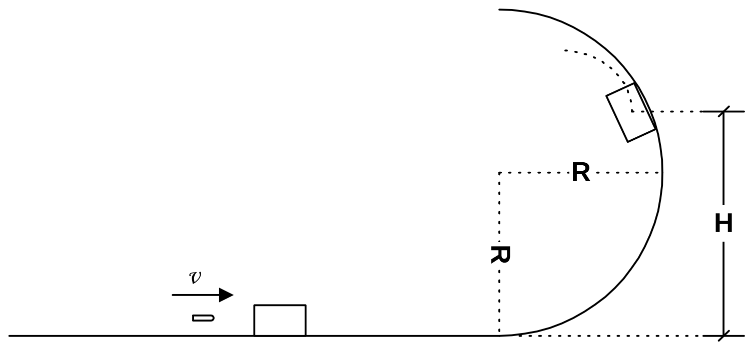

Figura 193

SOLUCIÓN

Debido a que existen fuerzas disipativas ocurre que la energía mecánica se conserva.

$W_{FNC} = E_{FINAL} - E_{INICIAL}$

$-fd = \frac{1}{2} mv_B^2 + mgh - \frac{1}{2} mv_A^2$

La velocidad de la partícula en el punto donde la altura es H = 5/3R la calculamos por medio de la segunda ley de Newton, y la distancia d es la longitud circular desde el inicio de la trayectoria circular hasta el punto donde se separa de la pista, vea la figura 194.

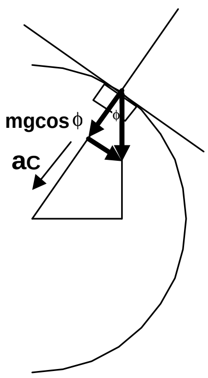

Figura 194

$$\sum F_{RADIALES} = ma_C$$

$$mg\cos\phi = m\frac{v_B^2}{r}$$

del gráfico expuesto en la figura 402, también se puede concluir que

$\cos\phi = (h - r)/r = (5/3\ r - r)/r = 2/3$

$v_B^2 = (2/3)gr$

$d = R\theta$

$\theta = 90^o + (90 - \phi)$

$\phi = \cos^{-1}(2/3) = 48.2^o$

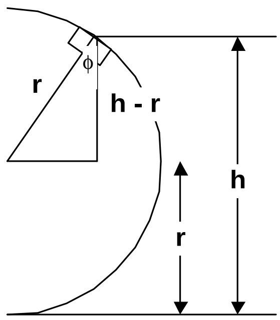

Figura 195

$\theta = 180^o - 48.2^o$

$\theta = 2.3$ rad

$d = 2.3(5m) = 11.5$ m

Reemplazamos estos dato en la ecuación de trabajo y energía.

$-(8.6N)(11.5m) = \frac{1}{2}(10kg)(2/3)gR + (10kg)(5/3)gR - \frac{1}{2}(10)v_A^2$

$5v_A^2 = 10(9.8)(5)(1/3 + 5/3) + 98.9$

$v_A = 14.69$ m/s

$mv_1 + MV_1 = mv_2 + MV_2$

$mv_1 + 0 = m(\frac{1}{2}v_1) + 10(14.69)$

$mv_1 - \frac{1}{2} mv_1 = 146.9$

$\frac{1}{2}(0.5)v_1 = 146.9$

$v_1 = 587.5$ m/s

27. Un bloque de 5kg, que se está moviendo hacia el este a razón de 2 m/s sobre una superficie horizontal sin fricción, es golpeado por un proyectil cuya masa es 15 g y que fue disparado hacia el norte. El proyectil se introduce en el bloque y ambos se mueven en una dirección a 40º al norte del este. Calcular:
    a) La magnitud de la velocidad común después del impacto.
    b) La velocidad del proyectil antes de hacer impacto.
    c) El porcentaje de pérdida de energía cinética.
    (Examen Parcial de Física I, II Término 2002 – 2003)

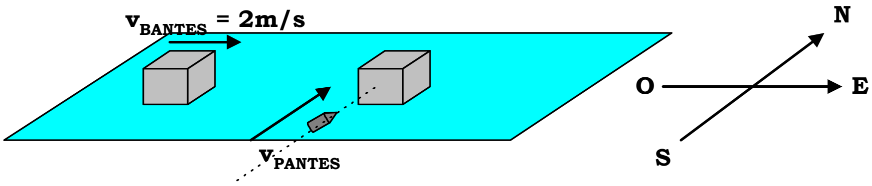

Figura 196

SOLUCIÓN

En la figura 196 se muestra el gráfico que representa la situación descrita en el enunciado del ejercicio, antes de la colisión del proyectil y el bloque.

Posterior al impacto ambas partículas se mueven juntas, en la figura 197 se muestra este hecho.

a) La cantidad de movimiento lineal se conserva en ambos ejes, eje x y eje y, por lo tanto analizamos ambos por separado.

EJE X

$m_B V_{BANTES} = (m_B + m_P)V_x$

$(5kg)(2m/s) = (5.015kg)V\cos 40$

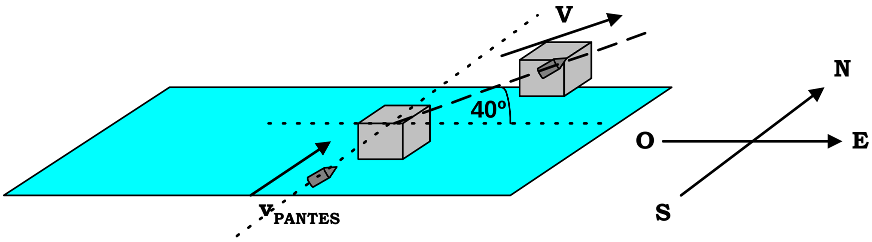

Figura 197

$V = 2.60$ m/s

b) De igual manera que se hizo el análisis en el eje de las x, ahora hacemos el análisis en el eje de las y

EJE Y

$M_P V_{PANTES} = (m_B + m_P)V_Y$

$(0.015kg)V_{PANTES} = (5.015kg)(2.60m/s)\text{sen}40$

$V_{PANTES} = 559.40$ m/s

c) El porcentaje de pérdida en la colisión es la razón de la energía cinética posterior al choque y la energía cinética anterior al choque.

$$\%E = \frac{K_{FINAL}}{K_{INICIAL}} \times 100$$

$$\%E = \frac{\frac{1}{2}(m_{BLOQUE} + m_{PROYECTIL})V^2}{\frac{1}{2}\left(m_{BLOQUE}v_{BLOQUE}^2 + m_{PROYECTIL}v_{PROYECTIL}^2\right)}$$

$$\%E = \frac{(5.015kg)(2.6m/s)^2}{(5kg)(2m/s)^2 + (0.015kg)(559.4m/s)^2}$$

$$\%E = 0.719\%$$

Por lo tanto se pierde el 99.281% en la colisión.

28. Un núcleo, originalmente en reposo, se desintegra emitiendo un electrón de momento lineal 9.22x10^{-21} kg m/s y un neutrino en un ángulo recto a la dirección del electrón, con momento lineal 5.33x10^{-21} kg m/s.
    a) ¿En qué dirección retrocede el núcleo residual?¿Cuál es su momento lineal?
    b) Suponiendo que la masa del núcleo residual es 3.90x10^{-25} kg. ¿Cuáles son su velocidad y su energía cinética?

SOLUCIÓN

a) La figura 198 muestra a las tres partículas elementales en el instante en que se desintegra el núcleo.

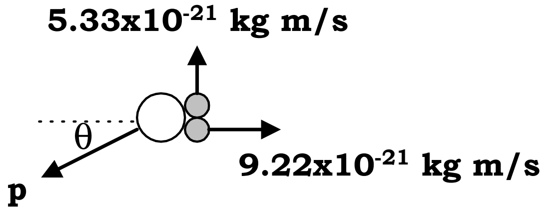

Figura 198

La cantidad de movimiento lineal se conserva en ambos ejes

EJE X

$0 = p_{NÚCLEOx} + p_{ELECTRÓN}$

$0 = p_{NÚCLEO}\cos\theta + 9.22\times10^{-21}$ kg m/s

$p_{NÚCLEO} \cos\theta = -9.22\times10^{-21}$ kg m/s (1)

De igual manera que se hizo el análisis en el eje de las x, ahora hacemos el análisis en el eje de las y

EJE Y

$0 = p_{NÚCLEOy} + p_{NEUTRINO}$

$0 = p_{NÚCLEO}\,\text{sen}\theta + 5.33\times10^{-21}$ kg m/s

$p_{NÚCLEO}\,\text{sen}\theta = - 5.33\times10^{-21}$ kg m/s (2)

Si dividimos las dos ecuaciones, esto es, la ecuación (2) entre la ecuación (1), resulta

$$\frac{p_{NÚCLEO}\,sen\theta}{p_{NÚCLEO}\cos\theta} = \frac{-5.33\times10^{-21}}{-9.22\times10^{-21}}$$
$$Tan\theta = 30^{o}$$

este ángulo encontrado es el ángulo que forma el núcleo con el eje negativo de las x, o sea, la dirección del núcleo, posterior a la desintegración es 150°. Utilizando este ángulo encontramos que la cantidad de movimiento lineal del núcleo es 1.66x10^{-20} Ns. En forma vectorial el momento del núcleo es

$$\mathbf{p}_{NÚCLEO} = 1.66\times10^{-20}\ \text{Ns};\ 150^{o}$$

b) Debido a que la cantidad de movimiento lineal, p, es igual al producto de la masa por la velocidad, tenemos que

$\mathbf{p}_{NÚCLEO} = m\mathbf{v} \Rightarrow v = \frac{p_{NÚCLEO}}{m}$

$\mathbf{v} = (1.66\times10^{-20}\text{Ns},150^{o})/3.90\times10^{-25}$ kg

$\mathbf{v} = 4.26\times10^{4}$ m/s

La energía cinética está dada por

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$
$$K = \frac{1}{2}\left(3.90\times10^{-25}\,kg\right)\left(4.26\times10^{4}\,m/s\right)^2$$
$$K = 3.54\times10^{-16}\ \text{J}$$

29. Una explosión rompe una roca en tres pedazos. Dos trozos de 1 kg y 2 kg de masa salen despedidos en ángulo recto con velocidades de 12 m/s y 8 m/s. El tercer trozo sale con una velocidad de 40 m/s. Encuentre la masa total de la roca. (Examen parcial de Física I, Invierno 2005)

SOLUCIÓN

La representación gráfica es similar a la del problema anterior, por lo tanto, el análisis es exactamente el mismo que el que hicimos en el ejercicio anterior.

EJE X

$0 = p_{MASA1}x + p_{MASA3X}$

$0 = m_1 v_{MASA1} + m_3 v_{MASA3X}$

$0 = (1kg)(12m/s) + (40m/s)m_3\cos\theta$

$-12 = 40m_3\cos\theta$

$-3 = 10m_3\cos\theta$ (1)

De igual manera que se hizo el análisis en el eje de las x, ahora hacemos el análisis en el eje de las y

EJE Y

$0 = p_{NMASA2Y} + p_{MASA3Y}$

$0 = m_2 v_{MASA2Y} + m_3 v_{MASA3Y}$

$0 = (2kg)(8m/s) + (40m/s)m_3\text{sen}\theta$

$-16 = 40m_3\text{sen}\theta$

$-4 = 10m_3\text{sen}\theta$ (2)

Dividimos las dos ecuaciones

$4/3 = \text{Tan}\theta$

$\theta = 53.13^{o}$ debajo del eje x negativo

Reemplazando este resultado en la ecuación (1) o en la ecuación (2) tenemos que la masa del tercer pedazo es 0.5 kg, por lo tanto la masa total de la roca es

$m_{TOTAL} = m_1 + m_2 + m_3$

$m_{TOTAL} = 1\ kg + 2\ kg + 0.5\ kg$

$m_{TOTAL} = 3.5\ kg$

30. Dos automóviles, 1 y 2, de masas 500 kg y 800 kg respectivamente. El uno avanza hacia el este y el 2 hacia el norte hacia un cruce. Las velocidades constantes de las dos partículas son $v_1 = 54$ km/h y $v_2 = 72$ km/h. Calcular la velocidad común de ambos vehículos, posterior al choque.

SOLUCIÓN

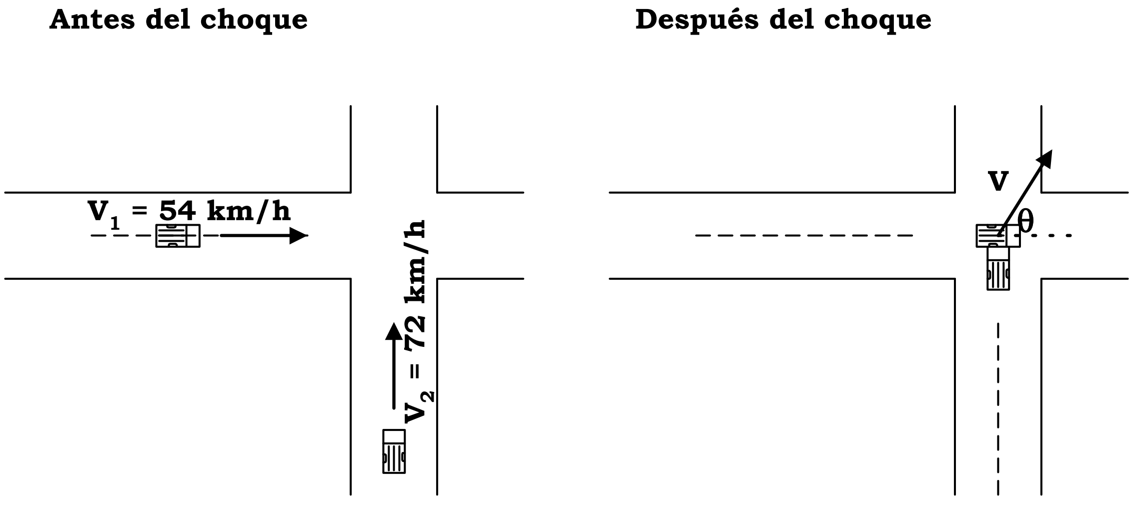

Figura 199

La figura 406 muestra a los dos vehículos, antes y después de la colisión, analizamos a las dos situaciones por medio de la conservación de la cantidad de movimiento lineal, tanto en el eje x como en el eje y.

$p_{1XANTES} + p_{2XANTES} = p_{1XDESPUÉS} + p_{2XDESPUÉS}$
$m_1v_{1X} = (m_1+m_2)V_X$
$(500kg)(54km/h) = (1300kg)V\cos\theta$ (1)

$p_{1YANTES} + p_{2YANTES} = p_{1YDESPUÉS} + p_{2YDESPUÉS}$
$m_2v_{2Y} = (m_1+m_2)V_Y$
$(800kg)(72km/h) = (1300kg)V\operatorname{sen}\theta$ (2)

Dividimos las dos ecuaciones

$800(72)/[500(54)] = \tan\theta$
$\theta = 64.88^o$

Reemplazando este resultado en cualquiera de las dos ecuaciones tenemos que la velocidad común de los dos vehículos es

$1300(V\cos 64.88^o) = 500(54)$
$V = 48.93$ km/h = 13.59 m/s

V = 48.93 km/h; 64.88º

31. Una partícula de masa m está en reposo en el origen de un sistema de coordenadas, cuando repentinamente explota en tres partes iguales. Una parte sale disparada a lo largo del eje x con rapidez v_o; la otra parte sale disparada a lo largo del eje y con una velocidad v_o. ¿Qué sucederá con la tercera parte resultante?

SOLUCIÓN
En la figura 407 se muestra la situación presentada en el enunciado del problema.

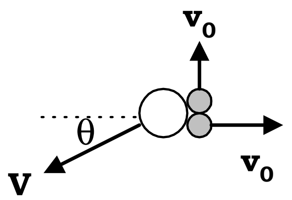

Figura 200

Hacemos el análisis en cada uno de los ejes, de tal manera que la cantidad de movimiento lineal se conserva.

Eje x
$0 = Mv_o + M(-V\cos\theta)$
$v_o = V\cos\theta$ (1)

Eje y
$0 = Mv_o + M(-V\operatorname{sen}\theta)$
$v_o = V\operatorname{sen}\theta$ (2)

Dividimos las dos ecuaciones y se obtiene

$$\frac{v_0}{v_0} = \frac{V\cos\theta}{Vsen\theta}$$
$$1 = Tan\theta$$
$$\theta = 45^o$$

Por tanto la dirección del tercer pedazo es de 225º. La magnitud de la velocidad es

$v_o = V\operatorname{sen}225^o$
$v_o = V/\sqrt{2}$
$V = \sqrt{2}\,v_o$
$\mathbf{V} = \sqrt{2}\,v_o$ a 225º

32. Una pelota de masa m está moviéndose a una rapidez v_o a lo largo del eje +x, hacia el origen de los ejes coordenados. Golpea de rozón una pelota de masa m/3, que se encuentra en reposo en el origen de ejes coordenados. Después del choque, la pelota que llega, se mueve hacia la izquierda con rapidez $v_o/2$, formando un ángulo en dirección 37º sobre el eje –x. Encuentre la rapidez y la dirección del movimiento del movimiento de la otra pelota. Hay algo extraño en esta colisión, ¿qué es?

SOLUCIÓN

La figura 408 muestra de manera detallada la situación presentada en el enunciado del problema.

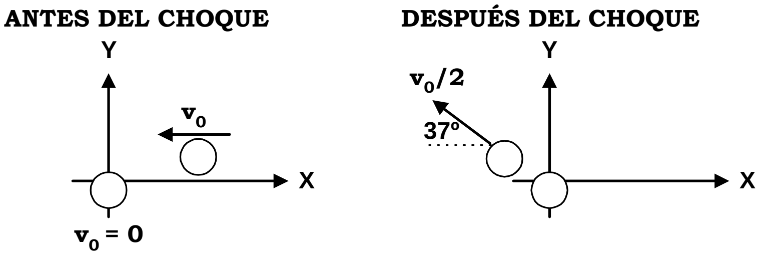

Figura 201

Utilizamos la conservación de la cantidad de movimiento lineal en cada uno de los dos ejes de referencia.

Eje x

$- mv_o = m[-(v_o/2)\cos 37^o] + (m/3)Vx$

$- v_o + 0.4v_o = Vx/3$

$- 1.8v_o = Vx$

Eje y

$0 = m[(v_o/2)\text{sen}37^o] + (m/3)Vy$

$- 0.3v_o = Vy/3$

$- 0.9v_o = Vy$

De acuerdo a los resultados obtenidos, es visible que la partícula que inicialmente estaba en reposo se mueve en el tercer cuadrante, en la figura 202 se muestra esta situación

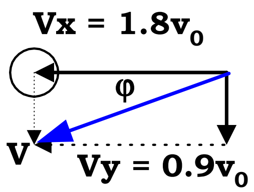

Figura 202

Utilizando las funciones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras se puede concluir que la velocidad **V** es igual a

$$\mathbf{V} = 2.01v_o \text{ a } 207^o$$

Lo extraño que sucede es que Kantes<Kdespués (la energía cinética antes de la colisión es mayor que la energía cinética después de la colisión), situación que no se debe cumplir debido a que en un choque la energía se pierde en el impacto, en la restitución del movimiento, se pierde en forma de sonido, en forma de calor, en forma de luz (en algunos casos).

33. La masa del disco M mostrado en la figura 203 es 20% mayor que la masa del disco m. Antes de chocar los discos se acercan entre sí con momentos lineales iguales y opuestos, y el disco m tiene una rapidez inicial de 10 m/s, encuentre la rapidez de los discos después del choque si la mitad de la energía cinética se pierde durante la colisión.

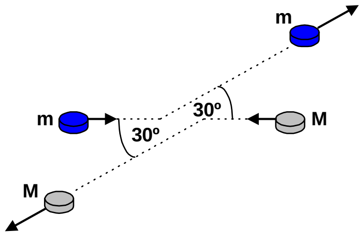

Figura 203

SOLUCIÓN

Utilizamos la conservación de la cantidad de movimiento lineal, tanto para el eje x como para el eje y.

Eje x

$mv_{mANTES} + M(-v_{MANTES}) = mv_{mDESPUÉS}\cos 30^o + Mv_{MDESPUÉS}\cos 30^o$

pero por condición del problema

$$mv_{mANTES} = Mv_{MANTES}$$
$$m(10) = Mv_{MANTES}$$

y M = m + 20%m = 1.2m, por lo tanto

$$10m = 1.2mv_{MANTES}$$
$$v_{MANTES} = 25/3 \text{ m/s}$$

Volviendo a la ecuación anterior tendríamos

$m(10) - 1.2m(25/3) = mv_{mDESPUÉS}\cos 30^o + (1.2m)(-v_{MDESPUÉS})\cos 30^o$

$$1.2v_{MDESPUÉS} = v_{mDESPUÉS} \quad (1)$$

En el eje y ocurrirá lo mismo que en el eje de las x, esto es, se llegará a concluir que $1.2v_{MDESPUÉS} = v_{mDESPUÉS}$.

Además existe el dato que indica que se pierde la mitad de la energía cinética en la colisión, o sea,

$$K_{FINAL} = \tfrac{1}{2} K_{INICIAL}$$
$$\frac{1}{2}mv^2_{mDESPUÉS} + \frac{1}{2}Mv^2_{MDESPUÉS} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mv^2_{mANTES} + \frac{1}{2}Mv^2_{MANTES}\right)$$
$$mv^2_{mDESPUÉS} + 1.2mv^2_{MDESPUÉS} = \frac{1}{2}\left(m(10)^2 + 1.2m\left(\frac{25}{3}\right)^2\right)$$
$$v^2_{mDESPUÉS} + 1.2v^2_{MDESPUÉS} = \frac{1}{2}\left(100 + \frac{250}{3}\right)$$
$$3v^2_{mDESPUÉS} + 3.6v^2_{MDESPUÉS} = 275 \qquad (2)$$

Reemplazamos la ecuación (1) en la ecuación (2)

$$275 = 3(1.2v_{MDESPUÉS})^2 + 3.6v^2_{MDESPUÉS}$$
$$275 = 7.92v^2_{MDESPUÉS}$$
$$v_{MDESPUÉS} = 5.89 \text{ m/s}$$

Con este resultado encontramos la velocidad de la otra partícula, reemplazando este último resultado en la ecuación (1)

$$1.2(5.89) = v_{mDESPUÉS}$$
$$v_{mDESPUÉS} = 7.07 \text{ m/s}$$

34. Dos automóviles de igual masa se acercan a una intersección. Un vehículo viaja a 13.0 m/s hacia el este y el otro viaja hacia el norte con rapidez v_{2i}. Ningún conductor ve al otro. Los vehículos chocan en la intersección y quedan unidos, dejando marcas de deslizamiento paralelas a un ángulo de 55º al norte del este. El límite de rapidez para ambos caminos es 35 mi/h (15.64 m/s) y el conductor del vehículo que se mueve hacia el norte proclama que él estaba en el límite de rapidez cuando ocurrió el choque. ¿Está diciendo la verdad? Respuesta: No su rapidez fue de 41.5 mi/h (18.55 m/s).

SOLUCIÓN

La figura 411 muestra una representación de lo que está ocurriendo, antes y después del choque de los dos vehículos.

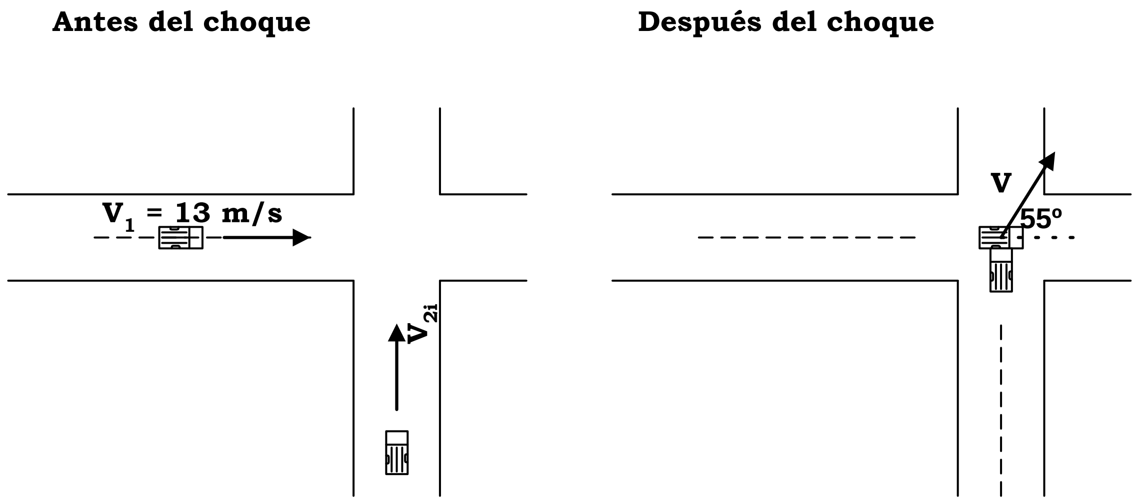

Figura 204

Con los datos presentados en la figura 411, hacemos el análisis mediante la conservación de la cantidad de movimiento lineal, tanto en el eje x como en el eje y

Eje x

$mv_1 = (m + m)(v\cos 55^o)$

$13 = 2(v\cos 55^o)$

$v = \dfrac{13}{2\cos 55^o} = 11.33$ m/s

Eje y

$mV_{2i} = (m + m)(v\,\mathrm{sen}\,55^o)$

$V_{2i} = 2\left(\dfrac{13}{2\cos 55^o}\right)\mathrm{sen}\,55^o$

$V_{2i} = 18.56$ m/s

El conductor miente porque había rebasado el límite de velocidad.

35. En el choque central oblicuo indicado en la figura 205, el coeficiente de restitución es 0.6. Los discos deslizan sobre una superficie horizontal lisa, calcular la velocidad final de cada disco después del choque.

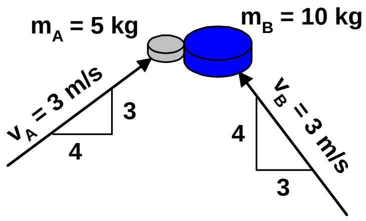

Figura 205

SOLUCIÓN

Realizamos un gráfico en el que se muestra la situación de las dos partículas, antes y después de la colisión, vea la figura 206.

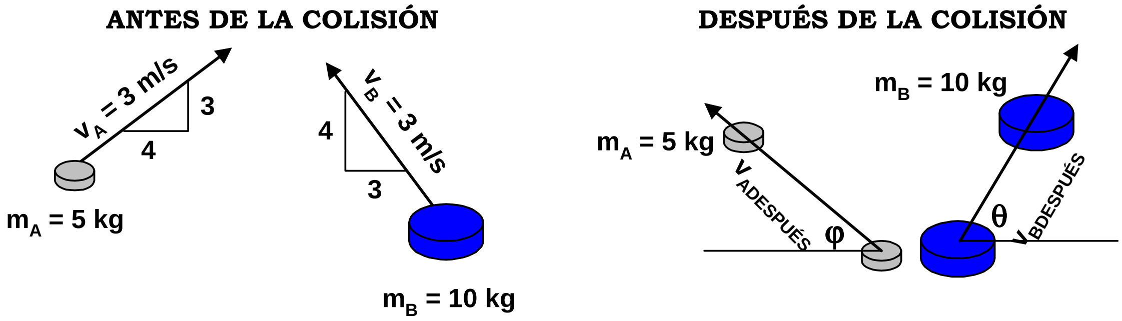

Figura 206

Eje x

$m_A v_A \cos\alpha + m_B(-v_B \cos\beta) = m_A(-v_{ADX}) + m_B(v_{BDX})$

$5(3)(0.8) - 10(3)(0.6) = -5v_{ADX} + 10\,v_{BDX}$

$-1.2 = -v_{ADX} + 2v_{BDX}$ (1)

Eje y

$m_A v_A \operatorname{sen}\alpha + m_B v_B \operatorname{sen}\beta) = m_A v_{ADY} + m_B v_{BDY}$

$5(3)(0.6) + 10(3)(0.8) = 5v_{ADY} + 10v_{BDY}$

$6.6 = v_{ADY} + 2v_{BDY}$ (2)

El ángulo α lo obtenemos por medio de la función tangente, o sea tan α = ¾, y el ángulo β de manera similar, tanβ = 4/3

Utilizamos ahora la definición de coeficiente de restitución. Recuerde que el coeficiente de restitución es el cociente entre las velocidades relativas después de la colisión, entre las velocidades relativas antes de la colisión, sólo que si se toma en el numerador la velocidad relativa 2 con respecto a 1, en el denominador se toma la velocidad relativa 1 con respecto a 2. Además, recuerde que el coeficiente de restitución actúa solamente a lo largo de la línea del impacto central, en este caso la línea de impacto central es el eje de las x.

$$e = \frac{\overrightarrow{v_{ADX}} - \overrightarrow{v_{BDX}}}{\overrightarrow{v_{BAX}} - \overrightarrow{v_{AAX}}}$$

$$0.6 = \frac{-v_{ADX} - v_{BDX}}{v_{BAX} - v_{AAX}}$$

$$0.6 = \frac{-v_{ADX} - v_{BDX}}{-3\cos\beta - 3\cos\alpha}$$

$$0.6 = \frac{-v_{ADX} - v_{BDX}}{-3(0.6) - 3(0.8)}$$

$$2.52 = v_{ADX} + v_{BDX} \qquad (3)$$

Donde V_{AA}, V_{BA} representan a las velocidades de A y B **A**ntes de la colisión, y V_{AD}, V_{BD} representan las velocidades de A y B **D**espués de la colisión.

Podemos calcular la diferencia de las velocidades antes de la colisión, pero mucho cuidado, recuerde que las cantidades con las que estamos trabajando son vectoriales, observe la figura 207.
Sumamos las ecuaciones (1) y (3)

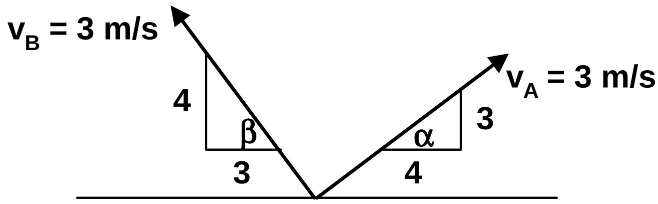

Figura 207

$1.2 = v_{ADX} - 2v_{BDX}$ (1)
$-2.52 = -v_{ADX} - v_{BDX}$ (3)

$-1.32 = -3v_{BDX}$
$v_{BDX} = 0.44\ m/s \Rightarrow$ $v_{BD}\cos\theta = 0.44\ m/s$
$v_{ADX} = 2.08\ m/s \Rightarrow$ $v_{AD}\cos\varphi = 2.08\ m/s$

En el eje de las y el coeficiente de restitución, e, es cero, porque las fuerzas impulsivas y restitutivas están ubicadas en el eje x.

$$e = \frac{v_{ADY} - v_{BDY}}{v_{BAY} - v_{AAY}}$$
$$0 = \frac{v_{ADY} - v_{BDY}}{v_{BAY} - v_{AAY}}$$
$$0 = v_{ADY} - v_{BDY}$$
$$v_{ADY} = v_{BDY} \qquad (4)$$

Reemplazamos luego la ecuación (4) en la ecuación (2)

$6.6 = v_{BDY} + 2v_{BDY}$
$v_{BDY} = 2.2\ m/s \Rightarrow$ $v_{BD}\,sen\theta = 2.2\ m/s$
$v_{ADY} = 2.2\ m/s \Rightarrow$ $v_{AD}\,sen\varphi = 2.2\ m/s$

Estos resultados parciales para las velocidades de A y de B después de la colisión los dividimos para encontrar el ángulo.

$$\frac{v_{BD}sen\theta}{v_{BD}\cos\theta} = \frac{2.2}{0.44} \qquad \frac{v_{AD}sen\varphi}{v_{AD}\cos\varphi} = \frac{2.2}{2.08}$$
$$Tan\theta = \frac{2.2}{0.44} \qquad Tan\varphi = \frac{2.2}{2.08}$$
$$\theta = 78.7^o \qquad \varphi = 46.6^o$$

Por lo tanto la velocidad de la partícula A, después de la colisión es

$v_{BD}\ sen78.7^o = 2.2\ m/s$
$\mathbf{v_{BD}} = 2.24\ m/s$ en una dirección de 78.7^o

$v_{AD}\ sen46.6^o = 2.2\ m/s$
$v_{AD} = 3.03\ m/s$ en una dirección de 136.6^o

36. Encuentre las coordenadas X – Y del centro de masa de los cuerpos planos mostrados en la figura 208. (Examen parcial de Física I, I Término 2003 - 2004)

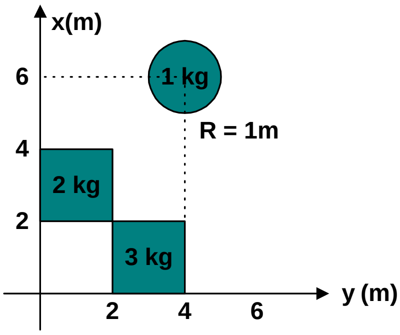

Figura 208

SOLUCIÓN
El centro de masa de una circunferencia es el centro de la misma, mientras que el centro de masa de un cuadrado (o rectángulo) es el punto donde se intersecan las dos diagonales. Por lo tanto el centro de masa del sistema está dado por

$$X_{CM} = \frac{m_1 x_{CM1} + m_2 x_{CM2} + m_3 x_{CM3}}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad Y_{CM} = \frac{m_1 y_{CM1} + m_2 y_{CM2} + m_3 y_{CM3}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$X_{CM} = \frac{(2kg)(3m) + (3kg)(1m) + (1kg)(6m)}{2kg + 3kg + 1kg} \qquad Y_{CM} = \frac{(2kg)(1m) + (3kg)(3m) + (1kg)(4m)}{2kg + 3kg + 1kg}$$

$$X_{CM} = 2.5m \qquad Y_{CM} = 2.5m$$

$$r_{CM} = (2.5;2.5)m$$

37. Calcule la posición del centro de masa de los objetos que se muestran en la figura 209. Tome como origen para el objeto I la esquina superior izquierda, y para el objeto II, la esquina inferior izquierda.

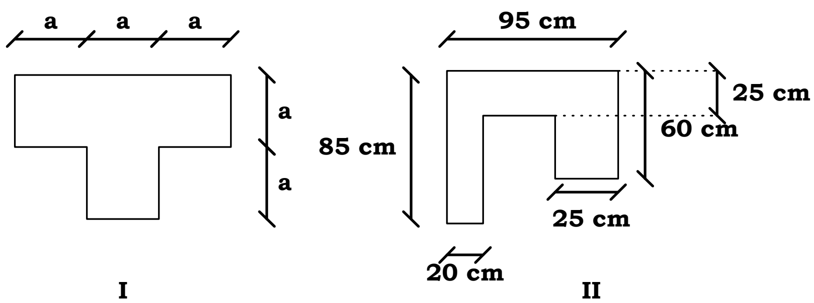

Figura 209

SOLUCIÓN
Al igual que en el anterior ejercicio, utilizamos la ecuación para determinar el centro de masa en el eje x y en el eje y.

OBJETO I
Desconocemos la masa del cuerpo, por lo que dividiremos al objeto en cuatro partes iguales. Consideramos que el objeto está elaborado del mismo material, por tanto las masas serán iguales para cada parte.

Las ecuaciones presentadas en la parte inferior se fundamentan en la figura 417.

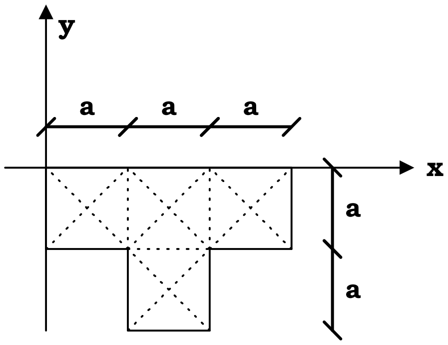

Figura 210

$$X_{CM} = \frac{mx_{CM1} + mx_{CM2} + mx_{CM3}}{m+m+m} \qquad Y_{CM} = \frac{my_{CM1} + my_{CM2} + my_{CM3}}{m+m+m}$$

$$X_{CM} = \frac{(m)\left(\frac{a}{2}\right) + (m)\left(\frac{3a}{2}\right) + (m)\left(\frac{5a}{2}\right) + (m)\left(\frac{3a}{2}\right)}{4m} \qquad Y_{CM} = \frac{(m)\left(-\frac{a}{2}\right) + (m)\left(-\frac{a}{2}\right) + (m)\left(-\frac{a}{2}\right) + (m)\left(-\frac{3a}{2}\right)}{4m}$$

$$X_{CM} = \frac{3}{2}a \qquad Y_{CM} = -\frac{3}{4}a$$

$$r_{CM} = \left(\frac{3}{2}a; -\frac{3}{4}a\right)$$

OBJETO II

Para esta situación no tenemos las posibles divisiones simétricas, por lo tanto buscaremos otra forma de encontrar el centro de masa. Debido a que el objeto está elaborado del mismo material, la densidad del material será la misma[1]. Utilizando el detalle anterior, podemos dividir al material en partes representativas que sean de fácil acceso para calcular el centro de masa, en este caso dividiremos el objeto en tres rectángulos, observe la figura 418.

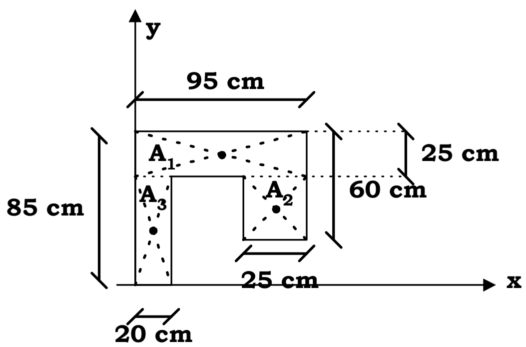

Figura 211

$$X_{CM} = \frac{\rho V_1 x_{CM1} + \rho V_2 x_{CM2} + \rho V_3 x_{CM3}}{\rho V_1 + \rho V_2 + \rho V_3} \qquad Y_{CM} = \frac{\rho V_1 y_{CM1} + \rho V_2 y_{CM2} + \rho V_3 y_{CM3}}{\rho V_1 + \rho V_2 + \rho V_3}$$

$$X_{CM} = \frac{\rho A_1 h x_{CM1} + \rho A_2 h x_{CM2} + \rho A_3 h x_{CM3}}{\rho A_1 h_1 + \rho A_2 h_2 + \rho A_3 h_3} \qquad Y_{CM} = \frac{\rho A_1 h y_{CM1} + \rho A_2 h y_{CM2} + \rho A_3 h y_{CM3}}{\rho A_1 h_1 + \rho A_2 h_2 + \rho A_3 h_3}$$

$$X_{CM} = \frac{\rho h\left(A_1 x_{CM1} + A_2 x_{CM2} + A_3 x_{CM3}\right)}{\rho h\left(A_1 + A_2 + A_3\right)} \qquad Y_{CM} = \frac{\rho h\left(A_1 y_{CM1} + A_2 y_{CM2} + A_3 y_{CM3}\right)}{\rho h\left(A_1 + A_2 + A_3\right)}$$

$$X_{CM} = \frac{A_1 x_{CM1} + A_2 x_{CM2} + A_3 x_{CM3}}{A_1 + A_2 + A_3} \qquad Y_{CM} = \frac{A_1 y_{CM1} + A_2 y_{CM2} + A_3 y_{CM3}}{A_1 + A_2 + A_3}$$

[1] La densidad de un material es la razón de la cantidad de materia que ocupa un cierto espacio, matemáticamente está dada por $\rho = \frac{m}{V}$, donde ρ es la densidad del material, m la masa y V el volumen.

$$X_{CM} = \frac{(25cm)(95cm)(47.5cm) + (25cm)(35cm)(82.5cm) + (20cm)(60cm)(10cm)}{(25cm)(95cm) + (25cm)(35cm) + (20cm)(60cm)}$$
$$X_{CM} = 44.27cm$$

$$Y_{CM} = \frac{(25cm)(95cm)(72.5cm) + (25cm)(35cm)(42.5cm) + (20cm)(60cm)(30cm)}{(25cm)(95cm) + (25cm)(35cm) + (20cm)(60cm)}$$
$$Y_{CM} = 55.14cm$$

r_{CM} = (44.27;55.14)cm

38. Un proyectil es lanzado con una velocidad inicial de 10 m/s formando un ángulo de 45° con la horizontal. Inesperadamente en su recorrido se fragmenta en dos partes iguales. Si una de ellas cae al piso a una distancia igual a la mitad del alcance máximo que debía tener el proyectil completo. Encontrar las coordenadas de la posición del segundo fragmento del proyectil.

SOLUCIÓN

La figura 419 muestra la trayectoria seguida por el proyectil.

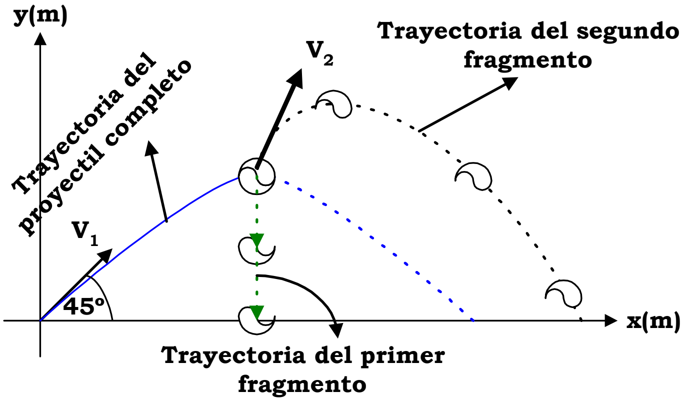

Figura 212

La fuerza que existe sobre el centro de masa, antes y después de la explosión es el peso, debido a que las fuerzas impulsivas internas (provocadas por la expulsión) se cancelan mutuamente, por acción y reacción. Si utilizamos la segunda ley de Newton obtendremos un resultado interesante para el centro de masa

$$\sum F = ma_{CM}$$
$$mg = ma_{CM}$$
$$a_{CM} = g$$

Del análisis hecho anteriormente se concluye que sobre el centro de masa actúa una sola aceleración que es la de la gravedad, por lo tanto el centro de masa se mueve en una trayectoria parabólica, de tal manera que podemos utilizar las ecuaciones del movimiento parabólico para analizar al centro de masa.

Calcularemos primero la ubicación del centro de masa cuando esta llega nuevamente al piso, utilizando la ecuación para calcular el alcance horizontal.

$$X_{CM} = \frac{V_0^2 sen2\theta}{g}$$
$$X_{CM} = \frac{(10m/s)^2 sen[2(45°)]}{9.8m/s^2}$$
$$X_{CM} = 10.2m$$

Conociendo el lugar en el que se ubicará el centro de masa del proyectil, calcularemos la ubicación del segundo fragmento.

$$X_{CM} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$
$$10.2m = \frac{m\left(\frac{10.2m}{2}\right) + m x_2}{2m}$$
$$10.2(2) = 5.1 + x_2$$

$$x_2 = 15.3 \text{ m}$$

39. Un niño de 40 kg está parado en un extremo de una lancha de 70 kg y 4 m de longitud, como se muestra en la figura 213. La lancha está al inicio a 3m del muelle. El niño observa una tortuga sobre una roca, en el otro extremo de la lancha y comienza a caminar hacia ella para atraparla.
    a. ¿En dónde estará el niño, con respecto al muelle, cuando alcance el otro lado del muelle? 5.5 m del muelle
    b) ¿Podrá atrapar a la tortuga? Suponga que se puede estirar 1 m fuera del extremo de la lancha. No la atrapa

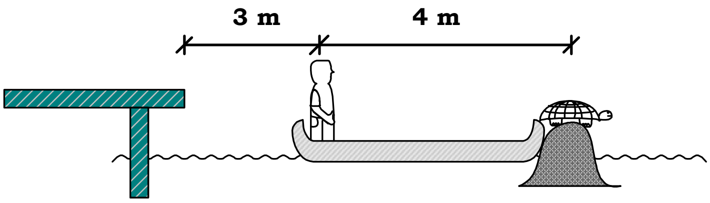

Figura 213

SOLUCIÓN

a) Calculamos el centro de masa del sistema niño bote, debido a que este no cambia con respecto al movimiento, esto es, mantiene su condición de movimiento inicial, el reposo.

$$X_{CM} = \frac{x_M m_M + x_L m_L}{m_M + m_L}$$
$$X_{CM} = \frac{(3m)(40kg) + (5m)(70kg)}{40kg + 70kg}$$
$$X_{CM} = 4.27m$$

Este valor está medido a partir de la orilla del muelle.

Cuando el niño comienza a caminar, la lancha comienza a deslizarse en dirección opuesta a la del movimiento del niño, por el efecto de la fricción de los zapatos del niño sobre la superficie de la lancha, y debido a que el agua presenta poca resistencia al movimiento, se provoca el movimiento de la lancha.

El movimiento del sistema de partículas se produce por la acción de fuerzas impulsivas internas, por lo tanto se conserva la cantidad de movimiento lineal del sistema.

$$(m_M v_M + m_L v_L)_{ANTES} = (m_M v_M + m_L v_L)_{DESPUÉS}$$

Si multiplicamos la ecuación anterior por el tiempo t, que se demora el sistema en realizar el movimiento tendremos

$$(m_M v_M + m_L v_L)_{ANTES}(t) = (m_M v_M + m_L v_L)_{DESPUÉS}(t)$$
$$(m_M v_M t + m_L v_L t)_{ANTES} = (m_M v_M t + m_L v_L t)_{DESPUÉS}$$

Antes de que el sistema comience a moverse, ni el muchacho ni la lancha tienen velocidad, por tanto la parte izquierda de la ecuación es cero. Además, el producto de la velocidad por el tiempo es la posición del centro de masa del sistema después del movimiento, por tanto se concluye que el centro de masa tiene velocidad cero, o sea, el centro de masa permanece inmóvil. Conociendo esto podemos ahora verificar en donde se encuentra el muchacho con respecto a la orilla del muelle.

En la figura 214 se muestra que el centro de masa no se mueve, y que este se encuentra a 1.27 m del muchacho.

Por lo tanto el niño se encontrará a 5.54 m de la orilla.

b) Si se puede estirar un metro, el niño estará a 6.54 m de la orilla y no alcanzará a la tortuga.

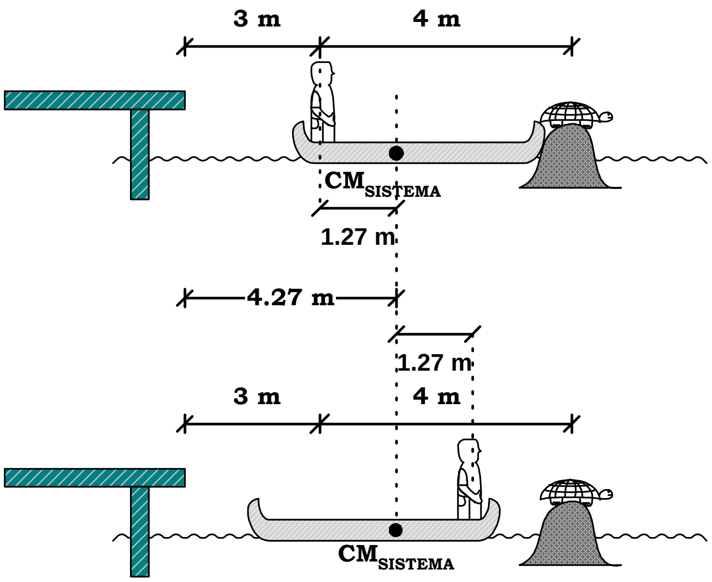

Figura 214

40. Un muchacho A pesa 80 kg y una chica B de 65 kg permanecen de pie sin moverse en los extremos de un trineo que pesa 20 kg, vea la figura 215. Si intercambian posiciones, A pasa a B y B pasa a A, determine la posición final del trineo después del movimiento. Desprecie la fricción.

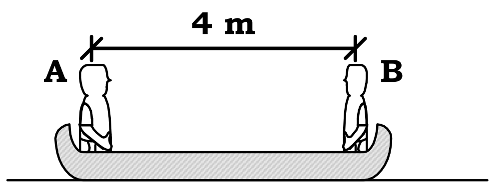

Figura 215

SOLUCIÓN

El procedimiento a seguir es similar al que ya seguimos anteriormente, esto es calculamos primero la ubicación del centro de masa del sistema, y luego comparamos las posiciones de cada partícula, con respecto al centro de masa que permanece inmóvil posterior al movimiento del muchacho y la chica.

Tomaremos como origen la posición de la partícula A.

$$X_{CM} = \frac{x_M m_M + x_C m_C + x_T m_T}{m_M + m_L}$$

$$X_{CM} = \frac{0(80kg) + (4m)(65kg) + (2m)(20kg)}{80kg + 65kg + 20kg}$$

$$X_{CM} = 1.818m$$

En la figura 423 se muestra la ubicación del centro de masa del sistema y de la chica, el trineo y el muchacho.

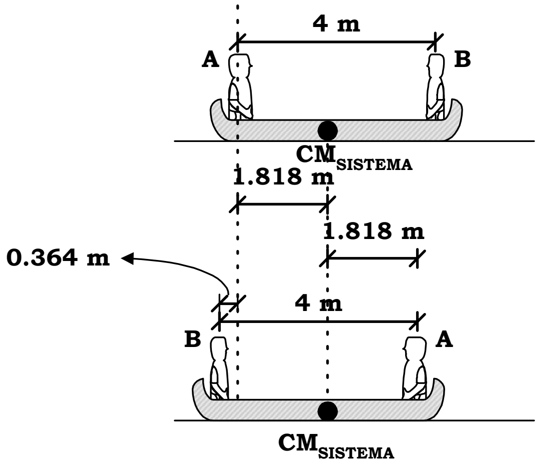

Figura 216

Se puede ver claramente que la distancia que se ha movido el trineo es 0.364 m.