Capítulo 2

2. MARCO TEORICO

Una serie de tiempo es un conjunto de observaciones tomadas secuencialmente en el tiempo. Muchos conjuntos de datos suelen aparecer como series de tiempo: una secuencia mensual de la cantidad de buenos envíos desde una fabrica, una serie semanal de accidentes de tránsito, observaciones realizadas cada hora en un proceso químico, etc., son ejemplos de series de tiempos. Los ejemplos de series de tiempos son abundantes en campos tales como: económico, de negocios, de ingeniería, ciencias naturales y ciencias sociales. Una característica implícita de una serie de tiempo es que, típicamente, las observaciones adyacentes son dependientes. La naturaleza de esta dependencia entre las observaciones de una serie de tiempo es de considerable interés práctico. El análisis de series de tiempo esta relacionado con las técnicas para el análisis de esta dependencia. Para lograr esto se requiere el desarrollo de modelos dinámicos y estocásticos para los datos de una

serie de tiempo y el uso de tales modelos en importantes áreas de aplicación.

El uso de estas series de tiempo y de modelos dinámicos se puede ilustrar en cuatro áreas importantes de aplicación.

1. La predicción de valores futuros de una serie de tiempo desde valores actuales y pasados.
2. La determinación de la función de transferencia de un sistema sujeto a inercia, la determinación de un modelo dinámico de entrada – salida, que pueda mostrar el efecto en la salida de un sistema de cualquier serie de entradas dadas.
3. El uso de indicadores de variables de entrada en modelos de función de transferencia para representar y valorar los efectos de la intervención de eventos inusuales en el comportamiento de una serie de tiempo.
4. El diseño de planes de control simple por medias de cual, las desviaciones potenciales de la salida de un sistema desde a un valor deseado, tan lejos como sea posible, es compensado por el ajuste de una serie de valores de entrada.

2.1 MODELOS ESTOCÁSTICOS Y MATEMATICAMENTE DINÁMICOS- DETERMINISTICOS

La idea de usar un modelo matemático para describir el comportamiento de un fenómeno físico está bien establecida. En particular, es posible derivar un modelo basado en leyes físicas, el cual nos permita calcular el valor de alguna cantidad dependiente del tiempo casi exactamente en cualquier instante de tiempo. Así, nosotros podemos calcular la trayectoria de un misil lanzando en una dirección y velocidad conocida. Si los cálculos fueran exactos, entonces el modelo serie enteramente determinístico.

Probablemente los fenómenos no son totalmente determinísticos, como sea, porque factores desconocidos pueden ocurrir, tales como una variación en la velocidad del viento que puede cambiar significativamente el curso del misil. En muchos problemas nosotros tenemos que considerar un fenómeno dependiente del tiempo, como por ejemplo, las ventas mensuales de la nueva primavera, en la cual hay muchos factores desconocidos y para los cuales no se puede escribir un modelo que permita calcular exactamente el comportamiento futuro de este fenómeno. Sin embargo es posible derivar un modelo que pueda ser usado para calcular la probabilidad de un futuro valor entre dos limites específicos. Tales modelos son llamados modelos de probabilidad o modelos estocásticos. Los

modelos para series de tiempos que son necesarios, por ejemplo para alcanzar una predicción óptima y control, son en efecto modelos estocásticos. Luego de esto se hace necesario distinguir entre el modelo de probabilidad o el proceso estocástico, como algunas veces es llamado, y la serie de tiempo observada. Muy a menudo se omite la palabra “estocástico” y solo se dice o se refiere al “proceso”.

2.1.1 Modelos estocásticos estacionarios y no estacionarios para predicción y control.

Una importante clase de modelos estocásticos para describir series de tiempo, la cual ha recibido gran atención, comprenden lo que llamamos modelos estacionarios, los cuales asumen que el proceso permanece en equilibrio con respecto a un nivel medio constante. Como sea, la predicción ha sido de particular importancia en la industria, negocios y en la economía, donde muchas series son a menudo mucho mejor representado como no estacionarias y, en particular, no tienen un nivel natural constante medio sobre el tiempo. Esto no debe sorprendernos y es por eso que muchos métodos de predicción económica que usan los promedios móviles ponderados exponencialmente pueden ser mostrados para ser apropiados para un tipo particular de proceso no estacionario. De todos modos tales métodos están muy restringidos para la eficiencia

deseada con todas las series de tiempo, el hecho es que ellos nos dan a clase correcta de función de predicción que a su vez nos da un indicio para la clase de modelo no estacionario que puede ser usado en estos problemas.

El modelo escolástico para el cual la predicción de promedios móviles ponderados exponencialmente permiten un mínimo error cuadrado medio es un miembro de una clase de procesos no estacionarios llamados proceso de promedios móviles autorregresivos integrados (ARIMA, por sus siglas en inglés). Esta es la más amplia clase de procesos que proveen un rango de modelos, estacionarios y no estacionarios, que representan adecuadamente a muchas de las series de tiempo en la práctica.

Algunos operadores simples. Se hace por lo tanto necesario el uso extensivo de un operador de cambio de retroceso B, el cual se define por $Bz_t = z_{t-1}$, entonces $B^m z_t = z_{t-m}$. La operación inversa es desempeñada por el operador de cambio de adelanto $F = B^{-1}$ dado por $Fz_t = z_{t+1}$; entonces $F^m z_t = z_{t+m}$. Otro operador importante es el operador de diferenciación de retroceso ∇, el cual puede ser escrito en términos de B, se tiene:

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1} = (1-B)z_t$$

Modelo de filtro lineal. Los modelos estocásticos que se suelen usar están basados en la idea de que una serie de tiempo en la cual sus valores sucesivos son altamente dependientes pueden frecuentemente ser considerado visto como la generación de una serie de "shocks" independientes a_t. Estos choques son aleatoriamente dibujados desde una distribución ajustada, usualmente es una normal con media cero y varianza σ^2. Una secuencia tal de variables aleatorias a_t, a_{t-1}, a_{t-2},... es llamada proceso de ruido blanco.

El proceso de ruido blanco a_t se supone que es transformado al proceso z_t por medio de lo que se conoce como filtro lineal. La operación de filtrado lineal simplemente toma a suma ponderada de choques aleatorios anteriores a_t, tal que

$$z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \ldots$$

$$= \mu + \psi(B) a_t$$

En general, μ es un parámetro que determina el “nivel” del proceso, y

$$\psi(B)= 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + ...$$

es el operador lineal que transforma a_t a z_t y es llamado función de transferencia del filtro.

La secuencia $\psi_1, \psi_2, ...$ formada por las ponderaciones tal vez, teóricamente, es finita o infinita. Si la secuencia es finita o infinita y absolutamente sumable en el sentido que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left| y_j \right| < \infty$$

El filtro se dice que es estable y el proceso z_t es estacionario. El parámetro μ es entonces la media respecto a la cual el proceso varía. De otra forma z_t es no estacionario y μ no tiene un significado específico excepto como un punto de referencia para el nivel del proceso.

2.1.1.1 Modelos Autorregresivos.

Un modelo estocástico que puede ser extremadamente exitoso en la representación de ciertas series de ocurrencia práctica es el modelo autorregresivo. En este modelo, el valor actual del proceso es expresado como una combinación lineal finita de los valores anteriores del proceso y un choque a_t. Se denota los valores del proceso en tiempos igualmente espaciados t, t-1, t-2, .. por z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, ... Además se denota $>_t$, $>_{t-1}$, $>_{t-2}$, ... como las desviaciones desde μ, por ejemplo , $>_t = z_t - \mu$. Entonces

$$>_t = \phi_1 >_{t-1} + \phi_2 >_{t-2} + \ldots + \phi_p >_{p-1} + a_t$$

es llamado un proceso autorregresivo de orden p (AR). La razón para este nombre es que un modelo lineal

$$> = \phi_1 \xi_1 + \phi_2 \xi_2 + \ldots + \phi_p \xi_p + a$$

que relaciona una variable dependiente z con un conjunto de variables independientes x_1, x_2,...x_p, más un término de error a, es a menudo referido como un modelo de regresión y se dice que z es regresado en términos de x_1, x_2, ... x_p. En el modelo anterior

la variable z es regresado en sus propios valores anteriores, esto hace que el modelo sea autorregresivo. Si nosotros definimos un operador de auto regresion de orden p dado por:

$$\phi(B)= 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p$$

entonces el modelo autorregresivo puede ser escrito como:

$$\phi(B)>_t = a_t$$

El modelo contiene p+2 parámetros desconocidos $\mu, \phi_1, \phi_2, ... \phi_p, \sigma^2_a$, lo cual en la práctica tiene que ser estimados de los datos. El parámetro adicional σ^2_a es la varianza del proceso de ruido blanco a_t.

Se puede eliminar $>_{t-1}$ del lado derecho del modelo, entonces:

$$>_{t-1} = \phi_1 >_{t-2} + \phi_2 >_{t-3} + ... + \phi_p >_{t-p-1} + a_{t-1}$$

Similarmente, podemos sustituir a z_{t-2} y así sucesivamente, para permitir llegar eventualmente a una serie en términos de los a's. Simbólicamente se tiene que

$$\phi(B)z_t = a_t$$

que es equivalente a

$$z_t = \psi(B)\, a_t$$

con

$$\psi(B)=\phi^{-1}(B)$$

Los procesos autorregresivos pueden ser estacionarios o no estacionarios. Para que el proceso sea estacionario, los $\phi's$ deben elegirse de tal forma que las ponderaciones $\psi_1, \psi_2, \ldots$ en $\psi(B) = \phi^{-1}(B)$ formen una serie convergente. El requerimiento para la estacionalidad es que el operador autorregresivo, $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p$, considerado como un polinomio en B de grado p, debe tener todas las raíces de $\phi(B)=0$ mayores

que 1 en valor absoluto, esto es que todas las raíces deben caer fuera del círculo unitario.

2.1.1.2 Modelos de Promedios Móviles.

El modelo autorregresivo mostrado anteriormente expresa la desviación $>_t$ como una suma ponderada finita de p desviaciones previas $>_{t-1,} >_{t-2,} \ldots >_{t-p}$ del proceso, más un choque aleatorio a_t.

Otra clase de modelo, de gran importancia práctica de series de tiempo observadas, es el proceso de promedios móviles. Aquí se hace que $>_t$ sea linealmente dependiente sobre un número finito q de anteriores choques a's. Entonces

$$>_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

es llamado proceso de promedios móviles de orden q (MA por sus siglas en inglés). El nombre promedio móvil es ... porque las ponderaciones $1 - \theta_{1,} - \theta_{2,} - \ldots - \theta_{q,}$ las cuales son la multiplicidad de los a's no necesariamente unitaria, no necesitan ser positivas.

Si se define un operador de promedio móvil de orden q por

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 - \theta_2 - \ldots - \theta_q$$

entonces el modelo de promedios móviles puede ser escrito como:

$$>_t = \theta(B)\, a_t$$

Este contiene q+2 parámetros desconocidos μ, $\theta_1, \ldots \theta_p$, σ^2_a, lo cual en la práctica tiene que ser estimado de los datos.

2.1.1.3 Modelo mixto de promedio móvil autorregresivo.

Para alcanzar la más grande flexibilidad al ajustar las series de tiempo actuales, es algunas veces ventajoso incluir en el modelo los términos autorregresivos y de promedio móviles. Esto lleva al modelo mixto autorregresivo de promedios móviles

$$>_t = \phi_1 >_{t-1} + \phi_2 >_{t-2} + \ldots + \phi_p >_{p-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

o también:

$$\phi(B)>_t = \theta(B)\, a_t$$

el cual emplea p+q+2 parámetros desconocidos $\mu; \phi_1, \phi_2, \ldots \phi_p; \theta_1, \ldots \theta_p; \sigma^2_a$ que son estimados de los datos. Este modelo también puede ser escrito como $\phi^{-1} = (B)\theta\ (B)\ a_t$. En la práctica, frecuentemente verdad que la representación adecuada de la ocurrencia de la estacionalidad de las series de tiempo puede ser obtenidas con modelos autorregresivos, de promedios móviles, o mixtos, en donde p y q no son mayores que 2 y a menudo son menores que 2.

2.1.2 Modelos no estacionarios.

Muchas series actualmente encontradas en la industria o negocios (stock de precios) exhiben unan comportamiento no estacionario y en particular no varían alrededor de una media dada. Tales series sin embargo exhiben comportamiento homogéneo de una cierta clase. En particular, como siempre el nivel general alrededor del cual las fluctuaciones están ocurriendo tal vez sea diferente en diferente tiempo. Tal comportamiento a menudo puede ser representado por un operador generalizado autorregresivo $\varphi(B)$, en

el cual uno o más de los ceros del polinomio $\varphi(B)$ caen dentro del círculo unitario. En particular si hay d raíces unitarias , el operador $\varphi(B)$ puede ser escrito

$$\varphi(B)= \phi(B)\ (1-B)^d$$

donde $\phi(B)$ es un operador estacionario. Entonces a un modelo que puede representar el comportamiento homogéneo no estacionario es de la forma:

$$\varphi(B)\ z_t= \phi(B)\ (1-B)^d\ z_t= = \theta(B)\ a_t$$

esto es:

$$\varphi(B)\ w_t= \theta(B)\ a_t$$

donde

$$w_t= \nabla^d z_t$$

Entonces un comportamiento homogéneo no estacionario puede ser representado por un modelo en el que se hace la d-esima diferenciación para convertirlo en estacionario. En la práctica, ***d*** es usualmente 0, 1 o a lo mucho 2.

El proceso definido por $\varphi(B)\, w_t = \theta(B)\, a_t$ y por $w_t = \nabla^d z_t$ provee un modelo poderoso para describir series de tiempo estacionarias y no estacionarias y es llamado un proceso autorregresivo integrado de promedios móviles (ARIMA), de orden (p,q,d). El proceso se define por:

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \phi_2 w_{t-2} + \ldots + \phi_p w_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

con $w_t = \nabla^d z_t$.

Entonces el proceso autorregresivo integrado de promedios móviles (ARIMA) puede ser generado por la integración o la “suma” del proceso estacionario ARMA w_t, ***d*** veces.

2.1.3 PROPIEDADES DE AUTOCORRLEACION DE LOS MODELOS ESTACIONARIOS.

2.1.3.1 Series de Tiempo y Procesos Estocásticos

2.1.3.1.1 Series de Tiempo.

Una serie de tiempo es un conjunto de observaciones generadas secuencialmente en el tiempo. Si el conjunto es continuo, las series de tiempo se dice que es continua. Si el conjunto es discreto, se dice que la serie es discreta. Entonces las observaciones de series de tiempo discretas hechas en los tiempos $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_\tau ..., \tau_N$ puede ser denotada por $z(\tau_1), z(\tau_2), ..., z(\tau_\tau), ..., z(\tau_N)$. Cuando tenemos N valores sucesivos, se escribe $z_1, z_2, ..., z_t, ..., z_N$ para denotar observaciones hechas en intervalos de tiempos equidistantes $\tau_0+h, \tau_0+2h, ..., \tau_0+th, ..., \tau_0+Nh$. Para muchos propósitos los valores de τ_0 y h no son importantes, pero sí los tiempos de observaciones necesitan ser definidos exactamente, estos 2 valores pueden ser especificados. Si nosotros adoptamos τ_0 como el origen y h como la unidad de tiempo, podemos referirnos a z_t como la observación en el tiempo t.

Las series de tiempo pueden surgir de dos formas.

1. Por muestreo de series de tiempo continuas: por ejemplo las entradas y salidas continuas desde una fábrica de gas fueron muestreadas a intervalos de 9 segundos.
2. Por acumulación de una variable sobre un período de tiempo: por ejemplo la lluvia, la cual es acumulada sobre un período, tal como puede ser un día o un mes, y la producción desde un proceso por lotes, la cual es acumulada sobre el tiempo del lote

2.1.3.1.2 Series de Tiempo determinísticas y estadísticas.

Si los valores futuros de una serie de tiempo son exactamente determinada por una función matemática función tal como

$$Z_t = \cos(2\pi ft)$$

se dice que la serie de tiempo es determinísticas. Si los valores futuros pueden ser descritos solo en términos de una distribución de probabilidad, se dice que la serie de tiempo es no determinística o simplemente es una serie de tiempo estadística, esto es lo que sé de en la realidad.

Procesos estocásticos. Un fenómeno estadístico que involucra el tiempo de acuerdo con las leyes probabilísticas es llamado proceso estocástico. Las series de tiempo para ser analizadas pueden ser vistas como una realización particular producida por el mecanismo de probabilidad fundamental, del sistema bajo estudio. En otras palabras, *en el análisis de series de tiempo, nos referimos a estas como una realización de un proceso estocástico.*

Procesos Estocásticos Estacionarios. Una clase muy especial de procesos estocásticos, llamados *procesos estocásticos*, está basado en la suposición que el proceso esta en estado particular de equilibrio estadístico. Un proceso se dice que es *estrictamente estacionario* si sus propiedades no son afectadas por un cambio en el tiempo de origen, esto es, si la distribución de probabilidad conjunta asociada con *m* observaciones $z_{t1}, z_{t2}, ..., z_{tm}$, hechas en *cualquier* conjunto de tiempos $t_1, t_2, ..., t_m$, es la misma como la asociada con *m* observaciones $z_{t1+k}, z_{t2+k}, ..., z_{tm+k}$, hecha en los tiempos $t_{1+k}, t_{2+k}, ..., t_{m+k}$. Entonces para que un proceso discreto sea

estrictamente estacionario, la distribución conjunta de cualquier conjunto de observaciones no debe ser afectada por el cambio de todos los tiempos de observación adelante o atrás por cualquier cantidad entera *k*.

Media y varianza de un proceso estacionario. Cuando m=1, la suposición de estacionalidad implica que la distribución de probabilidad $p(z_t)$ es la misma para todos los tiempos *t* y puede ser escrita como p(z). Entonces el proceso tiene una media constante

$$\mu = E[z_t] = \int_{-\infty}^{\infty} zp(z)dz$$

lo cual define el nivel alrededor del cual este fluctúa, y una varianza constante

$$\sigma_z^2 = E[(z_t - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (z-\mu)^2 p(z)dz$$

la cual mide su dispersión alrededor de este nivel de tiempo.

La media de un proceso estocástico puede ser estimada por la media muestral de la serie de tiempos

$$\bar{z} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} z_t$$

y la varianza σ^2_z del proceso estocástico puede ser estimado por la varianza muestral de la serie de tiempos

$$\hat{\sigma}_z^2 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(z_t - \bar{z})^2$$

2.1.3.1.3 Coeficientes de autocovarianza y autocorrelación.

La suposición de estacionalidad también implica que la distribución de probabilidad conjunta $p(z_{t1}, z_{t2})$ es la misma para todos los tiempos t_1, t_2 , los cuales están separados a un intervalo constante. Se sigue que la naturaleza de esta distribución conjunta puede ser inferida dibujando un diagrama de dispersión usando pares de valores (z_t, z_{t+k}) de la series de tiempos, separado por un intervalo constante o *salto k*. La covarianza entre z_t y su valor z_{t+k}, separado por *k* intervalos de tiempo, que están bajo la suposición de estacionalidad deben

ser la misma para todos los *t*, se la llama *autocovarianza* en el salto *k* y se define por:

$$\gamma_k = \text{cov}[z_t, z_{t+k}] = E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)]$$

De manera similar, la *uto correlación* en el salto *k* es:

$$\rho_k = \frac{E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)]}{\sigma_z^2}$$

entonces, para un proceso estacionario, la varianza $\sigma^2_z = \gamma_0$ es la misma en el tiempo t+k que en el tiempo t. Entonces la uto correlación en el salto *k*, es decir, la correlación entre z_t y z_{t+k}, es:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

lo cual implica que $\rho_0 = 1$

2.1.3.3 Matrices Positivas Definidas y de Autocovarianza

La matriz de covarianza asociada con un proceso estacionario para observaciones (z_1, z_2,..., z_n) hechas en *n* tiempos sucesivos es:

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-3} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^2_z = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-3} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix} = \sigma^2_z \mathbf{P_n}$$

Una matriz de covarianza Γ_n de esta forma, la cual es simétrica con elementos constantes en toda la diagonal, será llamada una *matriz de autocovarianza* y la correspondiente matriz de correlación $\mathbf{P_n}$, será llamada una matriz de auto correlación.

Ahora considérese cualquier función lineal de variables aleatorias $z_t, z_{t-1}, \ldots, z_{t-n+1}$:

$$L_t = l_1 z_t + l_2 z_{t-1} + \ldots + l_n z_{t-n+1}$$

Entonces la [illegible] $= \gamma_{|j-i|}$ para un proceso estacionario, la varianza de L_t es:

$$\text{var}[L_t] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} l_i l_j \gamma_{|j-i|}$$

La cual es necesariamente más grande que cero si no todos los *l's* son ceros. Se sigue entonces que tanto la matriz de autocovarianza como la de auto correlación son positivas definidas para cualquier proceso estacionario.

Condiciones que son satisfechas por las autocorrelaciones de un proceso estacionario. La matriz positiva definida de auto correlación implica que su determinante y toda la menor principal son más grandes que cero.

En particular, para n=2

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

tal que

$$1 - \rho_1^2 > 0$$

y se tiene que

$$-1 < \rho_1 < 1$$

Similarmente ocurre para n=3, se tiene que

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & 1 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

lo cual implica que

$$-1 < \rho_1 < 1$$

$$-1 < \rho_2 < 1$$

$$-1 < (\rho_2 - \rho_1^2)/(1 - \rho_1^2) < 1$$

y así sucesivamente para las demás dimensiones.

Funciones lineales de Estacionalidad. Se sigue de la definición de estacionalidad que el proceso L_t, obtenida por el desempeño de la operación lineal $L_t = l_1 z_t + l_2 z_t + ... + l_n z_{t-n+1}$ en un proceso estacionario z_t para n coeficientes ajustados $l_1, ..., l_n$, también es estacionario. En particular, la primera diferencia $\nabla z_t = z_t - z_{t-1}$ y diferencias superiores $\nabla^d z_t$ son estacionarias.

2.1.3.2 Procesos Gausianos.

Si la distribución de probabilidad de las observaciones con cualquier con cualquier conjunto de tiempos es una distribución Normal multivariada, el proceso es llamado un *proceso Normal* o *proceso Gausiano*. Entonces la distribución Normal multivariada es totalmente caracterizada por sus momentos de primero y segundo orden, la existencia de una media μ y una

matriz de autocovarianza Γ_n para todos los n sería suficiente para asegurar la estacionalidad de un proceso Gausiano.

2.1.3.3 Estacionalidad débil.

Hemos visto que para que un proceso sea estrictamente estacionario, la estructura completa de probabilidad debe depender solo de las diferencias de tiempo. Un requerimiento menos restrictivo, llamado estacionalidad débil de orden *f*, es que los momentos de arriba de algún orden *f* depende solo de las diferencias de los tiempos. Por ejemplo, la existencia de una media μ y una matriz de autocovarianza Γ_n es suficiente para asegurar una estacionalidad superior de segundo orden. Entonces la estacionalidad de segundo orden, más la suposición de Normalidad, son suficientes para producir una estacionalidad estricta.

2.1.3.4 Funciones de Autocovarianza y de Autocorrelación

Se ha visto que el coeficiente de autocovarianza γ_k, en el salto *k*, mide la covarianza entre 2 valores z_t y z_{t+k}. El gráfico de γ_k y del salto *k* es llamada función de autocovarianza $\{\gamma_k\}$ del proceso estocástico. Similarmente, el gráfico del coeficiente de

auto correlación ρ_k como una función del salto *k* es llamada función de auto correlación $\{\rho_k\}$ del proceso.

Desde que $\rho_k = \rho_{-k}$ la función de auto correlación es necesariamente simétrica alrededor de cero, y en la práctica solo es necesario graficar la parte positiva de la función.

Se tiene entonces que un proceso *estacionario Normal* z_t es completamente caracterizado o definido por su media μ y por su función de autocovarianza $\{\gamma_k\}$ o equivalentemente por su media μ varianza σ^2_z y su función de auto correlación $\{\rho_k\}$.

2.1.3.5 Estimación de las funciones de Autocorrelación y Autocovarianza

Hasta ahora solo se ha considerado la función de auto correlación teórica que describe a proceso estocástico

conceptual. En la práctica, se tiene una serie de tiempo finita z_1, z_2, …, z_N, de N observaciones, de las cuales solo se pueden obtener estimadores de la media μ y de las autocorrelaciones.

La media μ $E[z_t]$ es estimada por la media muestral:

$$\bar{z} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} z_t$$

[illegible] $= \mu$, [illegible] $>$ [illegible] [illegible] μ. [illegible] $>$ [illegible] μ [illegible]

$$\mathrm{var}[\bar{z}] = \frac{1}{N^2}\sum_{t=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\gamma_{t-s} = \frac{\gamma_0}{N}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{N-1}\left(1 - \frac{k}{N}\right)\rho_k\right]$$

Para una “muestra grande” una aproximación para esta expresión de la varianza está dada por:

$$\mathrm{var}[\bar{z}] = \left(\frac{\gamma_0}{N}\right)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k\right)$$

en el sentido que

$$N \operatorname{var}[\bar{z}] \to \gamma_0 \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \right)$$

cuando N→∞, asumiendo que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \rho_k \right| < \infty$$

Un número de estimadores de la función de autocorrelación ha sido sugerido por estadísticos. Se concluye que el estimador más satisfactorio del k-ésimo salto de la autocorrelación ρ_k es:

$$r_k = c_k / c_0$$

en donde se tiene que:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k}\left(z_t - \bar{\bar{z}}\right)\left(z_{t+k} - \bar{\bar{z}}\right)$$

para k=0,1,2,...,K

es el estimador de la autocovarianza γ_k, y $>$ es la media muestral de la serie de tiempo. Los valores r_k son llamados función de autocorrelación muestral.

En la práctica, para obtener una estimación exitosa de la función de autocorrelación necesitaríamos al menos de 50 observaciones, y las autocorrelaciones estimadas r_k serían calculadas para k=0,1,...,k, donde k no fuera más grande que N/4.

2.1.3.6 Estimación del Error Estándar de Autocorrelación.

Para identificar un modelo para series de tiempo, es conveniente tener más o menos clara sí ρ_k es efectivamente cero más allá de un cierto salto. Para este propósito, puede ser usada la siguiente expresión aproximada para la varianza

del coeficiente estimado de autocorrelación de un proceso Normal estacionario

$$\mathrm{var}[r_k] \cong \frac{1}{N}\sum_{v=-\infty}^{+\infty}\left(\rho_v^2 + \rho_{v+k}\rho_{v-k} - 4\rho_k\rho_v\rho_{v-k} + 2\rho_v^2\rho_k^2\right)$$

Por ejemplo, sí $\rho_k=\phi^{|k|}$ ($-1<\phi<1$), esto es, la función de autocorrelación se humedece hacia afuera exponencialmente, dada por:

$$\mathrm{var}[r_k] \cong \frac{1}{N}\left[\frac{(1+\phi^2)(1-\phi^{2k})}{1-\phi^2} - 2k\phi^{2k}\right]$$

y en particular se tiene que:

$$\mathrm{var}[r_1] \cong \frac{1}{N}(1-\phi^2)$$

Para cualquier proceso para el cual toda las autocorrelaciones ρ_k son ceros para $v>q$, todos los términos excepto el primero que aparece a mano derecha son cero cuando $k>q$. Entonces para la varianza de la correlación estimada r_k, en el salto *k* más

grande que cualquier valor *q más allá del cual la función de autocorrelación teórica puede ser considerada que tuvo una "muerte fuera".* Bartlett´s nos da una aproximación:

$$\mathrm{var}[r_k] \cong \frac{1}{N}(1 + 2\sum_{v=1}^{q} \rho_v^2)$$

para k>q

Para usar esta aproximación en la práctica, las autocorrelaciones estimadas r_k, son sustituidas por las autocorrelaciones teóricas ρ_k, y cuando esto es hecho nos referiremos a la raíz cuadrada de esta expresión como el error estándar de salto grande.

Expresiones de aproximaciones similares para la covarianza entre las correlaciones estimadas r_k y r_{k+s} en 2 diferentes saltos *k* y *k+s* también han sido dadas por Bartlett.

En particular, la aproximación del salto grande se reduce a

$$\operatorname{cov}[r_k, r_{k+s}] \cong \frac{1}{N} \sum_{v=-q}^{q} \rho_k \rho_{v+s}$$

para k>q.

El resultado de Bartlett muestra el cuidado que sé requiere en la interpretación de autocorrelaciones individuales porque puede existir grandes covarianzas entre valores vecinos.

Un caso especial de particular interés se da cuando q=0, esto es, cuando los ρ_k son tomados para ser cero para todos los saltos y desde entonces la serie se vuelve completamente aleatoria. Entonces los errores estándares de la expresión de la varianza del estimador de autocorrelación dada por Bartlett toman simplemente la forma $1/N^{1/2}$.

2.1.4 PROCESOS AUTOREGRESIVOS

2.1.4.1 Condiciones de estacionalidad para los procesos autorregresivos.

El conjunto de parámetros ajustables $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p$ de un proceso AR(p)

$$>_t = \phi_1 >_{t-1} + \phi_2 >_{t-2} + ... + \phi_p >_{t-p} + a_t$$

o

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p) >_t = \phi(B) >_t = a_t$$

debe satisfacer ciertas condiciones para que el proceso sea estacionario.

Para una mejor comprensión, el proceso autorregresivo de primer orden

$$(1 - \phi_1 B) >_t = a_t$$

puede ser escrito como:

$$\bar{z}_t = (1 - \phi_1 B)^{-1} a_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j a_{t-j}$$

Entonces

$$\varphi(B) = (1-\phi_1 B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j$$

Para el proceso general AR(p) $>_t=\phi^{-1}(B)\ a_t$, tenemos:

$$\phi(B)= (1 - G_1B)(1- G_2B) \ldots (1- G_pB)$$

donde G_1^{-1}, ..., G_p^{-1} son las raíces de $\phi(B)=0$, y expandiendo $\phi^{-1}(B)$ en fracciones parciales tenemos:

$$\bar{z}_t = \phi^{-1}(B)a_t = \sum_{i=1}^{p} \frac{K_i}{1-G_iB}\, a_t$$

Por lo tanto, si $\varphi(B)= \phi^{-1}(B)$ pasa a ser una serie convergente para $|B|\leq 1$, esto es, si las ponderaciones $\varphi_1=\Sigma^n_{i=1}\ K_i\ G^j_i$ son absolutamente sumables de tal forma que el modelo AR(p) representará un proceso estacionario, se debe tener que $|G_i|\leq 1$, para i=1,2, ..., p. Equivalentemente, las raíces de $\phi(B)=0$ deben caer fuera del círculo unitario. Las raíces de la ecuación $\phi(B)=0$ pueden ser referidas como los ceros del polinomio $\phi(B)$. Entonces, la condición de estacionalidad puede ser expresada diciendo que los ceros de $\phi(B)$ deben caer fuera del círculo unitario.

Un argumento similar puede ser aplicado cuando no todos los ceros de $\phi(B)$ son distintos. La ecuación $\phi(B)=0$ es llamada la ecuación característica del proceso. En adición, de la relación $\phi(B)\varphi(B)=1$ se sigue que las ponderaciones φ_j para el proceso AR(p) satisface la ecuación diferencial

$$\varphi_j = \phi_1\varphi_{j-1} + \phi_2\varphi_{j-2} + \ldots + \phi_p\varphi_{j-p}$$

para $j>0$, con $\varphi_0 = 1$ y $\varphi_1 = 0$ para $j<0$, de lo cual las ponderaciones φ_j puede fácilmente ser computada recursivamente en términos de los ϕ_i. El hecho de que las ponderaciones φ_j satisfagan la ecuación diferencial implica que ellas tienen una representación explícita de la forma $\varphi_j = \Sigma^p_{i=1} K_i G^j_i$ para el caso de raíces distintas.

Entonces la serie

$$\pi(B)= \phi(B)= (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p)$$

es finita, no se requieren restricciones sobre los parámetros de un proceso autorregresivo para asegurar la invertibilidad.

2.1.4.2 Función de autocorrelación de un Proceso autorregresivo

2.1.4.2.1 Función de Autocorrelación.

Una relación importante para la función de autocorrelación de un proceso autorregresivo estacionario se encuentra multiplicando totalmente

$$>_t = \phi_1 >_{t-1} + \phi_2 >_{t-2} + \ldots + \phi_p >_{t-p} + a_t$$

por $>_{t-k}$, para obtener

$$>_{t-k} >_t = \phi_1 >_{t-k} >_{t-1} + \phi_2 >_{t-k} >_{t-2} + \ldots + \phi_p >_{t-k} >_{t-p} + >_{t-k} a_t$$

Tomando los valores esperados en la ecuación anterior, se obtiene la ecuación diferencial

$$\gamma_t = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \ldots + \phi_p \gamma_{k-p} \qquad k>0$$

Si se divide la ecuación anterior para γ_0, se observa que la función de autocorrelación satisface la misma forma de la ecuación diferencial

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \ldots + \phi_p \rho_{k-p} \qquad k>0$$

Se nota que esto es una analogía de la ecuación diferencial satisfecha por el proceso $>_t$ en sí.

Ahora si se supone que la ecuación anterior puede ser escrita

$$\phi(B)\,\rho_k=0$$

donde $\phi(B)=(1-\phi_1B-\phi_2B^2-...-\phi_pB^p)$ y B ahora opera sobre k y no sobre t.

Entonces, escribiendo a

$$\prod_{i=1}^{p}(1-G_iB)$$

la solución general de la ecuación $\rho_k=\phi_1\rho_{k-1}+\phi_2\rho_{k-2}+...+\phi_p\rho_{k-p}$ es:

$$\rho_k=A_1G^k_1+A_2G^k_2+...+A_pG^k_p$$

donde G^{-1}_1, G^{-1}_2, ... ,G^{-1}_p son las raíces de la ecuación característica

$$\phi(B)=1-\phi_1B-\phi_2B^2-...-\phi_pB^p=0$$

Para que se de la estacionalidad se requiere que $|G_i|<1$. Entonces se pueden dar dos situaciones en la práctica si asumimos que las raíces G_i son distintas.

1. Una raíz G_i es real, en el caso de que un término $A_iG^k_i$ en la ecuación $\rho_k=A_1G^k_1+A_2G^k_2+...+A_pG^k_p$ disminuya hasta cero

geométricamente a medida que *k* se incrementa. Frecuentemente se refiere a esto como una exponencial humedecida.

2. Un par de raíces G_i, G_j son complejas conjugadas, en el caso de que ellas contribuyan un término de la forma

$$D^k \sin(2\pi fk + F)$$

a la función de autocorrelación $\rho_k = A_1 G^k_1 + A_2 G^k_2 + ... + A_p G^k_p$, la cual sigue una onda senoidal humedecida, con factor de humedad d= | Gi| =| Gj| y frecuencia f, tal que 2πf= cos-1[|Re(Gi)|/D].

En general, la función de autocorrelación de un proceso autorregresivo estacionario consistirá de una mezcla de ondas exponenciales y senoidales humedecidas.

2.1.4.2.2 Parámetros autorregresivos en términos de las autocorrelaciones: ecuaciones de Yule-Walker.

Si sustituimos *k*=1, 2, ..., p en $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + ... + \phi_p \rho_{k-p}$, se obtiene un conjunto de ecuaciones lineales para ϕ_1, ϕ_2,...,ϕ_p en términos de ρ_1, ρ_2, ..., ρ_p, que es,

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \ldots + \phi_p\rho_{p-1}$$

$$\rho_2 = \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2 + \ldots + \phi_p\rho_{p-2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ldots \qquad \vdots$$

$$\rho_p = \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \ldots + \phi_p$$

Estas usualmente son llamadas las ecuaciones de *Yule-Walker*. Se obtiene los *estimadores Yule-Walker* de los parámetros remplazando las autocorrelaciones teóricas ρ_k por las autocorrelaciones estimadas r_k.

Se observa que si se escribe:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} \quad \rho_p = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_p = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \ldots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \ldots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

la solución del conjunto de ecuaciones lineales anteriormente descrito para los parámetros ϕ en términos de las autocorrelaciones puede ser escrito como

$$\phi = P^{-1}_{p}\rho_{p}$$

Varianza. Cuando k=0, la contribución del término $E[z_{t-k}a_t]$, sobre la ecuación $>_{t-k}>_t = \phi_1>_{t-k}>_{t-1} + \phi_2>_{t-k}>_{t-2} + ...+ \phi_p>_{t-k}>_{t-p} + >_{t-k}a_t$, es $E[a^2_t] = \sigma^2_a$, así que la única parte que estará correlacionada con at es el choque más reciente, at. Por lo tanto, cuando k=0,

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_{-1} + \phi_2\gamma_{-2} + ...+ \phi_p\gamma_{-p} + \sigma^2_a$$

Dividiendo la ecuación anterior para $\gamma_0 = \sigma^2_z$ y sustituyendo $\gamma_k=\gamma_{-k}$, la varianza σ^2_z puede ser escrita como:

$$\varphi_j = \phi_1\varphi_{j-1} + \phi_2\varphi_{j-2} + ...+\phi_p\varphi_{j-p}$$

Son de particular importancia los procesos autorregresivos de primero y segundo orden.

2.1.4.3 Proceso autorregresivo de Primer orden (Markov)

El proceso autorregresivo de primer orden es:

$$>_t = \phi_1 >_{t-1} a_t = a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi^2_1 a_{t-2} + \ldots$$

donde se tiene que ϕ_1 debe satisfacer la condición $-1<\phi_1<1$ para que el proceso sea estacionario.

2.1.4.3.1 Función de autocorrelación.

Usando $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \ldots + \phi_p \rho_{k-p}$, la función de autocorrelación satisface la ecuación de primer orden

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} \qquad k>0$$

la cual, con $\rho_0=1$, tiene la solución:

$$\rho_k = \phi^k_1 \qquad k=>0$$

Varianza. Usando la ecuación:

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \rho_1\phi_1 - \rho_2\phi_2 - \ldots - \rho_p\phi_p}$$

La varianza del proceso es:

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \rho_1 \phi_1}$$

haciendo $\rho_1 = \phi_1$

$$= \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi^2_1}$$

2.1.4.4 Proceso autorregresivo de Segundo orden.

Condición de estacionalidad. El proceso autorregresivo de segundo orden puede ser escrito como:

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t$$

Para que se de la estacionalidad, las raíces de $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$ deben caer fuera del círculo unitario, lo cual implica que los parámetros ϕ_1 y ϕ_2 deben caer en la región triangular:

$$\phi_2 + \phi_1 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

$$-1 < \phi_2 < 1$$

2.1.4.4.1 Función de autocorrelación.

Usando la ecuación $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + ... + \phi_p \rho_{k-p}$, la función de autocorrelación satisface la ecuación diferencial de segundo orden

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \qquad k>0$$

con valores que empiezan con $\rho_0 = 1$ y $\rho_1 = \phi_1/(1-\phi_2)$. De $\rho_k = A_1 G^k_1 + A_2 G^k_2 + ... + A_p G^k_p$, la solución general de la ecuación diferencial anterior es:

$$\rho_k = A_1 G^k_1 + A_2 G^k_2$$

$$=[G_1(1-G^2_2)G^k_1 - G_2(1-G^2_1)G^k_2]/[(G_1-G_2)(1+G_1G_2)]$$

donde G^{-1}_1 y G^{-1}_2 son las raíces de la ecuación característica $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$. Cuando las raíces son reales, la función de autocorrelación consiste de una mezcla de exponenciales húmedas. Esto ocurre cuando $\phi^2_1 + 4\phi_2 \geq 0$.

Si las raíces G_1 y G_2 son complejas ($\phi^2_1 + 4\phi_2 < 0$), un proceso autorregresivo de segundo orden muestra un comportamiento pseudo-periódico. Este comportamiento se

refleja en la función de autocorrelación, por sustitución de G1= $De^{i2\pi fo}$ y G_2= $De^{-i2\pi fo}$ en la última ecuación, obteniéndose así:

$$\rho_k = [D^k \sin(2\pi fok+F)]/\sin F$$

A esta última ecuación se la denomina *onda senoidal humedecida* con factor de humedad *D*, *frecuencia fo*, y *fase F*. Estos factores se relacionan con los parámetros como sigue:

$$D = |G_i| = \sqrt{-\phi_2}$$

donde la raíz positiva es tomada,

$$\cos(2\pi fo) = \frac{\mathrm{Re}(G_i)}{D} = \frac{\phi_1}{2\sqrt{-\phi_2}}$$

$$tanF = \frac{1+D^2}{1-D^2} tan(2\pi f\, 0)$$

Ecuaciones de Yule-Walker. Sustituyendo p=2 en:

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \ldots + \phi_p\rho_{p-1} \\
\rho_2 &= \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2 + \ldots + \phi_p\rho_{p-2} \\
&\vdots \\
\rho_p &= \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \ldots + \phi_p
\end{aligned}
$$

las ecuaciones de Yule-Walker son:

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2\rho_1 \\
\rho_2 &= \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2
\end{aligned}
$$

las cuales, cuando se resuelven para ϕ_1 y ϕ_2, resulta

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &= [\rho_1(1-\rho_2)]/[1-\rho_2] \\
\phi_2 &= [\rho_2-\rho^2_1]/[1-\rho^2_1]
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones de Yule-Walker, pueden ser resueltas para expresar ρ_1 y ρ_2 en términos de ϕ_1 y ϕ_2, lo que da como resultado:

$$\rho_1 = \phi_1/[1-\phi_2]$$

$$\rho_2 = \phi_2+[\phi^2_1]/[1-\phi_2]$$

Varianza La varianza del proceso es:

$$\sigma^2_z = \sigma^2_z/(1-\rho_1\phi_1-\rho_2\phi_2)$$

$$\left(\frac{1-\phi_2}{1+\phi_2}\right)\frac{\sigma_a^2}{\{(1-\phi_2)^2-\phi_1^2\}}$$

2.1.4.4.2 Función de Autocorrelación Parcial

Inicialmente, no se conoce cual es el orden del proceso autorregresivo para ajustar una serie de tiempo observada. Este problema es análogo al de decidir el número de variables independientes a ser incluidas en una regresión múltiple.

La función de autocorrelación parcial es un mecanismo, el cual explota el hecho de que mientras un proceso AR(2) tenga una función de autocorrelación la cual es infinita en extensión, este

puede ser por su naturaleza descrito en términos de *p* funciones de las autocorrelaciones. Denotado por ϕ_{kj}, el j-ésimo coeficiente en una representación autorregresiva de orden k, tal que ϕ_{kk} es el último coeficiente. Se sigue que ϕ_{kj} satisface el conjunto de ecuaciones:

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \ldots + \phi_{k(k-1)}\rho_{j-k+1} + \phi_{kk}\rho_{j-k} \qquad j=1,2,\ldots,k$$

llevándonos a las ecuaciones Yule-Walker, las cuales pueden ser escritas como:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \ldots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \ldots & \rho_{k-2} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & & . \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & .. & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ . \\ . \\ . \\ \phi_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ . \\ . \\ . \\ \rho_k \end{pmatrix}$$

o como:

$$P_k\phi_k = \rho_k$$

Resolviendo estas ecuaciones para k=1,2,3, ..., y así sucesivamente, obtenemos:

$$\phi_{11}=\rho_1$$

$$\phi_{22}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho^2_1}{1 - \rho^2_1}$$

$$\phi_{33}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & 1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

En general, para ϕ_{kk}, el determinante en el numerador tiene los mismos elementos que el denominador, pero con la última columna reemplazada por $\boldsymbol{\rho_k}$. La cantidad ϕ_{kk}, es considerada como una función del salto *k*, es llamada la función de autocorrelación parcial.

Para un proceso autorregresivo de orden *p*, la función de autocorrelación parcial ϕ_{kk} no será cero para k menores o iguales a p y cero para k más grande que p. En otras palabras, la función de autocorrelación de un proceso autorregresivo de orden p-ésimo tiene un corte después del salto *p*.

2.1.4.4.3 Estimación de la Función de Autocorrelación Parcial

Las correlaciones parciales estimadas pueden ser obtenidas sustituyendo los estimados r_j en la autocorrelación teórica $\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \ldots + \phi_{k(k-1)}\rho_{j-k+1} + \phi_{kk}\rho_{j-k}$, para obtener:

$$r_j = \hat{\phi}_{k-1} r_{j-1} + \hat{\phi}_{k2} r_{j-2} + \ldots + \hat{\phi}_{k(k-1)} r_{j-1} + \hat{\phi}_{kk} r_{j-k}$$

j=1,2,...k

2.1.4.4.4 Estimadores de los errores de la Autocorrelación Parcial

Autores anteriormente han mostrado que en la hipótesis que el proceso es autorregresivo de orden *p*, la autocorrelación parcial estimada de orden *p*+1, y superiores, son

aproximadamente independientes y normalmente distribuida con media cero. Además, si *n* es el número de observaciones usadas en el ajuste,

$$\mathrm{var}[\hat{\phi}_{kk}] \cong \frac{1}{n}$$

para K≥p+1

Entonces, el error estándar (S.E.) de autocorrelación parcial estimada ϕ_{kk} es:

$$S.E.[\hat{\phi}_{kk}] = \hat{\sigma}[\hat{\phi}_{kk}] \cong \frac{1}{\sqrt{n}}$$

para K≥p+1

2.1.5. PROCESOS DE PROMEDIOS MOVILES

Condiciones de invertibilidad para los Procesos de Promedios Móviles. Ahora se derivarán las condiciones que los parámetros $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q$ deben satisfacer para asegurar la invertibilidad del proceso MA(q):

$$>_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - ... - \theta_q a_{t-q}$$

$$= (1 - \theta_1 B - ... - \theta_q B^q) a_t$$

$$= \theta(B)\, a_t$$

Se sabe que el proceso de promedios móviles de primer orden

$$>_t = (1 - \theta_1 B)\, a_t$$

es nvertible si $|\theta_1| < 1$; esto es:

$$\pi(B) = (1 - \theta_1 B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_1^j B^j$$

converge o está dentro del círculo unitario. Como sea esto es equivalente a decir que la raíz, $B = \theta_1^{-1}$ de $(1 - \theta_1 B) = 0$, cae fuera del círculo unitario.

La condición de invertibilidad para procesos MA de orden superior puede ser obtenida escribiendo a:

$$>_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

$$=(1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q) a_t$$

$$= \theta(B)\, a_t$$

de la sgte. manera:

$$a_t = \theta^{-1}(B) >_t$$

Entonces, si

$$\theta(B) = \prod_{i=1}^{q} (1 - H_i B)$$

luego al expandirla en fracciones parciales se obtiene la sgte. expresión:

$$\pi(B) = \theta^{-1}(B) = \sum_{i=1}^{q} \left(\frac{M_i}{1 - H_i B} \right)$$

la cual es convergente. Desde que las raíces de $\theta(B)=0$ son H_i^{-1}, se sigue que la condición de invertibilidad para un proceso MA(q) es que las raíces de la ecuación característica

$$\theta(B)= 1- \theta_1 B - \theta_2 B^2 - ... - \theta_q B^q = 0$$

caen fuera del círculo unitario.

Se debe observar que si la serie

$$\varphi(B)= \theta(B)= 1- \theta_1 B - \theta_2 B^2 - ... - \theta_q B^q$$

es finita, no son necesarias restricciones sobre los parámetros del proceso de promedios móviles para asegurar la estacionalidad.

2.1.5.1 Función de Autocorrelación para Procesos de Promedios Móviles

Función de Autocorrelación. Usando la ecuación:

$$>_t= a_t- \theta_1 a_{t-1}- ... -\theta_q a_{t-q}$$

$$=(1- \theta_1 B- ...- \theta_q B^q)a_t$$

$$= \theta(B)\, a_t$$

la función de autocovarianza de un proceso MA (q) es:

$$\gamma_k= E[(a_t - \theta_1 a_{t-1}- ... -\theta_q a_{t-q})(a_{t-k}- \theta_1 a_{t-k-1}- ... -\theta_q a_{t-k-q})]$$

Así que la varianza del proceso es

$$\gamma_0=(1+\theta_1^2+\theta_2^2+...+\theta_q^2)\sigma^2_a$$

y

$$\gamma_k=\begin{cases}(-\theta_k+\theta_1\theta_{k+1}+\theta_2\theta_{k+2}+...+\theta_{q-k}\theta_q)\sigma^2_a & k=1,2,...,q\\ 0 & k>q\end{cases}$$

Así que la función de autocorrelación es:

$$\rho_k=\begin{cases}\dfrac{-\theta_k+\theta_1\theta_{k+1}+\theta_2\theta_{k+2}+...+\theta_{q-k}\theta_q}{1+\theta_1^2+\theta_2^2+...+\theta_q^2} & k=1,2,...,q\\ & k>q\end{cases}$$

Se nota que la función de autocorrelación de un proceso MA (q) es cero, para más allá del orden q del proceso. En otras palabras, la función de autocorrelación de un proceso de promedios móviles tiene una cortadura después del salto *q*.

2.1.5.2 Proceso de promedios móviles de primer orden

Se sabe que este proceso tiene la forma:

$$>_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

$$= (1 - \theta_1 B)\, a_t$$

y también se conoce que θ_1 debe caer en el rango $-1<\theta_1<1$ para que el proceso sea invertible. Como sea, el proceso es estacionario para todos los valores de θ_1.

2.1.5.2.1 Función de autocorrelación.

Usando $\gamma_0=(1+ \theta_1^2 + \theta_2^2 + ...+ \theta_q^2)\sigma^2_a$, la varianza del proceso es:

$$\gamma_0=(1+ \theta_1^2)\sigma^2_a$$

y la función de autocorrelación es:

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} & k=1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

2.1.5.2.2 Función de autocorrelación parcial.

Usando las ecuaciones de Yuler-Walker con $\rho_1 = -\theta_1/(1+\theta_1^2)$ y $\rho_k = 0$, para k>1, se obtiene, después de algunas manipulaciones algebraicas, lo sgte.:

$$\phi_{kk} = -\theta_1^k(1-\theta_1^2)/(1-\theta_1^{2(k+1)})$$

Así que $|\phi_{kk}| < \theta_1^k$, y la función de autocorrelación parcial es dominada por una exponencial húmeda. Si ρ_1 es positiva, tal que θ_1 es negativo, la función de autocorrelación parcial se alterna en el signo. Si, como sea, ρ_1 es negativo, tal que θ_1 es positivo, las autocorrelaciones parciales son negativas.

2.1.5.3 Proceso de promedio móviles de segundo orden

Condiciones de invertibilidad. El proceso de promedios móviles de segundo orden está definido por:

$$>_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

y es estacionario para todos los valores de θ_1 y θ_2. Como sea, este es invertible solo sí las raíces de la ecuación característica

$$1-\theta_1 B-\theta_2 B^2=0$$

caen fuera del círculo unitario, esto es,

$$\theta_2 + \theta_1 < 1$$

$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$

$$-1 < \theta_2 < 1$$

Estas son las condiciones requeridas para la estacionalidad de un proceso AR(2).

2.1.5.3.1 Función de autocorrelación.

Usando $\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + ... + \theta_q^2)\sigma^2_a$, la varianza del proceso es:

$$\gamma_0 = \sigma^2_a(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

y la función de autocorrelación es:

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_k = 0 \qquad k \geq 3$$

Por lo tanto la función de autocorrelación parcial tiene una cortadura después del salto 2.

Se sigue entonces que las primeras dos autocorrelaciones de un proceso invertible MA(2) deben caer dentro del área acotada por los segmentos de las curvas

$$\rho_2 + \rho_1 = -0.5$$

$$\rho_2 - \rho_1 = -0.5$$

$$\rho_1^2 = 4\rho_2(1-2\rho_2)$$

2.1.5.3.2 Función de autocorrelación parcial.

La expresión exacta para la función de autocorrelación de un proceso MA(2) es complicada, pero esta está dominada por la suma de dos exponenciales si las raíces de la ecuación característica $1-\theta_1 B-\theta_2 B^2=0$ son reales y por una onda senoidal humedecida si las raíces son complejas.

2.1.6 PROCESOS MIXTOS: AUTORREGRESIVO-PROMEDIOS MOVILES

2.1.6.1. Propiedades de estacionalidad e invertibilidad

Se conoce ahora que para alcanzar la parsimonia se deban incluir ambos términos: autorregresivos y promedios móviles.

Así que se necesitará emplear el modelo mixto autorregresivo-promedios móviles (ARMA).

$$>_t = \phi_1 >_{t-1} + \phi_2 >_{t-2} + \ldots + \phi_p >_{t-p} + a_t + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

esto es

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p) >_t = (1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q) a_t$$

o

$$\phi(B) >_t = \theta(B)\, a_t$$

donde $\phi(B)$ y $\theta(B)$ at son polinomios de grado p y q en B.

A este modelo nos referiremos como proceso ARMA(p,q). Este puede ser visto de dos formas:

1. Como un proceso autorregresivo de orden p

$$\phi(B) >_t = e_t$$

con et siguiendo el proceso de promedios móviles de orden q

$$e_t = \theta(B)\, a_t$$

2. Como un proceso de promedio móviles de orden q

$$>_t = \theta(B) b_1$$

con b1 siguiendo el proceso autorregresivo de orden p

$$\phi(B) b_1 = a_t$$

tal que

$$\phi(B)z_t = \theta(B)\phi(B)b_t = \theta(B)\,a_t$$

Es obvio que los términos de promedios móviles del modelo mixto (ARMA) no afectarán las condiciones de estacionalidad de un proceso autorregresivo. Así que si $\phi(B)z_t = \theta(B)$ at se definirá un proceso estacionario que hará que la ecuación característica $\phi(B)=0$ tenga todas sus raíces afuera del círculo unitario. Similarmente, las raíces de $\theta(B)=0$ deben caer fuera del círculo unitario si el proceso es invertible.

Por lo tanto el proceso estacionario e invertible ARMA (p,q) tiene ambas representaciones infinitas: promedios móviles y autorregresivo

representación de promedio móviles:

$$\bar{z}_t = \varphi(B)a_t = \sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j a_{t-j}$$

donde $\psi(B)= \phi^{-1}(B)\theta(B)$, y la representación *utorregresiva es:*

$$\pi(B)\bar{z}_t = \bar{z}_t - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \bar{z}_{t-j} = a_t$$

donde $\pi(B)= \theta^{-1}(B)\phi(B)$. Las ponderaciones ψ_j son determinadas a partir de la relación $\phi(B)\psi(B)= \theta(B)$ para satisfacer

$$\psi_j = \phi_1\psi_{j-1} + \phi_2\psi_{j-2} + \ldots + \phi_p\psi_{j-p} - \theta_j \qquad j>0$$

con $\psi_0=1$, $\psi_j=0$ para $j<0$ y $\theta j=0$ para $j>q$, mientras que de la relación $\theta(B)\pi(B)= \phi(B)$ las πj son determinadas para satisfacer:

$$\pi_j = \theta_1\pi_{j-1} + \theta_2\pi_{j-2} + \ldots + \theta_q\pi_{j-q} + \phi_j \qquad j>0$$

con $\pi_0= -1$, $\pi_j= 0$ para $j<0$ y $\phi_j=0$ para $j>p$.

2.1.6.2 Funciones de autocorrelación de procesos mixtos

Función de autocorrelación.

La función de autocorrelación puede ser derivada al multiplicar la ecuación $>_t = \phi_1 >_{t-1} + \phi_2 >_{t-2} + ... + \phi_p >_{t-p} + a_t + a_t - \theta_1 a_{t-1} - ... - \theta_q a_{t-q}$ por $>_{t-k}$ y tomando valores esperados, así se nota que la función de autocovarianza satisface la ecuación diferencial:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + .. + \phi_p \gamma_{k-p} + \gamma_{za}(k) - \theta_1 \gamma_{za}(k-1) - ... - \theta_q \gamma_{za}(k-q)$$

donde $\gamma_{za}(k)$ es la función de covarianza entre z y a y es definida por $\gamma_{za}(k) = E[>_{t-k} a_t]$. Desde que $>_{t-k}$ depende solo de los shocks que ocurren arriba del tiempo t-k a través de la representación infinita de promedios móviles $>_{t-k} = \psi(B) a_{t-k} = \Sigma^{\infty}_{j=0} \psi_j a_{t-k-j}$ se sigue que:

$$\gamma_{za}(k) = \begin{cases} 0 & k>0 \\ \psi_{-k}\sigma^2_a & k \leq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto la ecuación anterior para γk puede ser expresada como:

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \ldots + \phi_p\gamma_{k-p} - \sigma^2_a(\theta_k\psi_0 + \theta_{k+1}\psi_1 + \ldots + \theta_q\psi_{q-k})$$

con la condición que $\theta_0 = -1$

La ecuación anterior implica:

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \ldots + \phi_p\gamma_{k-p} \qquad k \geq q+1$$

y por lo tanto

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \ldots + \phi_p\rho_{k-p} \qquad k \geq q+1$$

o

$$\phi(B)\,\rho_k = 0 \qquad k \geq q+1$$

Varianza. Cuando k=0, se tiene que:

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \ldots + \phi_p\gamma_p + \sigma^2_a(1-\theta_1\psi_1 - \ldots - \theta_q\psi_q)$$

la cual ha de ser resuelta a lo largo con las p ecuaciones de $\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \ldots + \phi_p\gamma_{k-p} - \sigma^2_a(\theta_k\psi_0 + \theta_{k+1}\psi_1 + \ldots + \theta_q\psi_{q-k})$, para k= 1,2, ..., p para obtener $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$.

2.1.6.3 Función de autocorrelación parcial.

El proceso mixto ARMA puede ser escrito como:

$$a_t = \theta^{-1}(B)\phi(B)z_t$$

y $\theta^{-1}(B)$ es una serie infinita en B. Así que la función de autocorrelación parcial de un proceso mixto es infinita en toda su extensión.

2.1.6.4 Proceso autorregresivo de primer orden y proceso de promedios móviles de primer orden.

Un proceso mixto de considerable importancia practica es el Proceso autorregresivo de primer orden y proceso de promedios móviles de primer orden ARMA (1,1)

$$z_t - \phi_1 z_{t-1} a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

esto es

$$(1 - \phi_1 B)z_t = (1 - \theta_1 B)a_t$$

Condiciones de estacionalidad e invertibilidad. Este proceso es estacionario si $-1<\phi_1<1$ y es invertible si $-1<\theta_1<1$. Además, de las relaciones $\psi_1=\phi_1\psi_0 - \theta_1= \phi_1 - \theta_1$ y $\psi_j=\phi_1\psi_{j-1}$ para j>1, se encuentra que las ponderaciones ψ_j están dadas por $\psi_j= (\phi_1-\theta_1)\phi_1^{j-1}$, $j\geq 1$ y similarmente es fácil ver que $\pi_j=(\phi_1- \theta_1)\theta_1^{j-1}$, $j\geq 1$ para un proceso estacionario e invertible ARMA (1,1).

Función de autocorrelación. La función de autocorrelación para un proceso ARMA(1,1)

$$\gamma_0= \phi_1\gamma_1 + \sigma^2_a(1 - \theta_1\psi_1)$$

$$\gamma_0= \phi_1\gamma_0 - \theta_1\sigma^2_a$$

$$\gamma_k= \phi_1\gamma_{k-1} \qquad k\geq 2$$

con $\psi_1=\phi 1- \theta 1$.

Por lo tanto resolviendo las primeras dos ecuaciones para γ_0 y γ_1, la función de autocovarianza del proceso es:

$$\gamma_0 = \frac{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}{1 - \phi_1^2}\sigma_a^2$$

$$\gamma_1 = \frac{(1 + \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - \phi_1^2}\sigma_a^2$$

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1}$$

De estas últimas ecuaciones se tiene que $\rho_k = \phi_1\rho_{k-1}$, $k \geq 2$, entonces $\rho_k = \rho_1\phi_1^{k-1}$, $k>1$. Por lo tanto la función de autocorrelación decae exponencialmente a partir del valor inicial de ρ_1, el cual depende tanto de θ_1 como de ϕ_1.

De las ecuaciones anteriores las primeras dos autocorrelaciones pueden ser expresadas en términos de los parámetros del proceso, como sigue:

$$\rho_{1_1} = \frac{(1+\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta}$$

$$\rho_2 = \phi_1\rho_1$$

Usando las ecuaciones anteriores y las condiciones de estacionalidad e invertibilidad, puede demostrarse que ρ_1 y $\rho 2$ deben caer en la región

$$|\rho_2|<|\rho_1|$$

$$\rho_2>\rho_1(2\rho_1+1) \qquad \rho_1<0$$

$$\rho_2>\rho_1(2\rho_1-1) \qquad \rho_1>0$$

Función de autocorrelación parcial. La función de autocorrelación de un proceso mixto ARMA(1,1) consiste de valor inicial simple $\phi_{11}=\rho_1$.