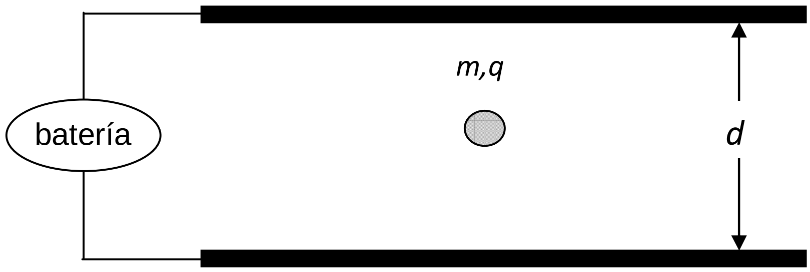
SOLUCION DEL EXAMEN PARCIAL DE FISICA C, I TERMINO 2009 – 2010
DESARROLLADO POR JULIO CESAR MACIAS ZAMORA

1. Dos placas metálicas son conectadas a una batería, creando un campo eléctrico uniforme *E* entre sus placas. Una gota de aceite de masa *m* y carga negativa $q = -12\ \mu C$ se suspende en reposo contra la gravedad en este campo eléctrico. La masa y carga de la gota de aceite, la distancia entre las places, y la aceleración de la gravedad se dan en la figura.

Encuentre la magnitud de la diferencia de potencial eléctrico ΔV entre las placas metálicas……**(debe mostrar desarrollo)**

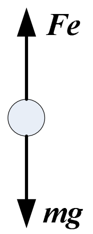


m = 0.05 kg
q = -12 μC
d = 1.5 cm
$g = 9.8\ m/s^2$

a. $|\Delta V|$ = 720 V
b. $|\Delta V|$ = 613 V
c. $|\Delta V|$ = 480 V
d. $|\Delta V|$ = 181 V
e. $|\Delta V|$ = 335 V

SOLUCIÓN

Realizamos el diagrama de cuerpo libre de la gota



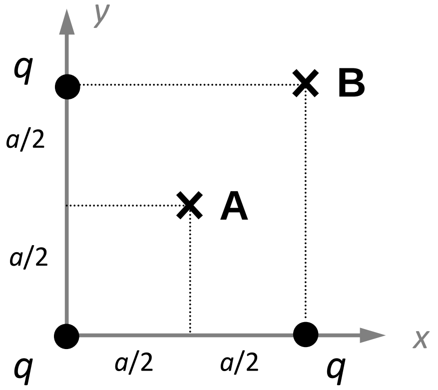
En el diagrama la fuerza Fe es la fuerza eléctrica que se genera a partir del campo eléctrico generado por las placas paralelas. Debido a que la gota está suspendida, debe estar en equilibrio, de modo que

$$\sum \mathbf{Fy} = 0$$
$$\mathbf{Fe} - \mathbf{mg} = 0$$
$$\mathbf{Fe} = \mathbf{mg}$$
$$\mathbf{Eq} = \mathbf{mg}$$

Pero el campo eléctrico se relaciona con la diferencia de potencial por la ecuación $\Delta V = -Ed$

$$-\left(\frac{\Delta \mathbf{V}}{\mathbf{d}}\right)\mathbf{q} = \mathbf{mg}$$
$$\Delta \mathbf{V} = -\frac{\mathbf{mgd}}{\mathbf{q}}$$
$$\Delta \mathbf{V} = -\frac{(0.05\mathbf{kg})(9.8\mathbf{m/s^2})(0.015\mathbf{m})}{-12\times 10^{-6}\mathbf{C}}$$
$$\Delta \mathbf{V} = 613[\mathbf{V}]$$

2. Tres cargas iguales y positivas de valor q son colocadas en las posiciones indicadas en la figura. ¿Cuánto <u>trabajo</u> W fue requerido para formar esta configuración de tres cargas?



a. $W = -\frac{kq^2}{a}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

b. $W = -\frac{kq^2}{a}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

c. $W = \frac{kq^2}{a}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

d. $W = \frac{kq^2}{a}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

e. $W = \frac{kq^2}{a}\left(2+\frac{1}{2}\right)$

<u>SOLUCION</u>

El trabajo realizado por el sistema se debe a la contribución de cada combinación de las partículas presentes en el sistema. Llamaremos q_1 a la carga ubicada en el origen del sistema de coordenadas, q_2 a la partícula que se encuentra en el eje de las x, y q_3 a la partícula que se encuentra en el eje de las y.

$$W_{SISTEMA} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}}$$
$$W_{SISTEMA} = \frac{kqq}{a} + \frac{kqq}{a} + \frac{kqq}{\sqrt{a^2+a^2}}$$
$$W_{SISTEMA} = \frac{2kq^2}{a} + \frac{kq^2}{a\sqrt{2}}$$
$$W_{SISTEMA} = \frac{kq^2}{a}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Respuesta: d)

3. Según el grafico del ejercicio 2, ¿cuál es el potencial eléctrico en el punto **A**.

a. $V_A = \frac{\sqrt{2}kq}{a}$ b. $V_A = \frac{3kq}{\sqrt{2}a}$ c. $V_A = \frac{3kq}{a}$ d. $V_A = \frac{6kq}{a}$ e. $V_A = \frac{3\sqrt{2}kq}{a}$

<u>SOLUCION</u>

El potencial en el punto A está dado por la contribución del potencial de las tres cargas.

$$V_A = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} + \frac{kq_3}{r_3}$$
$$V_A = \frac{kq}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}} + \frac{kq}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}} + \frac{kq}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}$$
$$V_A = 3\frac{kq}{\sqrt{2\left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{3kq}{\frac{a}{2}\sqrt{2}} = \frac{6kq}{a\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}kq}{2a}$$
$$V_A = \frac{3\sqrt{2}kq}{a}$$

Respuesta: e)

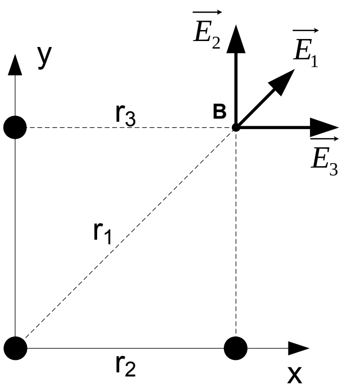
4. Según el gráfico del ejercicio 2, ¿cuál es la magnitud del campo eléctrico en el punto **B**?

a. $E_A = \dfrac{3kq}{a^2}$ b. $E_A = \dfrac{kq}{a^2}\left(2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ c. $E_A = \dfrac{3kq}{\sqrt{2}a^2}$

d. $E_A = \dfrac{kq}{a^2}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e. $E_A = \dfrac{kq}{a^2}\left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\right)$

SOLUCION

De acuerdo al gráfico mostrado en la figura, el campo eléctrico total es la suma vectorial del campo producido por cada carga individual.



$$\vec{E}_1 = \frac{kq}{r_1^2}\hat{u}_1$$

En este caso el vector unitario del vector campo está dirigido a 45° sobre el eje horizontal, de modo que el vector unitario de este campo es

$$\hat{u}_1 = \cos 45°\hat{i} + sen45°\hat{j}$$
$$\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}$$

Por tanto el campo eléctrico está dado por

$$\vec{E}_1 = \frac{kq}{\left(\sqrt{a^2 + a^2}\right)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}\right)$$
$$\vec{E}_1 = \frac{kq}{2a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}\right)$$

El campo eléctrico generado por la carga 2 está dado por

$$\vec{E}_2 = \frac{kq}{r_2^2}\hat{u}_2$$
$$\vec{E}_2 = \frac{kq}{a^2}\hat{j}$$

El campo eléctrico generado por la carga 3 está dado por

$$\overrightarrow{E_3} = \frac{kq}{r_3^2}\hat{u}_3$$

$$\overrightarrow{E_3} = \frac{kq}{a^2}\hat{i}$$

El campo total está dado por la suma de los tres campos individuales.

$$\overrightarrow{E_{TOTAL}} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} + \overrightarrow{E_3}$$

$$\overrightarrow{E_{TOTAL}} = \frac{kq}{2a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}\right) + \frac{kq}{a^2}\hat{j} + \frac{kq}{a^2}\hat{i}$$

$$\overrightarrow{E_{TOTAL}} = \frac{kq}{a^2}\left[\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1\right)\hat{i} + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1\right)\hat{j}\right]$$

La magnitud de este campo resultante es

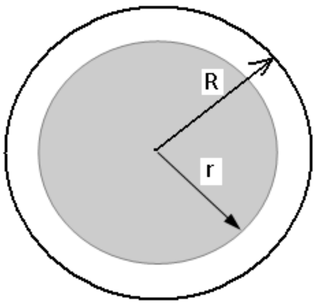
$$\left|\overrightarrow{E_{TOTAL}}\right| = \sqrt{\left[\frac{kq}{a^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1\right)\right]^2 + \left[\frac{kq}{a^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1\right)\right]^2}$$

$$\left|\overrightarrow{E_{TOTAL}}\right| = \sqrt{2\left[\frac{kq}{a^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1\right)\right]^2} = \frac{kq}{a^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1\right)\sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{E_{TOTAL}}\right| = \frac{kq}{a^2}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$$

Respuesta: e)

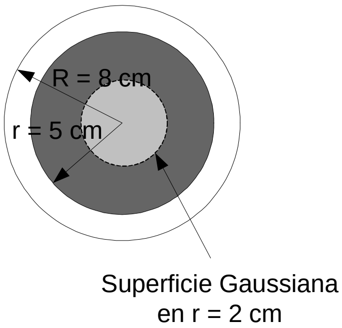
5. Una esfera sólida de radio r = 5 cm es hecha de material no-conductor y transporta una carga total y negativa de valor *Q* = -12 C distribuida uniformemente en todo su volumen. Concéntrica con esta esfera se encuentra un cascarón esférico conductor de radio R = 8 cm de pared muy delgada, el cascarón tiene una carga neta de + 20 C.



¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico *E* a una distancia *r* = 2 cm desde el centro de la esfera?

a. $E = 3.06 \times 10^{12}$ N/C
b. $E = 5.40 \times 10^{12}$ N/C
c. $E = 1.73 \times 10^{13}$ N/C
d. $E = 4.32 \times 10^{13}$ N/C
e. $E = 2.70 \times 10^{14}$ N/C

<u>SOLUCION</u>



Utilizamos la ley de Gauss para determinar el campo en esta región. En la figura adjunta se muestra el detalle de la ubicación de la superficie gaussiana.

$$\oint \vec{E} \bullet \vec{ds} = \frac{Qencerrada}{\varepsilon_0}$$

La carga encerrada por la región gaussiana la obtenemos a partir del hecho que la carga se distribuye de manera constante

$$\rho = \frac{Q}{Volumen}$$

$$\frac{Q_{TOTAL}}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{Qencerrada}{\frac{4}{3}\pi r_1^3}$$

$$Qencerrada = Q_{TOTAL}\left(\frac{r_1}{r}\right)^3$$

A partir de este dato podemos, ahora si, calcular el campo eléctrico para la posición indicada.

$$E\left(4\pi r_1^2\right) = \frac{Q_{TOTAL}\frac{r_1^3}{r^3}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q_{TOTAL} r_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{kQ_{TOTAL} r_1}{r^3} = \frac{\left(9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\right)(12C)(0.02m)}{(0.05m)^3}$$

$$E = 1.73\times10^{13}\ N/C$$

Respuesta: c)

6. ¿Cuál es la magnitud del potencial eléctrico V a una distancia <u>r = 2 cm</u> desde el centro de la esfera, considerando que el potencial es cero en $r = \infty$?

<u>SOLUCION</u>

El potencial eléctrico se relaciona con el campo eléctrico por medio de $V = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \bullet \vec{dl}$. Para el ejercicio tenemos que para llegar al punto P que nos interesa debemos de dividir la integral en algunos puntos, desde el infinito hasta el radio R del cascarón, desde el radio del cascarón hasta el radio r del conductor, y desde el radio r hasta el radio r_1 donde se analiza la región gaussiana

$$V = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \bullet \vec{dl} = -\int_{\infty}^{R} \vec{E} \bullet \vec{dl} - \int_{R}^{r} \vec{E} \bullet \vec{dl} - \int_{r}^{r_1} \vec{E} \bullet \vec{dl}$$

$$V = -\int_{\infty}^{R} \frac{k(Q+q)}{r^2} dr - \int_{R}^{r} \frac{kQ}{r^2} dr - \int_{r}^{r_1} \frac{kQr_1}{r^3} dr_1$$

$$V = \frac{k(Q+q)}{R} + kQ\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) - \frac{kQ}{2r^3}\left(r_1^2 - r^2\right)$$

$$V = \frac{(9\times10^9)(-12+20)}{0.08} + (9\times10^9)(-12)\left(\frac{1}{0.05} - \frac{1}{0.08}\right) - \frac{(9\times10^9)(-12)}{2(0.05)^3}\left(0.02^2 - 0.05^2\right)$$

$$V = 1.35\times10^{12} V$$

Respuesta: 1.35×10^{12} [V]

7. Usted dispone de un capacitor de 10 μF. y *necesita* un capacitor de 9.1 μF. Usted debería:

a. añadir un capacitor pequeño de (1 μF) en serie.

b. añadir un capacitor pequeño de (1 μF) en paralelo.

c. añadir un gran capacitor de (100 μF) en serie.

<u>SOLUCION</u>

La capacitancia disminuye si se conectan capacitares en serie. La capacitancia en serie esta dada por

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{10\mu F} + \frac{1}{100\mu F}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{11}{100\mu F}$$

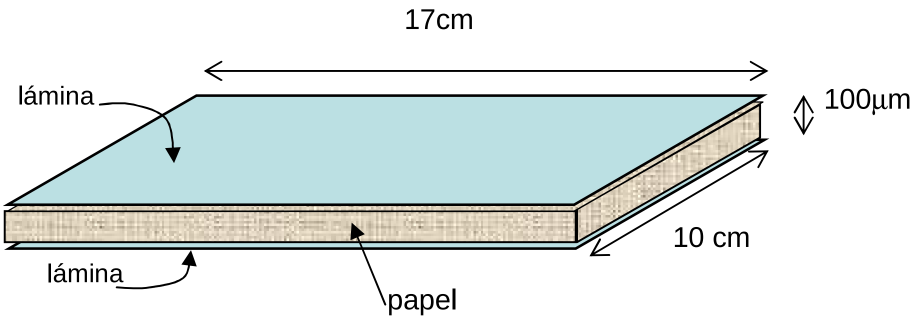
$$C = 9.1\mu F$$

Respuesta: c)

8. Para construir un capacitor se dispone de hojas de papel y dos laminas de aluminio de 10 cm x 17 cm, dispuestas como se indica en la figura. El espesor del papel es de 100 μm y es la separación entre las láminas.

Si la capacitancia de la combinación es de 3 nF, ¿cuál es aproximadamente el valor de la constante dieléctrica κ del papel?

a. 0.002 b. 0.2 c. 20 d. 200 e. 2000



SOLUCION

La capacitancia para un capacitor de placas planas paralelas está dada por

$$C = \frac{\kappa \varepsilon_0 A}{d}$$

$$\kappa = \frac{Cd}{\varepsilon_0 A} = \frac{\left(3\times10^{-9}F\right)\left(100\times10^{-6}m\right)}{\left(8.85\times10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}\right)(0.10m)(0.17m)}$$

$$\kappa = 2$$

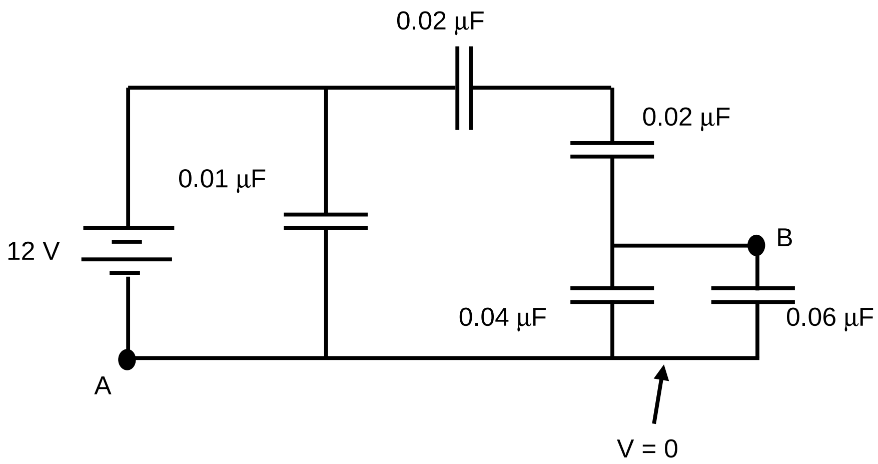
9. Con respecto al capacitor del ejercicio 8, ¿Cuál de las siguientes alternativas es **FALSA**?

a. La capacitancia es reducida retirando parcialmente el papel (pero manteniendo la separación constante).
b. La capacitancia es reducida añadiendo más hojas de papel (efectivamente incrementando la separación de las láminas).
c. La capacitancia es reducida disminuyendo el voltaje de la bacteria utilizada para cargar el capacitor.

Respuesta: c) porque la capacitancia depende exclusivamente de situaciones geométricas, y es independiente de la carga y de la variación del voltaje.

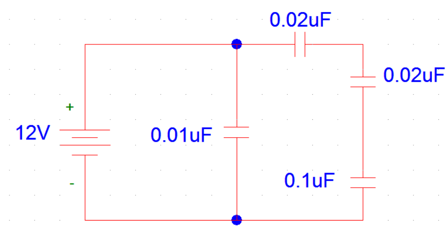
10. En el circuito indicado, ¿cuál es el voltaje V_{AB}?

a. – 10.9 V
b. – 7.2 V
c. + 1.09 V
d. + 1.82 V
e. + 10.9 V

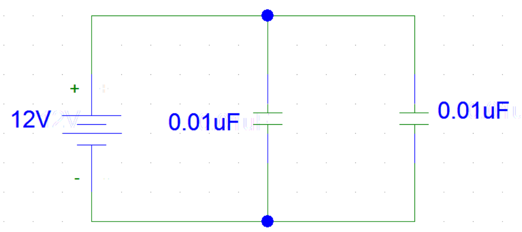


SOLUCION

El voltaje V_{AB} es el mismo que existe en el capacitor de 0.04 µF y en el de 0.06µF, por tanto basta con calcular el circuito equivalente y de ahí regresar hacia atrás.

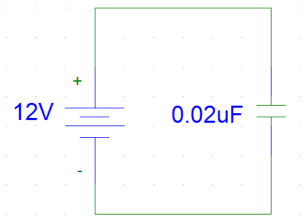


Los capacitares de 0.04µF y 6µF están en paralelo, de modo que su capacitancia equivalente es la suma algebraica de sus valores, esto es, 0.04 µF + 0.06 µF = 0.1µF



El capacitor de 0.1μF y los dos de 0.02μF están en serie, y la capacitancia equivalente está dada por

$$\frac{1}{Ceq} = \frac{1}{0.1} + \frac{1}{0.02} + \frac{1}{0.02}$$
$$Ceq = 0.0091\mu F \approx 0.01\mu F$$



Finalmente los capacitores de 0.01μF están en paralelo, y su capacitancia equivalente está dada por la suma algebraica de sus valores, de manera que tenemos 0.01μF + 0.01μF = 0.02μF (En realidad debe ser 0.0091 μF + 0.02μF = 0.0191μF). En este capacitor podemos calcular la carga por medio de la ecuación Q = CV

Q = (0.02μF)(12V) = 0.24μC (Que en realidad es 0.229 μC). Esta carga se reparte en partes iguales a los capacitores de donde se obtuvo la capacitancia equivalente por estar en paralelo y tener la misma capacitancia, o sea, cada capacitor tiene una carga de 0.12 μC (En realidad debe ser 0.114 μC). Esta carga es la misma para todos los capacitores de donde provino la capacitancia equivalente de 0.01 μF de la derecha, por provenir de capacitores en serie, de manera que el capacitor de 0.1 μF tiene la misma carga, y de ahí podemos calcular el voltaje en este capacitor con la misma ecuación Q = CV

V = 0.12μC/0.1μF = 1.2 V (En realidad debe ser 0.114 μC/0.1μF = 1.1 V)

Respuesta: c)

11. Para el circuito del ejercicio 10 determinar el valor total de la energía almacenada en los capacitores.

SOLUCION

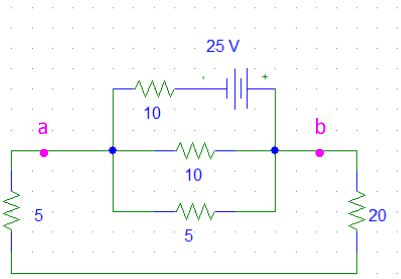
Con la capacitancia equivalente final podemos calcular el valor de la energía

$$U = \frac{1}{2}CV^2$$
$$U = \frac{1}{2}\left(0.02\times10^{-6}F\right)\left(12V\right)^2 = 1.44\times10^{-6}J$$
$$U = 1.44\mu J$$

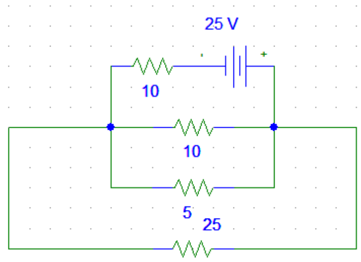
12. En el circuito mostrado en la figura calcular:

a) La corriente en la resistencia de 20 ohmios.

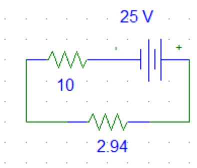
b) La diferencia de potencial entre los puntos a y b.



SOLUCION



Encontramos el circuito equivalente del sistema. El voltaje Vab es el mismo que existe en la resistencia de 10 Ω que se encuentra debajo de la fuente y encima de la resistencia de 5 Ω. La resistencia de 5 Ω de más hacia la izquierda está en serie con la resistencia de 20 Ω, de manera que la suma algebraica de estas dos resistencias es la resistencia equivalente.



Las resistencias de 25 Ω, 5 Ω y de 10 Ω están en paralelo, y la resistencia equivalente está dada por

$$\frac{1}{\mathrm{Re}} = \frac{1}{25} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$$
$$\mathrm{Re} = 2.94\Omega$$

El voltaje que exista en la resistencia de 2.94 Ω es el mismo que existirá en las resistencias de 25 Ω, 5 Ω y 10 Ω, y, nos interesa saber la corriente en la resistencia de 25 Ω, porque es la misma que en la resistencia de 20 Ω de donde resultó esa resistencia equivalente. El voltaje de 25 V se reparte de manera proporcional entre las resistencias de 10 Ω y 2.94 Ω (a esto se le llama teorema de Thévenin para los voltajes)

$$V = 25V \frac{2.94\Omega}{10\Omega + 2.94\Omega}$$
$$V = 5.68V$$

La corriente en la resistencia de 20 Ω está dada por I = V/R = 5.68V/25Ω = 0.23 A.

Respuestas: a) 0.23 A; b) 5.68 V