**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL**

**Facultad de Ingeniería en Mecánica y Ciencias de la Producción**

“Modelado, Simulación y Control de un Sistema Dinámico mediante el uso de Componentes Análogos Simples”

**TESIS DE GRADO**

Previo la obtención del Título de:

**INGENIERO MECÁNICO**

Presentada por:

Roberth Arturo Tinoco Romero.

GUAYAQUIL – ECUADOR

AÑO: 2006

**AGRADECIMIENTO**

A todas las personas que de uno u otro modo colaboraron con la realización exitosa de este proyecto y en especial al Ing. Eduardo Orces por su invaluable ayuda

**DEDICATORIA**

A las innumerables personas que han hecho posible mi formación académica de principio a fin, cuyo respaldo incondicional han sido un fuerte valuarte que llevaré siempre en consideración, entre ellos principalmente a mis padres.

**TRIBUNAL DE GRADUACIÓN**

Ing. Eduardo Rivadeneira P. Ing. Eduardo Orces P.

DECANO DE LA FIMCP DIRECTOR DE TESIS

PRESIDENTE

Ing. Federico Camacho B. Ing. Nelson Cevallos B.

VOCAL VOCAL

**DECLARACIÓN EXPRESA**

“La responsabilidad del contenido de esta Tesis de Grado, me corresponden exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma a la ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL”

(Reglamento de graduación de la ESPOL).

Roberth A. Tinoco R.

**RESUMEN**

Como un sistema típico de control, el péndulo invertido es un excelente medio de comprobación y evaluación de diferentes métodos de control aplicados a sistemas inestables reales, además es muy conocido por su analogía en el diseño de un controlador de vibraciones en la plataforma para el lanzamiento de cohetes. Otras aplicaciones importantes es en la robótica, en el posicionamiento de un satélite con respecto a la tierra, en este caso el satélite esta en movimiento y las antenas que se encuentran en la tierra no pueden dejar que se mueva demasiado, ya que sino se saldría del rango de comunicación entre ellos. Es así como podríamos decir que están sujetos estos dos cuerpos (satélite y antena) por un vector virtual el cuál en la parte de la tierra se encuentra fijo y la parte en movimiento en el espacio, haciendo así la función del péndulo invertido.

 Existen más aplicaciones para el péndulo invertido como lo es la estabilidad en grúas, edificios, aplicaciones didácticas, etc. Un péndulo invertido es un dispositivo físico que consiste en una barra cilíndrica con libertad de oscilar alrededor de un pivote fijo. El pivote es montado sobre un carruaje el cual en su giro puede seguir una trayectoria horizontal.

Nuestro propósito final es conservar el péndulo perpendicular ante la presencia de perturbaciones, donde el péndulo inclinado regresa a la posición vertical cuando se aplica al carro una fuerza de control apropiada y al final de cada proceso de control, se pretende regresar el carro a la posición de referencia. La fuerza correcta tiene que ser establecida a través de las mediciones de los valores instantáneos de la posición horizontal y el ángulo de inclinación del péndulo, por lo que hacemos uso del diseño de un observador de orden mínimo.

El sistema péndulo, carro y actuador puede ser modelado como un sistema lineal si todos los parámetros son conocidos (masas, longitudes, etc.), bajo la premisa de que el ángulo de inclinación por parte del péndulo es pequeño, para así poder encontrar un controlador para estabilizarlo, basado en la tutela del uso de las diversas metodologías de control expuestas y así destacar los puntos relevantes de cada uno de ellas con las simulaciones pertinentes.

**ÍNDICE GENERAL**

Pág.

**RESUMEN II**

**INDICE GENERAL III**

**ABREVIATURAS IV**

**SIMBOLOGÍA V**

**INDICE DE FIGURAS VI**

**INDICE DE TABLAS VII**

### **INTRODUCCIÓN 1**

### CAPITULO 1

1. MODELADO Y RESPUESTA A LAZO ABIERTO DEL SISTEMA 4
   1. Modelo Matemático del Sistema Dinámico Péndulo Invertido 6
   2. Representación del Sistema en Simulink 15
   3. Respuesta del Sistema a Lazo Abierto 19
   4. Estrategias de Control 35

CAPITULO 2

1. METODO DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES PARA EL ANÁLISIS DEL SISTEMA DE CONTROL 41
   1. Determinación de la Función de Transferencia del Controlador 43
   2. Análisis de la Variable no Controlada 79
   3. Modelado en SIMULINK del Sistema de Control Obtenido 84

CAPITULO 3

1. METÓDO DE UBICACIÓN DE POLOS PARA EL ANÁLISIS DEL SISTEMA DE CONTROL 88
   1. Controlabilidad y Observabilidad 90
   2. Análisis del Sistema de Control mediante la Realimentación del Estado Observado de Orden Completo 94
   3. Modelado en SIMULINK del Sistema de Control Obtenido 121

CAPITULO 4

1. REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL EN EL DISEÑO FINAL DEL SISTEMA DE CONTROL 125
   1. Selección del Actuador 126
   2. Control Óptimo de un Sistema Lineal Regulador 173
   3. Diseño del Sistema de Control mediante Realimentación de Estados con Observador de Orden Mínimo 182

CAPITULO 5

1. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 214

APÉNDICES

BIBLIOGRAFÍA

**ABREVIATURAS**

A Amperio

op-amp Amplificador operacional

AC Corriente Alterna

DC Corriente Directa

FEM Fuerza Contra-electromotriz

H Henrio

Kg Kilogramo

KΩ kilo-ohmio

LA Lazo Abierto

LC Lazo Cerrado

LGR Lugar Geométrico de las Raíces.

N Newton

N-m Newton-metro

e Número neperiano

m Metro

m/s Metro por segundo

Ω Ohmio

rad Radian

rad/s Radian por segundo

r.p.m. Revoluciones por minuto

s Segundos

w Vatio

v Voltios

**SIMBOLOGIA**

α Aceleración Angular del Eje del Motor

Fo Amplitud de la Fuerza Excitatriz

υ Coeficiente de Fricción viscosa equivalente del Motor reductor

B Coeficiente de Fricción Viscosa equivalente del Carro

b Coeficiente de Fricción Viscosa equivalente del Péndulo

ycg Centro de Gravedad del

χcg Centro de Gravedad del Péndulo en el Eje de las abscisas

K1 Constante del Par Motriz

K2 Constante de la Fuerza contra-electromotriz

P Control Proporcional.

D Control Derivativo

I Control Integral

ia Corriente de Armadura del Motor

if Corriente de Campo del Motor

ϕ Desfase entre la Fuerza Excitatriz y el Desplazamiento angular.

φ Desplazamiento Angular del eje del Motor

d Diámetro de la polea.

r Radio de la polea.

φ(s) Polinomio Característico de la Matriz de Estados

θ Desplazamiento Angular del Péndulo

X Desplazamiento Lineal del Carro

FAD Factor de Amplificación Dinámico.

ζ Factor de Amortiguamiento Relativo

Ψ Flujo magnético en el entrehierro del Motor

ωo Frecuencia Natural

ωa Frecuencia Amortiguada

ω Frecuencia Excitatriz

Fd Fuerza excitatriz o disturbio externo

G Función de Transferencia del Sistema Péndulo Invertido.

ΔV Ganancia de Voltaje

Kd Ganancia Derivativa

Ki Ganancia Integral

Kp Ganancia proporcional

g Gravedad

J Índice de desempeño

Lm Inductancia.

Jc Inercia de Carga.

Jm Inercia del eje del Motor

I Inercia del Péndulo

ZMi Impedancia Miller de entrada.

ZMo Impedancia Miller de salida.

l Longitud media del Péndulo

A Matriz de Estado

B Matriz de Entrada

K Matriz de Ganancia de Realimentación del Estado

L matriz de Ganancia del Observador

C Matriz de Salida

D Matriz de Transición Directa

M Masa del Carro

m Masa del Péndulo

i Número imaginario

n Número de Estados.

T Par desarrollado por el Motor

τo Par desarrollado en la Polea

τ Período Fundamental

hfe Parámetro de la relación de la transferencia directa de la corriente a corto circuito para una configuración base común.

hie Parámetro de impedancia de entrada a cortocircuito para una configuración emisor común

σ Parte real de un número complejo

μi Polos del sistema a lazo cerrado.

β Relación entre la corriente del colector y la corriente de base en el transistor.

N Reducción de velocidad

Ra Resistencia de Armadura del Motor

μ Señal del Control

ν Señal del Control del Problema dual

Mp Sobrepaso Máximo

ts Tiempo de Asentamiento o Estabilización

tr Tiempo de Levantamiento

s Variable Compleja

χi Variables de Estado

Z Variables de Estado del Problema dual.

**x** Variables de Estado estimadas

ea Voltaje aplicado a la Armadura del Motor DC

eb Voltaje o fuerza Contra-electromotriz

**INDICE DE FIGURAS**

Pág.

Figura 1-1: Diagrama de Cuerpo libre del Sistema Péndulo Invertido 7

Figura 1-2: Comportamiento Dinámico del Sistema en Lazo Cerrado ante una señal Escalón con el uso de la Función de Transferencia 23

Figura 1-3: Comportamiento Dinámico del Sistema en Lazo Cerrado ante una señal Escalón en el Espacio de estados 31

Figura 1-4: Subsistema del Modelado Sistema Péndulo Invertido en Simulink 33

Figura 1-5: Respuesta de la Desviación Angular del Péndulo ante una señal Escalón como disturbio en Simulink 34

Figura 1-7: Respuesta del Desplazamiento del Carro ante una señal Escalón como disturbio en Simulink 34

Figura 1-8: Sistema Retroalimentado 40

Figura 2-1: Diagramas de Bloques del Sistema Péndulo Invertido 45

Figura 2-2: Diagramas de Bloques Simplificado del Sistema Péndulo Invertido 46

Figura 2-3: Trazo del LGR usando Matlab 51

Figura 2-4: Respuesta del Sistema ante una Señal Escalón como disturbio omitiendo los efectos de amortiguamiento 65

Figura 2-5: Respuesta del Sistema ante una Señal Escalón como disturbio considerando los efectos de amortiguamiento 66

Figura 2-6: Trazo del LGR para establecer el parámetro de ajuste 72

Figura 2-7: Trazo del LGR amplificado para establecer el parámetro de ajuste 73

Figura 2-8: Respuesta del Sistema de Control bajo una señal escalón como disturbio en base al método del LGR 74

Figura 2-9 Respuesta Transitoria para una señal impulso con el uso del Controlador PID 78

Figura 2-10 Diagrama de Bloques Global del Sistema Péndulo Invertido 80

Figura 2-11: Diagrama de Bloques Simplificado del Sistema Péndulo Invertido 80

Figura 2-12: Respuesta de las Variables de Salida del Sistema de control ante una señal escalón como Disturbio 83

Figura 2-13: Configuración Resultante del Sistema de Control utilizando Simulink 85

Figura 2-14: Velocidad de Respuesta del desplazamiento Angular del Péndulo por medio de Simulink en presencia de una señal escalón 86

Figura 2-15: Velocidad de Respuesta del desplazamiento Lineal del Carro por medio de Simulink en presencia de una señal escalón 86

Figura 3-1: Plano Complejo S 101

Figura 3-2: Velocidad de Respuesta mediante el uso del Método de Ubicación de Polos 104

Figura 3-3: Diagrama de Bloques usando Realimentación de Estado 105

Figura 3-4: Diagrama de Bloques incluyendo el Observador de orden Completo 116

Figura 3-5: Velocidad de Respuesta de las Variables Controladas con el uso de un Observador de Orden completo 120

Figura 3-6: Diagrama de Bloques del Sistema Péndulo Invertido en Simulink usando Realimentación de Estado 122

Figura 3-7: Velocidad de Respuesta de Desplazamiento Angular del Péndulo usando Realimentación de estado y una señal Escalón como disturbio 123

Figura 3-8. Velocidad de Respuesta de Desplazamiento lineal del Carro usando Realimentación de estado y una señal Escalón como disturbio 123

Figura 4-1: Ilustración que muestra la Energía requerida por el motor 138

Figura 4-2: Circuito Equivalente de un Motor DC controlado por Armadura 140

Figura 4-3: Conexión Dinámica del Péndulo-Motor 144

Figura 4-4: Equipo de Prueba para la determinación de la constate Par Motriz 148

Figura 4-5: Ilustración de los Equipos usados para determinar las constantes del motor 150

Figura 4-6: Ilustración del Reductor 155

Figura 4-7: Ilustración de la Prueba para determinar la Inercia del eje del Motor 158

Figura 4-8: Diagrama de Cuerpo Libre del Rotor por una barra adherida a su eje 159

Figura 4-9: Descripción del Sistema Motor, Reductos y Conjunto Carro – Péndulo 163

Figura 4-10: Trazo del LGR para determinar la reducción óptima 167

Figura 4-11: Trazo del LGR para determinar la reducción óptima amplificada 168

Figura 4-12: Modelo AC del Driver del Motor mediante parámetros Híbridos 191

Figura 4-13: Modelo AC del Driver del Motor mediante parámetros Híbridos en base al Teorema Millar 192

Figura 4-14: Amplificador Operacional Sumador Inversor 194

Figura 4-15: Respuesta Transitoria del Sistema de Control en base a LQR con una señal Escalón como disturbio 199

Figura 4-16: Diagrama de la Señal de flujo del Controlador 205

Figura 4-17: Configuración del modelo Sistema Péndulo Invertido en Simulink con LQR 208

Figura 4-18: Comportamiento Dinámico del Péndulo en base al Diseño LQR y con una señal Escalón como Disturbio 209

Figura 4-19: Comportamiento Dinámico del Carro en base al Diseño LQR y con una señal Escalón como Disturbio 209

**ÍNDICE DE TABLAS**

Pág.

Tabla 1-1: Parámetros del Sistema Físico Péndulo Invertido 22

Tabla 1-2: Instrucciones en Matlab con el Uso del la Función de Transferencia 22

Tabla 1-3: Instrucciones en Matlab con el uso del Espacio de Estados 30

Tabla 2-1: Instrucciones en Matlab para el trazo del LGR 50

Tabla 2-2: Instrucciones en Matlab para obtener la Respuesta del Sistema ante una señal Escalón como disturbio omitiendo los efectos e amortiguamiento 64

Tabla 2-3: Instrucciones en Matlab para establecer el Parámetro de Ajuste con las especificaciones de Desempeño en base el criterio de Routh y al LGR 71

Tabla 2-4: Comportamiento Habitual de Kp, Ki y Kd en la respuesta transitoria 76

Tabla 2-5: instrucciones en Matlab para la determinación de la respuesta transitoria en base al control PID 77

Tabla 2-6: Instrucciones en Matlab para el Análisis de la Variable no Controlada 82

Tabla 3-1: Instrucciones en Matlab para determinar la matriz de Ganancia de realimentación de Estado. 102

Tabla 3-2: Lista de sustituciones necesarias para escribir la ecuación para el observador de Orden Mínimo 112

Tabla 3-3: Instrucciones en Matlab para determinar K y L 119

Tabla 4-1: Tipos de Actuadotes a considerar 128

Tabla 4-2: Potencia del Motor 138

Tabla 4-3: Parámetros para determinar la Constante Par Motriz 150

Tabla 4-4: Parámetros para determinar la Constante Fuerza Electromotriz 151

Tabla 4-5: Parámetros para determinar la Resistencia de Armadura 151

Tabla 4-6: Valores experimentales para determinar la inercia del eje del Motor 161

Tabla 4-7: Parámetros Parciales Físicos del sistema 161

Tabla 4-8: Parámetros del Sistema Péndulo Invertido 172

Tabla 4-9: Instrucciones en Matlab para determinar los eigenvalores del la Matriz de Estado 186

Tabla 4-10: Instrucciones en Matlab para determinar K 198

Tabla 4-11: Instrucciones en Matlab para determinar L 202

Tabla 4-12: Lista de Componentes 212