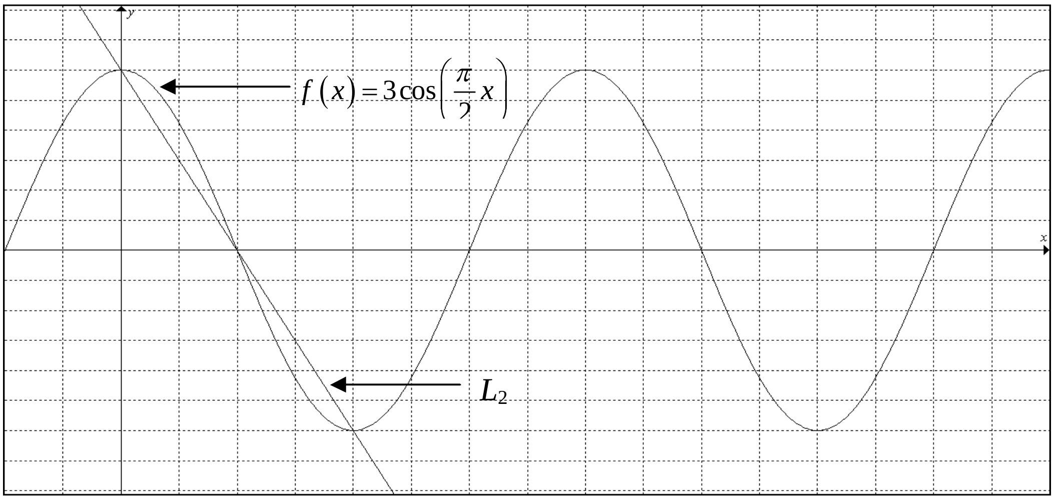
ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
CÁLCULO DIFERENCIAL
Examen de la Segunda Evaluación
II Término – 13/febrero/2009

Nombre: _____________________________ Paralelo: ___

Examen:	______
Lecciones:	______
Proyecto:	______
Deberes:	______
Otros:	______
Total:	______

TEMA No. 1 (10 PUNTOS)

La recta L_1 es paralela a la recta L_2 y está ubicada a la derecha de L_2. Si la distancia de L_1 al origen de coordenadas mide $\sqrt{10}$ unidades, determine su ecuación.



1.1.- Solución

L_2 contiene los puntos $(0, f(0))$ y $(a,0)$, donde $f(0) = 3cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right) = 3$ y

$$f(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3cos\left(\frac{\pi}{2}a\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1.$$

Por lo tanto, $m_{L_2} = \dfrac{0-3}{1-0} = -3 = m_{L_1}$.

Entonces, la ecuación de L_1 hasta el momento sería: $y = -3x + c$ o $3x + y - c = 0$.

Pero, $d(L_1, Origen) = \sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{|3(0)+(0)-c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad |-c| = 10 \quad \Rightarrow \quad c = 10$

Y $L_1 : 3x + y - 10 = 0$, (porque L_1 está a la derecha de L_2)

1.2.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Bueno
Desenfocado	Determina la pendiente de L_1 y la iguala a la pendiente de L_2	Utiliza la fórmula de la distancia de un punto a una recta y los datos para determinar c	Planteamiento y cálculos correctos

0 – 1	2 – 5	6 – 8	9 – 10

TEMA No. 2 (10 PUNTOS)

Sea la elipse con ecuación $16x^2+25y^2-32x-150y-159=0$. Determine la ecuación de la parábola que:

- Es cóncava hacia arriba.
- Su foco está ubicado en el centro de la elipse.
- Su lado recto es el segmento que une los focos de la elipse.

2.1.- Solución

$$16x^2+25y^2-32x-150y-159=0$$
$$\Rightarrow 16\left(x^2-2x\right)+25\left(y^2-6y\right)=159$$
$$\Rightarrow 16\left(x^2-2x+1\right)+25\left(y^2-6y+9\right)=159+16+225$$
$$\Rightarrow 16\left(x-1\right)^2+25\left(y-3\right)^2=400$$
$$\Rightarrow \frac{\left(x-1\right)^2}{\frac{400}{16}}+\frac{\left(y-3\right)^2}{\frac{400}{25}}=\frac{400}{400}$$
$$\Rightarrow \frac{\left(x-1\right)^2}{25}+\frac{\left(y-3\right)^2}{16}=1$$

Entonces, el centro de la elipse es $(1,3)$ y además $a=5, b=4 \Rightarrow c=3$

Pero, $d\left(F_1,F_2\right)=2c=6=4p \quad \Rightarrow \quad p=\frac{3}{2}$

La ecuación de la parábola sería: $y-k=\frac{1}{4p}\left(x-h\right)^2$

Si $F(1,3) \quad \Rightarrow \quad V=\left(1,3-p\right)=\left(1,\frac{3}{2}\right)$

Por lo tanto, $y-\frac{3}{2}=\frac{1}{6}\left(x-1\right)^2$

2.2.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Bueno
Desenfocado	Factoriza para encontrar el centro de la elipse y la distancia focal	Plantea la ecuación canónica de la parábola y trata de determinar h, k y p	Planteamiento y cálculos correctos
0 – 1	2 – 5	6 – 8	9 – 10

TEMA No. 3 (30 PUNTOS)

Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas, justificando su respuesta.

a) La ecuación $r^2 = 4r\cos(\theta) - 6r\,sen(\theta) - 4$ describe una circunferencia con centro $O(2,-3)$ y radio $r = 3$.

3.a.1.- Solución

$$r^2 = 4r\cos(\theta) - 6r\,sen(\theta) - 4$$

En coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x^2 + y^2 = 4x - 6y - 4 \\
&\Rightarrow \left(x^2 - 4x\right) + \left(y^2 + 6y\right) = -4 \\
&\Rightarrow \left(x^2 - 4x + 4\right) + \left(y^2 + 6y + 9\right) = -4 + 4 + 9 \\
&\Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 3^2 \\
&\Rightarrow Centro(2,-3) \quad y \quad r = 3
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la proposición es verdadera.

3.a.2.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Bueno
Desenfocado	Trata de factorizar para justificar la calificación correcta	Logra factorizar pero se equivoca en cálculos	Califica y justifica correctamente
0	1 – 2	3 – 4	5

b) La gráfica de la ecuación $r = 2sen(\theta)\tan(\theta)$ es simétrica respecto al eje polar.

3.b.1.- Solución

Para verificar simetría:

$$\begin{aligned}
r(-\theta) &= 2sen(-\theta)\tan(-\theta) \\
&= 2sen(\theta)\tan(\theta) \\
r(-\theta) &= r(\theta)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la proposición es verdadera.

3.b.2.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Bueno
Desenfocado	Intenta graficar o utilizar criterios de simetría	Recuerda el criterio de simetría, pero se equivoca en cálculos	Plantea y calcula correctamente
0	1 – 2	3 – 4	5

c) Toda función continua en $[a,b]$, es diferenciable en (a,b).

3.c.1.- Solución

La proposición es falsa, ya que no es condición suficiente la continuidad, para que sea diferenciable.

Posible contraejemplo:

$f(x)=|x| \quad en \quad [-1,2]$ no es diferenciable en x = 0.

3.c.2.- Rúbrica

Desempeño		
Regular	Satisfactorio	Bueno
Desenfocado o mal contraejemplo	Califica bien pero no justifica con un contraejemplo correcto	Califica y justifica bien
0 – 1	2 – 4	5

d) Si la posición de un automóvil que se desplaza sobre una recta horizontal en el instante t, está dada por $s(t)=t^3-8t^2+5t+1$ (t expresado en minutos). Los instantes en que el vehículo está inmóvil son t = 1/3 min y t = 5 min.

3.d.1.- Solución

$$s(t)=t^3-8t^2+5t+1$$

$$v=\frac{ds}{dt}=3t^2-16t+5$$

Si el automóvil está inmóvil, se cumple que $v_{inst}=0=\dfrac{ds}{dt}$.

Los t son las raíces de $3t^2-16t+5=0$

$$t_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{(16)^2-4(15)}}{6}$$

$$t_1=5\,\text{min}$$

$$t_2=\frac{1}{3}\,\text{min}$$

Por lo tanto, la proposición es verdadera.

3.d.2.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Bueno
Desenfocado, vacío o califica incorrecta	Trata de determinar la ecuación de la velocidad	Plantea que v = 0 e intenta determinar los tiempos	Calcula y justifica bien
0	1 – 2	3 – 4	5

e) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{y^3}$, cuando $x^2 + y^2 = 1$.

3.e.1.- Solución

$$
\begin{aligned}
& x^2 + y^2 = 1 \\
& \Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \\
& \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} \\
& \Rightarrow D_x y' = D_x\left(-\frac{x}{y}\right) = -D_x\left(\frac{x}{y}\right)
\end{aligned}
$$

$$y'' = -\left(\frac{y - xy'}{y^2}\right)$$

$$y'' = -\left(\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}\right) = -\left(\frac{\frac{y^2 + x^2}{y}}{y^2}\right) = -\left(\frac{x^2 + y^2}{y^3}\right) = -\frac{1}{y^3}$$

Por lo tanto, la proposición es verdadera.

3.e.2.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Bueno
Desenfocado, vacío o no sabe derivar	y' correcta	y'' correcta	Simplificación y cálculo correctos
0	1 – 2	3 – 4	5

f) Sea f una función de variable real continua en $[0,3]$ y diferenciable en $(0,3)$. Si $f'(x) \le 2, \forall x \in (0,3)$ y $f(0) = 1$, entonces $f(3) \le 8$.

3.f.1.- Solución

f tiene las condiciones para aplicar el teorema del valor medio de derivadas.

$$\exists c \in (0,3),\ tal\ \ que\ f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}$$

$$pero\ \ f'(x) \le 2, \forall x\ \ incluido\ \ c$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(3) - 1}{3} \le 2$$

$$\Rightarrow f(3) \le \underbrace{6 + 1}_{7} \le 8$$

Por lo tanto, la proposición es verdadera.

3.f.2.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Bueno
Vacío, desenfocado, o calificación incorrecta	Intenta utilizar teorema del valor medio u otros criterios válidos	Utiliza el teorema pero se equivoca en los cálculos o en la relación de orden	Calificación, planteamiento y cálculo correctos
0	1 – 2	3 – 4	5

<u>TEMA No. 4 (10 PUNTOS)</u>

Obtenga la expresión simplificada de y', si $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$

4.1.- Solución

$$y=\left(\frac{x-5}{\left(x^2+4\right)^{1/5}}\right)^{1/3}$$

$$ln(y)=\frac{1}{3}ln\left(\frac{x-5}{\left(x^2+4\right)^{1/5}}\right)$$

$$ln(y)=\frac{1}{3}\left[ln(x-5)-\frac{1}{5}ln\left(x^2+4\right)\right]$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x-5}-\frac{1}{5}\left(\frac{2x}{x^2+4}\right)\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{5\left(x^2+4\right)-2x(x-5)}{5(x-5)\left(x^2+4\right)}\right]=\frac{1}{15}\left[\frac{3x^2+10x+20}{(x-5)\left(x^2+4\right)}\right]$$

$$y'=\frac{1}{15}\left(\frac{x-5}{\left(x^2+4\right)^{1/5}}\right)^{1/3}\left[\frac{3x^2+10x+20}{(x-5)\left(x^2+4\right)}\right]$$

$$y'=\frac{1}{15}\left[\frac{3x^2+10x+20}{(x-5)^{2/3}\left(x^2+4\right)^{16/15}}\right]$$

4.2.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Bueno
Vacío, desenfocado o no sabe derivar	Aplica correctamente las técnicas de derivación	Se equivoca al simplificar en las expresiones algebraicas	Derivación y manipulación algebraica correctas
0 – 1	2 – 5	6 – 8	9 – 10

TEMA No. 5 (10 PUNTOS)

Determine en qué puntos de la curva definida por $\begin{cases} x = a\left(t - cos\left(t\right)\right) \\ y = a\left(2t - sen\left(t\right)\right) \end{cases}; \qquad t \in \left[0, 2\pi\right]$

a) La derivada es cero
b) La derivada no existe

5.1.- Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{a}\left(2 - cos\left(t\right)\right)}{\cancel{a}\left(1 + sen\left(t\right)\right)} = \frac{2 - cos\left(t\right)}{1 + sen\left(t\right)}$$

$$a)\ \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - cos\left(t\right) = 0 \quad y \quad \forall t, 2 - cos\left(t\right) \neq 0$$

No existen puntos donde $\frac{dy}{dx} = 0$

$$b)\ \frac{dy}{dx}\ no\ existe \quad \Rightarrow \quad 1 + sen\left(t\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad sen\left(t\right) = -1$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{3\pi}{2}$$

$\Rightarrow \quad \left(\frac{3a\pi}{2}, a\left(3\pi + 1\right)\right)$ la derivada no existe

5.2.- Rúbrica

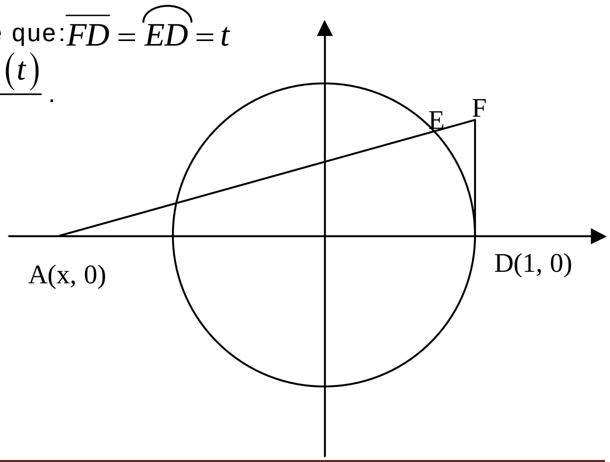
Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Bueno
No sabe derivar, desenfocado o vacío	Sabe como calcular la derivada en forma paramétrica pero se equivoca al derivar	Derivadas correctas pero no concluye o calcula bien	Determinación correcta que no existe punto donde la primera derivada es cero y el punto donde la primera derivada no existe
0 – 1	2 – 5	6 – 8	9 – 10

TEMA No. 6 (10 PUNTOS)

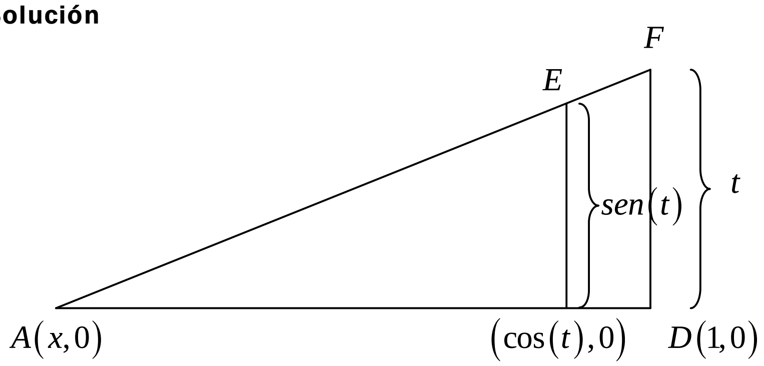
Respecto a la figura adjunta, si se conoce que: $\overline{FD} = \overset{\frown}{ED} = t$

a) Demuestre que $x\left(t\right) = \frac{t\cos\left(t\right) - sen\left(t\right)}{t - sen\left(t\right)}$.

b) Calcule $\lim\limits_{t \to 0^+} x\left(t\right)$.



6.1.- Solución



Atención: Dado que en el examen, se cometió el error de denotar como segmento a ED y no como arco, se asignarán los 5 puntos a favor del estudiante.

a)

$$\frac{sen(t)}{cos(t)-x}=\frac{t}{1-x}$$

$$(1-x)sen(t)=t(cos(t)-x)$$

$$sen(t)-xsen(t)=t\,cos(t)-xt$$

$$xt-xsen(t)=t\,cos(t)-sen(t)$$

$$x(t-sen(t))=t\,cos(t)-sen(t)$$

$$x=\frac{t\,cos(t)-sen(t)}{t-sen(t)}$$

b)

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{t\,cos(t)-sen(t)}{t-sen(t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\cancel{cos(t)}-tsen(t)-\cancel{cos(t)}}{1-cos(t)}$$

$$=-\lim_{t\to 0^+}\frac{sen(t)+t\,cos(t)}{sen(t)}$$

$$=-\lim_{t\to 0^+}\frac{cos(t)+cos(t)-tsen(t)}{cos(t)}$$

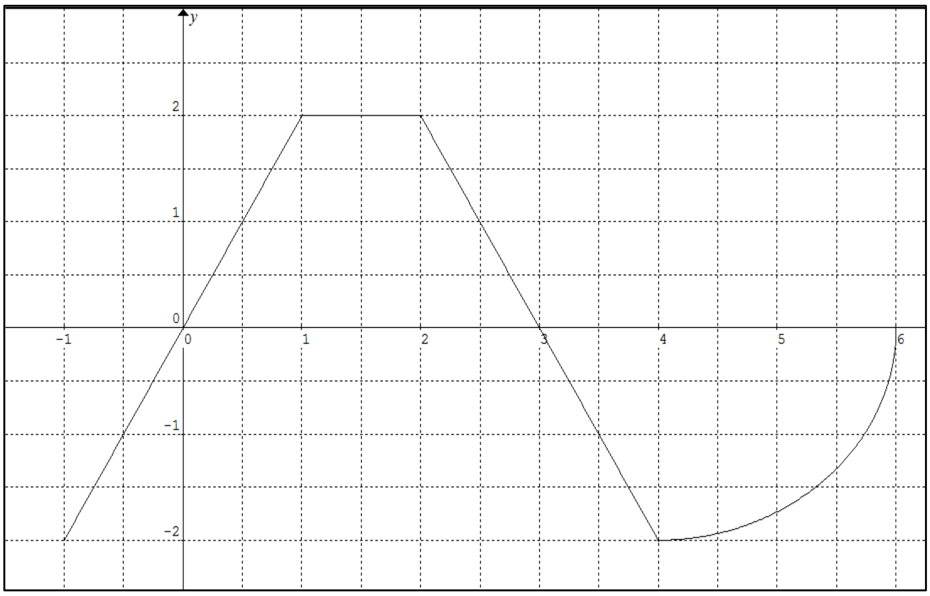
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{t\,cos(t)-sen(t)}{t-sen(t)}=-2$$

6.2.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Bueno
Vacío o desenfocado	Calcula el límite e intentar determinar el valor de x	Establece relaciones para despejar el valor de x	Encuentra x y determina el límite
0 – 1	2 – 5	6 – 8	9 – 10

TEMA No. 7 (20 PUNTOS)

Sea la gráfica de la función $y = f'(x)$.



Califique cada proposición como verdadera o falsa, justifique su respuesta.

a) f es decreciente en (2, 4).

b) $f''(x) > 0, \forall x \in (-1, 1)$.

c) f es una recta de pendiente m=1 en el intervalo (1, 2).

d) $f''(1)$, $f''(2)$ y $f''(4)$ no existen.

7.1.- Solución

a) Falsa, f crece en (2, 3) porque f' es positiva.

b) Verdadera, ya que $f''(x) = 2$

c) Falsa, ya que $f'(x) = 2$

d) Verdadera, ya que en estos valores de x se presenta un cambio brusco en la pendiente y la derivada de f' como límite bilateral no existe.

7.2.- Rúbrica

Cada literal tiene un valor de 5 puntos.

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Bueno
Desenfocado o cálculos incorrectos	Intenta justificar la calificación	Justificación correcta pero numéricamente incorrecto	Califica y justifica correctamente
0	1 – 2	3 – 4	5