2. (15 puntos)

a. Demostrar que si f es una función continua por segmentos en $[0,+\infty)$ y $F(s)=L[f(t)]$ existe para $s>\alpha$, entonces $L[\mu(t-a)f(t-a)]=e^{-as}F(s)$ para $s>a+\alpha$

b. Determinar la transformada inversa de Laplace de la función $F(s)=\ln\left(\frac{s-1}{s^2+2s+5}\right)$

c. Determinar la solución de la siguiente ecuación integro-diferencial:

$$y'(t)+\int_0^t (t-u)y(u)du=t;\ \ y(0)=0$$

a) $\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$

$\Rightarrow \mathcal{L}[f(t-a)\mu(t-a)]=\int_0^{+\infty} f(t-a)\mu(t-a)e^{-st}dt$

$\left.\begin{array}{l} v=t-a \Rightarrow dv=dt \\ t=0 \Rightarrow v=-a \\ t\to\infty \Rightarrow v\to+\infty \\ t=v+a \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{-a}^{+\infty} f(v)\mu(v)e^{-s(v+a)}dv$

$\Rightarrow \mu(v)=\begin{cases} 1 & v\geq 0 \\ 0 & v<0 \end{cases}$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(v)e^{-sv}\cdot e^{-as}dv$

$=e^{-as}\underbrace{\int_0^{+\infty} f(v)e^{-sv}dv}$

$\mathcal{L}[f(t-a)\mu(t-a)]=e^{-as}\mathcal{L}[f(t)]$

$\Rightarrow \mathcal{L}[f(t-a)\mu(t-a)]=e^{-as}F(s)$

b) $F(s)=\ln\left(\frac{s-1}{s^2+2s+5}\right)$

$F(s)=\ln(s-1)-\ln(s^2+2s+5)$

$\frac{d}{ds}F(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{2s+2}{s^2+2s+5}$ $\Rightarrow$