3 Funciones De Varias Variables

OBJETIVOS:

- Conceptualizar funciones Vectoriales, Escalares y Curvas
- Describir conjuntos de niveles.
- Establecer límites, continuidad y derivadas de funciones de dos variables.
- Determinar si una función de dos variables es derivable o no.
- Determinar si una función de dos variables es diferenciable o no.
- Obtener derivadas de funciones compuestas.
- Obtener derivadas de funciones implícitas.

3.1 FUNCIÓN VECTORIAL

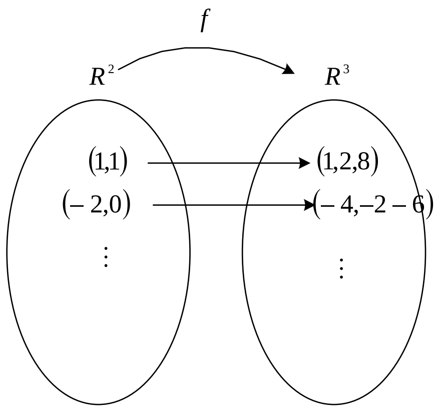
3.1.1 DEFINICIÓN

Una función del tipo $f : U \subseteq R^n \to R^m$ se la denomina FUNCIÓN VECTORIAL o CAMPO VECTORIAL.

Ejemplo.

Sea $f : R^2 \to R^3$ tal que $f(x,y) = (2x - y, x + y, 3x + 5y)$

Esquemáticamente tenemos:



Si $m = 1$, tenemos $f : U \subseteq R^n \to R$, se la denomina **FUNCIÓN ESCALAR**, **CAMPO ESCALAR**, **O FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES.**

Si $f : U \subseteq R^2 \to R$, tenemos una **FUNCIÓN DE DOS VARIABLES.**

Ejemplo.

Sea $f : R^2 \to R$ tal que $f(x,y) = 6 - 2x - 3y$

Si $f : U \subseteq R^3 \to R$, tenemos una **FUNCIÓN DE TRES VARIABLES.**

Ejemplo.

Sea $f : R^3 \to R$ tal que $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

Si $n = 1$, tenemos $f : U \subseteq R \to R^m$, la cual se la denomina **TRAYECTORIA** O **CURVA**.

Ejemplo.

Sea $f : R \to R^3$ tal que $f(t) = (2-3t,\ 4+t,\ -1+2t)$

Tenemos una CURVA de R^3.

Este capítulo lo dedicaremos al estudio de **FUNCIONES ESCALARES.**

3.2. GRAFICA DE UNA FUNCIÓN ESCALAR

3.2.1 DEFINICIÓN

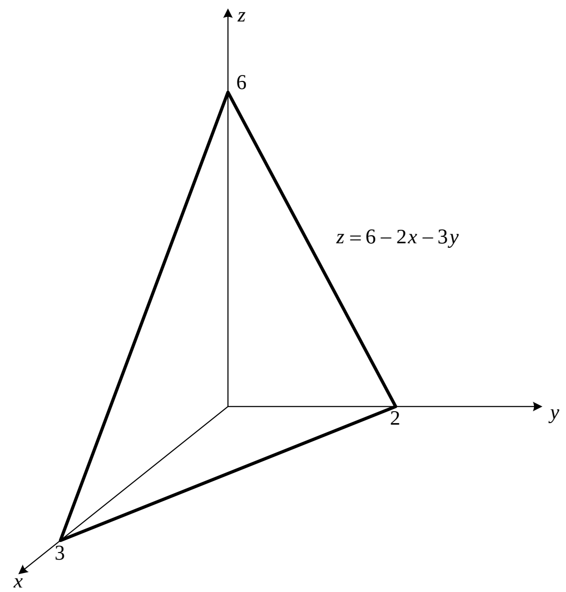
Sea $f : U \subseteq R^n \to R$. Se llama ***gráfica*** de f al conjunto de puntos $\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, f(\overline{x})\right)$ de R^{n+1}, donde $\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in U$.

Si tenemos $z = f(x,y)$ una función de dos variables. Su **gráfica** se define como el conjunto de puntos (x,y,z) de R^3, tales que $z = f(x,y)$. El lugar geométrico es llamado **Superficie**, como ya se lo ha anticipado.

Algunas superficies que corresponde a funciones, ya se han graficado en el capítulo anterior.

Ejemplo.

Para $f : R^2 \to R$ tal que $f(x,y) = 6 - 2x - 3y$, su grafico es el conjunto (x,y,z) de R^3 tales que $z = 6 - 2x - 3y$ (un plano)



Elaborar gráficas de una función de dos variables no es tan sencillo, se requeriría de un computador en la mayoría de las ocasiones. Pero si podemos saber características de sus graficas analizando su regla de correspondencia.

3.3 DOMINIO DE UNA FUNCIÓN ESCALAR

Sea $f: U \subseteq R^n \to R$, entonces su **DOMINIO** es el conjunto U

Es decir, su **DOMINIO** está constituido por vectores de R^n, $\bar{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ para los cuales tiene sentido la regla de correspondencia.

Aquí a $x_{1,} x_2, \cdots, x_n$ se las denominan **VARIABLES INDEPENDIENTES.**

Si $f: U \subseteq R^2 \to R$, su dominio será un subconjunto del plano.

Establecer el Dominio Natural, igual que para funciones de una variable, es una necesidad en muchas ocasiones.

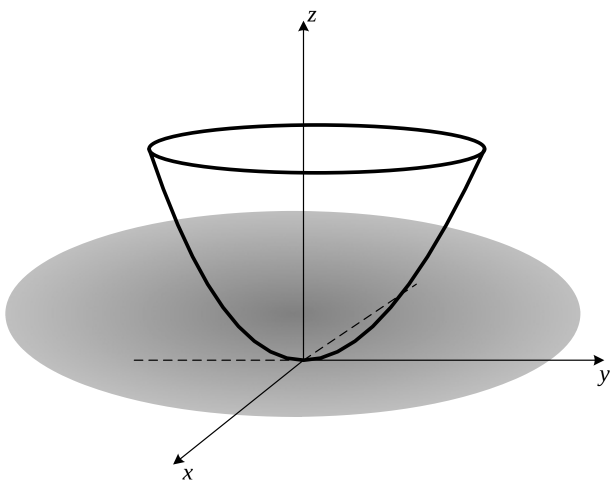
Ejemplo 1

Hallar el Dominio Natural para $f(x, y) = x^2 + y^2$

SOLUCIÓN.

Observe que la regla de correspondencia no tiene restricciones, por tanto se le puede dar cualquier valor real a las variables independientes "x" y "y", es decir $Domf = R^2$.

Además, se puede decir que el Dominio de una función de dos variables será la PROYECCIÓN QUE TENGA SU GRÁFICA EN EL PLANO xy. Recuerde que la gráfica de $z = x^2 + y^2$ es un paraboloide.



Por tanto la proyección es todo el plano xy

Ejemplo 2

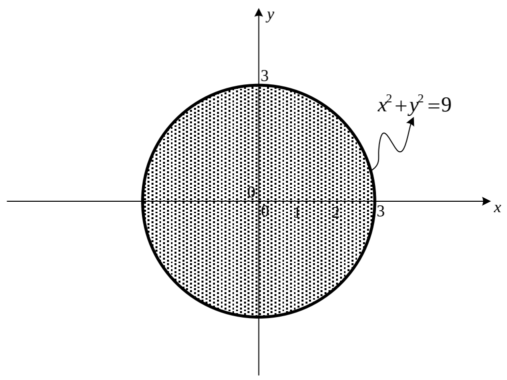
Hallar el Dominio Natural para $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

SOLUCIÓN.

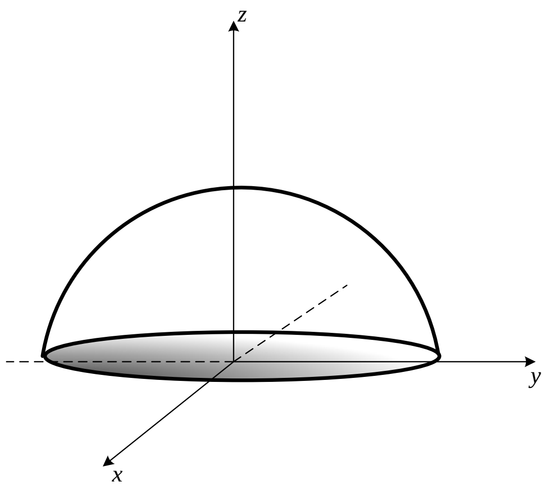
Observe que la regla de correspondencia tiene sentido cuando $9-x^2-y^2\geq 0$, para que se pueda calcular la raíz cuadrada lo interior del radical debe ser un número positivo o cero.

Despejando se tiene $x^2+y^2\leq 9$.

Es decir: $Domf=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}/x^2+y^2\leq 9\right\}$, los pares de números que pertenecen a la circunferencia centrada en el origen de radio 3 y a su interior.



Además el gráfico de $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, es la semiesfera:



Ejemplo 3

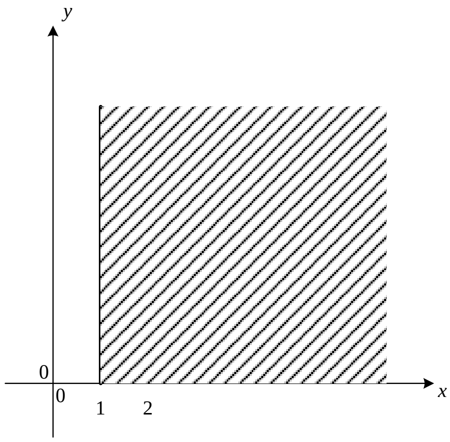
Hallar el Dominio Natural para $f(x,y)=\sqrt{x-1}+\sqrt{y}$

Solución.

Para que la regla de correspondencia tenga sentido se necesita que $x\geq 1$ y $y\geq 0$

Es decir $Domf=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}/x\geq 1\wedge y\geq 0\right\}$.

.



El gráfico, ahora es un lugar geométrico no conocido. Pero tenemos un indicio de la región en que habrá gráfico.

Ejercicios Propuestos 3.1

Dibújese la región R del plano xy que corresponde al Dominio Natural de la función dada.

1. $z = x\sqrt{y}$	8. $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)\ln\left(\frac{2}{x+y}\right)$
2. $z = e^{x/y}$	9. $z = \operatorname{arcsen}(x+y)$
3. $z = \frac{x+y}{xy}$	10. $z = arcsen\left(x^2+y^2\right)$
4. $z = \sqrt{4-12x^2-36y^2}$	11. $z = \arccos\left(\frac{x}{y}\right)$
5. $z = \ln(4-x-y)$	12. $f(x,y) = \frac{\ln\left(4-x^2-y^2\right)^{1/2}}{\operatorname{arcsen}(x+y)}$
6. $z = \ln\left(y-x^2\right)$	
7. $w = \ln\left(\frac{9x^2-6y^2-36}{36}\right)$	

Obtener trazas de las secciones transversales de la superficie es suficiente, en muchas ocasiones, para su análisis.

3. 4. CONJUNTO DE NIVEL

3.4.1 DEFINICIÓN

Sea $f: U \subseteq R^n \to R$. Se llama **CONJUNTO DE NIVEL** de f, al conjunto de puntos de R^n tales que $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = k$, donde $k \in R$

Si tenemos $z = f(x,y)$ una función de dos variables. El Conjunto de Nivel es llamado **CURVAS DE NIVEL** y serían las trayectorias en el plano xy tales que $f(x,y)=k$. Es decir, serían las curvas que resultan de la intersección de la superficie con los planos $z=k$, proyectadas en el plano xy.

Ejemplo 1

Para $f:R^2 \to R$ tal que $f(x,y)=6-2x-3y$, su conjunto de nivel serán puntos de R^2 tales que $6-2x-3y=k$.

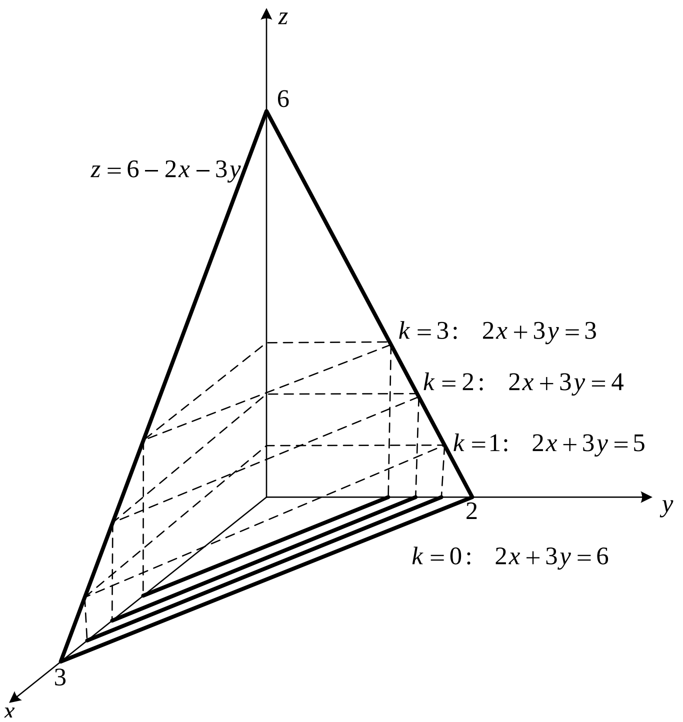
En este caso se llaman CURVAS DE NIVEL.

Si $k=0$, tenemos el **Nivel** 0, $6-2x-3y=0$

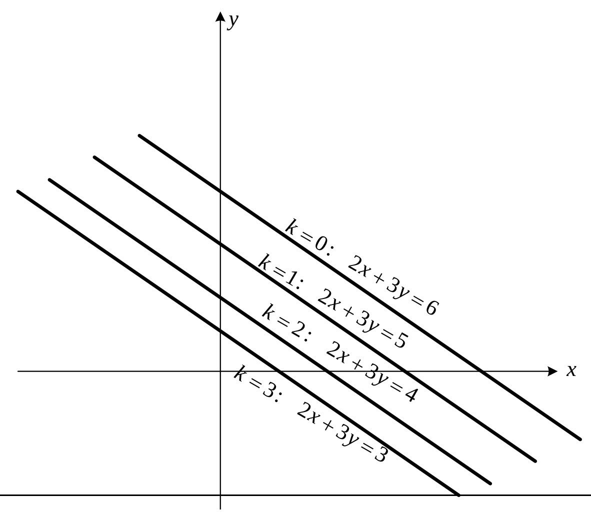
Si $k=1$, tenemos el **Nivel** 1, $6-2x-3y=1$

Si $k=2$, tenemos el **Nivel** 2, $6-2x-3y=2$

etc.



Las curvas de nivel se dibujan en el plano xy, y para este caso serían:

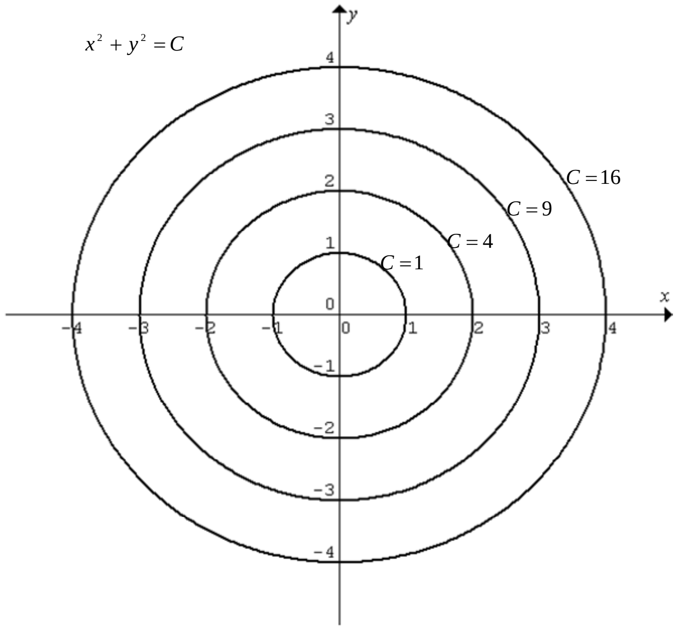


Ejemplo 2.

Grafique algunas curvas de nivel para $f(x,y)=x^2+y^2$

SOLUCIÓN:

Las curvas de nivel, para este caso, es la familia de trayectorias tales que $x^2+y^2=k$. (Circunferencias centradas en el origen)



Si tenemos $w=f(x,y,z)$ una función de tres variables. El Conjunto de Nivel, $f(x,y,z)=k$, es llamado **SUPERFICIES DE NIVEL**

Ejercicios Propuestos 3.2

Descríbase las curvas de nivel :

1. $f(x,y)=6+x-y$
2. $f(x,y)=y^2$
3. $z=4-x^2-y^2$
4. $z=\sqrt{x^2+y^2}$
5. $f(x,y)=xy^2$

3.5 LIMITES DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

Haciendo analogía con funciones de una variable, para definir el límite ahora, primero empecemos generalizando la definición de entorno o vecindad y otras definiciones que nos permitirán comprender el concepto de límite.

3.5.1 BOLA ABIERTA.

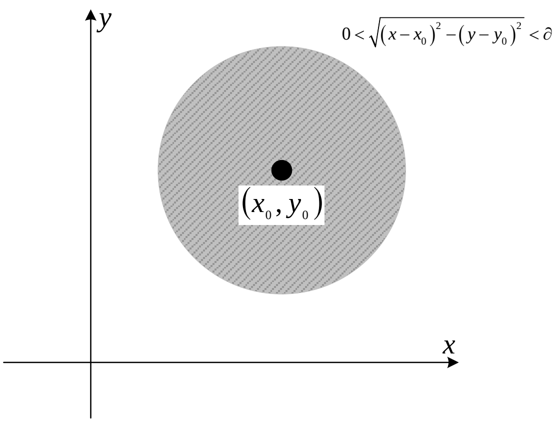
Sea $\overline{x_0} \in R^n$ y $\partial \in R$ muy pequeño. Se llama Bola Abierta de centro $\overline{x_0}$ y radio δ, denotada por $B_n\left(\overline{x_0};\delta\right)$, al conjunto de puntos de R^n tales que la distancia a $\overline{x_0}$ es menor a ∂. Es decir:

$$B_n\left(\overline{x_0};\delta\right)=\left\{\overline{x} \in R^n \,/\, \left\|\overline{x}-\overline{x_0}\right\| < \partial\right\}$$

Si $n=1$, tenemos $B_1\left(x_0;\delta\right)=\left\{x \in R \,/\, \left|x-x_0\right| < \partial\right\}$; un intervalo (como en funciones de una variable)

Si $n=2$, tenemos:

$$B_2\left(\left(x_0,y_0\right);\delta\right)=\left\{\left(x,y\right) \in R^2 \,/\, \left\|\left(x,y\right)-\left(x_0,y_0\right)\right\| < \partial\right\}$$



3.5.2 PUNTO INTERIOR

Sea $U \subseteq R^n$ y $\overline{x_0} \in R^n$, se dice que $\overline{x_0}$ es un punto interior de U, si y sólo si $\exists \partial > 0$ tal $B_n\left(\overline{x_0};\partial\right)$ está contenida en U.

3.5.3 CONJUNTO ABIERTO

$U \subseteq R^n$ es un conjunto abierto, si todos sus puntos son interiores a U.

3.5.4 PUNTO EXTERIOR.

Sea $U \subseteq R^n$ y $\overline{x_0} \in R^n$, se dice que $\overline{x_0}$ es un punto Exterior de U, si y sólo si $\exists \partial > 0$ tal que $B_n\left(\overline{x_0};\partial\right)$ está totalmente fuera de U.

3.5.5 PUNTO DE FRONTERA

Se dice que $\overline{x_0}$ es un punto de frontera de U, si no es ni interior ni exterior.

3.5.6 CONJUNTO CERRADO.

$U \subseteq R^n$ es un conjunto cerrado si su complemento es abierto

3.5.7 CONJUNTO SEMIABIERTO.

$U \subseteq R^n$ es un conjunto semiabierto si no es abierto y tampoco cerrado.

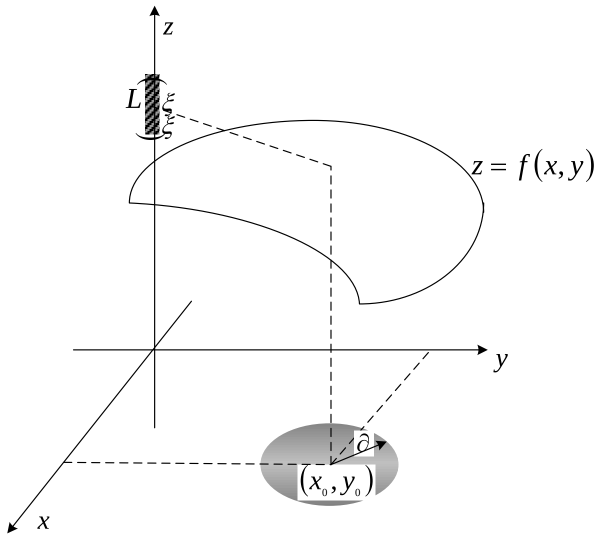
3.5.8 DEFINICIÓN DE LÍMITE

Sea $f : U \subseteq R^n \to R$, donde U es un conjunto abierto, sea $\overline{x_0}$ un punto interior o de frontera de U, entonces:

$$\left(\lim_{\overline{x} \to \overline{x_0}} f\left(\overline{x}\right) = L\right) \equiv \forall \xi > 0, \exists \partial > 0 / \left[\, \overline{x} \in B_n\left(\overline{x_0};\partial\right), \overline{x} \neq \overline{x_0} \,\right] \Rightarrow \left| f\left(\overline{x}\right) - L \right| < \xi$$

Si $n=2$ tenemos:

$$\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L\right)\equiv \forall\xi>0,\exists\partial>0\,/\,0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\partial \Rightarrow \left|f(x,y)-L\right|<\xi$$



Es decir, que si tomamos a (x,y) cercano a (x_0,y_0) entonces $f(x,y)$ estará próximo a L.

Ejemplo

Demostrar empleando la definición que $\lim\limits_{(x,y)\to(0.0)} \dfrac{x^4y}{x^4+y^4}=0$

Solución:

Debemos asegurar que

$$\forall\xi>0,\exists\partial>0\,/\,0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\partial \Rightarrow \left|\frac{x^4y}{x^4+y^4}-0\right|<\xi$$

Recuerde que $\boxed{|y|=\sqrt{y^2}=}$ entonces $|y|\le\sqrt{x^2+y^2}$

Por otro lado $|y|=\left|\dfrac{x^4y}{x^4}\right|$ entonces $|y|\ge\left|\dfrac{x^4y}{x^4+y^4}\right|$.

Ahora note que:

$$\left|\frac{x^4y}{x^4+y^4}\right|\le|y|\le\sqrt{x^2+y^2}<\partial$$

Se concluye finalmente que: $\left|\dfrac{x^4y}{x^4+y^4}\right|<\partial$

Es decir tomando $\zeta=\partial$, suficiente para concluir que: $\lim\limits_{(x,y)\to(0.0)} \dfrac{x^4y}{x^4+y^4}=0$

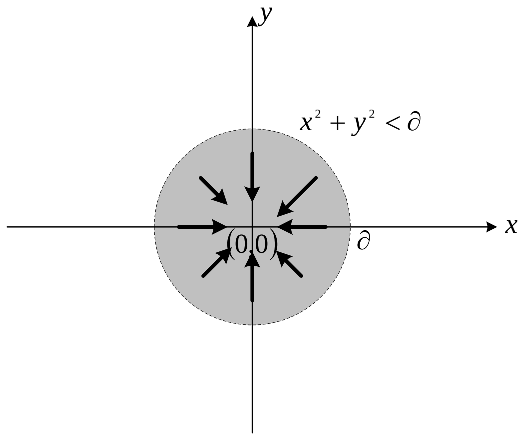
Lo anterior va a ser complicado hacerlo en la mayoría de las situaciones, por tanto no vamos a insistir en demostraciones formales. Pero si se trata de estimar si una función tiene límite y cuál podría ser este, podemos hacer uso del acercamiento por trayectorias.

Ejemplo 1

Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0.0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

Solución:

Aproximarse a $(0,0)$, significa estar con (x,y) en una bola de R^2



Si el límite existe, significa que si nos acercamos en todas las direcciones f deberá tender al mismo valor.

1. Aproximémonos a través del eje x, es decir de la recta $y=0$

   Entonces, tenemos $\lim\limits_{(x,0)\to(0.0)} \frac{x^2}{x^2+0^2} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$.

2. Aproximémonos a través del eje y, es decir de la recta $x=0$

   Entonces, tenemos $\lim\limits_{(0,y)\to(0.0)} \frac{0^2}{0^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$.

Se observa que los dos resultados anteriores son diferentes.

Por tanto, se concluye que: $\lim\limits_{(x,y)\to(0.0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ no existe.

Ejemplo 2

Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0.0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$

Solución:

Determinando la convergencia de f, para diversas direcciones:

1. Eje x ($y=0$): $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 0}{x^4+0^2} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$

2. Eje y ($x=0$): $\lim\limits_{y\to 0} \frac{0^2 y}{0^4+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$

3. Rectas que pasan por el origen ($y=mx$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(mx)}{x^4+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^2\left(x^2+m^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{\left(x^2+m^2\right)} = 0$$

4. Parábolas que tengan vértice el origen ($y = ax^2$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(ax^2\right)}{x^4+\left(ax^2\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^4}{x^4+a^2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^4}{x^4\left(1+a^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{1+a^2}=\frac{a}{1+a^2}\neq 0$$

Por tanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0.0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ NO EXISTE.

El acercamiento por trayectoria no nos garantiza la existencia del límite, sólo nos hace pensar que si el límite existe, ese debe ser su valor. Entonces ¿cómo lo garantizamos?. Si la expresión lo permite podemos usar coordenadas polares.

Ejemplo

Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0.0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

Solución:

Determinando la convergencia de f , para diversas direcciones:

1. Eje x ($y = 0$): $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 0}{x^2+0^2}=\lim\limits_{x\to 0}0=0$

2. Eje y ($x = 0$): $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0^2 y}{0^2+y^2}=\lim\limits_{y\to 0}0=0$

3. Rectas que pasan por el origen ($y = mx$):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(mx)}{x^2+(mx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^3}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^3}{x^2\left(1+m^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{\left(1+m^2\right)}=0$$

4. Parábolas que tengan vértice el origen ($y = ax^2$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(ax^2\right)}{x^2+\left(ax^2\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^4}{x^2+a^2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^4}{x^2\left(1+a^2x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2}{1+a^2x^2}=0$$

Probemos con otra trayectoria

5. $x = ay^2$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\left(ay^2\right)^2 y}{\left(ay^2\right)^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{a^2y^5}{a^2y^4+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{a^2y^5}{y^2\left(a^2y^2+1\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{a^2y^3}{\left(a^2y^2+1\right)}=0$$

Parecer ser que el límite es cero, pero todavía no está garantizado. ¿Por qué?

Demostrarlo, no es una tarea sencilla. Usemos coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0.0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}&=\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^2(rsen\theta)}{r^2}\\&=\lim_{r\to 0}\frac{r^3sen\theta\cos^2\theta}{r^2}\\&=\lim_{r\to 0}\left(rsen\theta\cos^2\theta\right)\end{aligned}$$

En la parte última se observa que $sen\theta\cos^2\theta$ es acotado por tanto

$$\lim_{r\to 0}\left(rsen\theta\cos^2\theta\right)=0$$

Lo anterior quiere decir que en situaciones especiales (¿cuáles?), podemos utilizar coordenadas polares para demostrar o hallar límites.

Ejemplo 1

Calcular $\underset{(x,y)\to(0.0)}{lím} \dfrac{sen\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$

Solución:

Empleando coordenadas polares

$$\underset{(x,y)\to(0.0)}{lím} \frac{sen\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \underset{r\to 0}{lím} \frac{sen\left(r^2\right)}{r^2} = 1$$

Ejemplo 2

Calcular $\underset{(x,y)\to(0.0)}{lím} \dfrac{x^2y^5}{2x^4+3y^{10}}$

Solución:

Empleando coordenadas polares

$$\underset{(x,y)\to(0.0)}{lím} \frac{x^2y^5}{2x^4+3y^{10}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta\, r^5 sen^5\theta}{2r^4\cos^4\theta + 3r^{10}sen^{10}\theta}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^7\cos^2\theta\, sen^5\theta}{r^4\left[2\cos^4\theta + 3r^6 sen^{10}\theta\right]}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\theta\, sen^5\theta}{2\cos^4\theta + 3r^6 sen^{10}\theta}$$

No se puede concluir.

Analicemos algunas trayectorias:

$\boxed{x=0}$ $\underset{(x,x)\to(0,0)}{lím} \dfrac{0^2y^5}{2\left(0^4\right)+3y^{10}} = 0$

$\boxed{y=0}$ $\underset{(x,x)\to(0,0)}{lím} \dfrac{x^2 0^5}{2\left(x^4\right)+3\left(0\right)^{10}} = 0$

$\boxed{y=x}$ $\underset{(x,x)\to(0,0)}{lím} \dfrac{x^2x^5}{2x^4+3x^{10}} = \underset{x\to 0}{lím} \dfrac{x^7}{x^4\left(2+3x^6\right)} = \underset{x\to 0}{lím} \dfrac{x^4}{2+3x^6} = 0$

$\boxed{y=x^2}$ $\underset{(x,x^2)\to(0,0)}{lím} \dfrac{x^2x^{10}}{2x^4+3x^{20}} = \underset{x\to 0}{lím} \dfrac{x^{12}}{x^4\left(2+3x^{16}\right)} = \underset{x\to 0}{lím} \dfrac{x^8}{2+3x^6} = 0$

Ahora, probemos con una trayectoria nueva $\boxed{x=y^{5/2}}$ (se la deduce observando la expresión original)

$$\underset{\left(y^{5/2},y\right)\to(0,0)}{lím} \frac{\left(y^{5/2}\right)^2 y^5}{2\left(y^{5/2}\right)^4+3y^{10}} = \underset{x\to 0}{lím} \frac{y^{10}}{2y^{10}+3y^{10}} = \frac{1}{5} \neq 0$$

Por tanto se concluye que el límite NO EXISTE.

3.5.8.1 TEOREMA DE UNICIDAD.

Sea $f: U \subseteq R^n \to R$, donde U es un conjunto abierto, sea $\overline{x_0}$ un punto interior o de frontera de U, entonces:
Si $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x_0}} f\left(\overline{x}\right) = L$ y $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x_0}} f\left(\overline{x}\right) = M$ entonces $L = M$

3.5.8.2 TEOREMA PRINCIPAL.

Si $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x_0}} f\left(\overline{x}\right) = L$ y $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x_0}} g\left(\overline{x}\right) = M$ entonces:

1. $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x_0}} \left[f\left(\overline{x}\right) + g(\overline{x}) \right] = \lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x_0}} f\left(\overline{x}\right) + \lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x_0}} g(\overline{x}) = L + M$
2. $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x_0}} \left[f\left(\overline{x}\right) - g(\overline{x}) \right] = \lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x_0}} f\left(\overline{x}\right) - \lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x_0}} g(\overline{x}) = L - M$
3. $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x_0}} \left[f\left(\overline{x}\right) g(\overline{x}) \right] = \lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x_0}} f\left(\overline{x}\right) \lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x_0}} g(\overline{x}) = LM$
4. $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x_0}} \left[\dfrac{f}{g}\left(\overline{x}\right) \right] = \dfrac{\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x_0}} f\left(\overline{x}\right)}{\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x_0}} g(\overline{x})} = \dfrac{L}{M}$; $M \neq 0$

Por tanto en situaciones elementales, la sustitución basta.

Ejemplo

$$\underset{(x,y)\to(1.2)}{lím}\left(x^2 + 2y - 3\right) = 8$$

Ejercicios Propuesto 3.3

1. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1}} \left(x + 3y^2\right)$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to \pi/4 \\ y \to 2}} y\,sen(xy)$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to k \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 sen\left(\frac{y}{k}\right)}{y}$

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{e^{xy} - 1}{x}$

e) $\underset{(x,y\to(0,0))}{lím} \dfrac{2x - y^2}{2x^2 + y}$

f) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{sen(x + y)}{y}$

2. Calcúlese el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y)\to(a,b)$ hallando los límites: $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ y $\lim\limits_{y\to b} h(y)$, donde $f(x,y)=g(x)h(y)$

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(1+senx)(1-\cos y)}{y}$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{2x(y-1)}{(x+1)y}$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\cos x\, seny}{y}$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{(x-1)e^{y}}$

3.6. CONTINUIDAD

Sean $f:U\subseteq R^n \to R$, sea $\overline{x_0}$ un punto U. Decimos que f es continua en $\overline{x_0}$ si y sólo si:

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} f\left(\overline{x}\right)=f\left(\overline{x_0}\right)$$

Ejemplo.

Analizar la continuidad de $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$

En el punto $(0,0)$.

SOLUCIÓN:

Para que la función sea continua se debe cumplir que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

Determinemos el límite. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Acercándonos por trayectorias.

$y=0;\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x^2}=0$

$x=0;\ \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0}{y^2}=0$

$y=x;\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}$

Entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ no existe. Por tanto, f NO ES CONTINUA EN $(0,0)$.

3.6.1 CONTINUIDAD EN UN INTERVALO

Sea $f: U \subseteq R^n \to R$. Se dice que f es continua en todo U si y sólo si es continua en cada punto de U.

3.6.1.1 Teorema

Si f y g son continuas en $\overline{x_0}$, entonces también son continuas: $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}\left(g\left(\overline{x}_0\right)\neq 0\right)$.

Ejercicios propuestos 3.4

Analice la continuidad en $(0,0)$ de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\text{sen } xy}{xy}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases}e^{xy}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases}1-\dfrac{\cos\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ -8, & x^2+y^2=0\end{cases}$

d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2-y^2}{\sqrt{\left|1-x^2-y^2\right|}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 1, & x^2+y^2=0\end{cases}$

e) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

f) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{|x|+|y|}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

g) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}+x-y, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

h) $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-4y^2}, & x^2+4y^2\leq 1\\ 0, & x^2+4y^2>1\end{cases}$

3.7. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN ESCALAR.

Para funciones de una variable, la derivada se la definió como el cambio instantáneo que experimenta la función cuando cambia su variable independiente x. Aquí había que considerar una sola dirección, para función de varias variables debería ser el cambio instantáneo que tiene la función en todas las direcciones en la vecindad de un punto.

3.7.1 DERIVADA DIRECCIONAL. Derivada de un campo escalar con respecto a un vector.

Sea $f:U\subseteq R^n \to R$, donde U es un conjunto abierto, $\overline{x}_0$ un punto de U. Sea $\vec{v}$ un vector de R^n.

La derivada de f en $\overline{x}_0$ con respecto a $\vec{v}$, denotada por $f'\left(\overline{x}_0;\vec{v}\right)$ o también $D_{\vec{v}}f\left(\overline{x}_0\right)$, se define como:

$$f'\left(\overline{x}_0;\vec{v}\right)=\lim_{\left\|\vec{v}\right\|\to 0}\frac{f\left(\overline{x}_0+\vec{v}\right)-f\left(\overline{x}_0\right)}{\left\|\vec{v}\right\|}$$

Cuando este límite existe

Ahora bien, si decimos que $\left\|\vec{v}\right\|=h$ entonces $\vec{v}=h\vec{u}$ donde $\vec{u}$ un ***VECTOR UNITARIO*** de R^n, entonces:

La ***derivada direccional*** de f en $\overline{x}_0$ con respecto $\vec{u}$ es:

$$f'\left(\overline{x}_0;\vec{u}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\overline{x}_0+h\vec{u}\right)-f\left(\overline{x}_0\right)}{h}$$

Ejemplo 1

Sea $f\left(\overline{x}\right)=\left\|\overline{x}\right\|^2;\quad \overline{x}\in R^n$. Calcular $f´\left(\overline{x}_0,\overrightarrow{v}\right)$.

SOLUCIÓN:

$$
\begin{aligned}
f´\left(\overline{x}_0;\overrightarrow{v}\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\overline{x}_0+h\overrightarrow{u}\right)-f\left(\overline{x}_0\right)}{h}=\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left\|\overline{x}_0+h\overrightarrow{u}\right\|^2-\left\|\overline{x}_0\right\|^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\overline{x}_0+h\overrightarrow{u}\right)\bullet\left(\overline{x}_0+h\overrightarrow{u}\right)-\left(\overline{x}_0\right)\bullet\left(\overline{x}_0\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\overline{x}_0\bullet\overline{x}_0+2h\overrightarrow{u}\bullet\overline{x}_0+h^2\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}-\overline{x}_0\bullet\overline{x}_0}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2h\overrightarrow{u}\bullet\overline{x}_0+h^2\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(2\overrightarrow{u}\bullet\overline{x}_0+h\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}\right)\\
&= 2\overrightarrow{u}\bullet\overline{x}_0
\end{aligned}
$$

Si $f:U\subseteq R^2\to R$ (una función de dos variables), entonces:

$$
f´\left(\left(x_0,y_0\right);\overrightarrow{u}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\left(x_0,y_0\right)+h\overrightarrow{u}\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}
$$

Ejemplo 2

Sea $f(x,y)=x^2+y^2$. Hallar $D_{\overrightarrow{u}}f(1,2)$ donde $\overrightarrow{u}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

SOLUCIÓN:

Empleando la definición:

$$
\begin{aligned}
D_{\overrightarrow{u}}f(1,2) &= \lim_{h\to 0}\frac{f\left((1,2)+h\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)-f(1,2)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+h\frac{\sqrt{2}}{2},2+h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-f(1,2)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[\left(1+h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(2+h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]-\left[1^2+2^2\right]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[1+h\sqrt{2}+\frac{h^2}{2}+4+2h\sqrt{2}+\frac{h^2}{2}\right]-[5]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{5+3h\sqrt{2}+h^2-5}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3h\sqrt{2}+h^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(3\sqrt{2}+h\right)\\
&= 3\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3

Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2};(x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Hallar $D_{\vec{u}} f(0,0)$ donde $\vec{u}=(\cos\theta, sen\theta)$

SOLUCIÓN:
Aplicando la definición:

$$\begin{aligned}D_{\vec{u}} f(0,0)&=\lim_{h\to 0}\frac{f\left((0,)+h(\cos\theta,sen\theta)\right)-f(0,0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(h\cos\theta,hsen\theta)-f(0,0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\dfrac{(h\cos\theta)(hsen\theta)}{h^2}\right]-0}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\theta sen\theta}{h}\end{aligned}$$

En la última expresión:

1. Si $\theta=0,\dfrac{\pi}{2},\pi,3\dfrac{\pi}{2}$ entonces $D_{\vec{u}} f(0,0)=0$
2. Si $\theta\neq 0,\dfrac{\pi}{2},\pi,3\dfrac{\pi}{2}$ entonces $D_{\vec{u}} f(0,0)$ no existe.

Ejemplo 4

Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2};(x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Hallar $D_{\vec{u}} f(0,0)$ donde $\vec{u}=(\cos\theta, sen\theta)$

Solución:
Aplicando la definición:

$$\begin{aligned}D_{\vec{u}} f(0,0)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(h\cos\theta,hsen\theta)-f(0,0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\dfrac{(h\cos\theta)^2(hsen\theta)}{(h\cos\theta)^4+(hsen\theta)^2}\right]-0}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^3\cos^2\theta sen\theta}{h^2\left(h^2\cos^4\theta+sen^2\theta\right)}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos^2\theta sen\theta}{h^2\cos^4\theta+sen^2\theta}\end{aligned}$$

En la última expresión:

1. Si $\theta=0,\pi$ ($sen\theta=0$) entonces $D_{\vec{u}} f(0,0)=0$
2. Si $\theta\neq 0,\pi$ $(sen\theta\neq 0)$ entonces $D_{\vec{u}} f(0,0)=\dfrac{\cos^2\theta}{sen\theta}$ (existe).

Más adelante daremos una técnica para hallar derivadas direccionales sin emplear la definición.

Ejercicios Propuestos 3.5

1. Determine la derivada direccional de f en el origen en la dirección del vector unitario (a,b).

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & si\,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2-xy^3}{x^2+y^2} & si\,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2} & si\,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}+x-y & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

e) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3x}{x^2+y^6} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Un caso especial de las derivadas direccionales es cuando consideramos dirección con respecto a eje x y con respecto al eje y.

3.7.2 Derivada Parcial.

Sea $f:U\subseteq R^n\to R$, donde U es un conjunto abierto, $\overline{x}_0$ un punto de U, $h\in R$. Sea $\overrightarrow{e}_i=(0,0,\cdots,1,\cdots,0)$ un ***vector canónico unitario*** de R^n.

La ***derivada parcial*** de f en $\overline{x}_0$ con respecto a $\overrightarrow{e}_i$ (o con respecto a su $i-ésima$ variable), denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\left(\overline{x}_0\right)$, se define como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\overline{x}_0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\overline{x}_0+h\overrightarrow{e}_i\right)-f\left(\overline{x}_0\right)}{h}$$

Cuando este límite existe

Si $f : U \subseteq R^2 \rightarrow R$ (una función de dos variables), entonces los vectores canónicos unitarios serían: $e_1 = \hat{i} = (1,0)$ y $e_2 = \hat{j} = (0,1)$. Las derivadas parciales serían:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left((x_0, y_0) + h(1,0)\right) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Denotada simplemente como: $\frac{\partial f}{\partial x}$ o también f_x, es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Y la otra derivada parcial sería:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left((x_0, y_0) + h(0,1)\right) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Denotada simplemente como: $\frac{\partial f}{\partial y}$ o también f_y, es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Ejemplo 1

Sea $f(x, y) = x^2 y^3$, obtener $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 y^3 - x^2 y^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) y^3 - x^2 y^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 y^3 + 2xhy^3 + h^2 y^3 - x^2 y^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xhy^3 + h^2 y^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(2xy^3 + hy^3\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2(y+h)^3-x^2y^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2\left(y^3+3y^2h+3yh^2+h^3\right)-x^2y^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2y^3+3x^2y^2h+3x^2yh^2+x^2h^3-x^2y^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2y^2h+3x^2yh^2+x^2h^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(3x^2y^2+3x^2yh+x^2h^2\right)\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 3x^2y^2
\end{aligned}
$$

Note que $\frac{\partial f}{\partial x}$ se obtiene como una derivada para función de una variable, en este caso x, y considerando a la otra variable y como constante.

Análogamente, si se desea obtener $\frac{\partial f}{\partial y}$, deberíamos derivar considerando sólo a y como variable.

Ejemplo 2

Sea $f(x,y)=sen\sqrt{x^2+y^3}$, obtener $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

SOLUCIÓN:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos\sqrt{x^2+y^3}\left[\frac{1}{2}\left(x^2+y^3\right)^{-1/2}(2x)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\cos\sqrt{x^2+y^3}\left[\frac{1}{2}\left(x^2+y^3\right)^{-1/2}\left(3y^2\right)\right]$$

En otros tipos de funciones habrá que aplicar la definición.

Ejemplo 3

Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$. Hallar $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$

SOLUCIÓN:

Aplicando la definición:

a) $$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\dfrac{h(0)}{h^2+0^2}\right]-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

b) $$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\dfrac{0(h)}{0^2+h^2}\right]-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

Ejercicios propuestos 3.6

1. Encontrar $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ si :

a) $f(x,y) = xy$

b) $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)\log_e\left(x^2 + y^2\right)$

c) $f(x,y) = \cos\left(ye^{xy}\right)\operatorname{sen} x$

d) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$

e) $f(x,y) = x\cos x \cos y$

f) $f(x,y) = \int_{y^2}^{sen(xy)} g(t)\,dt$

2. Hallar $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$, para:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si(x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2 - xy^3}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2 - y^2\right) sen\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

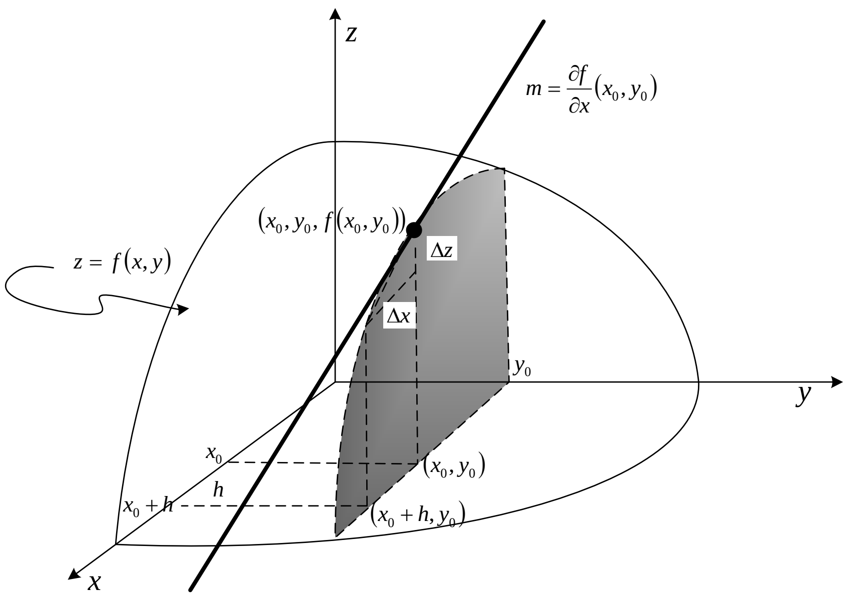
d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{sen\left(x^2 - y^2\right)}{x+y} & ;(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;(x,y) = (0,0) \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3x}{x^2+y^6} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

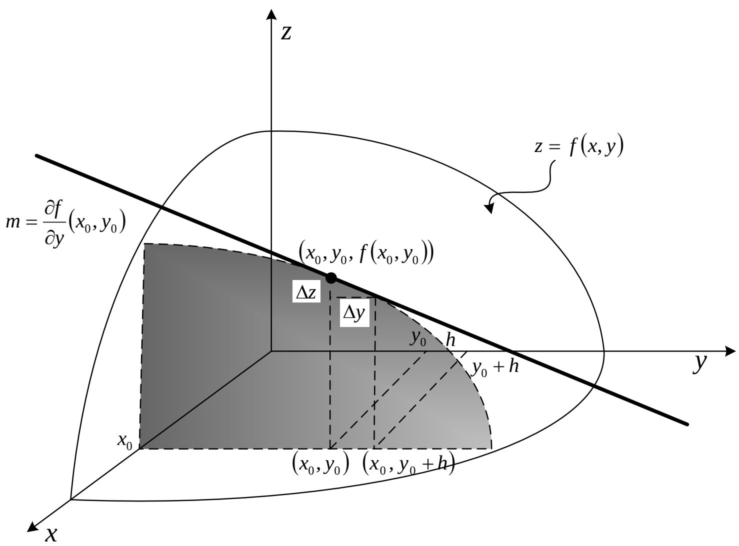
3.7.2.1 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS DERIVADAS PARCIALES

Se ha definido la derivada tratando de que se entienda como la variación de la función con respecto a una dirección. Entonces la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$, será la pendiente de la recta tangente paralela al plano zx, observe la figura:



Un vector director $\vec{S}$ de esta recta será de la forma: $\vec{S} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$

En cambio, la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$, será la pendiente de la recta tangente paralela al plano zy, observe la figura:



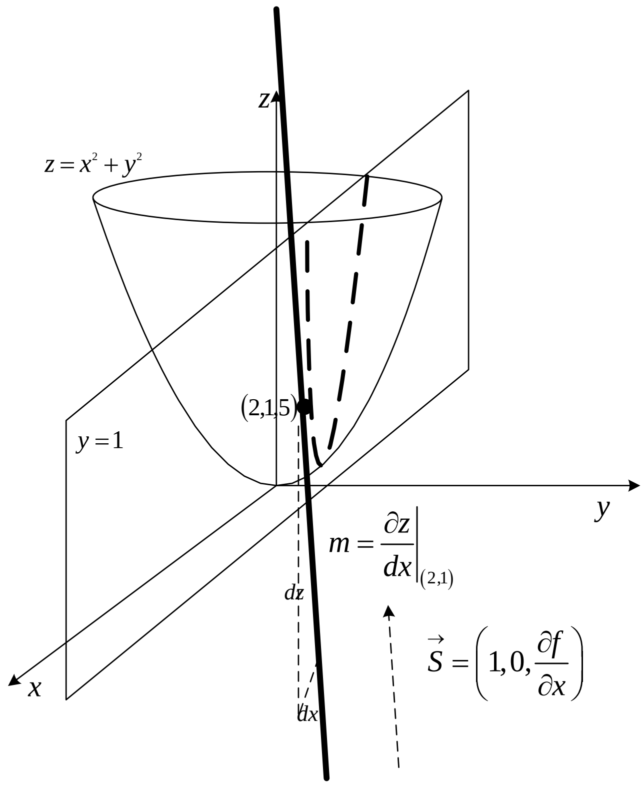
Un vector director $\vec{S}$ de esta recta será de la forma: $\vec{S} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

Ejemplo 1

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie que tiene por ecuación $z = x^2 + y^2$ con el plano $y = 1$ en el punto $(2,1,5)$.

SOLUCIÓN:

Realizando un gráfico, tenemos:



La ecuación de toda recta es de la forma $l: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$.

El punto está dado: $(x_0, y_0, z_0) = (2,1,5)$.

Los vectores directrices son paralelos al plano zx y por tanto son de la forma: $\vec{S} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

¿Por qué?

La pendiente de la recta será $m = \frac{\partial z}{dx}(2,1)$; que definirá la dirección de los vectores directores.

Ahora bien, si $\boxed{z = x^2 + y^2}$ entonces $\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = 2x}$.

Evaluando tenemos: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 2(2) = 4$

Por tanto $\vec{S} = (1, 0, 4)$

Finalmente la ecuación de la recta buscada será: $l: \begin{cases} x = x_0 + at = 2 + t \\ y = y_0 + bt = 1 + 0t \\ z = z_0 + ct = 5 + 4t \end{cases}$

3.7.3 DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Sean $f: U \subseteq R^2 \to R$ tal que $z = f(x, y)$. Suponga que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existan. Entonces las ***Derivadas parciales de Segundo Orden*** se definen como:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{h} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0 + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{h} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{h} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{h} = f_{yy}$$

Cuando estos límites existan.

A f_{xy} y a f_{yx} se las denominan Derivadas Mixtas o Derivadas Cruzadas.

Ejemplo 1

Sea $f(x, y) = x^2 e^{x^2+y^2}$, obtener todas las derivadas parciales de segundo orden.

<u>Solución:</u>

Las Derivadas parciales de primer orden son:

$$f_x = 2xe^{x^2+y^2} + x^2 e^{x^2+y^2}(2x) = 2xe^{x^2+y^2} + 2x^3 e^{x^2+y^2}$$

$$f_y = x^2 e^{x^2+y^2}(2y) = 2x^2 y e^{x^2+y^2}$$

Por tanto las derivadas parciales de segundo orden serían:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2e^{x^2+y^2} + 2xe^{x^2+y^2}(2x) + 6x^2 e^{x^2+y^2} + 2x^3 e^{x^2+y^2}(2x) \\ &= 2e^{x^2+y^2} + 4x^2 e^{x^2+y^2} + 6x^2 e^{x^2+y^2} + 4x^4 e^{x^2+y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xy} &= 2xe^{x^2+y^2}(2y) + 2x^3 e^{x^2+y^2}(2y) \\ &= 4xye^{x^2+y^2} + 4x^3 y e^{x^2+y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yx} &= 4xye^{x^2+y^2} + 2x^2 y e^{x^2+y^2}(2x) \\ &= 4xye^{x^2+y^2} + 4x^3 y e^{x^2+y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yy} &= 2x^2 e^{x^2+y^2} + 2x^2 y e^{x^2+y^2}(2y) \\ &= 2x^2 e^{x^2+y^2} + 4x^2 y^2 e^{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Note que las derivadas cruzadas son iguales.

3.7.3.1 TEOREMA DE SCHWARZ

Sea $f: U \subseteq R^2 \to R$, una función definida en el abierto U de R^2. Si las derivadas parciales $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existen y son funciones continuas en U, entonces: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Analicemos el siguiente ejemplo, donde se hace necesario emplear las definiciones de las derivadas parciales.

Ejemplo 2

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & ;(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;(x,y) = (0,0) \end{cases}$

Hallar a) $f_{xy}(0,0)$ y b) $f_{yx}(0,0)$

SOLUCIÓN:

a) $f_{xy}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\right) = \underset{x\to 0}{lím} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}$

Necesitamos la derivada parcial de primer orden.

Para la derivada $\frac{\partial f}{\partial x}$ en cualquier punto diferente de $(0,0)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\right) &= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{3x^4y - x^2y^3 + 3x^2y^3 - y^5 - 2x^4y + 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

Para la derivada $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
f_x(0,0) &= \underset{h\to 0}{lím} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} \\
&= \underset{h\to 0}{lím} \frac{\dfrac{h^3 0 - h(0^3)}{h^2+0^2} - 0}{h} \\
&= \underset{h\to 0}{lím} \frac{0}{h} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Entonces:

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{\left(x^2+y^2\right)^2} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Evaluando

$$f_x(0,h)=\frac{0^4h+4\left(0^2\right)h^3-h^5}{\left(0^2+h^2\right)^2}=\frac{-h^5}{h^4}=-h$$

Por tanto:

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h-0}{h}=-1$$

b) $f_{yx}(0,0)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0+h,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}$

Para la derivada $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en cualquier punto diferente de $(0,0)$ tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}\right)&=\frac{\left(x^3-3xy^2\right)\left(x^2+y^2\right)-\left(x^3y-xy^3\right)(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\&=\frac{x^5+x^3y^2-3x^3y^2-3xy^4-2x^3y^2+2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\&=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{aligned}$$

Para la derivada $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$ tenemos:

$$\begin{aligned}f_y(0,0)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{0^3h-0\left(h^3\right)}{0^2+h^2}-0}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}\\&=0\end{aligned}$$

Entonces:

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Evaluando:

$$f_y(h,0)=\frac{h^5-4h^30^2-h0^4}{\left(h^2+0^2\right)^2}=\frac{h^5}{h^4}=h$$

Por tanto:

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=1$$

Note que las derivadas mixtas no son iguales. ¿Por qué?

Ejercicios propuestos 3.7

1. Calcular, si existen , la derivada mixta $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}$ para:

a) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si\; x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & si\; x^2+y^2=0 \end{cases}$

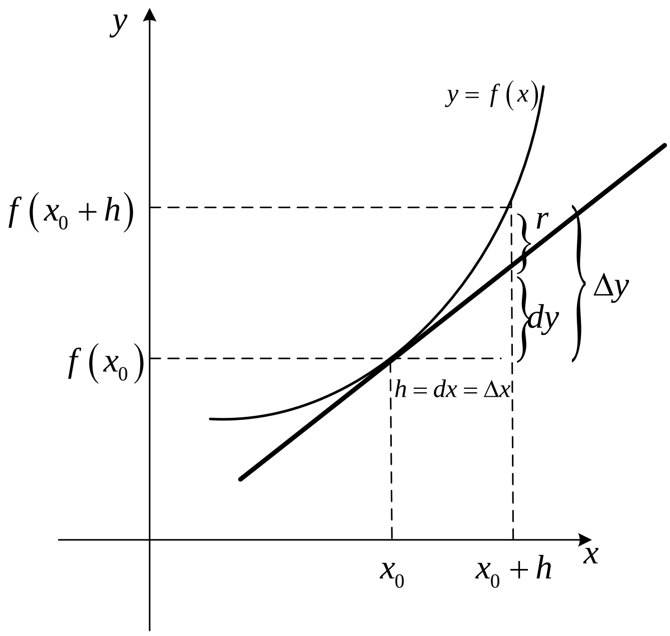
b) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4y^2-x^2y^4}{x^3+y^3} & si\; x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & si\; x^2+y^2=0 \end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y^2-xy^3}{x^2+y^2} & si(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si(x,y)=(0,0) \end{cases}$

3.8. DIFERENCIABILIDAD.

Existen funciones que poseen todas sus derivadas direccionales, sin embargo no pueden ser consideradas diferenciables debido a que no son continuas (ejemplo 4 de derivada direccional), entonces deberá existir un criterio más fuerte para la diferenciabilidad.

Recordemos la definición de diferencial para función de una variable, observe la gráfica:



Note que $\boxed{\Delta y = dy + r}$, donde a r le vamos a llamar residuo.
Reemplazando tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta y \quad &= \quad dy \quad + r \\ f(x_0+h)-f(x_0) &= f'(x_0)h+r \end{aligned}$$

Dividiendo para h y tomando limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)+\lim_{h\to 0}\frac{r}{h}$$

Podemos decir que para que f sea diferenciable se debe dar que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{r}{h}=0$$

Haciendo analogía para funciones de dos variables. El punto debe ser (x_0,y_0) y h debe ser un vector, digamos (h_1,h_2), entonces la expresión para la diferenciabilidad debe ser de la forma:

$$f\left((x_0,y_0)+(h_1,h_2)\right)-f(x_0,y_0)=A_1h_1+A_2h_2+r$$

Y deberá ocurrir que $\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0}\frac{r}{\|\boldsymbol{h}\|}=0$

Encontremos A_1.

Suponga que $\boldsymbol{h}=(h_1,0)$, entonces:

$$f\left((x_0,y_0)+(h_1,0)\right)-f(x_0,y_0)=A_1h_1+A_2 0+r$$

Dividiendo para h_1 y tomando límite:

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{f(x_0+h_1,y_0)-f(x_0,y_0)}{h_1}=A_1+\lim_{h_1\to 0}\frac{r}{h_1}$$

Tenemos que $A_1=f_x(x_0,y_0)$

Análogamente obtengamos A_2

Suponga que $\boldsymbol{h}=(0,h_2)$, entonces:

$$f\left((x_0,y_0)+(0,h_2)\right)-f(x_0,y_0)=A_1+A_2h_2+r$$

Dividiendo para h_2 y tomando límite:

$$\lim_{h_2\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)}{h_2}=A_2+\lim_{h_2\to 0}\frac{r}{h_2}$$

Tenemos que $A_2=f_y(x_0,y_0)$

Ahora sí podemos proponer la siguiente definición para la diferenciabilidad.

Sea $f: U \subseteq R^2 \to R$, una función definida en el abierto U. f es ***DIFERENCIABLE*** en $(x_0, y_0) \in U$, si sus derivadas parciales en (x_0, y_0) existen y si

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left[f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0)\right] - \left[f_x(x_0,y_0)\right]h_1 - \left[f_y(x_0,y_0)\right]h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

Ejemplo 1

Demuestre que $f(x,y) = x^2 + y^2$ es diferenciable en todo (x_0, y_0)

SOLUCIÓN:

Aplicando la definición, para que la función sea diferenciable el límite

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left[f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0)\right] - \left[f_x(x_0,y_0)\right]h_1 - \left[f_y(x_0,y_0)\right]h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

debe ser cero.

Obtengamos primero las derivadas parciales:

$$f_x(x_0,y_0) = 2x\big|_{(x_0,y_0)} = 2x_0$$

$$f_y(x_0,y_0) = 2y\big|_{(x_0,y_0)} = 2y_0$$

Reemplazando y simplificando:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left[f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0)\right] - \left[f_x(x_0,y_0)\right]h_1 - \left[f_y(x_0,y_0)\right]h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left[(x_0+h_1)^2 + (y_0+h_2)^2\right] - \left[x_0^2+y_0^2\right] - [2x_0]h_1 - [2y_0]h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left[x_0^2 + 2x_0 + h_1^2 + y_0^2 + 2y_0 + h_2^2\right] - x_0^2 - y_0^2 - 2x_0h_1 - 2y_0h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

Se observa que $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2} = 0$

Por tanto f ES DIFERENCIABLE EN TODO PUNTO.

Ejemplo 2

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ;(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ;(x,y)=(0,0) \end{cases}$.

Determine si f es diferenciable en $(0,0)$

SOLUCIÓN:

Aplicando la definición:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left[f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)\right]-\left[f_x(0,0)\right]h_1-\left[f_y(0,0)\right]h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Las derivadas parciales ya fueron obtenidas anteriormente:

$$f_x(0,0)=0 \quad \text{y} \quad f_y(0,0)=0$$

Reemplazando:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left[f(h_1,h_2)-f(0,0)\right]-\left[f_x(0,0)\right]h_1-\left[f_y(0,0)\right]h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left[\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}-0\right]-[0]h_1-[0]h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2}{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{3/2}}$$

Para este último límite, analicemos la trayectoria $h_2=mh_1$

$$\lim_{h_1\to0}\frac{h_1mh_1}{\left(h_1^2+m^2h_1^2\right)^{3/2}}=\lim_{h_1\to0}\frac{mh_1^2}{h_1^3\left(1+m^2\right)^{3/2}}=\lim_{h_1\to0}\frac{m}{h_1\left(1+m^2\right)^{3/2}}$$

Este límite no existe, por tanto f NO ES DIFERENCIABLE en $(0,0)$. Recuerde que ya se demostró que la función no era continua en $(0,0)$, por tanto se esperaba que no sea diferenciable.

Los siguientes teoremas permiten sacar conclusiones rápidas.

3.8.1 TEOREMA

Si $f:U\subseteq R^2\to R$, es diferenciable en $(x_0,y_0)\in U$, entonces es continua en (x_0,y_0).

En ciertas funciones, bastará con demostrar que son diferenciables para concluir que es continua.

Ejemplo

Sea $f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)sen\dfrac{1}{x^2+y^2} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$

Determine si f es continua en $(0,0)$, determinando su diferenciabilidad en $(0,0)$

SOLUCIÓN:

Primero calculemos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned}f_x(0,0)&=\underset{h\to0}{lím}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}\\&=\underset{h\to0}{lím}\frac{\left(h^2+0^2\right)sen\left(\frac{1}{h^2+0^2}\right)-0}{h}\\&=\underset{h\to0}{lím}\left(h\ sen\left(\frac{1}{h^2}\right)\right)\\f_x(0,0)&=0\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}f_y(0,0)&=\underset{h\to0}{lím}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}\\&=\underset{h\to0}{lím}\frac{\left(0^2+h^2\right)sen\left(\frac{1}{0^2+h^2}\right)-0}{h}\\&=\underset{h\to0}{lím}\left(h\ sen\left(\frac{1}{h^2}\right)\right)\\f_y(0,0)&=0\end{aligned}$$

Luego, empleando la definición para la diferenciabilidad:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-\left[f_x(0,0)\right]h_1-\left[f_y(0,0)\right]h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left(h_1^2+h_2^2\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right)-0-[0]h_1-[0]h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right)$$

Calculando el límite empleando coordenadas polares:

$$\lim_{r\to 0}\left[r\,sen\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]=0$$

Como el límite es cero, se concluye que la función es **diferenciable** en el origen, por tanto será contínua también.

3.8.2 TEOREMA

Sea $f:U\subseteq R^2\to R$. Si las funciones derivadas parciales son continuas en (x_0,y_0) entonces f es diferenciable en (x_0,y_0).

Para ciertas funciones, bastará con determinar la continuidad de sus derivadas parciales para concluir que es diferenciable.

El recíproco del teorema anterior es falso. Observe el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Sea $f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)sen\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$

Demuestre que las derivadas parciales de f no son continuas en $(0,0)$, sin embargo si es diferenciable en ese punto.

SOLUCIÓN:

Primero hallemos la derivada parcial con respecto a x

Si $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x^2+y^2\right)sen\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]=2x\,sen\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\left(x^2+y^2\right)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-3/2}(2x)\right]$$

$$=2x\,sen\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Si $(x,y)=(0,0)$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left(h^2+0^2\right)sen\frac{1}{\sqrt{h^2+0^2}}-0}{h}=\lim_{h\to0}h\,sen\frac{1}{h}=0$$

Entonces

$$f_x = \begin{cases} 2x\, sen\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ;(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ;(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Veamos ahora si es continua:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[2x\, sen\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

Pasando a coordenadas polares:

$$\lim_{r\to0}\left[2r\cos\theta\, sen\frac{1}{r} - \frac{r\cos\theta}{r}\cos\frac{1}{r}\right]$$

$$\lim_{r\to0}\left[2r\cos\theta\, sen\frac{1}{r} - \cos\theta\cos\frac{1}{r}\right]$$

No podemos concluir, analicemos para trayectorias:

$$\lim_{x\to0}\left[2x\, sen\frac{1}{\sqrt{x^2+0^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+0^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+0^2}}\right]$$

$$\boxed{y=0}\quad \lim_{x\to0}\left[2x\, sen\frac{1}{x} - \frac{x}{x}\cos\frac{1}{x}\right]$$

$$\lim_{x\to0}\left[2x\, sen\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right]\neq 0$$

Por tanto f_x no es continua en $(0,0)$

- Ahora hallemos la derivada parcial con respecto a y.

Si $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(x^2+y^2\right)sen\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = 2y\, sen\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(x^2+y^2\right)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-3/2}(2y)\right]$$

$$= 2y\, sen\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Si $(x,y)=(0,0)$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\left(0^2+h^2\right)sen\dfrac{1}{\sqrt{0^2+h^2}} - 0}{h} = \lim_{h\to0} h\, sen\frac{1}{h} = 0$$

Entonces

$$f_y = \begin{cases} 2y\, sen\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ;(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ;(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Veamos ahora si es continua:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[2y\, sen\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

Analicemos trayectorias:

$$\lim_{y\to0}\left[2y\, sen\frac{1}{\sqrt{0^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{0^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{0^2+y^2}}\right]$$

$$\boxed{x=0}\quad \lim_{y\to0}\left[2y\, sen\frac{1}{y} - \frac{y}{y}\cos\frac{1}{y}\right]$$

$$\lim_{y\to0}\left[2y\, sen\frac{1}{y} - \cos\frac{1}{y}\right]\neq 0$$

Por tanto f_y no es continua en $(0,0)$

Finalmente demostremos que f es diferenciable en $(0,0)$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - [f_x(0,0)]h_1 - [f_y(0,0)]h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left(h_1^2 + h_2^2\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right) - 0 - [0]h_1 - [0]h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2 + h_2^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right)$$

Pasando a polares:

$$\lim_{r\to 0} r\operatorname{sen}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

Por tanto es DIFERENCIABLE.

Ejercicios propuestos 3.8

1. Demostrar que si $f(x,y)$ es diferenciable en (a,b) entonces es continua en (a,b)
2. Analizar la diferenciabilidad en el origen para:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}} & si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si(x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2-y^2\right) sen\dfrac{1}{x^2+y^2} & si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si(x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2 - xy^3}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 - y^2 sen\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{sen\left(x^2-y^2\right)}{x+y} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2} & si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si(x,y) = (0,0) \end{cases}$

g) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

h) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + x - y & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

i) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3x}{x^2+y^6} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

j) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^5x^2}{3x^4+2y^{10}} & ,\quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,\quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

3.9. GRADIENTE.

Sea $f:U\subseteq R^n\to R$ una función diferenciable. Se define el vector gradiente de f en $\overline{x}_0$, denotado por $\nabla f\left(\overline{x}_0\right)$ o $grad\ f\left(\overline{x}_0\right)$, como el vector de R^n:

$$\nabla f\left(\overline{x}_0\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\frac{\partial f}{\partial x_3},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{\left(\overline{x}_0\right)}$$

Ejemplo

Sea $f(x,y)=(x-1)^2+(y-1)^2$. Hallar el gradiente de f en $(0,0)$.

SOLUCIÓN:

$$\nabla f(0,0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,0)}=\left(2(x-1),2(y-1)\right)_{(0,0)}=(-2,-2)$$

3.9.1 GRADIENTE Y DERIVADA DIRECCIONAL

En la expresión para el residuo.

$$f\left(\left(x_0,y_0\right)+\left(h_1,h_2\right)\right)-f\left(x_0,y_0\right)=\left[f_x\left(x_0,y_0\right)\right]h_1+\left[f_y\left(x_0,y_0\right)\right]h_2+r$$

Observe que $\boldsymbol{h}=\left(h_1,h_2\right)$ lo podemos expresar como $\boldsymbol{h}=\left\|\boldsymbol{h}\right\|\vec{u}$, donde $\vec{u}$ es un vector unitario.

Suponga que $\left\|\boldsymbol{h}\right\|=h$ y que $\vec{u}=\left(u_1,u_2\right)$ entonces $\boldsymbol{h}=h\left(u_1,u_2\right)$

Ahora, dividiendo para h y tomando límite:

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(\left(x_0,y_0\right)+h\vec{u}\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}=\left[f_x\left(x_0,y_0\right)\right]\frac{h_1}{h}+\left[f_y\left(x_0,y_0\right)\right]\frac{h_2}{h}+\lim_{h\to0}\frac{r}{h}$$

Si f es diferenciable entonces $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{r}{h}$.

Con lo cual resulta:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\left(x_0,y_0\right)+h\vec{u}\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}=\left[f_x\left(x_0,y_0\right)\right]u_1+\left[f_y\left(x_0,y_0\right)\right]u_2$$

Finalmente

$$D_{\vec{u}}f\left(x_0,y_0\right)=\left[\nabla f\left(x_0,y_0\right)\right]\bullet\vec{u}$$

Ejemplo

Sea $f(x,y)=x^2+y^2$. Hallar $D_{\vec{u}}f\left(1,2\right)$ donde $\vec{u}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

SOLUCIÓN:
Empleando lo anterior

$$D_{\vec{u}}f\left(1,2\right)=\left[\nabla f\left(1,2\right)\right]\bullet\vec{u}$$

Ahora, el gradiente sería:

$$\nabla f\left(1,2\right)=\left(f_x,f_y\right)_{(1,2)}=\left(2x,2y\right)_{(1,2)}=\left(2,4\right)$$

Reemplazando y resolviendo

$$D_{\vec{u}}f\left(1,2\right)=\left[\nabla f\left(1,2\right)\right]\bullet\vec{u}=\left(2,4\right)\bullet\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}$$

Ejemplo

Sea $f(x,y)=sen\left(x^2+y^2\right)$. Hallar la derivada de f en el punto $P\left(1,1\right)$ en la dirección que va desde este punto al punto $Q\left(3,2\right)$

SOLUCIÓN:

Primero obtengamos $\vec{u}$ y sus derivadas parciales en $P\left(1,1\right)$

$$\vec{u}=\frac{\overrightarrow{PQ}}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|}=\frac{\left(3-1,\,2-1\right)}{\sqrt{5}}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$f_x\left(1,1\right)=\left[\cos\left(x^2+y^2\right)\right]2x\Big|_{(1,1)}=2\cos 2$$

$$f_y\left(1,1\right)=\left[\cos\left(x^2+y^2\right)\right]2y\Big|_{(1,1)}=2\cos 2$$

Empleando la última definición

$$D_{\vec{u}}f\left(1,1\right)=\left[\nabla f\left(1,1\right)\right]\bullet\vec{u}=\left(2\cos 2,2\cos 2\right)\bullet\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{6}{\sqrt{5}}\cos 2$$

Ejercicios propuestos 3.9

1. Halle la derivada direccional de la función en el punto P en la dirección de Q.
   a) $f\left(x,y\right)=x^2+4y^2, P(3,1), Q(1,-1)$
   b) $f\left(x,y\right)=\cos\left(x+y\right), P(0,\pi), Q(\frac{\pi}{2},0)$
   c) $f\left(x,y,z\right)=\ln\left(x+y+z\right), P(1,0,0), Q(4,3,1)$
   d) $g\left(x,y,z\right)=xye^z, P\left(2,4,0\right), Q\left(0,0,0\right)$

2. Dado el campo escalar $f: R^n \to R$ tal que $f(X) = \|X\|^4$, calcular:
   a) $f'(X, v)$ (Derivada direccional de f en la dirección de v)
   b) Si n=2, hallar todos los puntos (x,y) en R^2 para los cuales: $f'(2i + 3j; xi + yj) = 6$
   c) Si n=3, hallar todos los puntos (x,y) en R^3 para los cuales $f'(i + 2j + 3k; xi + yj + zk) = 6$
3. Calcule la derivada de la función $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$ en el punto (3,0), en la dirección del vector tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1,1)

3.9.2 PROPIEDADES DEL GRADIENTE

1. El Gradiente es un **vector ortogonal** a los conjuntos de nivel.
2. De la igualdad $D_{\vec{u}} f(\overline{x_0}) = [\nabla f(\overline{x_0})] \bullet \vec{u}$ tenemos

$$D_{\vec{u}} f(\overline{x_0}) = \|\nabla f(\overline{x_0})\| \|\vec{u}\| \cos\theta$$

Si el gradiente y el vector unitario tienen la misma dirección ($\theta = 0$) entonces la derivada direccional tendría el **máximo valor** y sería:

$$D_{\vec{u}} f(\overline{x_0})_{máx} = \|\nabla f(\overline{x_0})\|$$

Si el gradiente y el vector unitario tienen dirección contraria ($\theta = \pi$) entonces la derivada direccional tendría el **mínimo valor** y sería:

$$D_{\vec{u}} f(\overline{x_0})_{mín} = -\|\nabla f(\overline{x_0})\|$$

Ejemplo

Suponga que la distribución de temperatura dentro de una habitación está dada por $T(x, y, z) = 5 + e^{x+4y+z^2}$, donde x, y, z se miden a partir del rincón $(0,0,0)$.

a) ¿En qué dirección aumenta la temperatura con mayor rapidez?
b) ¿Cuál es el valor máximo?

SOLUCIÓN:

a) La temperatura aumentará con mayor rapidez en dirección de su gradiente, es decir:

$$\begin{aligned}\nabla T &= \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)_{(0,0,0)} \\ &= \left(e^{x+4y+z^2}(1), e^{x+4y+z^2}(4), e^{x+4y+z^2}(2z)\right)_{(0,0,0)} \\ &= (1,4,0)\end{aligned}$$

b) El valor máximo sería

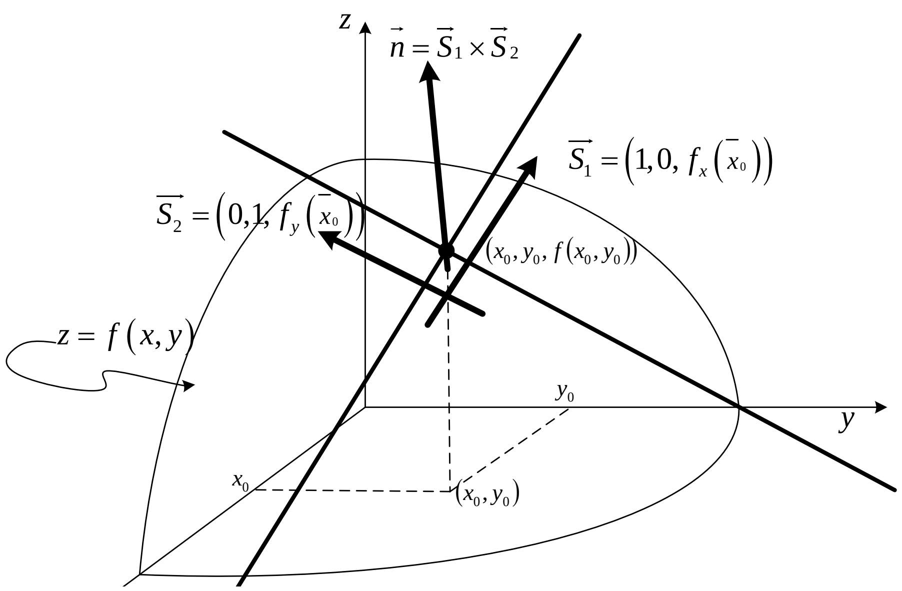
$$D_{\vec{u}} T(0,0,0)_{máx} = \|\nabla T(0,0,0)\| = \sqrt{1+4^2+0^2} = \sqrt{17}$$

Ejercicios propuestos 3.10

1. La temperatura en el punto (x,y) de una placa viene dada por: $T(x)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$. Hállese la dirección de mayor crecimiento del calor desde el punto (3, 4).
2. Se describe la superficie de una montaña mediante la ecuación $h(x,y)=4000-0.001x^2-0.004y^2$. Supóngase que un alpinista está en el punto (500, 300, 3390). ¿En qué dirección debe moverse el alpinista en orden a ascender lo más rápido posible?
3. Suponer que la temperatura en el punto P(x,y,z) en el espacio está dada por $T(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sea una partícula que viaja por la helice circular $\sigma(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ y sea T(t) su temperatura en el punto t.
   a. ¿Cuál es el valor de T(t=0)?.
   b. ¿Qué dirección debe tomar la partícula para avanzar hasta la región de más baja temperatura?.
4. El Capitán América tiene dificultades cerca del lado soleado de Mercurio. La temperatura del casco de la nave, cuando él está en la posición (x,y,z) estará dada por $T(x,y,z)=e^{-x^2-y^2-3z^2}$ donde x, y, z se miden en metros. Si la nave del Capitán América se encuentra en el punto (1,1,1).
   a. ¿En qué dirección deberá avanzar para disminuir más rápido la temperatura?
   b. Desafortunadamente el casco de la nave se cuarteará si se enfría a una tasa mayor de $\sqrt{14}e^2$ grados por segundo. Describir el conjunto de direcciones posible en las que puede avanzar para bajar la temperatura.

3.9.3 VECTORES NORMALES Y PLANOS TANGENTE

Cuando se interpretó geométricamente las derivadas parciales, se definió que un vector directriz de la recta tangente paralela al plano zx ,en un punto de la superficie $z=f(x,y)$, está dado por $\overrightarrow{S_1}=\left(1,0,f_x\left(\bar{x}_0\right)\right)$; y un vector directriz de la recta tangente paralela al plano zy está dado por $\overrightarrow{S_2}=\left(0,1,f_y\left(\bar{x}_0\right)\right)$.



Si multiplicáramos en cruz estos vectores obtendríamos un vector normal a la superficie en ese punto

$$\vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = \left(-f_x\left(\bar{x}_0\right), -f_y\left(\bar{x}_0\right), 1\right)$$

Por tanto el plano tangente en ese punto tendría por ecuación

$$-f_x\left(\bar{x}_0\right)\left[x-x_0\right]-f_y\left(\bar{x}_0\right)\left[y-y_0\right]+1\left[z-z_0\right]=0$$

Ejemplo

Hallar la ecuación del plano tangente y la ecuación de la recta normal a la superficie que tiene por ecuación $z = f(x,y) = \dfrac{10}{xy}$ en el punto $(1,2,5)$.

SOLUCIÓN:

a) La ecuación del **plano tangente** estaría dada por:

$$-f_x(1,2)\left[x-1\right]-f_y(1,2)\left[y-2\right]+1\left[z-5\right]=0$$

Las derivadas parciales serían:

$$f_x(1,2) = -\left.\frac{10}{x^2 y}\right|_{(1,2)} = -5$$

$$f_x(1,2) = -\left.\frac{10}{xy^2}\right|_{(1,2)} = -\frac{5}{2}$$

Reemplazando

$$-(-5)\left[x-1\right]-\left(-\frac{5}{2}\right)\left[y-2\right]+1\left[z-5\right]=0$$

$$10(x-1)+5(y-2)+2(z-5)=0$$

$$10x-10+5y-10+2z-10=0$$

$$10x+5y+2z-30=0$$

b) La ecuación de la **recta normal** estaría dada por:

$$\begin{cases} x = x_0 - \left[f_x(x_0,y_0)\right]t \\ y = y_0 - \left[f_y(x_0,y_0)\right]t \\ z = z_0 + [1]t \end{cases}$$

Reemplazando:

$$\begin{cases} x = 1-[-5]t = 1+5t \\ y = 2-\left[-\frac{5}{2}\right]t = 2+\frac{5}{2}t \\ z = 5+t \end{cases}$$

3.10. LA DIFERENCIAL

3.10.1 DEFINICIÓN

Sea $f: U \subseteq R^2 \to R$ una función diferenciable en U. Entonces para cada $\overline{x} \in U$ se tiene:

$$f\left(\overline{x}+\overline{h}\right)= f\left(\overline{x}\right)+\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+r$$

A la parte $\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$

Se le ***denomina diferencial*** de f, y se la denota como df.

3.10.2 APROXIMACIONES

Si se dice que $\Delta f \approx df$, entonces tenemos:

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)- f\left(x_0, y_0\right)\approx\left[f_x\left(x_0, y_0\right)\right]dx+\left[f_y\left(x_0, y_0\right)\right]dy$$

Como $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$

Tenemos la formula de aproximación:

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)\approx f\left(x_0, y_0\right)+\left[f_x\left(x_0, y_0\right)\right]\Delta x+\left[f_y\left(x_0, y_0\right)\right]\Delta y$$

Ejemplo

Aproximar el valor de $(1,08)^{3.98}$

SOLUCIÓN:

Utilicemos la función $\boxed{f(x,y)=x^y}$ (¿por qué?

tomemos: $x_0 = 1$ entonces $\Delta x = 0.08$

$y_0 = 4$ entonces $\Delta y = -0.02$

Las derivadas parciales serían:

$$f_x(1,4)=\left(yx^{y-1}\right)\Big|_{(1,4)} = 4$$

$$f_y(1,4)=\left(x^y \ln x\right)\Big|_{(1,4)} = 0$$

Empleando la formula de aproximación:

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right) \approx f\left(x_0, y_0\right)+\left[f_x\left(x_0, y_0\right)\right]\Delta x+\left[f_y\left(x_0, y_0\right)\right]\Delta y$$
$$f\left(1.08; 3.98\right) \approx f\left(1,4\right)+\left[f_x\left(1,4\right)\right]0.08+\left[f_y\left(1,4\right)\right]\left(-0.02\right)$$
$$\left(1.08\right)^{3.98} \approx 1^4+\left[4\right]0.08+\left[0\right]\left(-0.02\right)$$
$$\left(1.08\right)^{3.98} \approx 1+0.32$$
$$\left(1.08\right)^{3.98} \approx 1.32$$

3.10.3 CALCULO DE ERRORES

El error en una función se lo puede considerar como la variación de la función, entonces tenemos que:

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

Ejemplo 1

Se desea calcular el volumen de un cono, para lo cual se mide el radio de su base en $5\,cm$ y su altura en $10\,cm$, con un posible error de $0.1\,cm$. Aproxime el error al calcular el volumen.

SOLUCIÓN:

El volumen de un cono circular recto está dado por: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Por tanto, el error en el cálculo del volumen está dado por: $\Delta V \approx \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r+\frac{\partial V}{\partial h}\Delta h$

Entonces:

$$\Delta V \approx \frac{2}{3}\pi r h \Delta r+\frac{1}{3}\pi r^2 \Delta h$$
$$\Delta V \approx \frac{2}{3}\pi\left(5\right)\left(10\right)\left(\pm 0.1\right)+\frac{1}{3}\pi\left(5\right)^2\left(\pm 0.1\right)$$
$$\Delta V \approx \pm 13.09$$

Ejemplo 2

Determine la variación que experimenta la densidad de una esfera sólida cuyo radio mide 10 cm. y su masa es de 500 gr. , si el radio se incrementa en 2mm y la masa disminuye 0.5 gr.

SOLUCIÓN:

La densidad volumétrica ρ esta dada por:

$$\rho=\frac{m}{V}$$

donde m es la masa y V es el volumen

En este caso tendríamos:

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{3m}{4\pi r^3}=\frac{3}{4\pi}m r^{-3}$$

Entonces:

$$\Delta\rho = \frac{\partial\rho}{\partial m}\Delta m + \frac{\partial\rho}{\partial r}\Delta r = \frac{3}{4\pi r^3}\Delta m + \left(\frac{-9m}{4\pi r^2}\right)\Delta r$$

Reemplazando y calculando:

$$\Delta\rho = \frac{3}{4\pi(10)^3}(0.2) + \left(\frac{-9(500)}{4\pi(10)^2}\right)(0.5)$$

$$\Delta\rho = \frac{3}{4\pi}(0.0002 - 7.5)$$

$$\Delta\rho = -1.79$$

La densidad disminuye $1.79\ {}^{gr}\!/_{cm^3}$

Ejemplo 3

El radio r y la altura h de un cilindro circular recto se miden con un posible error del 4% y 2% respectivamente. Aproxime el error porcentual al calcular el volumen.

SOLUCIÓN:

El volumen de un cilindro circular recto está dado por: $V = \pi r^2 h$

Se sabe que los errores porcentuales en las mediciones de r y h son del 4% y 2% , por tanto $\boxed{\pm\Delta r = \frac{4}{100}r}$ y $\boxed{\pm\Delta h = \frac{2}{100}h}$.

Por otro lado $\Delta V \approx \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h$

Reemplazando:

$$\Delta V \approx (2\pi rh)\left(\tfrac{4}{100}r\right) + \left(\pi r^2\right)\left(\tfrac{2}{100}h\right)$$

$$\Delta V \approx \left(\tfrac{8}{100}\right)\left(\pi r^2 h\right) + \left(\tfrac{2}{100}\right)\left(\pi r^2 h\right)$$

$$\Delta V \approx \left(\tfrac{10}{100}\right)\left(\underbrace{\pi r^2 h}_{V}\right)$$

Por tanto el error porcentual del volumen sería :

$$\frac{\Delta V}{V}100 \approx 10\%$$

Ejercicios propuestos 3.11

1. Calcular aproximadamente
   a) $1.02^{3.01}$
   b) $[4.052 + 8.982 - 0.992]^{3/2}$
   c) $(1.03)^2\ [(0.982)\ (1.053)^{1/4}\ ]^{-1/3}$
2. La altura de un cono es $h = 30cm$, el radio de su base $R = 10cm$. ¿Cómo variará el volumen de dicho cono si H se aumenta 3mm y R se disminuye 1 mm?
3. Calcule el valor aproximado de la función $f(x, y) = x^y$ en el punto $(3.1\,;1.9)$
4. Dos lados de un triángulo miden 150 y 200 mts. Y el ángulo que forman es de 60º. Sabiendo que los errores probables en la medición es de 0.2 mts. en la medida de los lados y de 1º en la del ángulo. Determine el máximo error probable que se puede cometer al evaluar su área. Determine también el error en porcentaje.
5. Aproximar el porcentaje en el cual crece el volumen de un cilindro circular recto si el radio aumenta en un 1% y la altura en un 2%.

6. Calcule la longitud del segmento de recta $x = 1.2, \quad y = 0.95$ que se encuentra entre la superficie $z = x^2 + 5y^2$ y su plano tangente en el punto $(1,1,6)$.

3.10.4 DEFINICIÓN GENERAL DE DIFERENCIAL

Sea $f : U \subseteq R^n \to R^m$. Se dice que $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ es diferenciable en $\bar{x}_0 \in U$ si y sólo si $z = f(\bar{x}_0) + \left[Df(\bar{x}_0)\right]\left[\bar{x} - \bar{x}_0\right] + r$ es una buena aproximación de f en una vecindad de $\bar{x}_0$; es decir:

$$f(\bar{x}_0 + \bar{h}) = f(\bar{x}_0) + \left[Df(\bar{x}_0)\right]\left[\bar{x} - \bar{x}_0\right] + r$$

Y se cumple que $\lim\limits_{\|\bar{h}\| \to 0} \dfrac{r}{\|\bar{h}\|} = 0$.

A $Df(\bar{x}_0)$ se le llama ***MATRIZ DIFERENCIAL O JACOBIANA*** y se define como:

$$Df(\bar{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\bar{x}_0}$$

Ejemplo 1

Sea $f : R^2 \to R$, tal que $f(x,y) = x^2 + 3y^2$, entonces:

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 6y \end{bmatrix}_{1\times 2}$$

Ejemplo 2

Sea $f : R^3 \to R^4$, tal que $f(x,y,z) = \left(x^2 + y^2,\ xyz,\ xz + yz,\ x^3y^2z\right)$, entonces:

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} & \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y} & \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial z} \\ \frac{\partial(xyz)}{\partial x} & \frac{\partial(xyz)}{\partial y} & \frac{\partial(xyz)}{\partial z} \\ \frac{\partial(xz+yz)}{\partial x} & \frac{\partial(xz+yz)}{\partial y} & \frac{\partial(xz+yz)}{\partial z} \\ \frac{\partial(x^3y^2z)}{\partial x} & \frac{\partial(x^3y^2z)}{\partial y} & \frac{\partial(x^3y^2z)}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ yz & xz & xy \\ z & z & x+y \\ 3x^2y^2z & 2x^3yz & x^3y^2 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

3.11. REGLA DE LA CADENA.

Sea $f : U \subseteq R^n \to R^m$ y sea $g : V \subseteq R^p \to R^n$. Si g es diferenciable en $\overline{x}_0$ y f es diferenciable en $g\left(\overline{x}_0\right)$, entonces:

$$D\left[f\left(g\left(\overline{x}_0\right)\right)\right] = \left[Df\right]_{g\left(\overline{x}_0\right)}\left[Dg\right]_{\overline{x}_0}$$

Ejemplo 1

Sea $f : R^2 \to R$, tal que $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ y sea $g : R \to R^2$, tal que $g(t) = \left(e^t, \cos t\right)$; entonces:

$$D\left[f\left(g(t)\right)\right] = \left[Df\right]_{g(t)}\left[Dg\right]_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}_{\left(e^t, \cos t\right)} \begin{bmatrix} \frac{dg_1}{dt} \\ \frac{dg_2}{dt} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x & 6y \end{bmatrix}_{\left(e^t, \cos t\right)} \begin{bmatrix} \frac{d\left(e^t\right)}{dt} \\ \frac{d\left(\cos t\right)}{dt} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^t & 6\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ -sent \end{bmatrix}$$

$$= 2e^{2t} - 6\cos t\, sent$$

En términos sencillos, si tenemos $z = f(x,y)$ donde $x = x(t)$ y $y = x(t)$, entonces:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\Bigg|_{\left(x(t), y(t)\right)}$$

Ejemplo 2

Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$ donde $x = t^2$ y $y = 2t$, hallar $\frac{dz}{dt}$

<u>SOLUCIÓN</u>:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
$$= (2x)(2t) + (2y)(2)$$

Poniendo todo en función de" t "

$$\frac{dz}{dt} = (2x)(2t) + (2y)(2)$$

$$\frac{dz}{dt} = \left(2t^2\right)(2t) + (2(2t))(2) = 4t^3 + 8t$$

Ejemplo 3

El radio superior de un tronco de cono es de 10 cm., el radio inferior 12 cm. Y la altura 18 cm. . ¿Cuál es la razón de cambio del volumen del tronco de cono con respecto al tiempo si el radio superior disminuye a razón de 2 cm. por min. , el radio inferior aumenta a razón de 3 cm. por min. y la altura decrece a razón de 4 cm. por min.

SOLUCIÓN:

El volumen de un tronco de cono está dado por:

$$V = \frac{\pi}{3} h\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

Su razón de cambio estaría dada por:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt} + \frac{\partial V}{\partial R}\frac{dR}{dt} + \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt}$$

Los datos del problema serían:

$$r = 10\ ,\ R = 12\ ,\ h = 18\ ,\ \frac{dr}{dt} = -2\ ,\ \frac{dR}{dt} = 3\ ,\ \frac{dh}{dt} = -4$$

Reemplazando y calculando:

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{\pi}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)\frac{dh}{dt} + \frac{\pi}{3}h\left(2R + r\right)\frac{dR}{dt} + \frac{\pi}{3}h\left(R + 2r\right)\frac{dr}{dt} \\
&= \frac{\pi}{3}\left[\left((12)^2 + (12)(10) + (10)^2\right)(-4) + (18)\left(2(12) + 10\right)(3) + (18)\left(12 + 2(10)\right)(-2)\right] \\
&= \frac{\pi}{3}\left[(144 + 120 + 100)(-4) + (18)(24 + 10)(3) + (18)(12 + 20)(-2)\right] \\
&= \frac{\pi}{3}\left[364(-4) + (18)34(3) + (18)32(-2)\right] \\
&= \frac{\pi}{3}\left[-1456 + 1836 - 1152\right]
\end{aligned}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{772\pi}{3}\, cm^3/\min$$

Ejemplo 4

Sea $f : R^2 \to R$, tal que $f(x,y) = x^2 y$ y sea $g : R^2 \to R^2$, tal que $g(u,v) = \left(uv, u^2 - v^3\right)$; entonces:

$$\begin{aligned}
D\left[f\left(g_{(u,v)}\right)\right] = \left[Df\right]_{g(u,v)}\left[Dg\right] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}_{\left(uv,\, u^2 - v^3\right)} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v}\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2xy^3 & 3x^2y^2 \end{bmatrix}_{\left(\underbrace{uv}_{x},\, \underbrace{u^2 - v^3}_{y}\right)} \begin{bmatrix} \frac{\partial(uv)}{\partial u} & \frac{\partial(uv)}{\partial v} \\ \frac{\partial\left(u^2 - v^3\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(u^2 - v^3\right)}{\partial v}\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2uv\left(u^2 - v^3\right)^3 & 3(uv)^2\left(u^2 - v^3\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & u \\ 2u & -3v^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \underbrace{2uv^2\left(u^2 - v^3\right)^3 + 6u^3v^2\left(u^2 - v^3\right)^2}_{\frac{\partial z}{\partial u}} & \underbrace{2u^2v\left(u^2 - v^3\right)^3 - 9u^2v^4\left(u^2 - v^3\right)^2}_{\frac{\partial z}{\partial v}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si tenemos $z = f(x,y)$ donde $x = x(u,v)$ y $y = x(u,v)$, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\bigg|_{(x(u,v),\,y(u,v))}$$

Y

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\bigg|_{(x(u,v),\,y(u,v))}$$

Ejemplo 5

Sea $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + z^2$ donde $x = 4uv^2$, $y = 5u^2 + 10v^2$, $z = u^3$

Hallar: $\frac{\partial f}{\partial u}$ y $\frac{\partial f}{\partial v}$.

SOLUCIÓN:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\bigg|_{(4uv^2,\,5u^2+10v^2,\,u^3)} \\
&= (6x)(4v^2) + (2y)(10u) + (2z)(3u^2)\bigg|_{(\underbrace{4uv^2}_{x},\,\underbrace{5u^2+10v^2}_{y},\,\underbrace{u^3}_{z})} \\
&= 6(4uv^2)(4v^2) + 2(5u^2+10v^2)(10u) + 2(u^3)(3u^2) \\
&= 96uv^4 + 10u^3 + 200uv^2 + 6u^5
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\bigg|_{(4uv^2,\,5u^2+10v^2,\,u^3)} \\
&= (6x)(8uv) + (2y)(20v) + (2z)(0)\bigg|_{(\underbrace{4uv^2}_{x},\,\underbrace{5u^2+10v^2}_{y},\,\underbrace{u^3}_{z})} \\
&= 6(4uv^2)(8uv) + 2(5u^2+10v^2)(20v) + 0 \\
&= 192u^2v^3 + 200u^2v + 400v^3
\end{aligned}$$

Ejemplo 6

Sea $f: R^3 \to R^4$, tal que $f(x,y,z) = (x^2yz,\, y^2 - z^2,\, z^3,\, xyz)$ y sea $g: R^3 \to R^3$, tal que $g(u,v,w) = (u^2v,\, uv^2w,\, e^{-uw})$, hallar $D[f \circ g]_{(1,1,0)}$

Solución:

$$D[f \circ g]_{(1,1,0)} = [Df]_{g(1,1,0)}[Dg]_{(1,1,0)}$$

Ahora bien $g(1,1,0) = (1^2(1),\, 1(1^2)(0),\, e^{-1(0)}) = (1,0,1)$

Reemplazando:

$$D[f\circ g]_{(1,1,0)} = [Df]_{g(1,1,0)}[Dg]_{(1,1,0)}$$

$$=\begin{bmatrix} 2xyz & x^2z & x^2y \\ 0 & 2y & -2z \\ 0 & 0 & 3z^2 \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}_{\left(\underset{x}{1},\underset{y}{0},\underset{z}{1}\right)} \begin{bmatrix} 2uv & u^2 & 0 \\ v^2w & 2uvw & uv^2 \\ -we^{-uw} & 0 & -ue^{-uw} \end{bmatrix}_{\left(\underset{u}{1},\underset{v}{1},\underset{w}{0}\right)}$$

$$=\begin{bmatrix} 2(1)(0)(1) & 1^2(1) & 1^2(0) \\ 0 & 2(0) & -2(1) \\ 0 & 0 & 3\left(1^2\right) \\ 0(1) & 1(1) & 1(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(1)(1) & (1)^2 & 0 \\ (1)^2\,0 & 2(1)(1)0 & 1\left(1^2\right) \\ -0e^{-1(0)} & 0 & -1e^{-1(0)} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 7

Sea $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} \quad ; x>0$, hallar $f(x)$.

SOLUCIÓN:

Si hacemos $\boxed{u=\frac{y}{x}}$, tenemos:

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

$$f(u) = \frac{\sqrt{x^2+(ux)^2}}{x} = \frac{\sqrt{x^2+u^2x^2}}{x} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+u^2\right)}}{x}$$

$$f(u) = \sqrt{1+u^2}$$

Si hacemos ahora $\boxed{u=x}$

Entonces

$$\boxed{f(x) = \sqrt{1+x^2}}$$

Ejemplo 8

Demostrar que $z = f(2x+y, -4x-2y)$ satisface la ecuación $\frac{\partial z}{\partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

Solución:

Aquí tenemos $z = f(u,v)$ donde $u = 2x+y$, $v = -4x-2y$, entonces:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\&=\frac{\partial z}{\partial u}(2)+\frac{\partial z}{\partial v}(-4)\\\frac{\partial z}{\partial x}&=2\frac{\partial z}{\partial u}-4\frac{\partial z}{\partial v}\end{aligned}}\quad \text{y} \quad \boxed{\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\\&=\frac{\partial z}{\partial u}(1)+\frac{\partial z}{\partial v}(-2)\\\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}-2\frac{\partial z}{\partial v}\end{aligned}}$$

Ahora reemplazando:

$$\frac{\partial z}{\partial x}-2\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\left(2\frac{\partial z}{\partial u}-4\frac{\partial z}{\partial v}\right)-2\left(\frac{\partial z}{\partial u}-2\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0$$

$$2\frac{\partial z}{\partial u}-4\frac{\partial z}{\partial v}-2\frac{\partial z}{\partial u}+4\frac{\partial z}{\partial v}=0$$

Ejemplo 9

Demostrar que $z=xy\,f\left(\frac{x+y}{xy}\right)\quad ;xy\neq 0$. Calcular $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}$

Solución:

Aquí podemos obtener las derivadas parciales directamente:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[xy\,f\left(\frac{x+y}{xy}\right)\right]=\\&\frac{\partial z}{\partial x}=yf\left(\frac{x+y}{xy}\right)+xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\left[\frac{(1)xy-(x+y)y}{(xy)^2}\right]\\&\frac{\partial z}{\partial x}=yf\left(\frac{x+y}{xy}\right)+(xy)\,f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\left[\frac{xy-xy-y^2}{(xy)^2}\right]\\&\frac{\partial z}{\partial x}=yf\left(\frac{x+y}{xy}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\end{aligned}}$$

Y

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[xy\,f\left(\frac{x+y}{xy}\right)\right]=\\&\frac{\partial z}{\partial y}=xf\left(\frac{x+y}{xy}\right)+xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\left[\frac{(1)xy-(x+y)x}{(xy)^2}\right]\\&\frac{\partial z}{\partial y}=xf\left(\frac{x+y}{xy}\right)+(xy)\,f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\left[\frac{xy-x^2-yx}{(xy)^2}\right]\\&\frac{\partial z}{\partial y}=xf\left(\frac{x+y}{xy}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\end{aligned}}$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned}x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}&=x^2\left[yf\left(\frac{x+y}{xy}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\right]-y^2\left[xf\left(\frac{x+y}{xy}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\right]\\&=x^2yf\left(\frac{x+y}{xy}\right)-xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right)-y^2xf\left(\frac{x+y}{xy}\right)+xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\\&=x^2yf\left(\frac{x+y}{xy}\right)-y^2xf\left(\frac{x+y}{xy}\right)\end{aligned}$$

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=(x-y)\,xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right)$$

Es decir: $\boxed{x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=(x-y)\,z}$

Ejemplo 10

Demostrar que $z = f\left(x-2y,\, 2x+y\right)$ satisface la ecuación $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

SOLUCIÓN:

Aquí tenemos $\boxed{z = f\left(u,v\right)}$ donde $\boxed{u = x-2y}$, $\boxed{v = 2x+y}$

Las derivadas parciales de primer orden serían:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\&=\frac{\partial z}{\partial u}(1)+\frac{\partial z}{\partial v}(2)\end{aligned}} \quad \text{y} \quad \boxed{\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\\&=\frac{\partial z}{\partial u}(-2)+\frac{\partial z}{\partial v}(1)\end{aligned}}$$

Hallemos $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+2\frac{\partial z}{\partial v}\right)&\\
=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)&\\
=\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right]+2\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right]&\\
=\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(1)+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}(2)\right]+2\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}(1)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(2)\right]&\\
=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+4\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}&\end{aligned}$$

Ahora, hallemos $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-2\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)&\\
=-2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)&\\
=-2\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right]+2\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right]&\\
=-2\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(-2)+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}(1)\right]+2\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}(-2)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(1)\right]&\\
=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}&\end{aligned}$$

Reemplazando:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+4\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+\left(4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=0$$

$$5\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+5\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$$

En la última expresión, dividiendo para 5 y cambiando de variable $\boxed{u = x}$ y $\boxed{v = y}$, se comprueba lo que pretendíamos.

Ejemplo 11

Transformar la ecuación $x\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\frac{\partial z}{\partial y}=xy$ tomando $u=\ln x$ y $v=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$ como nuevas variables independientes.

SOLUCIÓN:

Luego del cambio de variable tendríamos la función z en términos de u y v, es decir: $z=f(u,v)$, entonces las derivadas parciales serían:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}(0)\\\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}\end{aligned}}\text{ y }\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\\&=\frac{\partial z}{\partial u}(0)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\left(1+\frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}}\right)\right)\\&=\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\left(\frac{\sqrt{1+y^2}+y}{\sqrt{1+y^2}}\right)\right)\\\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)\end{aligned}}$$

Además:

- Si $\boxed{u=\ln x}$ entonces $\boxed{x=e^u}$
- Si $\boxed{v=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)}$ entonces $e^v=y+\sqrt{1+y^2}$

Despejando el radical y elevando al cuadrado:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{1+y^2}\right)^2&=\left(e^v-y\right)^2\\1+y^2&=e^{2v}-2ye^v+y^2\\1&=e^{2v}-2ye^v\\y&=\frac{e^{2v}-1}{2e^v}=\frac{e^v-e^{-v}}{2}\\&\boxed{y=\operatorname{sen}h\,v}\end{aligned}$$

Remplazando en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}&x\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\frac{\partial z}{\partial y}=xy\\&x\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\sqrt{1+y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=xy\\&\boxed{\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=e^u senhv}\end{aligned}$$

Ejemplo 12

Transformar la ecuación $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$, tomando como nuevas variables independientes $u=x$ y a $v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$ y como nueva función $w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$.

SOLUCIÓN:

Debemos tomar como función a w en términos de u y v, es decir $w=f(u,v)$.

La diferencial total sería: $dw=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv$

Obtengamos los diferenciales.

- De la ecuación diferencial se observa que:

$$\boxed{\underbrace{\underbrace{x^2}_{dx}\frac{\partial z}{\partial x}+\underbrace{y^2}_{dy}\frac{\partial z}{\partial y}}_{dz}=\underbrace{z^2}_{dz},}$$

- Como u es función de sólo x entonces $\boxed{\begin{aligned}du&=u'dx\\&=1dx\\&=dx\\du&=x^2\end{aligned}}$

- v es función de x y y entonces $\boxed{\begin{aligned}&dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\\&dv=\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{y^2}dy\\&dv=\frac{1}{x^2}x^2-\frac{1}{y^2}y^2\\&dv=0\end{aligned}}$

- w es función de x y z, entonces $\boxed{\begin{aligned}&dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial z}dz\\&dw=\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{z^2}dz\\&dw=\frac{1}{x^2}x^2-\frac{1}{z^2}z^2\\&dw=0\end{aligned}}$

Ahora remplazando en la diferencial total

$$\begin{aligned}dw&=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv\\0&=\frac{\partial w}{\partial u}x^2+\frac{\partial w}{\partial v}0\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\frac{\partial w}{\partial u}=0$$

Ejemplo 13

Transformar la ecuación $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0$ tomando a x por función y a $u=y-z$ y $v=y+z$ por variables independientes.

SOLUCIÓN:

En este caso $x=f(u,v)$, la diferencial total sería: $dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv$

Obtengamos los diferenciales.

- De la ecuación diferencial se observa que:

$$\underbrace{\underbrace{(y-z)}_{dx}\frac{\partial z}{\partial x}+\underbrace{(y+z)}_{dy}\frac{\partial z}{\partial y}}_{dz}=\underbrace{0}_{dz}$$

- u es función y y z entonces $\boxed{\begin{aligned}du&=\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\\&=(1)(y+z)+(-1)(0)\\du&=y+z\end{aligned}}$

- v es función de y y z entonces $\boxed{\begin{array}{l} dv = \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz \\ dv = (1)(y+z) + (1)(0) \\ dv = y+z \end{array}}$

Ahora remplazando en la diferencial total

$$
\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \\
\underbrace{(y-z)}_{v} &= \frac{\partial x}{\partial u}\underbrace{(y+z)}_{v} + \frac{\partial x}{\partial v}\underbrace{(y+z)}_{v} \\
u &= \frac{\partial x}{\partial u}v + \frac{\partial x}{\partial v}v \\
&\boxed{\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{v}}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 14

Transformar la ecuación $(x-z)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ tomando a x por función y a y y z por variables independientes.

SOLUCIÓN:

En este caso $x = f(y,z)$, la diferencial total sería: $dx = \frac{\partial x}{\partial y}dy + \frac{\partial x}{\partial z}dz$

Obtengamos los diferenciales.

- De la ecuación diferencial se observa que:

$$
\underbrace{\underbrace{(x-z)}_{dx}\frac{\partial z}{\partial x} + \underbrace{y}_{dy}\frac{\partial z}{\partial y}}_{dz} = \underbrace{0}_{dz}
$$

Ahora remplazando en la diferencial total

$$
\begin{aligned}
x - z &= \frac{\partial x}{\partial y}y + \frac{\partial x}{\partial z}(0) \\
x - z &= \frac{\partial x}{\partial y}y \\
&\boxed{\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x-z}{y}}
\end{aligned}
$$

Ejercicios propuestos 3.12

1. Hallar $\frac{dz}{dt}$, si $z = \frac{x}{y}$, donde $x = e^t, y = \ln t$.
2. Sea $f(x,y) = 4x^2y - 2\ln(xy)$ donde $\begin{cases} x = 2sent \\ y = 3(t-1)^3 \end{cases}$ encuentre $\frac{df}{dt}$
3. La demanda de cierto producto es $Q(x,y) = 200 - 10x^2 + 20xy$ unidades por mes, donde x es el precio del producto e y el precio de un producto competidor. Se estima que dentro de t meses el precio del producto será $x = 10 + 0{,}5t$ dólares por unidad mientras que el precio del producto competidor será $y = 12{,}8 + 0{,}2t^2$ dólares por unidad.

a) ¿A qué razón cambiará la demanda del producto con respecto al tiempo dentro de 4 meses?
b) ¿A qué razón porcentual cambiará la demanda del producto con respecto al tiempo dentro de 4 meses?

4. Suponga que cuando las manzanas se venden a x CENTAVOS POR LIBRA los panaderos ganan y DÓLARES POR HORA, el precio de los pasteles de manzana en el supermercado local es $p(x,y)=\frac{1}{2}x^{1/3}y^{1/2}$ DÓLARES POR PASTEL. Suponga además que dentro de t MESES, el precio de las manzanas será $x=23+8t$ CENTAVOS POR LIBRA y que los sueldos de los panaderos serán $y=3{,}96+0{,}02t$ DÓLARES POR HORA. Si el supermercado puede vender $Q(p)=\dfrac{3600}{p}$ PASTELES POR SEMANA cuando el precio es p DÓLARES POR PASTEL, ¿a qué razón CAMBIARÁ la demanda semanal Q con respecto al tiempo dentro de dos meses?
5. Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$, si $z=f(u,v)$, donde $\begin{cases}u=x^2-y^2\\ v=e^{xy}\end{cases}$.
6. Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial u},\dfrac{\partial z}{\partial v}$, si $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, donde $\begin{cases}x=u\operatorname{sen}v\\ y=u\cos v\end{cases}$.
7. Sea $f:R^3\to R$, una función diferenciable y sea $g(X)=\operatorname{sen}\left(f(X)f(X)\right)$; calcular la matriz Jacobiana para $g(X)$, donde $f(X)=\|X\|$
8. Sea la función: $\dfrac{1}{R}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{R_k}$. Hallar $\dfrac{\partial R}{\partial R_1}$
9. Demuestre que $u(x,y)=\dfrac{e^{xy}}{\left(e^x+e^y\right)}$ satisface la ecuación diferencial parcial $u_x+u_y=(x+y-1)u$.
10. Sea $F(x,y)=f(x+3y,2x-y)$, donde $f:R^2\to R$ es diferenciable. Suponga que $\nabla f(0,0)=(4,-3)$. Determine la derivada de la función *F* en el origen en la dirección del vector $v=(1,1)$
11. Sea $z=f(x,y)$ con derivadas parciales de segundo orden continuas:
   a) Si $x=r^2+s^2,\quad y=2rs$ determine $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial s\partial r}$
   b) Si $x=s+t,\quad y=s-t$ demuestre que: $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\dfrac{\partial z}{\partial s}\dfrac{\partial z}{\partial t}$
12. Sea $f:R^2\to R^3$, tal que $f(x,y)=\left(x^2y^2,\,x^2,\,y^2\right)$ y sea $g:R^3\to R^2$, tal que $g(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2,\,xyz\right)$, hallar $D[g\circ f]_{(1,1)}$
13. Transforme la ecuación $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+2x\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{a^2}{x^2}y=0$, poniendo $x=\dfrac{1}{t}$.
14. Transformar la ecuación $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$, pasando a las coordenadas polares: $x=r\cos\varphi,\quad y=r\operatorname{sen}\varphi$.
15. Tomando *u, v*, como nuevas variables independientes transformar la siguiente ecuación: $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, si $u=\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$; $v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

16. Transformar la ecuación $y\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\left(y-x\right)z$ tomando como nuevas variables independientes $u=x^2+y^2$ y $v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ como nueva función $w=\ln z-\left(x+y\right)$.

17. Transformar la ecuación $\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ pasándola en coordenadas esféricas $\begin{cases} x=\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ y=\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ z=\rho\cos\phi \end{cases}$, ¿$\nabla^2\varphi=?$ en coordenadas esféricas.

18. Sea $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$, calcule el valor de la expresión $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$

19. Transformar la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ a coordenadas polares.

3.12 DERIVACIÓN IMPLICITA

Suponga que se tiene $F\left(x,y\right)=0$, una ecuación implícita para un lugar geométrico de R^2. Obteniendo diferencial a ambos miembros de la ecuación

$$D\Big(F\left(x,y\right)\Big)=D\left[0\right]$$

$$F_x dx+F_y dy=0$$

Despejando, se obtiene:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}}$$

Ejemplo.

Sea $x^2+y^2=4$, hallar $\frac{dy}{dx}$ empleando derivadas parciales.

Solución:

En este caso tenemos $F\left(x,y\right)=x^2+y^2-4$

Empleando la formula:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$$

Suponga que se tiene $F\left(x,y,z\right)=0$, una ecuación implícita para un lugar geométrico de R^3. Obteniendo diferencial a ambos miembros de la ecuación

$$D\Big(F\left(x,y,z\right)\Big)=D\left[0\right]$$

$$F_x dx+F_y dy+F_z dz=0$$

Si queremos $\frac{\partial y}{\partial x}$, debemos considerar a z constante, por tanto $dz=0$. Reemplazando y despejando se obtiene:

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_y}}$$

Si queremos $\frac{\partial z}{\partial x}$, debemos considerar a y constante, por tanto $dy=0$. Reemplazando y despejando se obtiene:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}}$$

Si queremos $\frac{\partial z}{\partial y}$, debemos considerar a x constante, por tanto $dx=0$. Reemplazando y despejando se obtiene:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}}$$

Ejemplo

Sea $x^3e^{y+z}-ysen(x-z)=0$, hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solución:

En este caso tenemos $F(x,y,z)=x^3e^{y+z}-ysen(x-z)$

Empleando las formulas:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{3x^2e^{y+z}-y\cos(x-z)}{x^3e^{y+z}+y\cos(x-z)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{x^3e^{y+z}-sen(x-z)}{x^3e^{y+z}+y\cos(x-z)}$$

Por otro lado, suponga que se tiene una superficie cuya ecuación está dada en forma implícita $F(x,y,z)=0$, el vector normal que estaba dado de esta forma $\vec{n}=\left(-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1\right)$, ahora puede ser dado de otra forma.

Reemplazando:

$$\vec{n}=\left(-\left(-\frac{F_x}{F_z}\right),-\left(-\frac{F_y}{F_z}\right),1\right)$$

Multiplicando por F_z: $\boxed{\vec{n}=\left(F_x,F_y,F_z\right)}$

Ejemplo 1

Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie que tiene por ecuación $z = \frac{10}{xy}$ en el punto $(1,2,5)$.

SOLUCIÓN:

Este problema ya se lo había resuelto tomando le ecuación de la superficie de manera explícita, se trata ahora de encontrar la ecuación del plano tangente empleando la ecuación implícita $F : xyz = 10$

El vector ortogonal al plano tangente es el vector gradiente de la superficie en el punto $(1,2,5)$.

$$\vec{n} = \nabla F = \left(F_x, F_y, F_z\right) = \left(yz, xz, xy\right)\Big|_{(1,2,5)} = (10,5,2)$$

Reemplazando y simplificando:

$$a\left(x - x_0\right) + b\left(y - y_0\right) + c\left(z - z_0\right) = 0$$
$$10(x-1) + 5(y-2) + 2(z-5) = 0$$
$$10x + 5y + 2z - 10 - 10 - 10 = 0$$
$$10x + 5y + 2z - 30 = 0$$

Que es la misma respuesta obtenida anteriormente pero ahora de una manera un tanto más rápida.

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la recta tangente a las superficies $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ y $z = xy$ en el punto (1,1,1).

Solución:

Las superficies se intersecan en una curva. La recta tangente a la curva en el punto $(1,1,1)$ es la recta tangente a las superficies en ese punto.

El vector director de la recta tangente se lo obtiene mediante el producto cruz entre los vectores normales de las superficies. Es decir:

$$\vec{S} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$$

Donde $\vec{n_1}$ sería el vector ortogonal a la superficie $F_1 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ y $\vec{n_2}$ sería el vector ortogonal a la superficie $F_2 : z - xy = 0$

Los vectores normales serían los vectores gradientes a las superficies en ese punto

$$\vec{n_1} = \nabla F_1 = \left(2x, 2y, 4z\right)\Big|_{(1,1,1)} = (2,2,4)$$

$$\vec{n_2} = \nabla F_2 = \left(-y, -x, 1\right)\Big|_{(1,1,1)} = (-1,-1,1)$$

Entonces

$$\vec{S} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (6,-6,0)$$

Finalmente, la ecuación de la recta sería:

$$l : \begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 1 - 6t \\ z = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 3

En el tiempo $t = 0$ se lanza una partícula desde el punto $(1,1,1)$ sobre la superficie $xyz = 1$ en una dirección normal a la superficie, con una rapidez de $\sqrt{3}$ unidades por segundo. ¿En qué instante y en qué punto cruza a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 27$?

SOLUCION:

Primero se encuentra la ecuación de la trayectoria por la cual se desplaza la partícula una vez que sale de la superficie. Esta es una recta, a propósito la normal, de acuerdo a lo que se informa. No olvide que debe tener una rapidez de $\sqrt{3}$ unid. por seg.. Por tanto el vector director debe tener magnitud $\sqrt{3}$ y tener la dirección del gradiente:

$$\vec{S}=\sqrt{3}\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}=\sqrt{3}\left.\frac{(yz,xz,xy)}{\sqrt{y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2}}\right|_{(1,1,1)}=\sqrt{3}\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}=(1,1,1)$$

La ecuación de la recta sería:

$$l:\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$$

La recta debe intersecar a la esfera, por tanto sus coordenadas debe satisfacer su ecuación. Reemplazando:

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2=27\\&(1+t)^2+(1+t)^2+(1+t)^2=27\\&3(1+t)^2=27\\&\sqrt{(1+t)^2}=\pm\sqrt{9}\\&1+t=\pm3\\&t=-1\pm3\end{aligned}$$

Concluimos que $\boxed{t=2seg.}$

Y el punto sería: $\begin{cases}x=1+2=3\\y=1+2=3\\z=1+2=3\end{cases}$

Ejercicios Propuestos 3.13

1. Hallar y', empleando derivadas parciales, para:

   a) $2x^2+6xy+y^2=18$

   b) $y^2+5x=xe^{x(y-2)}$

2. Hallar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ en $x^2y-3z+8yz^3=0$

3. Determine la derivada direccional de la función $u=f(x,y,z)$ definida implícitamente por $u+ye^u+x+3z=0$ en el origen de coordenadas en la dirección del vector $v=(1,-1,-1)$

4. En el tiempo t=0 se lanza una partícula desde el punto (1,1,1) sobre la superficie $x^2+y^2+3z^2=5$ en una dirección normal a la superficie, con una rapidez de 10 unidades por segundo. ¿En qué instante y en qué punto cruza a la esfera $x^2+y^2+z^2=103$

5. Demuestre que el plano tangente al cono $z^2=a^2x^2+b^2y^2$ pasa por el origen.

6. Demuestre que cualquier recta normal a una esfera pasa por su centro.

7. Demuestre que el plano tangente al elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ en el punto (x_0,y_0,z_0) puede escribirse en la forma $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}+\dfrac{z_0z}{c^2}=1$.

8. Demostrar que los planos tangentes a la superficie: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ interceptan a los ejes coordenados en segmentos cuya suma es constante.

9. Encuentre un punto de la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 12$, donde el plano tangente es perpendicular a la recta cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = 1 + 2t; \quad y = 3 + 8t; \quad z = 2 - 6t$
10. Demostrar que el elipsoide $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0$ son tangentes en el punto (1,1,1).
11. Hallar la ecuación de la recta tangente a las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ y $z = xy$ en el punto (1,1,1).
12. En qué puntos el gradiente de la superficie $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ es :
    a) perpendicular al eje z.
    b) Es paralelo al eje z.
13. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva intersección de las superficies $\phi = \frac{\pi}{3}$ y $\rho = 2\csc\phi\sec\theta$ en $P\left(2, 2, -\sqrt{8}\right)$.