4 Extremos de Funciones De Varias Variables

Objetivos.

- Encontrar Polinomios de Taylor para funciones de dos variables.
- Optimizar funciones de dos y tres variables sin restricciones y con una y dos restricciones de igualdad

4.1 POLINOMIOS DE TAYLOR

En el capitulo anterior se mencionó que si f es una función diferenciable entonces $z = f(\mathbf{x}_0) + \left[Df(\mathbf{x}_0)\right]\left[\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\right]$ debe ser una buena aproximación de la función en la vecindad de $\overline{x}_0$, es decir:

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \left[Df(\mathbf{x}_0)\right]\left[\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\right]$$

Para funciones de dos variables tenemos:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

Un polinomio de primer orden:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\left[x - x_0\right] + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\left[y - y_0\right] + r_1$$

Ejemplo

Sea $f(x,y) = sen(x+2y)$. Hallar el polinomio de Taylor de Primer orden en la vecindad de $(0,0)$.

SOLUCIÓN:

En este caso tenemos:

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\left[x - 0\right] + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\left[y - 0\right] + r_1$$

Las derivadas parciales, serian:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \cos(x+2y)_{(0,0)} = 1$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 2\cos(x+2y)_{(0,0)} = 2$$

$$sen(x+2y) = 0 + 1[x] + 2[y] + r_1$$

4.1.1 Polinomio de Taylor de segundo orden.

Para funciones de una variable el polinomio de Taylor de segundo orden es:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\left[x - x_0\right] + \frac{1}{2} f''(x_0)\left[x - x_0\right]^2 + r_2$$

Haciendo analogía para funciones de varias variables, deberíamos utilizar matrices diferenciales y vectores de $\mathbb{R}^n$.

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \left[Df(\mathbf{x}_0)\right]\left[\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right] + \frac{1}{2}\left[\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right]^T\left[D\big(Df(\mathbf{x}_0)\big)\right]\left[\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right] + r_2$$

donde $D\big(Df(\mathbf{x}_0)\big)$ seria la matriz diferencial de la matriz diferencial, es decir la matriz de segunda derivadas, la cual se la denomina ***matriz Hessiana***, se la denota por $H(f)$ y se la define de la siguiente manera:

$$H(f) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} & \cdots & f_{x_3x_n} \\ f_{x_4x_1} & f_{x_4x_2} & f_{x_4x_3} & \cdots & f_{x_4x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & f_{x_nx_3} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

Si f es una función de dos variables, la matriz Hessiana sería:

$$H\big(f(x,y)\big) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

Si f es una función de tres variables, la matriz Hessiana sería:

$$H\big(f(x,y,z)\big) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$$

Bien, el polinomio de Taylor de segundo orden para funciones de dos variables seria:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-x_0 & y-y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix} + r_2$$

Ejemplo.

Sea $f(x,y) = e^{3x+2y}$. Hallar el polinomio de Taylor de segundo orden en la vecindad de $(0,0)$

SOLUCIÓN:
En este caso tenemos

$$f(x,y) = f(0,0) + \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix}_{(0,0)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(0,0)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + r_2$$

Las derivadas parciales de primer orden serian:

$$f_x(0,0)=3e^{3x+2y}\Big|_{(0,0)}=3$$

$$f_y(0,0)=2e^{3x+2y}\Big|_{(0,0)}=2$$

Las derivadas parciales de segundo orden serian

$$f_{xx}(0,0)=9e^{3x+2y}\Big|_{(0,0)}=9$$

$$f_{xy}(0,0)=6e^{3x+2y}\Big|_{(0,0)}=6=f_{yx}(0,0)$$

$$f_{yy}(0,0)=4e^{3x+2y}\Big|_{(0,0)}=4$$

Reemplazando y resolviendo:

$$f(x,y)=1+\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 6\\ 6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+r_2$$

$$f(x,y)=1+3x+2y+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}9x+6y & 6x+4y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+r_2$$

$$f(x,y)=1+3x+2y+\frac{1}{2}\left(9x^2+6xy+6xy+4y^2\right)+r_2$$

$$f(x,y)=1+3x+2y+\frac{9}{2}x^2+6xy+2y^2+r_2$$

La formula de Taylor de segundo orden puede ser usada en forma directa:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}_{(x_0,y_0)}\begin{bmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x-x_0 & y-y_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{bmatrix}_{(x_0,y_0)}\begin{bmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{bmatrix}+r_2$$

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x[x-x_0]+f_y[y-y_0]+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}f_{xx}[x-x_0]+f_{yx}[y-y_0] & f_{xy}[x-x_0]+f_{yy}[y-y_0]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{bmatrix}+r_2$$

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x[x-x_0]+f_y[y-y_0]+\frac{1}{2}\left[f_{xx}[x-x_0]^2+2f_{xy}[x-x_0][y-y_0]+f_{yy}[y-y_0]^2\right]+r_2$$

Ejercicios propuestos 4.1

1. Determinar el polinomio de Taylor de segundo orden para la función alrededor del punto indicado:
   a) $f(x,y)=(x+y)^2,\quad x_0=0,\ y_0=0$
   b) $f(x,y)=e^{x+y},\quad x_0=2,\ y_0=3$
   c) $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}\cos(xy),\quad x_0=0,\ y_0=0$
   d) $f(x,y)=\operatorname{sen}(xy)+\cos(xy),\quad x_0=2,\ y_0=1$
   e) $f(x,y)=e^{(x-1)^2},\quad x_0=1,\ y_0=0$

2. Obtenga un desarrollo de Taylor de segundo orden para:

$$f(x,y)=\frac{1}{\left(x^2+y^2+1\right)},\quad x_0=0,\ y_0=0$$

   Luego utilice el resultado para hallar el valor aproximado de $f(0.3,-0.2)$

3. Empleando la formula de Taylor de segundo orden aproxime:
   a) $3^{0.1}\ln(0.85)$

b) $(2.05)^{3.99}$

c) $\sqrt{3.8}\, sen(0.4)$

4. Sea $f(-1,1)=5$, $\nabla f\big|_{(-1,1)}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $H\big|_{(-1,1)}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. Obtenga el valor aproximado para $f(-0.99,0.98)$

5. Sea $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ diferenciable en (x_0,y_0) tal que $\nabla f(x_0,y_0)=(2,1)$, $\boldsymbol{Hf}(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ y $f(x_0,y_0)=3$. Determine $f(x_0+0.2, y_0-0.1)$

---

4. 2 EXTREMOS DE FUNCIONES ESCALARES

4.2.1 DEFINICIÓN

Sean $f(\mathbf{x}):U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0\in U$, $B_n(\mathbf{x}_0,\partial)$.

1. $f(\mathbf{x}_0)$ es un valor ***MÁXIMO LOCAL*** f en B_n, si $f(\mathbf{x})\leq f(\mathbf{x}_0),\quad \forall\mathbf{x}\in B_n$.
2. $f(\mathbf{x}_0)$ es un valor ***MÍNIMO LOCAL*** de f en B_n, si $f(\mathbf{x})\geq f(\mathbf{x}_0),\quad \forall\mathbf{x}\in B_n$.
3. Si $f(\mathbf{x}_0)$ es tal que en su vecindad, en ciertas direcciones hay un máximo y en otras un mínimo, entonces se llama ***PUNTO DE SILLA***.

Bien, ya están definidos los extremos, ahora debemos definir cómo encontrarlos. Igual que para función de una variable deberán existir puntos candidatos a ser extremos.

La mayoría de las funciones son diferenciables por tanto nos regiremos al estudio de este tipo de funciones.

4.2.2 TEOREMA (Condición necesaria para la existencia de extremos locales)

Sean $f(\mathbf{x}):U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, una función diferenciable, sea $\mathbf{x}_0\in U$. Si en $\mathbf{x}_0$, $f(\mathbf{x})$ tiene un extremo local entonces $\nabla f(\mathbf{x}_0)=0$.

A $\mathbf{x}_0$ tal que $\nabla f\left(\mathbf{x}_0\right)=0$ se lo llama ***PUNTO CRÍTICO ESTACIONARIO***.

Lo anterior quiere decir que los extremos se producen necesariamente en los puntos críticos, igual que para función de una variable. Entonces los primeros que debemos hacer es obtener los puntos críticos y luego clasificarlos en máximos, mínimos o ninguno.

Para función de una variable, empleando el criterio de la segunda derivada, teníamos que si esta es positiva en un punto crítico estacionario entonces estamos ante un mínimo; y, si la segunda derivada es negativa entonces tenemos un máximo. Esto es debido a que según Taylor de segundo orden la función se aproxima mediante una parábola cuya concavidad depende justamente del signo de la segunda derivada:

$$f\left(x\right)\approx f\left(x_0\right)+\underbrace{f'\left(x_0\right)}_{0}\left[x-x_0\right]+\frac{1}{2}f''\left(x_0\right)\left[x-x_0\right]^2$$

Para funciones de varias variables, podemos también hacer uso de la formula de Taylor de segundo orden. Suponga que tenemos una función diferenciable y que su gradiente se anula en un punto $\bar{x}_0$

$$f\left(\mathbf{x}\right)\approx f\left(\mathbf{x}_0\right)+\underbrace{\left[\nabla f\left(\mathbf{x}_0\right)\right]}_{0}\left[\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right]+\frac{1}{2}\left[\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right]\left[H\left(f\left(\mathbf{x}_0\right)\right)\right]\left[\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right]^T$$

Análogamente, ahora debemos analizar la matriz Hessiana para clasificar los extremos.

4.2.3 TEOREMA (Condición suficientes para la existencia de extremos)

Sea $f\left(\mathbf{x}\right):U\subseteq\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$, suponga que $\mathbf{x}_0$ es un punto tal que $\nabla f\left(\mathbf{x}_0\right)=0$, suponga que f tiene derivadas parciales se segundo orden continuas, entonces:

1. Si la matriz Hessiana $H\left(f\left(\mathbf{x}_0\right)\right)$ es definida ***POSITIVA*** (todos sus valores propios son positivos) entonces $f\left(\mathbf{x}_0\right)$ es un valor ***MÍNIMO*** de f.

2. Si la matriz Hessiana $H\left(f\left(\mathbf{x}_0\right)\right)$ es definida ***NEGATIVA*** (todos sus valores propios son negativos) entonces $f\left(\mathbf{x}_0\right)$ es un valor ***MÁXIMO*** de f.
3. Si la matriz Hessiana $H\left(f\left(\mathbf{x}_0\right)\right)$ es ***SEMI-DEFINIDA POSITIVA*** (valores propios no negativos) entonces $f\left(\mathbf{x}_0\right)$ ***PUEDE*** ser un valor ***MÍNIMO*** de f.
4. Si la matriz Hessiana $H\left(f\left(\mathbf{x}_0\right)\right)$ es ***SEMI-DEFINIDA NEGATIVA*** (valores propios no positivos) entonces $f\left(\mathbf{x}_0\right)$ ***PUEDE*** ser un valor ***MÁXIMO*** de f.
5. Si la matriz Hessiana $H\left(f\left(\mathbf{x}_0\right)\right)$ es ***NO DEFINIDA*** (valores propios no positivos y no negativos) entonces $f\left(\mathbf{x}_0\right)$ es un ***PUNTO DE SILLA*** de f.

Obtener los valores propios de la matriz Hessiana puede resultar una tarea dificultosa por tanto, podemos utilizar otro mecanismo que lo vamos a ir indicando primero para dos variables, luego para tres hasta llegar a generalizarlo.

4.2. 4 TEOREMA

Sea $f\left(x,y\right)$ una función dos veces diferenciable en $U\subseteq\mathbb{R}^2$, sea $\left(x_0,y_0\right)\in U$ un punto crítico estacionario de f.

Defínanse las matrices:

$$H_1=\left[f_{xx}\right]_{\left(x_0,y_0\right)},\quad H_2=H=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{bmatrix}_{\left(x_0,y_0\right)}$$

Entonces:

1. Si $\left|H_1\right|>0 \quad\wedge\quad \left|H_2\right|>0$, entonces $f(x_0,y_0)$ es un ***MÍNIMO*** de f en U.

2. Si $\left|H_1\right|<0 \quad \wedge \quad \left|H_2\right|>0$, entonces $f(x_0,y_0)$ es un ***MÁXIMO*** de f en U.
3. Si $\left|H_2\right|<0$, entonces $f(x_0,y_0)$ es un ***PUNTO DE SILLA*** de f en U.
4. Si $\left|H_2\right|=0$, no se puede concluir.

Ejemplo 1

Hallar los extremos para $f(x,y)=x^2+y^2$

SOLUCIÓN:

PRIMERO se encuentran los puntos críticos, candidatos a ser extremos.

Las derivadas parciales para $f(x,y)=x^2+y^2$ son: $\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2y\end{array}}$

El sistema $\begin{cases}2x=0\\2y=0\end{cases}$ da como resultado $\boxed{x_0=0}$ y $\boxed{y_0=0}$

Por tanto tenemos en este caso un sólo punto crítico $\boxed{(x_0,y_0)=(0,0)}$

SEGUNDO Clasifiquemos el punto crítico:

Las segundas derivadas parciales son: $\boxed{\begin{array}{l}f_{xx}=2\\ f_{yy}=2\\ f_{xy}=f_{yx}=0\end{array}}$

La matriz Hessiana en este caso es: $H=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{bmatrix}_{(0,0)}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$

Ahora, como $\left|H_1\right|=\left|2\right|>0$ y $\left|H_2\right|=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}=4>0$ concluimos que en $(0,0)$ hay un valor mínimo para la función, que sería: $f_{Mín}(0,0)=0^2+0^2=0$

Ejemplo 2

Hallar los extremos para $f(x,y)=x^3-y^3+6xy$

SOLUCIÓN:

PRIMERO: Para hallar los puntos críticos, tenemos:

Las derivadas parciales son: $\boxed{\begin{array}{l}f_x=3x^2+6y\\ f_y=-3y^2+6x\end{array}}$

Resolviendo el sistema $\begin{cases}3x^2+6y=0\\-3y^2+6x=0\end{cases}$ tenemos:

En la segunda ecuación se obtiene $\boxed{x = \frac{y^2}{2}}$ y al reemplazarlo en la primera ecuación encontramos los valores de y_0, es decir :

$$3\left(\frac{y^2}{2}\right)^2 + 6y = 0$$

$$3\frac{y^4}{4} + 6y = 0$$

$$3y\left(\frac{y^3}{4} + 2\right) = 0$$

$$y = 0 \quad \vee \quad y = -2$$

Luego; si $y_0 = 0$ entonces $x_0 = \frac{0^2}{2} = 0$; y ,

si $y_0 = -2$ entonces $x_0 = \frac{(-2)^2}{2} = 2$

Es decir, aquí tenemos dos puntos críticos $(0,0)$ y $(2,-2)$.

SEGUNDO: Clasificando los puntos críticos

Las segundas derivadas parciales son: $\boxed{\begin{array}{l} f_{xx} = 6x \\ f_{yy} = -6y \\ f_{xy} = f_{yx} = 6 \end{array}}$

La matriz Hessiana en este caso es: $H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 6 \\ 6 & -6y \end{bmatrix}$

1. La matriz Hessiana para el punto $(0,0)$ es: $H = \begin{bmatrix} 6(0) & 6 \\ 6 & 6(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

Como $|H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$ concluimos que $(0,0)$ hay un punto de silla.

2. La matriz Hessiana para el punto $(2,-2)$ es: $H = \begin{bmatrix} 6(2) & 6 \\ 6 & -6(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$

Como $|H_1| = |12| > 0$ y $|H_2| = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 36 = 108 > 0$ entonces en $(2,-2)$ hay un valor Mínimo para la función, y es: $\boxed{f_{MIN}(2,-2) = 2^3 - 2^3 + 6(2)(-2) = -8}$

Ejemplo 3

Un supermercado vende 2 tipos de cerveza. Una marca local que se obtiene a un costo de $¢30$ cada lata y una marca nacional que se obtiene a un costo de $¢40$ por lata. El tendero calcula que si la de marca local se vende a "x" centavos por lata y la de marca nacional a "y" centavos por lata, se venderán cada día aproximadamente $70 - 5x + 4y$ latas de la marca local y $80 + 6x - 7y$ latas de la marca nacional. ¿Qué precio debería fijar el tendero a cada marca para maximizar las utilidades?

SOLUCIÓN:

Con la información proporcionada determinamos la función utilidad

$U = I - C$

$U = [x(70-5x+4y) + y(80+6x-7y)] - [30(70-5x+4y) + 40(80+6x-7y)]$

$U = (x-30)(70-5x+4y) + (y-40)(80+6x-7y)$

$U = -5x^2 + 10xy - 20x - 7y^2 + 240y - 5300$

Las derivadas parciales para la función Utilidad son:

$$\begin{cases} U_x = -10x + 10y - 20 \\ U_y = 10x - 14y + 240 \end{cases}$$

Para los puntos críticos hacemos $\begin{cases} U_x = 0 \\ U_y = 0 \end{cases}$ es decir $\begin{cases} -10x + 10y - 20 = 0 \\ 10x - 14y + 240 = 0 \end{cases}$

Despejamos x en la primera ecuación: $\boxed{\begin{array}{l} -10x + 10y - 20 = 0 \\ -10x = 20 - 10y \\ x = \dfrac{10y - 20}{10} \\ x = y - 2 \end{array}}$

Reemplazamos x en la segunda ecuación: $\boxed{\begin{array}{l} 10(y-2) - 14y + 240 = 0 \\ 20y - 20 - 14y + 240 = 0 \\ -4y = -220 \\ y = \dfrac{220}{4} \\ y = 55 \end{array}}$

Luego $x = y - 2 = 55 - 2 = 53$

Por tanto, tenemos un sólo punto crítico $P(53{,}55)$

La matriz Hessiana es $H = \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{xy} \\ U_{yx} & U_{yy} \end{bmatrix}_{(53,55)} = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -14 \end{bmatrix}$

Como $|H_1| = |-10| = -10 < 0$ y $|H_2| = \begin{vmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -14 \end{vmatrix} = 140 - 100 = 40 > 0$ entonces **utilidades máximas** se producirán cuando $x = 53$ y $y = 55$

Para el caso de tres variables tenemos:

4.2. 5 TEOREMA

Sea f una función dos veces diferenciable en $U \subseteq R^3$, sea $(x_0, y_0, z_0) \in U$ un punto crítico estacionario de f.

Defínanse las matrices:

$$H_1 = [f_{xx}]_{(x_0,y_0,z_0)}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}, \quad H_3 = H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}$$

Entonces:

1. Si $|H_1| > 0 \;\wedge\; |H_2| > 0 \;\wedge\; |H_3| > 0$, entonces $f(x_0, y_0, z_0)$ es un ***MÍNIMO*** de f en U.
2. Si $|H_1| < 0 \;\wedge\; |H_2| > 0 \;\wedge\; |H_3| < 0$, entonces $f(x_0, y_0, z_0)$ es un ***MÁXIMO*** de f en U.

Ejemplo

Hallar los extremos para $f(x,y,z) = 2x^2 + xy + 4y^2 + xz + z^2 + 2$

SOLUCIÓN:

PRIMERO determinamos los puntos críticos estacionarios.

Las derivadas parciales son: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x + y + z \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + 8y \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = x + 2z \end{cases}$

Resolviendo el sistema simultáneo $\begin{cases} 4x + y + z = 0 \\ x + 8y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$ tenemos:

Despejando " y " en la segunda ecuación resulta $y = -\dfrac{x}{8}$.

Despejando " z " en la tercera ecuación resulta $z = -\dfrac{x}{2}$.

Luego reemplazando " y " y " z " en la primera ecuación, encontramos " x ", es decir:

$$4x - \frac{x}{8} - \frac{x}{2} = 0$$

$$\left(4 - \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right)x = 0$$

$$x = 0$$

Por lo tanto $y = -\dfrac{x}{8} = -\dfrac{0}{8} = 0$ y $z = -\dfrac{x}{2} = -\dfrac{0}{2} = 0$

Hay un solo punto crítico $P(0,0,0)$

SEGUNDO: Clasificando el punto crítico.

La matriz Hessiana sería: $H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

De aquí tenemos: $H_1 = [4]$ $\quad H_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ $\quad H_3 = H = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Calculando los determinantes tenemos:

$$|H_1| = |4| = 4 > 0 \qquad |H_2| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 31 > 0 \qquad |H_3| = |H| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 54 > 0$$

Por lo tanto, se concluye que en el punto $P(0,0,0)$ se produce un **mínimo**, cuyo valor es:

$$f(0,0,0) = 20^2 + 00 + 40^2 + 0 + 0^2 + 2$$
$$f_{min} = 2$$

Para el caso de n variables, tenemos:

4.2. 6 TEOREMA

Sea la Función Objetivo $w = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, dos veces diferenciable. Suponga que se obtiene el punto crítico estacionario $(x_{0_1}, x_{0_2}, x_{0_3}, \ldots, x_{0_n})$

Defínanse las matrices:

$$H_1 = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1} \end{bmatrix},\ H_2 = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{bmatrix},\ H_3 = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \end{bmatrix} \cdots, H_n = H$$

Entonces:

1.- Si $|H_1| > 0 \wedge |H_2| > 0 \wedge |H_3| > 0 \wedge \ldots \wedge |H_n| > 0$, entonces en $(x_{01}, x_{02}, x_{03}, \ldots, x_{0n})$ la función tiene un ***MÍNIMO***.

2.- Si $|H_1| < 0 \wedge |H_2| > 0 \wedge |H_3| < 0 \wedge \ldots \wedge (-1)^n |H_n| > 0$, entonces en $(x_{01}, x_{02}, x_{03}, \ldots, x_{0n})$ la función tiene un ***MÁXIMO***.

Ejercicios propuestos 4.2

1. Determine y clasifique los puntos críticos de :

   a) $f(x, y) = x^2 y - x - xy^2 + y$

   b) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$

   c) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

   d) $f(x, y) = (x - 4)\ln(xy)$

   e) $f(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + 8y^3) - 2(x^2 + y^2) + 1$

   f) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - \ln(xy^2)$

   g) $f(x, y) = x^2 y + y^2 x + 3xy$

   h) $f(x, y) = x^2 y + y^2 x + 3xy$

i) $f(x,y,z)=x^2+xz-y+y^2+yz+3z^2$

j) $f(x,y,z)=-x^2-y^2-z^2+2y+xz$

2. Determine el máximo y mínimo absolutos de la función $z=\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y+\operatorname{sen}(x+y)$ en la región $0\le x\le \pi/2,\quad 0\le y\le \pi/2$.

Resp. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ Máximo local

3. Determine los puntos críticos de $f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)+\int_0^x \frac{2t}{1+t^4}dt$

4. Una compañía de teléfonos planea introducir dos nuevos tipos de sistemas de comunicaciones. Se calcula que si el primer tipo de sistema se valora en x cientos de dólares por sistema y el segundo tipo en y cientos de dólares por sistema, aproximadamente $40-8x+5y$ consumidores comprarán el primer tipo y $50+9x-7y$ comprarán el segundo tipo. Si el costo de fabricación del primer tipo es de $1000 por sistema y el costo del segundo tipo es $3000 por sistema. ¿Qué precio debería fijar la compañía de teléfonos a los sistemas para generar la máxima utilidad posible?.

5. Suponga que una empresa monopolista tiene las siguientes funciones de precio $\begin{cases}P_1=63-4Q_1\\P_2=105-5Q_2\\P_3=75-6Q_3\end{cases}$, y la función de costo total $C=20+15Q+Q^2$ donde $Q=Q_1+Q_2+Q_3$. Determine los niveles de demanda que haga máximo el beneficio.

6. Para los productos A, B y C de un monopolista la función costo está dada por $C(p_A,p_B,p_C)=p_A{}^2+2p_B{}^2+p_C{}^3-p_Ap_B-2p_C-2p_A+12$ donde p_A,p_B,p_C son los precios de los productos. Encuentre los precios que minimicen el costo.

4.3 EXTREMOS CONDICIONADOS (Multiplicadores de Lagrange)

En muchas ocasiones nos enfrentaremos a situaciones de optimización cunado las variables independientes deben ser tomadas de un subconjunto de su dominio. Es decir presentan restricciones

4.3.1 TEOREMA. Criterio para establecer extremos con una restricción en funciones de dos variables

Suponga que se desea optimizar la función de dos variables f, dos veces diferenciable, sujeta a la restricción o ligadura $g(x,y)=k$, donde k es una constante.
Defínase la Función Langragiana

$$L(\lambda,x,y)=f(x,y)-\lambda\left[g(x,y)-k\right]$$

donde λ es llamado Multiplicador de Lagrange.
Suponga que se obtiene el Punto crítico (x_0, y_0, λ) de la Función Langragiana.
Defínase el Hessiano Orlado, como la matriz:

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda x} & L_{\lambda y} \\ L_{x\lambda} & L_{xx} & L_{xy} \\ L_{y\lambda} & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0, \lambda)}$$

Entonces:

1. Si $\left|\overline{H}\right| > 0$ entonces en (x_0, y_0) la función f tiene un ***MÁXIMO***.
2. Si $\left|\overline{H}\right| < 0$ entonces en (x_0, y_0) la función f tiene un ***MÍNIMO***.

Ejemplo

Hallar los valores máximos y mínimos de $f(x, y) = xy$, sujeto a que $x^2 + y^2 = 8$

SOLUCIÓN:

En este caso $g(x, y) = x^2 + y^2$. Por tanto la función Langragiana sería:

$$L(\lambda, x, y) = f(x, y) - \lambda\left[g(x, y) - k\right] = xy - \lambda\left[x^2 + y^2 - 8\right]$$

$$\begin{cases} L_x = 0 \to f_x = \lambda g_x \to y = \lambda 2x \\ L_y = 0 \to f_y = \lambda g_y \to x = \lambda 2y \\ L_\lambda = 0 \to g(x, y) = k \to x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

Despejando λ en las dos primeras ecuaciones, e igualando se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{y}{2x} \\ \lambda &= \frac{x}{2y} \end{aligned}\right\} \to \frac{y}{2x} = \frac{x}{2y} \to y^2 = x^2 \to y = \pm x$$

Reemplazando en la tercera ecuación, resulta:

$$\boxed{\begin{aligned} & x^2 + y^2 = 8 \\ & 2x^2 = 8 \\ & x^2 = 4 \to \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \end{aligned}}$$

Por tanto: $\boxed{\begin{array}{l} x=2 \rightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=-2 \end{cases} \\ x=-2 \rightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=-2 \end{cases} \end{array}}$

Es decir, existen cuatros puntos críticos: $(2,2)$, $(2,-2)$, $(-2,2)$ y $(-2,-2)$.

Hallemos el Hessiano Orlado

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & -2\lambda \end{bmatrix}$$

Y como $\lambda = \dfrac{x}{2y}$, se tiene $\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\left(\frac{x}{2y}\right) & 1 \\ 2y & 1 & -2\left(\frac{x}{2y}\right) \end{bmatrix}$

Ahora clasifiquemos los puntos críticos:

1.- Para $(2,2)$ tenemos: $\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Entonces, como $\left|\overline{H}\right| = -4(-8)+4(8) = 64 > 0$ se dice que $f(2,2) = (2)(2) = 4$ es un MÁXIMO.

2.- Para $(2,-2)$ tenemos: $\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ahora, como $\left|\overline{H}\right| = -4(8)-4(8) = -64 < 0$ se dice que $f(2,-2) = (2)(-2) = -4$ es un MÍNIMO.

3.- Para $(-2,2)$ se tiene: $\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ahora, como $\left|\overline{H}\right| = 4(-8)+4(-8) = -64 < 0$ se dice que $f(-2,2) = (-2)(2) = -4$ es un MÍNIMO.

4.- Para $(-2,-2)$ se tiene: $\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -4 \\ -4 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Entonces, como $\left|\overline{H}\right| = 4(8)-4(-8) = 64 > 0$ se dice que $f(-2,-2) = (-2)(-2) = 4$ es un MÁXIMO.

Ejemplo 2

A un editor se le han asignado $\$60{,}000$ para invertir en el desarrollo y la promoción de un nuevo libro. Se calcula que si se gastan "x" miles de dólares en desarrollo y "y" miles en promoción se venderán aproximadamente $f(x,y) = 20x^{3/2}y$ ejemplares del libro. ¿Cuánto dinero debe asignar el editor a desarrollar y cuánto a promoción para maximizar las ventas?

SOLUCIÓN:

En este caso la Función objetivo sería $\boxed{f(x,y) = 20x^{3/2}y}$ sujeta a la restricción $\boxed{x+y=60}$

La función Langragiana sería: $L(\lambda, x, y) = 20x^{3/2}y - \lambda(x+y-60)$

Para obtener los puntos críticos, hacemos:

$$\begin{cases} L_\lambda = 0 & \rightarrow & x+y=60 \\ L_x = 0 & \rightarrow & -\lambda(1)+20\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{1}{2}}y=0 & \rightarrow & \lambda = 30x^{\frac{1}{2}}y \\ L_y = 0 & \rightarrow & -\lambda(1)+20x^{\frac{3}{2}}=0 & \rightarrow & \lambda = 20x^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Igualando las dos últimas ecuaciones, resulta: $30x^{\frac{1}{2}}y = 20x^{\frac{3}{2}} \rightarrow y = \frac{2}{3}x$

Lo último lo reemplazamos en la primera ecuación y se obtiene: $\boxed{\begin{array}{l} x+\frac{2}{3}x=60 \\ 3x+2x=120 \\ 5x=120 \\ x=36 \end{array}}$

Por tanto: $\boxed{\begin{array}{l} y=\frac{2}{3}(36) \\ y=24 \end{array}}$. Es decir, existe sólo un punto crítico: $(36,24)$

El Hessiano Orlado sería: $\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 15x^{-\frac{1}{2}}y & 30x^{\frac{1}{2}} \\ 1 & 30x^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$

Y para el punto $(36,24)$ es: $\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 60 & 180 \\ 1 & 180 & 0 \end{bmatrix}$

Como el determinante es: $\left|\overline{H}\right| = (-1)(-180)+1(120) = 300 > 0$, concluimos que el editor debe invertir \$36000 en desarrollo y \$24000 en promoción para obtener las máximas ventas.

Ejemplo 3

Un consumidor tiene $\$600$ para gastar en 2 artículos, el primero de los cuales tiene un valor de $\$20/$unidad y el segundo $\$30/$unidad. Si la utilidad obtenida por el consumidor de "x" unidades del primer artículo y "y" unidades del segundo está dada por $f(x,y)=10x^{0.6}y^{0.4}$.

a) ¿Cuántas unidades de cada artículo debería comprar el consumidor para maximizar su utilidad?

SOLUCIÓN:

En este caso la función Objetivo es $\boxed{f(x,y)=10x^{0.6}y^{0.4}}$ sujeta a que $\boxed{20x+30y=600}$.

La función Langragiana es $\boxed{\begin{array}{l} L(\lambda,x,y)= f(x,y)-\lambda(g(x,y)-k) \\ L(\lambda,x,y)=10x^{0.6}y^{0.4}-\lambda(20x+30y-600) \end{array}}$

Obteniendo los puntos críticos tenemos:

$$\begin{cases} L_\lambda = 20x + 30y = 600 \rightarrow 2x + 3y = 60 \\ L_x = 6x^{-0.4}y^{0.4} - 20\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{6x^{-0.4}y^{0.4}}{20} \\ L_y = 4x^{0.6}y^{-0.6} - 30\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{4x^{0.6}y^{-0.6}}{30} \end{cases}$$

$$\frac{4x^{0.6}y^{-0.6}}{30} = \frac{6x^{-0.4}y^{0.4}}{20}$$

$$(10)2x^{0.6}y^{-0.6} = 15(3x^{-0.4}y^{0.4})$$

$$20x = 45y$$

$$y = \frac{4}{9}x$$

Reemplazando en la primera ecuación (la Restricción), tenemos:

$$2x + 3\left(\frac{4}{9}x\right) = 60$$

$$2x + \frac{12}{9}x = 60$$

$$18x + 12x = 540$$

$$30x = 540$$

$$x = 18$$

Y como $\boxed{y = \frac{4}{9}x}$ entonces $\boxed{y = 8}$.

Por lo tanto resulta el punto crítico $(18,8)$.

Para clasificar el punto crítico, calculamos el Hessiano Orlado:

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 30 \\ 20 & -2.4x^{-1.4}y^{0.4} & 2.4x^{-0.4}y^{-0.6} \\ 30 & 2.4x^{-0.4}y^{-0.6} & -2.4x^{0.6}y^{-1.6} \end{bmatrix}_{(18,8)} = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 30 \\ 20 & -2.4(18)^{-1.4}(8)^{0.4} & 2.4(18)^{-0.4}(8)^{-0.6} \\ 30 & 2.4(18)^{-0.4}(8)^{-0.6} & -2.4(18)^{0.6}(8)^{-1.6} \end{bmatrix}$$

Como $\left|\overline{H}\right| > 0$ entonces el consumidor, para obtener las máximas utilidades, debe comprar 18 unidades del primer artículo y 8 unidades del segundo artículo.

Ejemplo 4

Un fabricante planea vender un nuevo producto a $350 la unidad y estima que si se invierten "x" miles de dólares en desarrollo y "y" miles en promoción, los consumidores comprarán $\frac{250y}{y+2} + \frac{100x}{x+5}$ unidades del producto, aproximadamente. Los costos de fabricación de este producto son $150 por unidad.

a) ¿Cuánto debería invertir el fabricante en desarrollo y cuánto en promoción para generar la máxima utilidad posible, si dispone de fondos ilimitados?

En este caso habrá que formar la Función Objetivo, que es la Utilidad:

$$U = Ingresos - \left[Costos + Inversión\right]$$

$$U = 350\left(\frac{250y}{y+2} + \frac{100x}{x+5}\right) - \left[150\left(\frac{250y}{y+2} + \frac{100x}{x+5}\right) + 1000x + 1000y\right]$$

$$U(x,y) = 200\left[\frac{250y}{y+2} + \frac{100x}{x+5}\right] - 1000x - 1000y$$

El punto crítico, sin restricciones, será:

$$U_x = 200\left[\frac{100x-500-100x}{(x+5)^2}\right]-1000=0$$
$$U_x = 200\left[\frac{500}{(x+5)^2}\right]=1000$$
$$\frac{500}{(x+5)^2}=5$$
$$500=5(x+5)^2$$
$$\sqrt{100}=\sqrt{(x+5)^2}$$
$$x+5=\pm 10$$
$$x=5$$

y

$$U_y = 50000\left[\frac{1(y+2)-y}{(y+2)^2}\right]-1000=0$$
$$U_y = 200\left[\frac{250y+500-250y}{(y+2)^2}\right]-1000=0$$
$$\frac{500}{(y+2)^2}=5$$
$$500=5(y+2)^2$$
$$\sqrt{100}=\sqrt{(y+2)^2}$$
$$y+2=10$$
$$y=8$$

Compruebe que en el punto crítico $(5,8)$ se produce un máximo (Hessiano).

Es decir que el fabricante debería invertir $5000 en desarrollo y $8000 en promoción del nuevo libro para obtener las máximas utilidades.

b) Si el fabricante sólo tiene $11,000 para invertir en el desarrollo y la promoción del nuevo producto. ¿Cómo debería distribuirse este dinero para generar la máxima utilidad posible?
Para este caso tenemos la misma Función Objetivo

$$U(x,y)=200\left[\frac{250y}{y+2}+\frac{100x}{x+5}\right]-1000x-1000y$$

pero ahora sujeta a la restricción de que $x+y=11$.
Trabajamos ahora con la función Langragiana

$$L(\lambda,x,y)=200\left[\frac{250y}{y+2}+\frac{100x}{x+5}\right]-1000x-1000y-\lambda(x+y-11)$$

Encontrando los puntos críticos, tenemos:

$$\begin{cases} L_\lambda = 0 \rightarrow x+y=11 \\ L_x = 0 \rightarrow \dfrac{100000}{(x+5)^2}-1000=\lambda \\ L_y = 0 \rightarrow \dfrac{100000}{(y+2)^2}-1000=\lambda \end{cases}$$

Igualando las dos últimas ecuaciones, resulta:

$$\frac{100000}{(x+5)^2}-1000=\frac{100000}{(y+2)^2}-10000$$
$$\sqrt{(y+2)^2}=\sqrt{(x+5)^2}$$
$$y+2=x+5$$
$$y=x+3$$

Reemplazando y en la restricción, tenemos:

$$x+y=11$$
$$x+(x+3)=11$$
$$2x+3=11$$
$$2x=8$$
$$x=4$$

Entonces:

$$x+y=11$$
$$y=11-x$$
$$y=7$$

Compruebe que en el punto crítico $(4,7)$ se produce un máximo. (Hessiano Orlado).

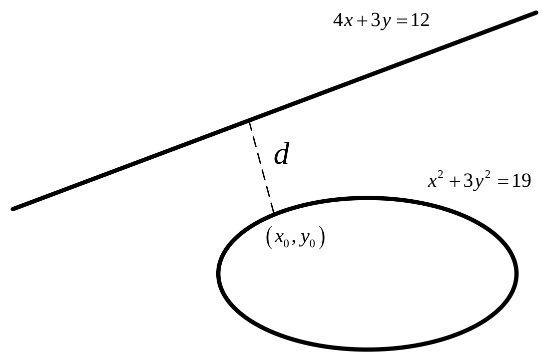
Por tanto, cuando sólo hay $11000 para inversión, habrá que distribuirlos de la siguiente manera para obtener las máximas utilidades: $4000 en desarrollo y $7000 en la promoción del nuevo libro.

Ejemplo 5

Hallar la menor distancia entre la elipse de ecuación $x^2+3y^2=19$ y la recta de ecuación $4x+3y=12$.

SOLUCIÓN:

El problema lo resolveremos definiendo la distancia entre un punto de la elipse y la recta.



Entonces, la función objetivo sería $d=\left|\dfrac{4x_0+3y_0-12}{\sqrt{4^2+3^2}}\right|$ sujeta a que $g: x_0^{\ 2}+3y_0^{\ 2}=19$

Ahora $\nabla d=\lambda(\nabla g)$, es dcir: $\begin{cases}\dfrac{\partial d}{x_0}=\lambda\left(\dfrac{\partial g}{x_0}\right)\\ \dfrac{\partial d}{y_0}=\lambda\left(\dfrac{\partial g}{y_0}\right)\end{cases}$ lo cual da $\begin{cases}\dfrac{4}{5}=\lambda(2x_0)\\ \dfrac{3}{5}=\lambda(6y_0)\end{cases}$

Igualando y simplificando resulta: $\boxed{x_0=4y_0}$

Reemplazando en la restricción:

$$x_0^{\ 2}+3y_0^{\ 2}=19$$
$$(4y_0)^2+3y_0^{\ 2}=19$$
$$\boxed{y_0=\pm 1}$$

De acuerdo a la posición, observe el dibujo, tomamos el positivo. (En otro caso habría que probarlo)

Entonces $x_0=4y_0=4(1)=4$

Hemos hallado las coordenadas del punto de la elipse que da la mínima distancia, por tanto esta distancia mínima será: $d_{\min.}=\left|\dfrac{4(4)+3(1)-12}{5}\right|=\dfrac{7}{5}$

Ejercicios Propuestos 4.3

1. Encuentre los extremos de la función $f(x,y)=xy$ sujeta a que $x+y=6$
2. Maximizar $f(x,y)=xy$ sujeta a que $x+y=10$

   Resp. $(5,5)$; $f_{máx}=25$
3. Encuentre los extremos de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ sujeta a que $x+4y=2$
4. Empleando multiplicadores de Lagrange, halle la distancia mínima de la recta con ecuación $2x+3y=-1$ al origen.

   Resp. $d_{\min}=\sqrt{\dfrac{1}{13}}$
5. Empleando multiplicadores de Lagrange, halle la distancia mínima de la circunferencia con ecuación $x^2+y^2=1$ a la recta con ecuación $4x+3y=12$.

   Resp. $d_{\min}=\dfrac{7}{5}$

6. Empleando multiplicadores de Lagrange, halle la distancia mínima de $(x-4)^2+y^2=4$ al punto de coordenadas $(0,10)$

Resp. $d_{\min}=116\left(\frac{30}{29}-\frac{2}{\sqrt{29}}\right)$

7. Los cursos de dos ríos (dentro de los límites de una región determinada) representan aproximadamente una parábola $y=x^2$,y una recta $x-y-2=0$. Hay que unir estos ríos por medio de un canal rectilíneo que tenga la menor longitud posible. ¿Porqué puntos habrá que trazarlos?.

Resp. Parábola $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$, recta $\left(\frac{11}{8},-\frac{5}{8}\right)$

8. Hallar la distancia mínima entre $9x^2+16y^2=144$ y $5x+8y=40$.

Resp. elipse $\left(\frac{20}{\sqrt{61}},\frac{18}{\sqrt{61}}\right)$; $d_{\min}==\frac{\left|\frac{100}{\sqrt{61}}+\frac{144}{\sqrt{61}}-40\right|}{\sqrt{89}}$

9. En una esfera de radio a inscribir un cilindro cuya superficie sea máxima.

Resp. $r=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}$, $h=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}\left(\sqrt{5}-1\right)$

10. Calcular la superficie total del cilindro de máximo volumen inscrito en una esfera de radio a .

Resp. $A=\frac{4\pi\left(\sqrt{2}+1\right)}{3}a^2$

11. Dadas las ecuaciones de utilidad presupuestal de un consumidor $\begin{matrix} U=q_1^{3/2}q_2 \\ 100=3q_1+4q_2 \end{matrix}$. Determine los valores de q_1 y q_2 que maximizan la utilidad del consumidor.

12. La relación entre las ventas "S" y las cantidades "x" y "y" gastadas en dos medios de publicidad está dada por $S=\frac{200x}{5+x}+\frac{100y}{10+y}$. La Utilidad neta es $\frac{1}{5}$ de las ventas menos el gasto en publicidad. El presupuesto para publicidad es de $25. Determine cómo debe asignarse este presupuesto entre los dos medios para maximizar la utilidad neta.

13. Una empresa de computadoras tiene un presupuesto mensual publicitario de $60,000. Su departamento de ventas estima que si se gastan " x " dólares cada mes en publicidad en periódicos y " y " dólares cada mes en publicidad por televisión, las ventas mensuales estarán dadas por $S=90x^{1/4}y^{3/4}$ dólares. Si la utilidad es el 10% de las ventas menos el costo de la publicidad, determine cómo asignar el presupuesto publicitario para maximizar la utilidad mensual. Compruébelo utilizando el Hessiano Orlado.

14. Usando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar P unidades de su producto, en donde $P(L,K)=60\sqrt{5(L^2+K^2)}$. Los costos de la mano de obra y de capital son de $200 y $100 por unidad. Suponga que la empresa decide elaborar 4500 unidades. Halle el número de insumos de mano de obra y de capital que deben emplearse con objeto de minimizar el costo total.

15. En un taller de mecánica se reparan 2 tipos de autos A y B . La función de trabajo conjunto está dado por: $f(x,y)=x^2+2y^2-xy$, donde x e y representa el números de autos por día del tipo A y B reparados, respectivamente. Para minimizar el trabajo, ¿cuántos autos de cada tipo deben repararse, si diariamente se puede reparar 8 autos?

16. Una compañía puede destinar su planta a la elaboración de dos tipos de productos A y B . Obtiene una utilidad de $4 por unidad de A y de $6 por unidad de B . Los números de unidades de los dos tipos que pueden producir mediante la planta están restringidos por la ecuación del transformación del producto: $x^2+y^2+2x+4y-4=0$ Con x y y los números de unidades (en miles de dólares) de A y B respectivamente, producidos por semana. Halle las cantidades de cada tipo que deben producirse a fin de maximizar la utilidad.

17. Si una empresa gasta " x " miles de dólares en publicidad en la ciudad A, sus ventas potenciales (en miles de dólares) en tal ciudad están dadas por $\frac{300x}{x+10}$. Si gasta " x " miles de dólares en la ciudad B, sus ventas potenciales (en miles de dólares) en tal ciudad son $\frac{500x}{x+13.5}$. Si la utilidad es del 25% de las ventas y la empresa dispone de una restricción del presupuesto de 16500 destinados a publicidad en las dos ciudades. ¿Cuánto deberá gastar en cada ciudad con objeto de maximizar la utilidad neta de la empresa? Utilice el Hessiano Orlado para verificar los resultados.

4.3.2 TEOREMA. Criterio para establecer extremos con una restricción en funciones de tres variables

Suponga que se desea optimizar la función de tres variable f, dos veces diferenciable, sujeta a la restricción $g(x,y,z)=k$.

Defínase la Función Langragiana

$$L(\lambda,x,y,z)=f(x,y,z)-\lambda\left[g(x,y,z)-k)\right]$$

Suponga que se obtiene el Punto Crítico $\left(x_0,y_0,z_0,\lambda\right)$ en la Función Langragiana.

Defínase el Hessiano Orlado, como la matriz:

$$\overline{H}=\begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y & g_z \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ g_z & L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0,z_0,\lambda)}$$

Sean $\overline{H}_3=\begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}$ y $\overline{H}_4=\overline{H}$

Entonces

1. Si $\left|\overline{H}_3\right|>0\wedge\left|\overline{H}_4\right|<0$ entonces en (x_0,y_0,z_0) la función f tiene un ***MÁXIMO***.
2. Si $\left|\overline{H}_3\right|<0\wedge\left|\overline{H}_4\right|<0$ entonces en (x_0,y_0,z_0) la función f tiene un ***MÍNIMO***.

Ejemplo 1

Encuentre los extremos de $f(x,y,z)=3x+5y+9z$ sujeta a que $xyz=25$.

SOLUCIÓN:

La función Langragiana es: $L(\lambda,x,y,z)=3x+5y+z-\lambda(xyz-25)$

Para el punto crítico obtenemos:

$$\begin{array}{lll} L_\lambda=0 & \to & xyz=25 \\ L_x=0 & \to & 3-\lambda(yz)=0 \quad (x) \\ L_y=0 & \to & 5-\lambda(xz)=0 \quad (y) \\ L_z=0 & \to & 9-\lambda(xy)=0 \quad (z) \end{array}$$

Multiplicando por x, y y z respectivamente las tres últimas ecuaciones, y despejando, resulta:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} 3x=\lambda xyz \\ 9z=\lambda xyz \\ 5y=\lambda xyz \end{array}\right\} 3x=5y=9z} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y=\dfrac{3x}{5} \\ z=\dfrac{3x}{9}\to z=\dfrac{x}{3} \end{array}}$$

Reemplazando en la restricción: $\boxed{\begin{array}{l} x\left(\dfrac{3x}{5}\right)\left(\dfrac{x}{3}\right)=25 \\ x^3=5^3 \\ x=5 \end{array}}$

De donde : $\boxed{\begin{array}{l} y=3 \\ z=\dfrac{5}{3} \end{array}}$ Por lo tanto hay un solo punto crítico: $\left(5,3,\frac{5}{3}\right)$

Para este caso $\lambda=\dfrac{3}{y^2}\to\lambda=\dfrac{3}{5}$ y el Hessiano Orlado sería:

$$\overline{H}=\left.\begin{bmatrix} 0 & yz & xz & xy \\ yz & 0 & -\lambda z & -\lambda y \\ xz & -\lambda z & 0 & -\lambda x \\ xy & -\lambda y & -\lambda x & 0 \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=5 \\ y=3 \\ z=\frac{5}{3} \\ \lambda=\frac{3}{5}}}=\begin{bmatrix} 0 & 5 & 25/3 & 15 \\ 5 & 0 & -1 & -9/5 \\ 25/3 & -1 & 0 & -3 \\ 15 & -9/5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

De aquí tenemos: $\overline{H_3}=\begin{bmatrix} 0 & 5 & 25/3 \\ 5 & 0 & -1 \\ 25/3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Los determinantes sería: $\left|\overline{H_3}\right|=-\dfrac{250}{3}<0$ y $\left|\overline{H_4}\right|=\left|\overline{H}\right|=-675<0\to$

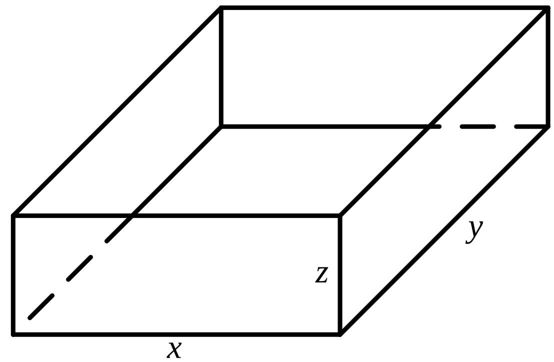
Por tanto en $\left(5,3,5/3\right)$ la función tiene un mínimo.

Ejemplo 2

Se quiere construir una caja rectangular abierta cuyo volumen sea de $100\ cm^3$, ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja para utilizar la menor cantidad de material posible?

SOLUCIÓN:

Haciendo un esquema



En este caso la función objetivo es el área total : $A_T = xy + 2xz + 2zy$

Y la restricción será el volumen: $V = xyz = 100cm^3$

Yendo un tanto más rápido podemos plantear que $\nabla A_T = \lambda\left(\nabla V\right)$ ¿Porqué?

O lo que es lo mismo $\begin{cases} \dfrac{\partial A_T}{\partial x} = \lambda\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_T}{\partial y} = \lambda\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial A_T}{\partial z} = \lambda\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$

Entonces, tenemos:

$$\begin{cases} y + 2z = \lambda yz \\ x + 2z = \lambda xz \\ 2x + 2y = \lambda xy \end{cases}$$

Multiplicando por x, y, z respectivamente:

$$\begin{cases} yx + 2zx = \lambda yzx \\ xy + 2zy = \lambda xzy \\ 2xz + 2yz = \lambda xyz \end{cases}$$

Igualando:

$$yx + 2zx = xy + 2zy = 2xz + 2yz$$

Aquí tenemos dos ecuaciones, que pueden ser: $\begin{cases} yx + 2zx = xy + 2zy \\ xy + 2zy = 2xz + 2yz \end{cases}$

Tomando la primera:

$$\begin{aligned} yx + 2zx &= xy + 2zy \\ 2zx &= 2zy \\ x &= y \end{aligned}$$

Tomando la segunda:

$$\begin{aligned} xy + 2zy &= 2xz + 2yz \\ xy &= 2xz \\ y &= 2z \end{aligned}$$

Reemplazando en la restricción:

$$\begin{aligned} xyz &= 100 \\ (2z)(2z)z &= 100 \\ z^3 &= 25 \\ z &= \sqrt[3]{25} \end{aligned}$$

Por tanto $x = 2\sqrt[3]{25}$ y $y = 2\sqrt[3]{25}$

Ejemplo 3

Hallar el volumen máximo de un sólido rectangular que tiene la propiedad de que la suma de las áreas de las seis caras es $6a^2$.

SOLUCIÓN:

Semejante al anterior , pero en este caso la función objetivo es el volumen: $V = xyz$

sujeto a que $A_T = 2xy + 2yz + 2xz = 6a^2$

Igualmente, podemos plantear rápidamente $\nabla V = \lambda \nabla A_T$, es decir:

$$\begin{cases} yz = \lambda(y+z) \\ xz = \lambda(x+z) \\ xy = \lambda(y+x) \end{cases}$$

Multiplicando por x, y, z respectivamente:

$$\begin{cases} xyz = \lambda(yx+zx) \\ xyz = \lambda(xy+zy) \\ xzy = \lambda(yz+xz) \end{cases}$$

Igualando:

$$yx + zx = xy + zy = yz + xz$$

Aquí tenemos dos ecuaciones que pueden ser: $\begin{cases} yx+zx = xy+zy \\ xy+zy = yz+xz \end{cases}$

Tomando la primera:

$$\begin{aligned} yx + zx &= xy + zy \\ zx &= zy \\ x &= y \end{aligned}$$

Tomando la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} xy + zy &= yz + xz \\ xy &= xz \\ y &= z \end{aligned}$$

Reemplazando en la restricción

$$\begin{aligned} &xy + yz + xz = 3a^2 \\ &xx + xx + xx = 3a^2 \\ &3x^2 = 3a^2 \\ &x = a = y = z \end{aligned}$$

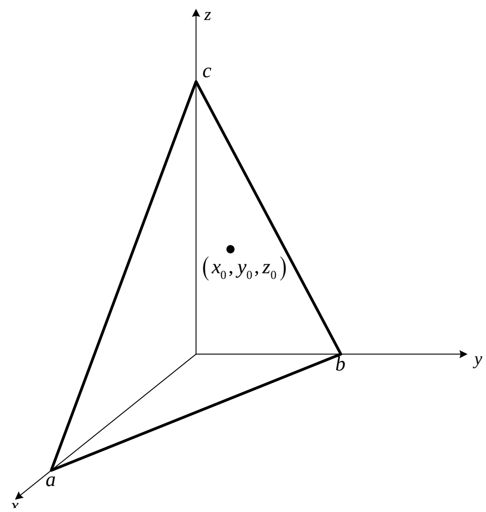
Lo que quiere decir que las dimensiones de la caja deben ser iguales a " a ", para obtener un volumen máximo, cuyo valor es $V_{máx.} = a^3$

Ejemplo 4

Hallar la ecuación del plano que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) en el primer octante y que forme con los planos coordenados un tetraedro que tenga el menor volumen posible.

SOLUCIÓN:

Esquemáticamente tenemos:



En este caso la función objetivo es el volumen del tetraedro: $V = \frac{1}{6}abc$

Sujeto a que el punto (x_0, y_0, z_0) pertenezca al plano, es decir debe satisfacer su ecuación:

$\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c} = 1$, esta debe ser su restricción $g(a,b,c)$

Planteando rápidamente:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial a} = \lambda \frac{\partial g}{\partial a} \\ \frac{\partial V}{\partial b} = \lambda \frac{\partial g}{\partial b} \\ \frac{\partial V}{\partial c} = \lambda \frac{\partial g}{\partial c} \end{cases}$$

Tenemos:

$$\begin{cases} \frac{1}{6}bc = \lambda\left(-\frac{x_0}{a^2}\right) \\ \frac{1}{6}ac = \lambda\left(-\frac{y_0}{b^2}\right) \\ \frac{1}{6}ab = \lambda\left(-\frac{z_0}{c^2}\right) \end{cases}$$

Multiplicando por a, b, c respectivamente: $\begin{cases} \frac{1}{6}abc = \lambda\left(-\frac{x_0}{a}\right) \\ \frac{1}{6}abc = \lambda\left(-\frac{y_0}{b}\right) \\ \frac{1}{6}abc = \lambda\left(-\frac{z_0}{c}\right) \end{cases}$

Igualando: $\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c}$

$$\frac{x_0}{a}+\frac{x_0}{a}+\frac{x_0}{a}=1$$

Reemplazando en la restricción: $3\frac{x_0}{a}=1$

$$a=3x_0$$

Calculando b y c resulta: $b=3y_0$ y $c=3z_0$

Por tanto la ecuación buscada es:

$$\frac{x}{3x_0}+\frac{y}{3x_0}+\frac{z}{3x_0}=1$$

Ejercicios propuestos 4.4

1. Determine el valor máximo o mínimo de la función $f(x,y,z)=2x^2+y^2+3z^2$ si $2x-3y-4z=49$.
2. Determine el valor máximo o mínimo de la función $f(x,y,z)=-x^2-2y^2-z^2+xy+z$ si $x+y+z=35$.
3. Determine el valor máximo de $f(x,y,z)=xyz$ si $x+y+z=6$.
4. Encuentre el mínimo para $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ siempre que $x+y+z=1$
5. Minimizar $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sujeta a que $x+y+z-6=0$

   Resp. $(2,2,2)$; $f_{\min}=12$
6. La suma de tres números es 50. Determinar el valor de cada uno de ellos para que el producto sea máximo.

   Resp. $\left(\frac{50}{3},\frac{50}{3},\frac{50}{3}\right)$
7. Demuestre que el producto de tres números positivos cuya suma es S es máximo si los tres números son iguales.
8. Un paquete en forma rectangular se puede enviar por correo, si la suma de su longitud y el perímetro de una sección transversal perpendicular a la longitud es igual a 34 cm. Encuentre las dimensiones del paquete de máximo volumen que puede ser enviado por correo.

   Resp. $x=\frac{34}{3}$, $y=\frac{17}{3}$, $z=\frac{17}{3}$
9. Demostrar que un triángulo es equilátero si el producto de los senos de sus ángulos es máximo.
10. Demostrar que entre todos los triángulos inscritos en un mismo circulo, el de mayor perímetro es el triángulo equilátero.
11. Muestre que el triángulo de mayor área que puede ser inscrito en una circunferencia, es un triángulo equilátero.
12. Una caja rectangular está colocada en el primer octante, con una de sus esquinas en el origen y tres de sus lados sobre los tres planos coordenados. El vértice opuesto al rigen se encuentra en el plano $x+2y+3z=6$.¿Cuáles son sus dimensiones?¿cuál es el volumen máximo de dicha caja?.

    Resp. $x=2$, $y=1$, $z=\frac{2}{3}$; $V_{máx}=\frac{4}{3}u^3$
13. Encontrar las dimensiones del paralelepípedo rectangular de volumen máximo con caras paralelas a los planos coordenados, que se puede inscribir en el elipsoide $16x^2+4y^2+9z^2=144$.

    Resp. $x=\sqrt{3}$, $y=2\sqrt{3}$, $z=\frac{4\sqrt{3}}{3}$
14. Determinar el volumen del paralelepípedo rectangular más grande que puede inscribirse en el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

    Resp. $V_{máx}=\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$
15. Encuentre los puntos más cercanos al origen de la superficie $xy^3z^2=16$.

    Resp. $x=\sqrt[6]{\frac{8}{3\sqrt{3}}}$, $y=\sqrt[6]{24\sqrt{3}}$, $z=\sqrt[6]{\frac{64}{3\sqrt{3}}}$

16. Determínese el punto más próximo al origen de la superficie $z = xy + 1$

Resp. $(0,0,1)$

17. Determine los puntos en la superficie $y^2 - xz = 4$ que estén más cercanos del origen y calcule la distancia mínima.

Resp. $(0,\pm 2,0)$; $D_{min} = 2$

18. Hállense las dimensiones de un paquete rectangular de volumen máximo, talque la suma de su longitud y el perímetro transversal no excedan de 108 pulgadas.

Resp. $x = 36$; $y = 18$; $z = 18$

19. Determine las dimensiones de una bañera rectangular cuyo volumen es Q unidades cúbicas, si se requiere recubrir su superficie interior con la mínima cantidad de material posible.

Resp. Largo=ancho $= 2\sqrt[3]{\frac{Q}{4}}$, altura $= \sqrt[3]{\frac{Q}{4}}$

20. El material para construir la base de una caja abierta cuesta 1.5 veces lo que el material para construir los lados. Para una cantidad fija de dinero C, hállense las dimensiones de la caja de volumen máximo que puede hacerse.

Resp. $x = y = \sqrt{\frac{2C}{9a}}$, $z = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2C}{9a}}$

21. Hállese la distancia mínima de la superficie con ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ al punto $(4,0,0)$

Resp c) $d_{\min} = 2\sqrt{5}$

4.3.3 TEOREMA. Criterio para establecer extremos con una restricción en funciones de n variables

Sea la Función Objetivo $w = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ sujeta a la restricción $g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = k$

Defínase la Función Langragiana

$$L(\lambda, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - \lambda\left[g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - k\right]$$

Suponga que se obtiene el Punto Crítico $(x_{01}, x_{02}, x_{03}, \ldots, x_{0n}, \lambda)$ resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} L_\lambda = 0 & \rightarrow & g(x_1, x_2, x_3, \cdots, \lambda) = k \\ L_{x_1} = 0 & \rightarrow & f_{x_1} = \lambda g_{x_1} \\ L_{x_2} = 0 & \rightarrow & f_{x_2} = \lambda g_{x_2} \\ L_{x_3} = 0 & \rightarrow & f_{x_3} = \lambda g_{x_3} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{x_n} = 0 & \rightarrow & f_{x_n} = \lambda g_{x_n} \end{cases}$$

Defínase el Hessiano Orlado, como la matriz:

$$\overline{H}=\begin{bmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & g_{x_3} & \cdots & g_{x_n} \\ g_{x_1} & L_{11} & L_{12} & L_{13} & \cdots & L_{1n} \\ g_{x_2} & L_{21} & L_{22} & L_{23} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{x_n} & L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix}_{(x_{01},x_{02},x_{03},\ldots,x_{0n},\lambda)}$$

Sea $\overline{H}_3=\begin{bmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} \\ g_{x_1} & L_{11} & L_{12} \\ g_{x_2} & L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$, $\overline{H}_4=\begin{bmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & g_{x_3} \\ g_{x_1} & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ g_{x_2} & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ g_{x_3} & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$, …, $\overline{H}_n=\overline{H}$

Entonces:

1. Si $\left|\overline{H_3}\right|>0 \wedge \left|\overline{H_4}\right|<0 \wedge \left|\overline{H_5}\right|>0 \wedge \ldots \wedge (-1)^n\left|\overline{H}_n\right|>0$ entonces en $(x_{01},x_{02},x_{03},\ldots,x_{0n})$ la función tiene un ***MÁXIMO***.

2. Si $\left|\overline{H_3}\right|<0 \wedge \left|\overline{H_4}\right|<0 \wedge \left|\overline{H_5}\right|<0 \wedge \ldots \wedge \left|\overline{H}_n\right|<0$ (todos negativos) entonces en $(x_{01},x_{02},x_{03},\ldots,x_{0n})$ la función tiene un ***MÍNIMO***.

4.3.4 TEOREMA. Criterio para establecer extremos con dos restricción en funciones de tres variables

Suponga que se desea optimizar la Función Objetivo $w=f(x,y,z)$ sujeta a que

$$\begin{cases} g(x,y,z)=k_1 \\ h(x,y,z)=k_2 \end{cases}$$

Defínase la función Langragiana:

$$L(\lambda,\mu,x,y,z)=f(x,y,z)-\lambda\left[g(x,y,z)-k_1\right]-\mu\left[h(x,y,z)-k_2\right]$$

Entonces el ***MÁXIMO*** o el ***MÍNIMO*** de la función se producen en el Punto Crítico $(x_0,y_0,z_0,\lambda,\mu)$ que se obtiene al resolver el sistema:

$$\begin{cases} L_\lambda = 0 & \rightarrow & g(x,y,z) = k_1 \\ L_\mu = 0 & \rightarrow & h(x,y,z) - k_2 \\ L_x = 0 & \rightarrow & f_x = \lambda g_x + \mu h_x \\ L_y = 0 & \rightarrow & f_y = \lambda g_y + \mu h_y \\ L_z = 0 & \rightarrow & f_z = \lambda g_z + \mu h_z \end{cases}$$

Ejemplo 1

Encuentre los puntos críticos de $f(x,y,z) = xy + yz$ sujeta a que $x^2 + y^2 = 8$ y $yz = 8$

SOLUCIÓN:

En este caso la función Langragiana es:

$$L(\lambda, u, x, y, z) = f(x,y,z) - \lambda\left[g(x,y,z) - k_1\right] - \mu\left[h(x,y,z) - k_2\right]$$

$$L(\lambda, u, x, y, z) = xy + yz - \lambda(x^2 + y^2 - 8) - \mu(yz - 8)$$

Para los puntos críticos tenemos:

$$\begin{cases} L_\lambda = 0 & \rightarrow & g(x,y,z) = k_1 \\ L_\mu = 0 & \rightarrow & h(x,y,z) - k_2 \\ L_x = 0 & \rightarrow & f_x = \lambda g_x + \mu h_x \\ L_y = 0 & \rightarrow & f_y = \lambda g_y + \mu h_y \\ L_z = 0 & \rightarrow & f_z = \lambda g_z + \mu h_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ yz = 8 \\ y = \lambda(2x) + \mu(0) \\ x + z = \lambda(2y) + \mu(z) \\ y = \lambda(0) + \mu(y) \end{cases}$$

De la última ecuación $\mu = 1$.

De la penúltima ecuación $\boxed{\begin{array}{l} x + z = \lambda(2y) + 1(z) \\ x = 2\lambda y \rightarrow \lambda = \dfrac{x}{2y} \end{array}}$

De la antepenúltima ecuación: $y = 2\lambda x \rightarrow \lambda = \dfrac{y}{2x}$

Igualando se obtiene $\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{x}{2y} = \dfrac{y}{2x} \\ x^2 = y^2 \end{array}}$

Reemplazando en la primera ecuación: $\boxed{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 + x^2 = 8 \\ 2x^2 = 8 \\ x = \pm 2 \end{array}}$

Por tanto $\boxed{\begin{array}{l} x = 2 \rightarrow y = \pm 2 \\ x = -2 \rightarrow y = \pm 2 \end{array}}$ y como $\boxed{z = \dfrac{8}{y}}$ resultan los siguientes puntos críticos: $(2,2,4)$, $(2,-2,-4)$, $(-2,2,4)$ y $(-2,-2,-4)$

Ejemplo 2

Obtenga los puntos del primer octante sobre la curva de intersección del elipsoide $x^2+4y^2+4z^2=4$ y el plano $x-4y-z=0$ que estén más cerca del origen, calcular la distancia mínima.

SOLUCIÓN:

En este caso la **función objetivo** será la distancia: $\boxed{D^2 = f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2}$, y las restricciones serían $\begin{cases} g: x^2+4y^2+4z^2=4 \\ h: x-4y-z=0 \end{cases}$

Podemos hacer $\nabla f = \lambda(\nabla g)+\mu(\nabla h)$

$$(2x,2y,2z)=\lambda(2x,8y,8z)+\mu(1,-4,-1)$$

$$\begin{cases} 2x = 2x\lambda+\mu \\ 2y = 8y\lambda-4\mu \\ 2z = 8z\lambda-\mu \end{cases}$$

La segunda ecuación por $(-z)$ y la tercera por (y), luego se las suman algebraicamente.

$$\begin{cases} -2yz = -8yz\lambda+4\mu z \\ \ \ 2yz = \ \ 8yz\lambda-\mu y \end{cases}$$
$$\overline{\qquad 0 = 4\mu z-\mu y \qquad}$$

Resulta $\boxed{y=4z}$

Reemplazando en la segunda restricción:

$$x-4(4z)-z=0$$
$$x=17z$$

Reemplazando en la primera restricción:

$$(17z)^2+4(4z)^2+4z^2=4$$
$$357z^2=4$$
$$z=\pm\tfrac{2}{\sqrt{357}}$$

Tomando en el primer octante, el punto sería:

$$\left(\tfrac{34}{\sqrt{357}},\tfrac{8}{\sqrt{357}},\tfrac{2}{\sqrt{357}}\right)$$

Ejercicios Propuestos 4.5

1. Maximizar $f(x,y,z)=xyz$ sujeta a que: $\begin{cases} x+y+z=32 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

   Resp. $(8,16,8)$; $f_{\max}=1024$

2. Minimizar $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sujeta a que: $\begin{cases} x+2z=4 \\ x+y=8 \end{cases}$

   Resp. $(4,4,0)$; $f_{\min}=32$

3. Encuentre los puntos críticos de $f(x,y,z)=x^2+2y-z^2$ sujeta a que $2x-y=0$ y a que $y+z=0$.

4. Encuentre los puntos críticos de $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sujeta a que $x+y+z=1$ y a que $x-y+z=1$.

5. Encuentre los puntos críticos de $f(x,y,z)=xyz$ sujeta a que $x+y+z=12$ y a que $x+y-z=0$.

6. Encuentre los puntos críticos de $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sujeta a que $x+2z=4$ y a que $x+y=8$.

7. Hallar el punto de la recta de intersección de los planos $x-y=2$ y $x-2z=4$, más próximo al origen.

Resp. $\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$

8. Encontrar los puntos para los valores máximo y mínimo de la distancia del origen a la porción del primer octante de la curva según la cual el plano $x+y+z=12$ corta a la superficie $xyz=54$.

Resp. $(3,6,3)$; $\left(\frac{3}{2}\left(1-\sqrt{5}, 9+3\sqrt{5}, \frac{3}{2}(1-\sqrt{5})\right)\right)$; $\left(\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{5}, 9-3\sqrt{5}, \frac{3}{2}(1+\sqrt{5})\right)\right)$

9. ¿Cuál es la distancia mínima entre $C\begin{cases} x^2+y^2-xy-z^2=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ y el origen.

Resp. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $D_{\min}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

10. El plano $x+y+z=12$ intersecta al paraboloide $z=x^2+y^2$ en una elipse. Determine los puntos más altos y más bajos de esta elipse.

Resp. más alto $(-3,-3,18)$; más bajo $(2,2,8)$

11. Determine la distancia más cercana del origen a la curva $C\begin{cases} 2z=16-x^2-y^2 \\ x+y=4 \end{cases}$.

Resp. $(2,2,4)$; $d_{\min}=2\sqrt{5}$

12. Sea $T(x,y,z)=100+x^2+y^2$ la temperatura en cada punto de la esfera $x^2+y^2+z^2=50$. Hállese la temperatura máxima en la curva formada por la intersección de la esfera y el plano $x-z=0$.

Resp. $\left(0,\sqrt{50},0\right)$; $T_{\max}=150$