ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
CÁLCULO DIFERENCIAL
Examen de la Primera Evaluación
II Término – 4/diciembre/2009

Nombre: **RÚBRICA DEL EXAMEN** Paralelo: ____

Examen: ____
Lecciones: ____
Deberes: ____
Otros: ____
Total:

TEMA No. 1 (5 PUNTOS)

Sea $f(x)=\begin{cases} x^2-2, x\in[0,3] \\ ax+b, x\in(3,5] \end{cases}$, determine los valores de a y b para que la recta $y=ax+b$ tenga pendiente -2 y f sea continua en $x=3$.

1.a.- Planteamiento

El valor de la pendiente es $a=-2$, por lo tanto: $y=-2x+b, \forall x\in(3,5]$.

Para que f sea continua en $x=3$, debe cumplirse que: $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(-2x+b)=-6+b$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x^2-2)=7=f(3)$$

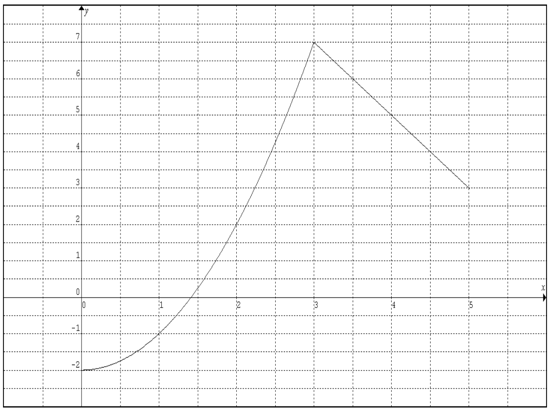
Al igualar las ecuaciones, se obtiene:

$$-6+b=7 \quad \Rightarrow \quad b=13$$

Esto es: $a=-2 \quad \wedge \quad b=13$, y la regla de correspondencia sería:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2, & x\in[0,3] \\ -2x+13, & x\in(3,5] \end{cases}$$

y al bosquejar su gráfica, se obtendría:



1.b.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
No desarrolla procesos coherentes que conducen a determinar los valores de a y b	Intenta parcialmente establecer la continuidad en $x=3$	Establece el valor de le pendiente y plantea la continuidad en $x=3$ y no concluye	Determina los valores de a y b, desarrollando procesos correctos
0	1 – 2	3 – 4	5

TEMA No. 2 (5 PUNTOS)

Sea $f(x)=\dfrac{1}{1-x};\forall x\neq 1$, determine la regla de correspondencia y el máximo dominio posible de $g(x)=f\left(f(x)\right)$.

2.a.- Planteamiento

$$f\left(f(x)\right)=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\frac{1}{\dfrac{\cancel{1}-x-\cancel{1}}{1-x}}=\frac{1-x}{-x}=\frac{x-1}{x}$$

La función g está definida: $\forall x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$.

2.b.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
No desarrolla procesos coherentes que conducen a determinar la regla de correspondencia correcta	Maneja el concepto de composición de funciones, pero no llega a determinar la regla de correspondencia	Realiza las operaciones adecuadas, pero no especifica el dominio	Determina la regla de correspondencia adecuadamente y especifica el dominio correcto
0	1 – 2	3 – 4	5

TEMA No. 3 (5 PUNTOS)

Un estudiante de Cálculo Diferencial resolvió la siguiente indeterminación $\infty-\infty$, obteniendo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x-1}-ax-b\right)=0$$

A partir de este resultado, determine de ser posible, los valores de a y b.

3.a.- Planteamiento

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x-1}-(ax+b)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x-1}-(ax+b)\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-x-1}+(ax+b)}{\sqrt{x^2-x-1}+(ax+b)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-x-1\right)-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-x-1}+(ax+b)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-1-a^2x^2-2abx-b^2}{\sqrt{x^2-x-1}+(ax+b)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-a^2\right)x^2-(1+2ab)x-\left(1+b^2\right)}{\sqrt{x^2-x-1}+(ax+b)}$$

Para que el límite planteado sea 0, los coeficientes que multiplican a x^2 y x en el numerador deben ser correspondientemete iguales a 0, por lo cual, se plantean las siguientes ecuaciones:

$$1-a^2=0$$
$$a^2-1=0$$
$$(a-1)(a+1)=0$$
$$\left[(a-1=0)\vee(a+1=0)\right]$$
$$(a=1)\vee(a=-1)$$

$$-(1+2ab)=0$$
$$1+2ab=0$$
$$2ab=-1$$
$$b=-\frac{1}{2a}$$

Como estamos analizando el comportamiento de la función en $+\infty$, el valor de $(a=-1)$ se descarta porque produciría que el límite planteado sea igual a ∞, entonces la solución única es $(a=1)\wedge\left(b=-\frac{1}{2}\right)$.

3.b.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
No desarrolla procesos coherentes	Separa los límites y utiliza manipulaciones algebraicas incorrectas	Plantea el límite, establece las condiciones para a y b en forma adecuada, pero no llega a resultado alguno	Plantea el límite y resuelve correctamente las ecuaciones para determinar los valores de a y b
0	1 – 2	3 – 4	5

TEMA No. 4 (5 PUNTOS)

Demuestre formalmente que:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-9x+14}{x-7}=5$$

4.a.- Planteamiento

Utilice la definición:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-9x+14}{x-7}=5 \equiv \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,\ 0<|x-7|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2-9x+14}{x-7}-5\right|<\varepsilon$$

$$\textit{Análisis Preliminar}:$$

$$\left|\frac{\cancel{(x-7)}(x-2)}{\cancel{x-7}}-5\right|<\varepsilon$$

$$|(x-2)-5|<\varepsilon$$

$$|x-7|<\varepsilon$$

$$\boxed{\delta=\varepsilon}$$

$$\textit{Demostración formal}:$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0,(\delta=\varepsilon),\ 0<|x-7|<\delta$$

$$\Rightarrow |x-7|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |(x-2)-5|<\varepsilon$$

$$(x\neq 7)\Rightarrow \left|\frac{(x-7)(x-2)}{x-7}-5\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x^2-9x+14}{x-7}-5\right|<\varepsilon$$

4.b.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
No desarrolla procesos coherentes	Establece la definición de límite para la función dada e intenta establecer la relación entre ε y δ	Realiza las operaciones adecuadas según la definición, pero se equivoca al hallar la relación entre ε y δ	Demuestra correctamente el límite de la función, iniciando a partir de la desigualdad del antecedente y llegando al consecuente
0	1 – 2	3 – 4	5

TEMA No. 5 (20 PUNTOS)

Evalúe, de ser posible, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x sen\left(\frac{1}{x}\right)+x sen\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$

5.a.1.- Planteamiento

$$\lim_{x\to\infty}\left[x sen\left(\frac{1}{x}\right)+x sen\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=\infty\cdot 0+\infty\cdot 0$$

Realice un cambio de variable:

$$u=\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{u}$$
$$x\to\infty \quad\Rightarrow\quad u\to 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[x sen\left(\frac{1}{x}\right)+x sen\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=\lim_{u\to 0}\left[\frac{1}{u}sen(u)+\frac{1}{u}sen\left(u^2\right)\right]=\lim_{u\to 0}\left[\frac{sen(u)}{u}+\frac{sen\left(u^2\right)}{u}\right]$$
$$=\lim_{u\to 0}\frac{sen(u)}{u}+\lim_{u\to 0}\frac{sen\left(u^2\right)}{u^2}\cdot u$$
$$=1+1(0)=1$$

5.a.2.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
No desarrolla procesos coherentes	Realiza un cambio de variable pertinente que permite transformar a un límite conocido	Evalúa correctamente el límite de la función, pero no concluye	Halla correctamente los límites, mostrando los procesos correctos y completos
0	1 – 2	3 – 4	5

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{sen(ax)}{x}\right]^{1+bx}, \quad a\neq 0$

5.b.1.- Planteamiento

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{sen(ax)}{x}\right]^{1+bx}=\frac{0}{0}\quad (Indeterminado)$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{sen(ax)}{x}\right]\cdot\left[\frac{sen(ax)}{x}\right]^{bx}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{sen(ax)}{x}\right]\cdot\lim_{x\to 0}\left[\frac{sen(ax)}{x}\right]^{bx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[a\cdot\frac{sen(ax)}{ax}\right]\cdot\lim_{x\to 0}\left[a\cdot\frac{sen(ax)}{ax}\right]^{\lim\limits_{x\to 0} bx}$$

$$=a(1)\cdot a(1)^{0}=a$$

5.b.2.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
No desarrolla procesos coherentes	Utiliza el teorema principal de límites, pero no obtiene el valor del límite	Utiliza el límite notable, pero se equivoca al simplificar	Evalúa correctamente el límite dado
0	1 – 2	3 – 4	5

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{x^2-|x-1|-1}{x^2-1}\right]$

5.c.1.- Planteamiento

$$\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{x^2-|x-1|-1}{x^2-1}\right]=\frac{0}{0}\quad (Indeterminado)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{x^2-|x-1|-1}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{x^2-(x-1)-1}{x^2-1}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{x^2-x\cancel{+1}\cancel{-1}}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}\right]=\frac{1}{2}$$

5.c.2.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
No desarrolla procesos coherentes	Reconoce el límite lateral, pero se equivoca en el valor absoluto	Utiliza la definición del valor absoluto, pero no concluye	Realiza todos los cálculos correctamente y concluye en forma correcta
0	1 – 2	3 – 4	5

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\tan^2\left(\sqrt{x}\right)\right]^{\frac{1}{2x}}$

5.d.1.- Planteamiento

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\tan^2\left(\sqrt{x}\right)\right]^{\frac{1}{2x}}=1^{\infty}\quad\left(Indeterminado\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\tan^2\left(\sqrt{x}\right)\right]^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to 0}\left[1+\tan^2\left(\sqrt{x}\right)\right]^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{\tan^2\left(\sqrt{x}\right)}{\tan^2\left(\sqrt{x}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\tan^2\left(\sqrt{x}\right)\right]^{\frac{1}{\tan^2\left(\sqrt{x}\right)}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2\left(\sqrt{x}\right)}{2x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2\left(\sqrt{x}\right)}{2x}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2\left(\sqrt{x}\right)}{x}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\tan\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\tan\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right]}$$

$$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\tan\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right]\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\tan\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right]}=e^{\frac{1}{2}(1)(1)}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

5.d.2.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
No desarrolla procesos coherentes	Establece la indeterminación 1^{∞}, intenta plantear, pero no lo logra	Manipula la expresión para utilizar el límite notable, pero se equivoca al concluir	Realiza todos los cálculos correctamente y concluye en forma correcta
0	1 – 2	3 – 4	5

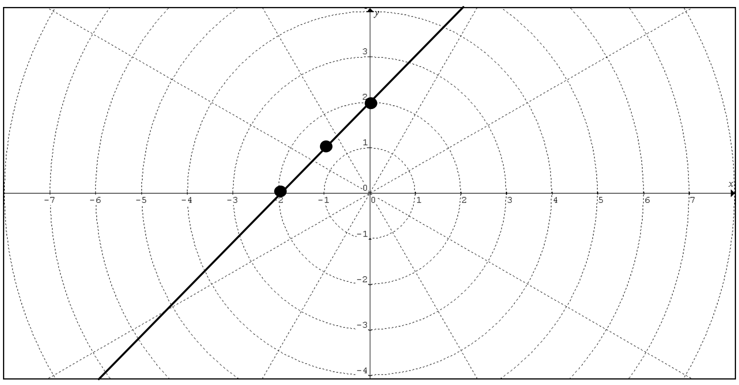
TEMA No. 6 (20 PUNTOS)

Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas, justificando su respuesta:

a) Los puntos $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ y $\left(2,\pi\right)$ pertenecen a una recta en el plano polar.

6.a.1.- Planteamiento

Al dibujar los puntos en el plano polar, se obtiene:



Para que pertenezcan a la misma recta, deben satisfacer una ecuación polar de la forma: $r = \dfrac{d}{cos(\theta - \phi)}$.

En este caso: $r = \dfrac{\sqrt{2}}{cos\left(\theta - \dfrac{3\pi}{4}\right)}$

Se puede observar que al reemplazar en la ecuación polar, se satisfacen los 3 puntos.

$$r = \frac{\sqrt{2}}{cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{cos(0)} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{cos\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2$$

Otra opción es transformar las coordenadas polares en cartesianas y constatar que pertenecen a la misma recta.

6.a.2.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
No desarrolla procesos coherentes	Intenta pasar a coordenadas rectangulares los puntos, pero no construye la ecuación de la recta	Halla la ecuación de la recta en coordenadas polares o rectangulares, usando los puntos verifica que pertenecen a ella, pero no concluye como verdadera o falsa	Da la ecuación de la recta, comprueba que cada punto pertenece a la recta y concluye como verdadera
0	1 – 2	3 – 4	5

b) Si f es una función impar, entonces no es acotada.

6.b.1.- Planteamiento

La proposición es FALSA, a continuación se muestra un contraejemplo:

Sea $f(x) = sen(x)$, f es impar, pero es acotada.

El contraejemplo permite demostrar que en la proposición planteada el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, lo cual significa que la proposición es falsa.

6.b.2.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Califica como falsa, pero no justifica	Reconoce los conceptos de función impar o acotada, pero da un contraejemplo equivocado	Da un contraejemplo, pero no concluye como verdadera o falsa	Califica como falsa y realiza todas las justificaciones adecuadas
0	1 – 2	3 – 4	5

c) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, siempre que $\lim\limits_{x\to a} \left|f(x)\right|$ exista.

6.c.1.- Planteamiento

La proposición es FALSA, a continuación se muestra un contraejemplo:

Sea $f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, entonces $\left|f(x)\right| = \left|sgn(x)\right| = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Observe que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe, porque $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$.
Sin embargo $\lim\limits_{x\to 0} \left|f(x)\right| = 1$, porque $\lim\limits_{x\to 0^+} \left|f(x)\right| = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} \left|f(x)\right| = 1$.

La proposición tiene la forma:

Si $\lim\limits_{x\to a} \left|f(x)\right|$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe.

El contraejemplo permite demostrar que en la proposición planteada el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, lo cual significa que la proposición es falsa.

6.c.2.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Califica como falsa, pero no justifica	Da la implicación proporcionada en la proposición y concluye como falsa, pero da un contraejemplo incorrecto	Da un contraejemplo, pero no concluye como verdadera o falsa	Califica como falsa y realiza todas las justificaciones adecuadas
0	1 – 2	3 – 4	5

d) La función de variable real con regla de correspondencia $f(x)=\begin{cases} 2^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ x^2, & x\geq 0 \end{cases}$, es continua en $x=0$.

6.d.1.- Planteamiento

Para que f sea continua en $x=0$ debe cumplirse que: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(2^{\frac{1}{x}}\right)=2^{-\infty}=0$$

$$f(0)=0$$

Por lo tanto, la proposición es VERDADERA.

6.d.2.- Rúbrica

Desempeño			
Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Califica como verdadera, pero no justifica	Intenta establecer la continuidad en $x=0$, pero se equivoca en alguno de los límites laterales	Calcula los límites, establece la continuidad, pero no la califica como verdadera o falsa	Califica como verdadera y realiza todas las justificaciones adecuadas
0	1 – 2	3 – 4	5