Escuela Superior Politécnica del Litoral

SOLUCIONES Y RÚBRICAS DEL EXAMEN DE MEJORAMIENTO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES
Docentes: **Elvis Aponte-Rosa María Díaz -David De Santis - Heydi Roa**-– Fecha: 7 de febrero del 2022. Horario: 11:00 – 13:00

PREGUNTA 1 A (20 PUNTOS)

Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} 2xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,\ \text{si } x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & ,\ \text{si } x=y=0 \end{cases}$$

a) Calcular $f_x(0,0),\ f_y(0,0)$

b) Determine $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ si $(x,y)\neq(0,0)$

c) Muestre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ y explique por qué.

SOLUCIÓN

a) $$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(\Delta x)\cdot 0\cdot\dfrac{\Delta x^2-0^2}{\Delta x^2+0^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

Por lo tanto $f_x(0,0)=0$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{2\cdot 0\cdot(\Delta y)\cdot\dfrac{0^2-\Delta y^2}{0^2+\Delta y^2}-0}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$$

Por lo tanto $f_y(0,0)=0$

b) Para $x^2+y^2\neq 0$, entonces las derivadas parciales:

$$f_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}=2y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+2xy\frac{2x\left(x^2+y^2\right)-2x\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Entonces $$f_x(x,y)=2y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{8x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

SOLUCIONES Y RÚBRICAS DEL EXAMEN DE MEJORAMIENTO

$$f_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}=2x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+2xy\frac{(-2y)\left(x^2+y^2\right)-2y\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Entonces $f_y(x,y)=2x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\dfrac{8x^3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

c) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h\frac{h^2-0^2}{h^2+0^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2$$

Entonces $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h\frac{0^2-h^2}{0^2+h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{h}=-2$$

Entonces $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=-2$

las segundas derivadas parciales de orden 2 en el punto (0,0), son distintas ya que las funciones f_{yx} y f_{xy} no son continuas en ese dicho punto.

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
	Insuficiente	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de analizar la continuidad de una función escalar de varias variables y determinar diferenciabilidad en un punto dado	No sabe cómo plantear el problema	El estudiante aplica la definición de derivada parcial en el punto solicitado, pero no resuelve bien el límite respectivo	El estudiante Resuelve correctamente a) pero no puede hallar correctamente las derivadas parciales de f con respecto a x e y en el origen y fuera de el.	Resuelve correctamente todo el ejercicio respetando los pasos requeridos y obteniendo el resultado correcto y encuentra la segunda derivada.
	0	5-10	11-15	16-20

espol Escuela Superior Politécnica del Litoral

SOLUCIONES Y RÚBRICAS DEL EXAMEN DE MEJORAMIENTO

PREGUNTA 1 B (20 PUNTOS)

Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{yx^2-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Determinar la continuidad de f en el origen.

b) Estudiar la continuidad de la derivada parcial f_x en todo su dominio.

c) ¿De los resultados obtenidos puede deducirse la NO diferenciabilidad de f en el origen?

SOLUCIÓN

1. $f(0,0)=0$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{yx^2-y^3}{x^2+y^2}\left.\begin{matrix}\{x=\rho\cos\theta\}\\ \{y=\rho\operatorname{sen}\theta\end{matrix}\right\}\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\rho^3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta-\rho^3\operatorname{sen}^3\theta}{\rho^2}=$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\rho^3\left(\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}^3\theta\right)}{\rho^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\rho\left(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta\right)\operatorname{sen}\theta=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\rho\cos 2\theta\operatorname{sen}\theta=0$$

3. $f(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Luego $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$.

b) i. Analicemos la continuidad de la derivada parcial con respecto a x, en el origen

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{0}{h}=0\\[2ex] \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\dfrac{2xy\left(x^2+y^2\right)-\left(yx^2-y^3\right)2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{cases}$$

entonces podemos escribir,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

analicemos su continuidad en el origen,

SOLUCIONES Y RÚBRICAS DEL EXAMEN DE MEJORAMIENTO

a) $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{4\rho^4\cos\theta\,\mathrm{sen}^3\,\theta}{\rho^4}=4\cos\theta\,\mathrm{sen}^3\,\theta$

luego $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ no existe,su valor depende de θ.

De lo que se deduce que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$

c)Por tanto, de los resultados obtenidos no puede deducirse la diferenciabilidad de $f(x,y)$ en el origen, puesto que una de las derivadas parciales no es continua, ya que el teorema adaptado indica que: “Si ambas derivadas parciales son continuas en el origen entonces f es diferenciable en el origen”.

<table>
<tr><th rowspan="2">Capacidades deseadas</th><th colspan="4">Desempeño</th></tr>
<tr><th>Insuficiente</th><th>En Desarrollo</th><th>Desarrollado</th><th>Excelente</th></tr>
<tr><td rowspan="2">El estudiante debe ser capaz de analizar la continuidad de una función escalar de varias variables y determinar diferenciabilidad en un punto dado</td><td>No sabe cómo plantear el problema</td><td>El estudiante aplica la definición de continuidad en el punto solicitado, pero no resuelve bien el límite respectivo</td><td>El estudiante Resuelve correctamente a) pero no puede hallar correctamente las derivadas parciales de f con respecto a x en el origen y fuera de él.</td><td>Resuelve correctamente todo el ejercicio respetando los pasos requeridos y obteniendo el resultado correcto y concluye correctamente</td></tr>
<tr><td>0</td><td>5-10</td><td>11-15</td><td>16-20</td></tr>
</table>

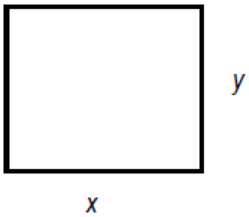
SOLUCIONES Y RÚBRICAS DEL EXAMEN DE MEJORAMIENTO

PREGUNTA 2 A (15 PUNTOS)

Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para demostrar que el rectángulo de perímetro fijo igual a π , que tiene área máxima, es un cuadrado determinar sus dimensiones.

SOLUCIÓN

Geométricamente se representa el problema como se muestra en la figura:



El área del rectángulo está dada por: $A = x\, y$

Por otro lado, su perímetro es: $\pi = 2x + 2y$

Empleando el método de los multiplicadores de Lagrange:

$$L = xy + \lambda(2x + 2y - \pi)$$

Tenemos

$$L_x = y + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{y}{2}$$
$$L_y = x + 2\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{x}{2}$$
$$L_\lambda = 2x + 2y - \pi = 0$$

De las ecuaciones (1) y (2): $-\frac{y}{2} = -\frac{x}{2} \Rightarrow y = x$

Sustituyendo el valor de $y = x$ en la ecuación (3);

$$2x + 2x - \pi = 0 \Rightarrow 4x - \pi = 0 \Rightarrow x = y = \frac{\pi}{4}$$

Por lo que se observa el rectángulo de perímetro fijo que tiene área máxima es un cuadrado.

El área es máxima pues, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ es un punto que satisface la restricción y $A\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16} \succ 0$.

SOLUCIONES Y RÚBRICAS DEL EXAMEN DE MEJORAMIENTO

RÚBRICA

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe cómo optimizar una función escalar sujeta a restricciones.	El estudiante demuestra ninguno o poco criterio de resolución, no reconoce la función Lagrangiana.	El estudiante plantea la función Lagrangiana y halla las derivadas parciales de forma correcta.	El estudiante plantea correctamente el sistema de ecuaciones para determinar el punto crítico, pero presenta leves errores de cálculo en la obtención del punto crítico.	El estudiante plantea correctamente el sistema de ecuaciones, determina el punto crítico. Escoge un punto auxiliar y halla el valor máximo de la función objetivo de manera correcta.
	0-1	**2-7**	**8-12**	**13-15**

PREGUNTA 2 B (15 PUNTOS)

Calcular el nivel de producción máximo si el costo total del trabajo (a $ 48 la unidad) y del capital (a $ 36 la unidad) está limitado a $100,000, siendo " x " el número de unidades de trabajo e "y" el número de unidades de capital (en miles). La función de producción está dada por:

$$P(x,y)=100x^{0.25}y^{0.75}$$

SOLUCIÓN

Función objetivo (maximizar): $P(x,y)=100x^{0.25}y^{0.75}$

El límite al costo impone la restricción: $48x+36y=100$

En este caso la función de Lagrange es:

$$L=100x^{0.25}y^{0.75}+\lambda(48x+36y-100)$$

y sus derivadas parciales, igualadas a cero, son:

$$\begin{aligned} L_x &= 25x^{-0.75}y^{0.75}+48\lambda=0 \quad \cdots \quad (1)\\ L_y &= 75x^{0.25}y^{-0.25}+36\lambda=0 \quad \cdots \quad (2)\\ L_\lambda &= 48x+36y-100,000=0 \quad \cdots (3) \end{aligned}$$

al despejar λ de las ecuaciones (1) y (2), se tiene que:

$$\lambda=-\frac{25x^{-0.75}y^{0.75}}{48};\quad \lambda=-\frac{75x^{0.25}y^{-0.25}}{36}=-\frac{25x^{0.25}y^{-0.25}}{12};-\frac{25x^{-0.75}y^{0.75}}{48}=-\frac{25x^{0.25}y^{-0.25}}{12}$$

$$\Rightarrow x^{-0.75}y^{0.75}=4x^{0.25}y^{-0.25}\Rightarrow y^{0.75+0.25}=4x^{0.25+0.75}\Rightarrow y=4x$$

sustituyendo en la ecuación (3)

$$48x+36(4x)=100,000 \Rightarrow 192x=100,000 \Rightarrow x=\frac{3125}{6}$$ unidades de trabajo

$$y=4\left(\frac{3125}{6}\right) \quad \therefore \quad y=\frac{6250}{3} \text{ unidades de capital}$$

Se sustituyen estos valores en la función objetivo y se obtiene finalmente, el nivel de producción máximo:

$$P\left(\frac{3125}{6},\frac{6250}{3}\right)=100\left(\frac{3125}{6}\right)^{0.25}\left(\frac{6250}{3}\right)^{0.75}=147,313.9127$$

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe cómo optimizar una función escalar sujeta a restricciones.	El estudiante demuestra ninguno o poco criterio de resolución, no reconoce la función Lagrangiana.	El estudiante plantea la función Lagrangiana y halla las derivadas parciales de forma correcta.	El estudiante plantea correctamente el sistema de ecuaciones para determinar el punto crítico, pero presenta leves errores de cálculo en la obtención del punto crítico.	El estudiante plantea correctamente el sistema de ecuaciones, determina el punto crítico. Escoge un punto auxiliar y halla el valor máximo de la función objetivo de manera correcta.
	0-1	**2-7**	**8-12**	**13-15**

PREGUNTA 3 A (15 PUNTOS)

La ecuación $xy+xz^3+zy+1=0$ define implícitamente una función real de dos variables reales $z=f(x,y)$

a) Hallar el vector gradiente de f en el punto $P(-1,1,0)$

b) Calcular la derivada direccional de z en P en la dirección de descenso más pronunciado.

c) Dar la ecuación del plano tangente a la superficie z en el punto $P(-1,1,0)$

SOLUCION

a) $F(x,y,z)=xy+xz^3+zy+1=0$ define implícitamente a la función $z=f(x,y)$.

El vector gradiente de f en el punto P es $\overrightarrow{\nabla f}(P)=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P$

SOLUCIONES Y RÚBRICAS DEL EXAMEN DE MEJORAMIENTO

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}=-\frac{y+z^3}{3xz^2+y}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}(P)=\frac{-1}{1}=-1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}=-\frac{x+z}{3xz^2+y}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}(P)=-\frac{-1}{1}=1$$

$$\nabla f(P)=(-1,1)$$

b) La dirección de descenso más pronunciado viene dada por el vector:

$$\vec{u}=-\vec{\nabla}f(P)=(1,-1)$$

La derivada direccional de z en P en esta dirección es:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P)=(-1,1)\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{2}{\sqrt{2}}$$

c) Ecuación del plano tangente a la superficie z en el punto P:

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(P)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(P)(y-y_0)\Leftrightarrow z-0=-1\cdot(x+1)+1\cdot(y-1)\Leftrightarrow x-y+z+2=\mathbf{0}$$

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de comprender sobre la utilidad del vector gradiente en el cálculo de derivadas direccionales utilizando derivada implícita.	No sabe cómo plantear el problema, pero intenta algo.	El estudiante plantea el concepto de derivada direccional en función del gradiente, pero calcula mal el gradiente o el vector unitario	Calcula bien el gradiente y el vector unitario y desarrolla bien todo el literal a) pero tiene problemas para hallar el valor máximo de la derivada direccional en el punto solicitado.	El estudiante desarrolla correctamente el ejercicio o comete algún error poco significativo, y encuentra el plano tangente.
	0-1	**2-7**	**8-12**	**13-15**

SOLUCIONES Y RÚBRICAS DEL EXAMEN DE MEJORAMIENTO

PREGUNTA 3 B (15 PUNTOS)

La ecuación $\cos(\pi x) - x^2 y + e^x + yz = 4$ define implícitamente la función $z = f(x, y)$.

Suponiendo que se dieran las condiciones de diferenciabilidad adecuadas, calcular:

a) Plano tangente a la superficie en el punto $P_0(0.1)$.

b) Derivada direccional de z en $P_0(0,1)$ y en la dirección $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$.

c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(P_0)$

$a) F(x, y, z) = \cos(\pi x) - x^2 y + e^{xx} + yz - 4 = 0$

Para $x = 0, y = 1$, se obtiene: $1 - 0 + 1 + z - 4 = 0 \Rightarrow z = 2$

$$\pi \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0}(x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0}(y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0}(z - z_0) = 0$$

$$F_x(x, y, z) = -\pi\,\mathrm{sen}(\pi x) - 2xy + e^x z \Rightarrow F_x(0.1, 2) = 2$$
$$F_y(x, y, z) = -x^2 + z \Rightarrow F_y(0.1, 2) = 2$$
$$F_z(x, y, z) = e^{xz} x + y \Rightarrow F_z(0,1, 2) = 1$$

Luego, se tiene que:

$$\pi \equiv 2(x - 0) + 2(y - 1) + 1(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 4 = 0$$

b) Si el vector es unitario: $\dfrac{\partial z}{\partial u}(P_0) = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \vec{u}$

Un vector unitario en la dirección $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$, es:

$$\vec{u} = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(P_0) = -\frac{F_x(0,1,2)}{F_z(0.1,2)} = -2; \frac{\partial z}{\partial y}(P_0) = -\frac{F_y(0,1,2)}{F_z(0.1,2)} = -2$$

SOLUCIONES Y RÚBRICAS DEL EXAMEN DE MEJORAMIENTO

c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(P_0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_y}{F_z}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z-x^2}{xe^{xz}+y}\right)=$

$$=-\frac{\left(xe^{xz}+y\right)\left(z_x-2x\right)-\left(z-x^2\right)\left[xe^{xz}\left(xz_x+z\right)+e^{xz}\right]}{\left(xe^{xz}+y\right)^2}$$

Particularizando en $P_0(x=0, y=1, z=2)$, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(P_0)=-\frac{1(-2)-2}{1}=4$$

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de comprender sobre la utilidad del vector gradiente en el cálculo de derivadas direccionales.	El estudiante trata de hallar el plano tangente, pero comete errores	El estudiante plantea el concepto de derivada direccional en función del gradiente, pero calcula mal el gradiente o el vector unitario	Calcula bien el gradiente y el vector unitario y desarrolla bien todo el literal, pero tiene problemas con la derivada implícita	El estudiante desarrolla correctamente el ejercicio o comete algún error poco significativo, y la segunda derivada.
	0-4	**5-7**	**8-12**	**13-15**

PREGUNTA 4 A (15 PUNTOS)

Resolver $I = \iint_D e^{\frac{x-2y}{x+2y}}\, dxdy$

En que D es el triángulo de vértice $A=(0,0), B=(2,0), C=(0,1)$

Indicación: Utilice el cambio de variables $u = x-2y; v = x+2y$

SOLUCIÓN

Con la indicación del cambio de variables, tenemos que despejar las variables x, y en función de u y v. Entonces :

$$x = \frac{u+v}{2}; \quad y = \frac{v-u}{4}$$

Ubicando los puntos en el plano cartesiano, se tiene una linea recta que une los puntos C = (0,1) y B = (2,0), lo cual su pendiente es : $m_{BC} = -\frac{1}{2}$

La ecuación de la recta es

$$y = -\frac{1}{2}(x-2) \quad \Rightarrow \quad x+2y = 2$$

Si $x = 0 \rightarrow \frac{u+v}{2} = 0 \rightarrow \boxed{u = -v}$

Si $y = 0 \rightarrow \frac{v-u}{4} = 0 \rightarrow \boxed{u = v}$

Si $x + 2y = 2 \rightarrow \frac{u+v}{2} + \frac{v-u}{2} = 2 \rightarrow \boxed{v = 2}$

Por tanto, el nuevo dominio D^* para las variables u, v es:

$$D^* = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -v \le u \le v \ ; \quad 0 \le v \le 2\}$$

Ahora calcularemos el jacobiano:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{J = \frac{1}{4}}$$

SOLUCIONES Y RÚBRICAS DEL EXAMEN DE MEJORAMIENTO

Por tanto, la doble integral:

$$I = \iint_D e^{\frac{x-2y}{x+2y}} dxdy \quad \rightarrow \quad I = \iint_{D^*} \frac{1}{4} e^{\frac{u}{v}} dudv$$

Poniendo los límites de integración y aplicando el método de Fubini tenemos:

$$I = \frac{1}{4}\int_0^2 \left(\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} du \right) dv = \frac{1}{4}\int_0^2 \left[ve^{\frac{u}{v}}\right]_{-v}^{v} dv = \frac{e^2-1}{4e}\int_0^2 vdv = \frac{e^2-1}{2e}$$

Por ende, la doble integral en el dominio descrito es:

$$\boxed{\iint_D e^{\frac{x-2y}{x+2y}} dxdy = \frac{e^2-1}{2e}}$$

RÚBRICA

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
	Insuficiente	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe calcular una integral doble mediante un cambio de variables adecuado	No puede establecer bien la región de integración original ni escoger un cambio de variables adecuado.	Establece bien la región de integración original, escoge bien el cambio de variables, pero comete errores al calcular el Jacobiano o plantear la nueva región de integración.	Desarrolla bien el ejercicio hasta calcular el Jacobiano, pero plantea mal la integral final o comete errores al calcularla.	Resuelve correctamente todo el ejercicio respetando los pasos requeridos y obteniendo el valor de la integral doble solicitada.
	0-2	3-7	8-12	12-15

SOLUCIONES Y RÚBRICAS DEL EXAMEN DE MEJORAMIENTO

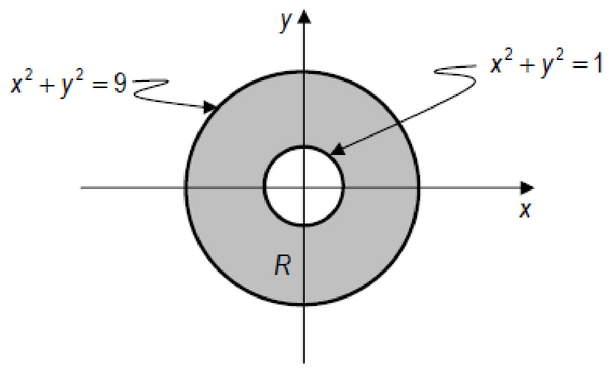
PREGUNTA 4 B (15 PUNTOS)

Calcular el volumen de la región limitada superiormente por la superficie $z = x^2 + y^2$ inferiormente por el plano "XY" y localizada sobre la región "R" limitada por las curvas

$$x^2 + y^2 = 1 \quad v \quad x^2 + y^2 = 9$$

SOLUCIÓN

La superficie es un paraboloide circular o de revolución cuyo vértice está en el origen de coordenadas, y la gráfica de la región R es la que se encuentra entre las dos circunferencias dadas y que se muestra en la siguiente figura:



El volumen requerido se obtiene a partir de $V = \iint_R (x^2+y^2)\, dA$. Dada la forma de la ecuación de la superficie y de las curvas que limitan la región, resulta conveniente utilizar coordenadas polares, por lo que la doble integral para obtener el volumen queda como:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_1^3 \rho^2 \; \rho \, d\rho \; d\theta$$

y al resolverla se llega a:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_1^3 \rho^3 \, d\rho \; d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_1^3 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{81}{4} - \frac{1}{4} \right) d\theta = 20 \int_0^{2\pi} d\theta = 20 \left[\theta \right]_0^{2\pi} = 40\pi \; u^3$$

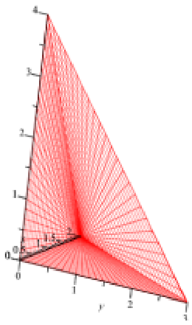
RÚBRICA

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe calcular integrales dobles aplicando cambio de variables en coordenadas polares al cálculo de áreas	No puede establecer bien la región de integración original ni escoger un cambio de variables adecuado.	Establece bien la región de integración original, escoge bien el cambio de variables, pero comete errores.	Desarrolla bien el ejercicio hasta calcular el Jacobiano, pero plantea mal la integral final o comete errores al calcularla.	Resuelve correctamente todo el ejercicio respetando los pasos requeridos y obteniendo el valor de la integral doble solicitada.
	0-2	3-7	8-12	12-15

PREGUNTA 5 A (20 puntos)

Considere el tetraedro $\mathcal{T}$ definido en $\mathbb{R}^3$, por los vértices $(0,0,0),(2,0,0),(0,3,0)$ y $(0,0,4)$ .Calcule:

$$\iiint_{\mathcal{T}} x \, dx \, dy \, dz$$



Tenemos que determinar este plano, que pasa por los puntos $(2,0,0),(0,3,0)$ y $(0,0,4)
(ojo: no por el origen, este genera los otros planos mencionados).
Sea el plano dado por la ecuación

$$a\,x + b\,y + c\,z = d$$

con a, b, c y d puntos a determinar. Como pasa por el punto $(2,0,0)$, entonces recmplazando:

$$2a = d \rightarrow a = \frac{d}{2}$$

Análogamente para los demás puntos:

$$3b = d \rightarrow b = \frac{d}{3}$$

$$4c = d \rightarrow c = \frac{d}{4}$$

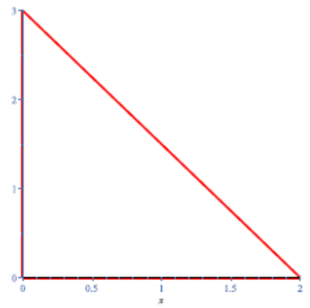
Luego, la ecuación se reescribe como:

$$\frac{d}{2}x + \frac{d}{3}y + \frac{d}{4}z = d$$

Como el plano no pasa por el origen, $d \neq 0$ y se pueden simplificar las d.
Multiplicando a ambos lados por 12 obtenemos que:

$$6\,x + 4\,y + 3\,z = 12$$

región de integración



Luego, escribir la integral se puede hacer de forma directa:

$$I = \int_0^2 \int_0^{\frac{1x_i - 6x}{\pi}} \int_0^{\frac{12-6x-ay}{x}} x\,dz\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^{\frac{12-6x}{4}} \left(\frac{x(12-6x-4y)}{3} \right) dydx = \int_0^2 \left(\frac{3x\left(x^2-4x+4\right)}{2} \right) dx = 2$$

RÚBRICA

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe bosquejar una región tridimensional de integración y calcular su volumen utilizando integrales triples	Bosqueja mal el escenario del ejercicio y/o no determina bien la proyección sobre el plano XY	Bosqueja correctamente la región tridimensional, determina bien la proyección, pero tiene problemas para establecer la integral triple	Desarrolla bien el ejercicio hasta plantear la integral triple, pero comete errores en su resolución	Resuelve correctamente todo el ejercicio respetando los pasos requeridos y obteniendo el valor correcto de la integral triple
	0-4	5-9	10-15	15-20

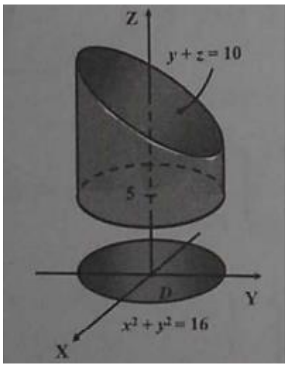
SOLUCIONES Y RÚBRICAS DEL EXAMEN DE MEJORAMIENTO

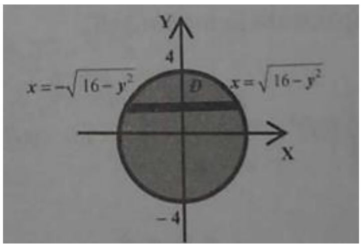
PREGUNTA 5 B (20 puntos)

Hallar el volumen del sólido encerrado por el cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y los planos $z = 5$ y $y + z = 10$

SOLUCION

El sólido E descrito es del tipo 1, limitado por abajo por el plano $z = 5$ y por arriba por el plano $z = 10 - y$.





La proyección de E sobre el plano XY el círculo

$$D = \left\{(x, y) / -4 \le y \le 4, \quad \sqrt{16 - y^2} \le x \le \sqrt{16 - y^2}\right\}$$

al cual lo hemos expresado como una región plana de tipo II.

$$E = \left\{(x, y, z) / -4 \le y \le 4, -\sqrt{16 - y^2} \le x \le \sqrt{16 - y^2}, 5 \le z \le 10 - y\right\}$$

$$V(E) = \iiint_E dV = \int_{-4}^{4} \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} \int_{5}^{10-y} dz\,dx\,dy$$

$$= \int_{-4}^{4} \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} [z]_5^{10-y} dx\,dy = \int_{-4}^{4} \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} [5 - y]\,dx\,dy$$

$$= \int_{-4}^{4} [(5 - y)x]_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} dy = 2\int_{-4}^{4} (5 - y)\sqrt{16 - y^2}\,dy$$

$$= 10\int_{-4}^{4} \sqrt{16 - y^2}\,dy - 2\int_{-4}^{4} y\sqrt{16 - y^2}\,dy$$

$$=10\left[\frac{y}{2}\sqrt{16-y^2}+8\,\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{y}{4}\right)\right]_{-4}^{4}+\left[\frac{2}{3}\left(16-y^2\right)^{3/2}\right]_{-4}^{4}$$

$$=10[0+8\pi]+0=80\pi$$

RÚBRICA

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe bosquejar una región tridimensional de integración y calcular su volumen utilizando integrales triples	Bosqueja mal el escenario del ejercicio y/o no determina bien la proyección sobre el plano XY	Bosqueja correctamente la región tridimensional, determina bien la proyección, pero tiene problemas para establecer la integral triple	Desarrolla bien el ejercicio hasta plantear la integral triple, pero comete errores en su resolución	Resuelve correctamente todo el ejercicio respetando los pasos requeridos y obteniendo el valor correcto de la integral triple
	0-4	5-9	10-15	15-20

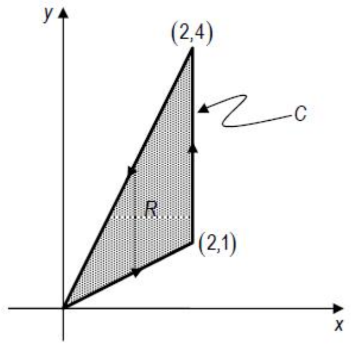
SOLUCIONES Y RÚBRICAS DEL EXAMEN DE MEJORAMIENTO

PREGUNTA 6 A (15 puntos)

Mediante el teorema de Green calcular el valor de $\int_C \left(-3x^3\right)dx + \left(6xy + y^3\right)dy$ donde "C" está formada por los segmentos de recta que unen a los puntos :

$$P_0(0,0) \text{ a } P_1(2,1);\quad \text{de } P_1(2,1) \text{ a } P_2(2,4) \quad \text{y} \quad \text{de } P_2(2,4) \text{ a } P_0(0,0)$$

SOLUCION



Por el teorema de Green, se utiliza la integral doble en lugar de la de línea. Así:

$$P = -3x^3 \;\Rightarrow\; \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad ; \qquad Q = 6xy + y^3 \;\Rightarrow\; \frac{\partial Q}{\partial x} = 6y$$

Entonces:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{2x} 6y\,dy\,dx = \int_0^2 \left[\frac{6y^2}{2}\right]_{\frac{x}{2}}^{2x} dx = \int_0^2 \left(12x^2 - \frac{3}{4}x^2\right)dx$$

$$\therefore\; \oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \left[\frac{45}{4}\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^2 = \frac{45(8)}{12} = 30$$

RÚBRICA

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	En Desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante sabe cómo interpretar y aplicar el teorema de Green para el cálculo de integrales de línea	Grafica correctamente la región, pero no identifica los puntos	Identifica la curva cerrada, la región plana limita por dicha curva, verifica algo de las hipótesis del teorema de Green, pero no avanza mas	Identifica la curva cerrada, la región plana limita por dicha curva, verifica correctamente el teorema de Green y obtiene las derivadas parciales	Identifica la curva cerrada, la región plana limita por dicha curva y aplica correctamente el teorema de Green y llega al resultado.
	0-2	3-7	7-10	11-15

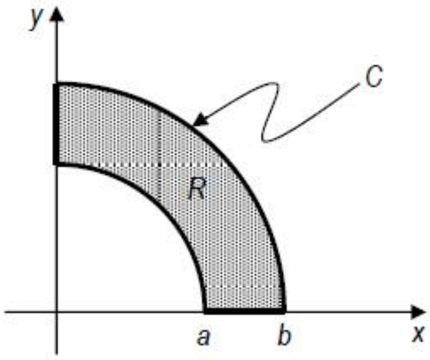
SOLUCIONES Y RÚBRICAS DEL EXAMEN DE MEJORAMIENTO

PREGUNTA 6 B (15 puntos)

Evaluar $\int_C \left(4+e^{\sqrt{x}}\right)dx+\left(\text{ seny } +3x^2\right)dy$ donde C es la frontera de la región R en el primer cuadrante. limitada por los arcos de las circunferencias con centro en el origen y radios "a" y "b" tales que b > a.

SOLUCIÓN

La región "R", con la frontera C es:



Aplicando el teorema de Green y cambiando a coordenadas polares se tiene que:

$$\iint_R (6x-0)dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_a^b (6\rho\cos\theta)\rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[2\rho^3\cos\theta\right]_a^b d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(b^3-a^3)\cos\theta\, d\theta = 2(b^3-a^3)\left[sen\,\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(b^3-a^3)$$

RÚBRICA

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	En Desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante sabe cómo interpretar y aplicar el teorema de Green para el cálculo de integrales de línea	Grafica correctamente la región, pero no identifica los puntos	Identifica la curva cerrada, la región plana limita por dicha curva, verifica algo de las hipótesis del teorema de Green, pero no avanza mas	Identifica la curva cerrada, la región plana limita por dicha curva, verifica correctamente el teorema de Green y obtiene las derivadas parciales	Identifica la curva cerrada, la región plana limita por dicha curva y aplica correctamente el teorema de Green y llega al resultado.
	0-2	3-7	7-10	11-15