ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO: 2018 - 2019	**PERIODO:** SEGUNDO TÉRMINO
MATERIA: ECUACIONES DIFERENCIALES	**PROFESORES:** P1&5: Antonio Chong Escobar; P3&10: Elvis Aponte Valladares; P4&6: C. Mario Celleri Mujica; P7&13&14: Jennifer Avilés Monroy; P8&12: José Castro Carrasco; P15: Hernando Sánchez Caicedo; P16&17: Liliana Rebeca Pérez.
EVALUACIÓN: SEGUNDA	**FECHA:** 28 ENERO 2019

Tema 1 (5 Puntos: 1 Punto cada literal)
Complete las siguientes frases, para lo cual NO es necesario justificar las respuestas.

A continuación se presentan las soluciones.

a) Si $y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x} + c_3xe^{-3x}; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ es la solución general de la ecuación $y'''(x) + ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ donde a, b, c son constantes, entonces la solución particular de $y'''(x) + ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 5e^{-3x}$ usando el método de los coeficientes indeterminados se plantea de la forma: $Ae^{-3x}x^2$.

b) Si una función $g(t)$ es una función seccionalmente continua en el intervalo $[0, \infty)$ y de orden exponencial cuando $t \to \infty$, entonces su transformada de Laplace definida como $G(S) = \int_0^\infty e^{-St}g(t)dt$ existe para algún intervalo de valores de S.

c) El producto de convolución entre dos funciones $h(t)$ y $k(t)$ está definido de la siguiente forma: $h(t) * k(t) = \int_0^t h(t-x)k(x)dx$. Además, la transformada de Laplace del producto de convolución está definido como $\mathcal{L}[h(t) * k(t)] = \mathcal{L}[h(t)]\mathcal{L}[k(t)]$ siempre que estas transformadas existan.

d) Sea $p(t)$ es una función seccionalmente continua en el intervalo $[0, \infty)$ y de orden exponencial cuando $t \to \infty$. Si $p(t)$ es una función periódica de periodo k, entonces la transformada de Laplace de $p(t)$ está dada por $\mathcal{L}[p(t)] = \frac{1}{1-e^{-Sk}}\int_0^k e^{-St}p(t)dt$, con dominio $S > 0$.

e) Al aplicar el método del operador diferencial al sistema de ecuaciones $\begin{cases} x'(t) + y'(t) - 2x = \cos(t) \\ -y''(t) = 1 \end{cases}$ y simplificar la incógnita $y(t)$ se obtiene la siguiente ecuación diferencial para la incógnita $x(t)$: $x''(t) - 2x'(t) = -sen(t) + 1$.

CRITERIO DE CALIFICACIÓN El estudiante:	**PUNTAJE**
Completa correctamente cada literal sin necesidad de proporcionar justificación alguna.	1.0 P cada literal
TOTAL	**5.0 P**

Elaborado por: Antonio Chong Escobar, Ph.D., coordinador de la materia (achong@espol.edu.ec)

Tema 2 (4 Puntos)
Sea $\mathcal{L}[g(t)] = G(S)$ la transformada de Laplace de la función $g(t)$. Obtenga la función $g(t)$ si se conoce que $G(S) = \ arctan\left(\frac{28}{S}\right) - e^{-S}$.

<u>Desarrollo:</u>
Aplicando la propiedad de linealidad:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(S)] = \mathcal{L}^{-1}\left[arctan\left(\frac{28}{S}\right) - e^{-S}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[arctan\left(\frac{28}{S}\right)\right] - \mathcal{L}^{-1}[e^{-S}]$$

Del teorema de la derivada $\boldsymbol{n}$-ésima de la transformada de Laplace se tiene el corolario:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(S)] = \frac{1}{t^n}\ (-1)^n\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d^n}{dS^n}\big(F(S)\big)\right]$$

Para $n = 1$ el corolario establece que: $\mathcal{L}^{-1}[F(S)] = -\frac{1}{t}\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{dS}\big(F(S)\big)\right]$. Entonces:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[arctan\left(\frac{28}{S}\right)\right] &= -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{dS}\left(arctan\left(\frac{28}{S}\right)\right)\right]\\ &= -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{28}{S}\right)^2}\left(-\frac{28}{S^2}\right)\right]\\ &= \frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{28}{S^2+28^2}\right]\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[arctan\left(\frac{28}{S}\right)\right] = \frac{1}{t}sen(28t)$$

La transformada inversa del segundo término está dada por:

$\mathcal{L}^{-1}[e^{-S}] = \delta_1(t)$, donde δ representa la función delta de Dirac.

Por lo tanto, $g(t) = \frac{1}{t}sen(28t) - \delta_1(t)$.

CRITERIO DE CALIFICACIÓN El estudiante:	**PUNTAJE**
Aplica la propiedad de linealidad de la transformada inversa de Laplace.	1.0 P
Halla la transformada inversa de Laplace del 1er término.	2.0 P
Halla la transformada inversa de Laplace del 2do término.	0.5 P
Obtiene la función $g(t)$ sumando los resultados hallados.	0.5 P
TOTAL	**4.0 P**

Tema 3 (9 Puntos)
Determinar la solución general de la ecuación diferencial $y'''(x) + y''(x) = f(x)$ para $f(x) = 2^x$, **usando el método de variación de parámetros** para hallar la solución particular.
Recordar que: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c\,,\ c \in \mathbb{R}$.

Desarrollo:
Se halla solución complementaria $y_c(x)$ resolviendo la ecuación homogénea:

$$y'''(x) + y''(x) = 0$$

Se plantea la solución: $y(x) = e^{rx} \rightarrow\ y'(x) = re^{rx}\ \rightarrow\ y''(x) = r^2e^{rx}\ \rightarrow\ y'''(x) = r^3e^{rx}$.
Reemplazando en la ecuación: $r^3e^{rx} + r^2e^{rx} = 0\ \rightarrow\ e^{rx}(r^3 + r^2) = 0\ \rightarrow\ r^2(r+1) = 0$
Entonces, $r = 0$ con multiplicidad $m = 2$ y $r = -1$ con multiplicidad $m = 1$.
Así, $y_c(x) = c_1e^{0x} + c_2xe^{0x} + c_3e^{-x}\ ;\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
$y_c(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}\ ;\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
Se halla la solución particular $y_p(x)$ de la ecuación, usando el método de variación de parámetros:
La solución se plantea de la forma: $y_p(x) = v_1y_1(x) + v_2y_2(x) + v_3y_3(x)$, donde $y_1(x)$, $y_2(x)$ y $y_3(x)$ son las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea correspondiente, es decir:
$y_p(x) = v_1(x) + v_2(x)\,x + v_3(x)e^{-x}$, tal que se satisfaga el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2^x \end{bmatrix}, \text{ esto es: } \begin{bmatrix} 1 & x & e^{-x} \\ 0 & 1 & -e^{-x} \\ 0 & 0 & e^{-x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2^x \end{bmatrix}.$$

El Wronskiano, $W(y_1, y_2, y_3)$, está dado por $\begin{vmatrix} 1 & x & e^{-x} \\ 0 & 1 & -e^{-x} \\ 0 & 0 & e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-x}$

Las soluciones del sistema son:

$$v'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x & e^{-x} \\ 0 & 1 & -e^{-x} \\ 2^x & 0 & e^{-x} \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2,y_3)} = \frac{2^x(-xe^{-x}-e^{-x})}{e^{-x}} = 2^x(-x-1) = -(x2^x + 2^x)$$

$\rightarrow v_1 = -\int (x2^x + 2^x)dx$; sean $u = x$; $dv = 2^xdx$ entonces $du = dx$; $v = \frac{2^x}{\ln(2)} + c, c \in \mathbb{R}$

$$v_1 = -\left[x\frac{2^x}{\ln(2)} - \int \frac{2^x}{\ln(2)}dx + \frac{2^x}{\ln(2)}\right] = -\left[x\frac{2^x}{\ln(2)} - \frac{2^x}{\ln^2(2)} + \frac{2^x}{\ln(2)}\right] + k_1\ ;\ k_1 \in \mathbb{R}$$

$$v'_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-x} \\ 0 & 0 & -e^{-x} \\ 0 & 2^x & e^{-x} \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2,y_3)} = \frac{-2^x(-e^{-x})}{e^{-x}} = 2^x$$

$$\rightarrow\ v_2 = \int 2^xdx = \frac{2^x}{\ln(2)} + k_2\ ;\ k_2 \in \mathbb{R}$$

$$v'_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2,y_3)} = \frac{2^x}{e^{-x}} = 2^xe^x = (2e)^x$$

$$\rightarrow\ v_3 = \int (2e)^xdx = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + k_3\ ;\ k_3 \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, descartando las constantes de integración, la solución particular está dada por:

$$y_p(x) = -\left[x\frac{2^x}{\ln(2)} - \frac{2^x}{\ln^2(2)} + \frac{2^x}{\ln(2)}\right] + \left[\frac{2^x}{\ln(2)}\right]x + \left[\frac{(2e)^x}{\ln(2e)}\right]e^{-x}$$

$$y_p(x) = \frac{2^x}{\ln^2(2)} - \frac{2^x}{\ln(2)} + \frac{2^x}{\ln(2e)}$$

La solución general de la ecuación está dada por: $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + \frac{2^x}{\ln^2(2)} - \frac{2^x}{\ln(2)} + \frac{2^x}{\ln(2e)}\ ;\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

CRITERIO DE CALIFICACIÓN El estudiante:	**PUNTAJE**
Halla la solución complementaria de la ecuación diferencial, resolviendo la ecuación homogénea correspondiente.	3.0 P
Halla la solución particular de la ecuación diferencial.	5.0 P
Obtiene la solución general de la ecuación diferencial sumando la solución de la ecuación homogénea correspondiente y la solución particular hallada.	1.0 P
TOTAL	**9.0 P**

Tema 4 (9 Puntos)
Utilizando series de potencias alrededor de $x_0 = 0$, determine la solución general de la ecuación diferencial $y''(x) + \beta^2\, y(x) = 0$ donde β es una constante fija diferente de cero. Para esto, primero argumente por qué $x_0 = 0$ es un punto ordinario. Además, identifique las funciones elementales a las que convergen las series linealmente independientes que forman la solución general hallada.

Desarrollo:
Sean $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$ y $R(x) = \beta^2$ los coeficientes de la ecuación diferencial ordinaria, entonces $P(x_0) \neq 0$. Por lo tanto, $x_0 = 0$ es un punto ordinario para la ecuación que se pide resolver.

Entonces, se plantea una solución de la forma: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, es decir:
$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, con lo cual: $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ y $y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

Reemplazando estas series en la ecuación: $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \beta^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 0$.
Se realiza el siguiente cambio de variable a la primera serie para que el exponente de x sea el mismo en ambas series: $n - 2 = m \rightarrow n = m + 2$. Por lo tanto, la primera serie queda de la forma:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m.$$

Aplicando a este resultado el cambio de variable $m = n$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

Entonces, la ecuación queda de la forma: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta^2 a_n x^n = 0$

Agrupando términos semejantes, se obtiene: $\sum_{n=0}^{\infty} [\,(n+2)(n+1) a_{n+2} + \beta^2 a_n] x^n = 0$
De esta forma, la expresión de recurrencia está dada por:

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + \beta^2 a_n = 0,\ n \geq 0 \wedge n \in \mathbb{Z}$$

$$a_{n+2} = -\frac{\beta^2 a_n}{(n+2)(n+1)},\ n \geq 0 \wedge n \in \mathbb{Z}$$

Generando algunos coeficientes iniciales se obtiene:
$a_0,\ a_1 \in \mathbb{R}$

$n = 0$: $a_2 = -\frac{\beta^2 a_0}{2} = -\frac{\beta^2 a_0}{2!}$ $\qquad$ $n = 1$: $a_3 = -\frac{\beta^2 a_1}{3.2} = -\frac{\beta^2 a_1}{3!}$

$n = 2$: $a_4 = -\frac{\beta^2 a_2}{4.3} = \frac{\beta^4 a_0}{4.3.2!} = \frac{\beta^4 a_0}{4!}$ $\qquad$ $n = 3$: $a_5 = -\frac{\beta^2 a_3}{5.4} = \frac{\beta^4 a_1}{5.4.3!} = \frac{\beta^4 a_1}{5!}$

$n = 4$: $a_6 = -\frac{\beta^2 a_4}{6.5} = -\frac{\beta^6 a_0}{6.5.4!} = -\frac{\beta^6 a_0}{6!}$ $\qquad$ $n = 5$: $a_7 = -\frac{\beta^2 a_5}{7.6} = -\frac{\beta^6 a_1}{7.6.5!} = -\frac{\beta^6 a_1}{7!}$

Entonces para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: $a_{2k} = \frac{(-1)^k \beta^{2k} a_0}{(2k)!}$; $a_{2k+1} = \frac{(-1)^k \beta^{2k} a_1}{(2k+1)!}$

Por lo tanto, la solución general está dada por:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{2k} a_0}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{2k} a_1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta x)^{2k}}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{2k} \beta}{\beta (2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$y(x) = \underbrace{a_0}_{c_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta x)^{2k}}{(2k)!} + \underbrace{a_1 \left(\frac{1}{\beta}\right)}_{c_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$y(x) = c_1 \cos(\beta x) + c_2\, sen(\beta x)\,;\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

CRITERIO DE CALIFICACIÓN El estudiante:	PUNTAJE
Argumenta por qué $x_0 = 0$ es un punto ordinario.	1.0 P
Plantea la forma de la solución en serie de potencias y halla sus derivadas.	1.0 P
Sustituye la solución planteada y sus derivadas en la ecuación diferencial, y obtiene la expresión de recurrencia para los coeficientes de dicha solución.	3.0 P
Genera una cantidad adecuada de coeficientes iniciales a fin de determinar el patrón que siguen.	2.0 P
Obtiene la solución general de la ecuación diferencial, identificando las funciones a las que las series convergen.	2.0 P
TOTAL	**9.0 P**

Tema 5 (14 Puntos)

Considere un circuito eléctrico en serie formado por un resistor R de 4Ω, un capacitor C de $0.25F$ y un inductor L de $1H$, que es alimentado por una fuente que suministra un voltaje que decrece linealmente iniciando en $9V$ en $t = 0$ segundos y que al llegar a $0V$ en $t = 9$ segundos se mantiene en $0V$ de allí en adelante. Por lo tanto, la alimentación del circuito está dada por $v(t) = \begin{cases} -(t-9) & ; \quad 0 \le t < 9 \\ 0 & ; \quad t \ge 9 \end{cases}$.

Utilice la transformada de Laplace para hallar la corriente $i(t)$ del circuito en cualquier instante t, si se conoce que la corriente inicial es de $0A$ y que el sistema de ecuaciones que gobierna el comportamiento del circuito es $\begin{cases} q(t) = \int_0^t i(\theta)d\theta \\ L\frac{di(t)}{dt} + R\,i(t) + \frac{1}{C}q(t) = v(t) \end{cases}$, donde $q(t)$ es la carga del capacitor en cualquier instante t.

<u>Desarrollo:</u>

La función $v(t)$ en términos de la función escalón unitario está dada por:

$$v(t) = -(t-9)\big(\mu_0(t) - \mu_9(t)\big) + 0\mu_9(t) = -(t-9)\big(1-\mu_9(t)\big) = -t + 9 + (t-9)\mu_9(t)$$

Sustituyendo la 1era ecuación del sistema en la 2da se tiene: $L\,i'(t) + R\,i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\theta)d\theta = v(t)$

Sustituyendo los datos de los componentes: $i'(t) + 4i(t) + 4\int_0^t i(\theta)d\theta = -t + 9 + (t-9)\mu_9(t)$

Aplicando la transformada de Laplace se tiene:

$$\mathcal{L}[i'(t)] + 4\mathcal{L}[i(t)] + 4\mathcal{L}\left[\int_0^t i(\theta)d\theta\right] = -\mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[9] + \mathcal{L}[(\mathrm{t}-9)\mu_9(t)]$$

Sea $\mathcal{L}[i(t)] = I(S)$:

- $\mathcal{L}[i'(t)] = S\,I(S) - \underbrace{i(0)}_{0} = S\,I(S) \quad ; \quad \mathcal{L}[t] = \frac{1}{S^2} \quad ; \quad \mathcal{L}[9] = \frac{9}{S}$
- $\mathcal{L}\left[\int_0^t i(\theta)d\theta\right] = \frac{1}{S}I(S) \quad ; \quad \mathcal{L}[(\mathrm{t}-9)\mu_9(t)] = e^{-9S}\frac{1}{S^2}$

Sustituyendo las transformadas se tiene:

$$S\,I(S) + 4\,I(S) + \frac{4}{S}I(S) = -\frac{1}{S^2} + \frac{9}{S} + e^{-9S}\frac{1}{S^2}$$

$$\left(\frac{S^2+4S+4}{S}\right) I(S) = -\frac{1}{S^2} + \frac{9}{S} + e^{-9S}\frac{1}{S^2}$$

$$\frac{(S+2)^2}{S} I(S) = -\frac{1}{S^2} + \frac{9}{S} + e^{-9S}\frac{1}{S^2} \quad \rightarrow \quad I(S) = -\frac{1}{S(S+2)^2} + \frac{9}{(S+2)^2} + e^{-9S}\frac{1}{S(S+2)^2}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace: $i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{S(S+2)^2} + \frac{9}{(S+2)^2} + e^{-9S}\frac{1}{S(S+2)^2}\right]$

Una manera de proceder es realizando la siguiente descomponiendo en fracciones parciales:

$$\frac{1}{S(S+2)^2} = \frac{A}{S} + \frac{B}{S+2} + \frac{C}{(S+2)^2} \;\rightarrow\; \frac{1}{S(S+2)^2} = \frac{A(S+2)^2 + BS(S+2) + CS}{S(S+2)^2} \;\rightarrow\; 1 = (A+B)S^2 + (4A+2B+C)S + 4A$$

$$0 = A + B\,;\; 0 = 4A + 2B + C\;;\; 1 = 4A \;\rightarrow A = \frac{1}{4}\;;\; B = -\frac{1}{4}\;;\; C = -\frac{1}{2} \;\rightarrow\; \frac{1}{S(S+2)^2} = \frac{1}{4S} - \frac{1}{4(S+2)} - \frac{1}{2(S+2)^2}$$

Entonces, se tiene que:

$$i(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4S} - \frac{1}{4(S+2)} - \frac{1}{2(S+2)^2}\right] + 9\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(S+2)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-9S}\left(\frac{1}{4S} - \frac{1}{4(S+2)} - \frac{1}{2(S+2)^2}\right)\right]$$

$$i(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4S}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4(S+2)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2(S+2)^2}\right] + 9\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(S+2)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-9S}}{4S}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-9S}}{4(S+2)}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-9S}}{2(S+2)^2}\right]$$

$$i(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}t + 9e^{-2t}t + \frac{1}{4}\mu_9(t)f(t-9) - \frac{1}{4}\mu_9(t)g(t-9) - \frac{1}{2}\mu_9(t)h(t-9),$$

tal que: $f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{S}\right] = 1\,;\; g(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{S+2}\right] = e^{-2t}\,;\; h(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(S+2)^2}\right] = e^{-2t}L^{-1}\left[\frac{1}{S^2}\right] = te^{-2t}$

Por lo tanto, la corriente del circuito está dada por:

$$i(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{19}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}\mu_9(t) - \frac{1}{4}\mu_9(t)e^{-2(t-9)} - \frac{1}{2}\mu_9(t)(t-9)e^{-2(t-9)};\; t \ge 0$$

CRITERIO DE CALIFICACIÓN El estudiante:	**PUNTAJE**
Expresa la función de voltaje $v(t)$ en términos de la función escalón unitario.	2.0 P
Con base en el sistema de ecuaciones que gobierna el comportamiento del circuito y en la transformada de Laplace obtiene la transformada de la corriente del circuito.	7.0 P
Aplicando la transformada inversa de Laplace determina la corriente del circuito para cualquier instante t.	5.0 P
TOTAL	**14.0 P**

Tema 6 (9 Puntos)

Halle el valor que debe tomar la constante k para que los valores propios de la matriz de coeficientes del sistema $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 3 \\ -3 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ sean $r_{1,2} = 2 \pm 3i$. A continuación, usando el valor hallado de k determine la solución general del sistema **usando el método de los valores y vectores propios**. Finalmente, obtenga la solución particular del sistema considerando la condición inicial $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Desarrollo:

Se halla los valores propios $\boldsymbol{r}$ de la matriz de coeficientes que denotaremos como $\boldsymbol{M}$, resolviendo: $\boldsymbol{det(M - rI) = 0}$:

$\begin{vmatrix} k-r & 3 \\ -3 & k-r \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (k-r)^2 + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad (k-r)^2 = -9 \quad \rightarrow \quad k - r = \pm 3i \quad \rightarrow \quad r = k + 3i \quad \vee$ $r = k - 3i$.

Por lo tanto, para que los valores propios de M sean $r_{1,2} = 2 \pm 3i$, el valor de k debe ser igual a 2.

Se plantea la solución vectorial $\boldsymbol{z}(t)$ $= \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon} e^{rt}$ tal que r es un valor propio de M y $\boldsymbol{\varepsilon}$ un vector propio asociado.

Se halla el espacio característico y un vector propio asociado a cada valor propio, resolviendo el sistema $(\boldsymbol{M} - r\boldsymbol{I})\boldsymbol{\beta_r} = \boldsymbol{0}$, donde el espacio característico $\boldsymbol{\beta_r}$ se lo define de la forma $\beta_r = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$:

Para $r_1 = \underbrace{2}_{\alpha} + \underbrace{3}_{\lambda} i$: se resuelve el sistema $(\boldsymbol{M} - r_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{\beta_{r_1}} = \boldsymbol{0}$, es decir, $\left[\begin{array}{cc|c} -3i & 3 & 0 \\ -3 & -3i & 0 \end{array}\right]$.

Sumando a la fila 1 la fila 2 multiplicada por $-i$ y ubicando el resultado en la fila 2: $\left[\begin{array}{cc|c} -3i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Al eliminarse la última fila se tiene una variable libre, con lo cual es válido considerar $b \in \mathbb{R}$.

De acuerdo a la fila 1: $-3ia + 3b = 0$, entonces $a = \frac{b}{i} \rightarrow \quad a = \frac{b}{i}\frac{i}{i} = -bi$

Así, $\boldsymbol{\beta_{r_1}} = \left\{ \begin{bmatrix} -bi \\ b \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} i \right] : b \in \mathbb{R} \right\}$, con lo cual $\boldsymbol{\varepsilon_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} i$.

Para $r_2 = \underbrace{2}_{\alpha} - \underbrace{3}_{\lambda} i$: un vector propio asociado es el conjugado de $\boldsymbol{\varepsilon_2}$, es decir: $\boldsymbol{\varepsilon_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{A} - \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} i$

La solución general del sistema está dada por:

$\boldsymbol{z}(t) = c_1 e^{\alpha t}(A cos(\lambda t) - B sen(\lambda t)) + c_2 e^{\alpha t}(A sen(\lambda t) + B cos(\lambda t)); \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\boldsymbol{z}(t) = c_1 e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} cos(3t) - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} sen(3t) \right) + c_2 e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} sen(3t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} cos(3t) \right)$

Las componentes de la solución general del sistema están dadas por:

$x(t) = c_1 e^{2t} sen(3t) - c_2 e^{2t} cos(3t)$

$y(t) = c_1 e^{2t} cos(3t) + c_2 e^{2t} sen(3t)$, tal que $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Evaluando la condición inicial $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ se tiene:

$x(0) = -c_2 = -1 \rightarrow c_2 = 1$

$y(0) = c_1 = 4$

Por lo tanto, las componentes de la solución particular están dadas por:

$x(t) = 4e^{2t} sen(3t) - e^{2t} cos(3t)$

$y(t) = 4e^{2t} cos(3t) + e^{2t} sen(3t)$

CRITERIO DE CALIFICACIÓN El estudiante:	**PUNTAJE**
Obtiene el valor que debe tomar la constante k.	1.0 P
Plantea la solución vectorial del sistema.	1.0 P
Determina un vector propio asociado a cada valor propio.	4.0 P
Obtiene la solución general del sistema.	2.0 P
Evaluando la condición inicial, obtiene la solución particular del sistema.	1.0 P
TOTAL	**9.0 P**