ESCUELA SUPERIOR
POLITECNICA DEL LITORAL
Instituto de Ciencias Matemáticas

"METODO DE GAUSS JORDAN PARA LA RESOLUCION DE SISTEMAS LINEALES"

Monografía

Previa a la obtención del Título de :

MAGISTER EN EDUCACION MATEMATICA
APLICADA AL NIVEL MEDIO

Presentada por:

Lic. LUIS FIALLOS MORENO

GUAYAQUIL - ECUADOR

1994

A G R A D E C I M I E N T O

A MIS MAESTROS :

- CELESTIAL; **JESUS**, PORQUE ME HA ENSEÑADO LAS MATEMÁTICAS PERFECTAS.
- TERRENAL; **GAUDENCIO**, PORQUE ME HA ENSEÑADO LAS MATEMÁTICAS EXACTAS.

D E D I C A T O R I A

- A MI PADRE "CELESTIAL"; **JEHOVA**.
- A MI ESPOSA; **MARGARITA**.
- A MIS HIJAS: **JAZMIN Y JASMILE**.

....

Ms. Sc. GAUDENCIO ZURITA H.

Director de Monografía

DECLARACION EXPRESA

" La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestos en esta monografía, me corresponden exclusivamente; y, el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL".

(Reglamento de Exámenes y Títulos profesionales de la ESPOL).

Luis Fiallos M.

....

Nombre y firma del autor

INDICE

CAPITULO I

CAPITULO II

CAPITULO III

INDICE DE ABREVIATURAS

INTRODUCCION

En los tiempos actuales muchos problemas que surgen en la Ingeniería, Economía, Biología, etc. conducen a sistemas de ecuaciones lineales.

En una prueba de diagnóstico de matemáticas aplicado a 109 bachilleres aspirantes a ingresar a la ESPOL el 13 de febrero de 1994, en lo que concierne a **matrices** y **sistemas de ecuaciones lineales** se obtuvieron los siguientes resultados :

1) Un **28%** resolvió correctamente el determinante de una matriz.
2) Sólo el **8%** calculó correctamente la matriz inversa.
3) El **13%** supo plantear un sistema de ecuaciones lineales.
4) Nadie lo calculó por el **método de Gauss** ó **método Gauss-Jordan.**
5) Sólo un **10%** lo calculó utilizando otros métodos.

Con estos resultados podemos notar que siendo el algebra de matrices y la resolución de sistemas lineales, una de las aplicaciones más importantes de las matrices, su estudio ha sido muy limitado.

Por lo tanto esta monografía brindará los conocimientos necesarios para el estudio del "método Gauss-Jordan para la resolución de sistemas lineales", la cual consta de 2 partes, los **CAPITULOS I** y **II** que son **DEFINICIONES** e **ILUSTRACIONES** de **SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES** y **MATRICES** y el **CAPITULO III** trata específicamente sobre los **METODOS DE GAUSS Y GAUSS JORDAN**, los cuales nos resuelven todos los casos posibles de sistemas de ecuaciones lineales.

Esta monografía está dirigida a estudiosos que deseen tener una base sólida para el estudio del Algebra Lineal, Ud !

CAPITULO I

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

1. DEFINICIONES BASICAS.-

1.1. Introducción.

El objetivo principal de este capítulo es ordenar las definiciones sobre sistemas de ecuaciones lineales para poder hablar en un mismo lenguaje matemático, evitando así la dualidad.

Otro objetivo es también el de relacionar el algebra lineal y la lógica matemática.

En muchas aplicaciones de la teoría de conjuntos, se considera solamente subconjuntos de un cierto conjunto bien definido, dicho conjunto se lo denomina **conjunto referencial Re.**

Definición.- Sean $a \in$ Re y $p(x)$ una función, $p(x)$ es un **predicado** si y sólo si al reemplazar x por un elemento cualquiera "a" del conjunto referencial, $p(a)$ es una proposición.

Ejemplo 1.1 :

i) $p(x)$: x es igual a x

ii) $q(x)$: $x > 10$

Definición.- Sean $a \in Re$, $p(x)$ un predicado , **$A_p(x)$** es el **conjunto de verdad del predicado p(x),** si sólo si $p(a) \equiv 1$ (verdadero) y $a \in A_p(x)$.

Ejemplo 1.2 :

Si $Re = \{1,2,3,...\}$, el conjunto de verdad de $p(x)$: x es impar, es $A_p(x)=\{1,3,5,...\}$.

1.2.- Ecuación lineal de n incógnitas.

Definición.- Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ y b constantes numéricas reales ; $x_1, x_2, ..., x_n$ variables reales ; **una ecuación es lineal de n incógnitas** si y solamente si es una expresión de la forma $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n = b$, donde no todos los coeficientes a_i son iguales a cero.

Nótese que cada ecuación es un predicado de n variables al que denoto $p_i(x_1,x_2,...x_n) \equiv p_i(x)$

Ejemplo 1.3

$p(x_1,x_2)$: $x_1-x_2=0$ es una ecuación lineal de 2 incógnitas.

$p(x,y,z)$: $3x+2y-6z=7$ es una ecuación lineal de 3 incógnitas.

$p(s,t)$: $4s-2t^2+4=0$ no es una ecuación lineal, pero si un predicado.

$p(x_1,x_2)$: $x_1-\ln x_2 = 6$ no es una ecuación lineal.

$p(x,y,z)$: $x+y-z = \log 100$ es una ecuación lineal de 3 incógnitas.

1.3.- Sistemas de ecuaciones lineales.

Definición.- Sean a_{11}, a_{12}, $\ldots, a_{1n}$, $a_{21}, \ldots, a_{m,n}$ y $b_1, b_2, \ldots, b_m$, constantes numéricas reales, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variables reales la expresión:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
p_1(x): & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
p_2(x): & a_{12}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
p_m(x): & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

es un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas, donde no todos los coeficientes a_{ij} son iguales a cero.

Cada ecuación lineal del sistema es un **predicado** $p_i(x)$; $i= 1,2,\ldots,m$ donde $p_i(x) = p_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces $p_1(x) \wedge p_2(x) \wedge \ldots \wedge p_m(x) \equiv p(x)$ es el predicado compuesto por la conjunción de predicados de todas las m ecuaciones lineales.

m ecuaciones ===> m predicados y

n incógnitas ===> n variable en cada predicado $p_i(x)$

El primer subíndice **i**, sitúa a la a_{ij} en la i-ésima ecuación del sistema, el segundo subíndice **j** ubica a ésta como el coeficiente de la variable j-ésima, x_j, del sistema. En particular a_{21}, se encuentra en la segunda ecuación y es el coeficiente de la variable x_1 en dicha ecuación.

1.4.- <u>Solución de un sistema de ecuaciones lineales</u>.

Encontrar la "solución" de un sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas es encontrar el conjunto de verdad $A_p(x)$ del predicado compuesto $p(x)$.

Definición.- Una sucesión $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de números reales es una solución del sistema de ecuaciones lineales $p_i(x)$: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ siendo $\{ i \in Z^+ / 1 \leq i \leq m \}$ si y solamente si los valores $x_j = c_j$ donde $\{j \in Z^+ / 1 \leq j \leq n\}$ satisfacen todas y cada una de las ecuaciones del sistema.

Si $p_i(c) = p_i(c_1, c_2, \ldots c_n)$, entonces :

$p_1(c) \wedge p_2(c) \wedge \ldots \wedge P_m(c) \equiv 1$ (verdadero), se dice que c satisface el predicado compuesto.

1.5.- <u>Conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales</u>.

Definición.- El conjunto de todas las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales se llama **conjunto solución**.

El conjunto de verdad del predicado para sistemas de ecuaciones lineales es el conjunto solución del sistema, es decir $A_p(x)$. Este conjunto puede ser el vacío, unitario o con infinito número de elementos. El cual es subconjunto de R^n si el sistema tiene n incógnitas, entonces R^n es el conjunto referencial Re.

Ejemplo 1.4.

Hallar la solución del siguiente sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas: solución única.

$p_1(x,y) : x + 2y = 4$

$p_2(x,y) : x - y = 1$

Aplicando cualquier método ya conocido o por "operación retina" nos podemos dar cuenta que la solución es $x=2$ y $y=1$, ya que reemplazados en las dos ecuaciones, se cumple la igualdad, es decir:

$p_1(2,1) \wedge p_2(2,1) \equiv 1$ (verdadero)

La solución del sistema es el par ordenado $(2,1) \in R^2$ y puesto que $p(x) = p_1(x,y) \wedge p_2(x,y)$, entonces

$A_p(x) = \{ (2,1) \} \subset R^2$.

Ejemplo 1.5 : Sistema con infinitas soluciones.

$x - y = 2$

$2x-2y = 4$

los siguientes pares ordenados son soluciones:

(2,0), (3,1), (4,2), (5,3), (-4,-6), (-3,-5), (1,-1)...

es decir que el conjunto solución es:

$A_p(x,y) = \{(x,y)/ \ y=x-2, \ x \in R \} \subset R^2$.

1.6.- Sistemas de ecuaciones consistentes e inconsistentes.

Definición.- Un sistema de ecuaciones lineales es **consistente** o **compatible** si y sólo si tiene por lo menos una solución, es decir si $\neg(A_p(x) = \phi)$.

Caso contrario es **inconsistente** o **incompatible**, es decir $A_p(x) = \phi$.

1.7.- Sistemas homogéneos y no homogéneos.

Definición.- Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas (AX=b en forma matricial que veremos más adelante) es homogéneo sí y sólo si todos los términos constantes son iguales a cero ($AX=0_v$, $v \in R^m$).

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es la conjunción de m predicados de la forma:

$p_i(x)$: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0$ $(i=1,2,\ldots,m)$.

Se puede probar que todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo tiene por lo menos una solución llamada **solución trivial** : $c_1=0$, $c_2=0, \ldots c_n=0$.

Un sistema de ecuaciones lineales que no es homogéneo se llama **no homogéneo**.

Ejemplo 1.6 : **Un sistema homogéneo con solución trivial.**

$p_1(x,y)$: $2x + 3y = 0$

$p_2(x,y)$: $3x + 5y = 0$

Si encontramos el conjunto solución por cualquier método es:

$$A_P(x,y) = \{(0,0)\} \subset R^2$$

Ejemplo 1.7 : Un sistema homogéneo con infinito número de soluciones.

$p_1(p,q,r)$: $p - 3q + r = 0$

$p_2(p,q,r)$: $2p - 6q + 2r = 0$

Determinando, su conjunto solución es:

$$A_P(x,y) = \{ (p,q,r)/p=3q-r;\ q,r \in R \} \subset R^3$$

Ejemplo 1.8 : Sistema no homogenéneo.

$p_1(x)$: $x_1+x_2 = 3$

$p_2(x)$: $x_1-x_2 = 1$

Donde $p_1(x)$ $p_2(x) \equiv p(x)$

Su conjunto solución es:

$$A_P(x_1,x_2) = \{(2,1)\} \subset R^2$$

1.8.- Sistemas equivalentes.

Si dos **ecuaciones** tienen el mismo conjunto solución, son **equivalentes.**

Se dice que dos **sistemas lineales son equivalentes** si y sólo si ambos poseen el mismo conjunto solución.

Ejemplo 1.9 : Si se observa el sistema I.

$$I = \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \implies A_P(x,y,z) = \{ (1,2,-1) \} \subset R^3$$

y se pregunta por la solución de éste, se ve que no hay necesidad de hacer cálculo alguno pues la solución está escrita explícitamente en el mismo sistema.

Sin embargo si se observa el sistema II.

$$II = \begin{cases} p_1(x,y,z) : & x + y + z = 2 \\ p_2(x,y,z) : & 2x + y + z = 4 \\ p_3(x,y,z) : & x - y + z = -2 \end{cases}$$

Aplicando cualquier método conocido nos damos cuenta que el conjunto solución es la terna ordenada $(1,2,-1) \in R^3$, es decir que :

$$A_p(x,y,z) = \{(1,2,-1)\} \subset R^3$$

por ser los sistemas I y II con tres incógnitas y con el mismo conjunto solución podemos decir que son equivalentes.

1.9.- <u>Representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales</u>.

Todo conjunto solución de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es un subconjunto de R^n, representar gráficamente un subconjunto de R^4, R^5, ...R^n es imposible, pero en R^3 y R^2, es simple.

Ejemplo 1.10 : Sistema con solución única.

Considere el sistema :

$p_1(x,y)$: $x + y = 2$

$p_2(x,y)$: $x - y = 0$

Por el método de eliminación nos damos cuenta que existe una sola solución y es el par ordenado $(1,1) \in R^2$.

Ver diagrama 1.1 (pág# 11).

$$A_p(x,y) = \{ (1,1,) \} ; A_p(x,y) \subset R^2.$$

Ejemplo 1.11 : Sistema con un número infinito de soluciones.

Considere el sistema:

$p_1(x,y)$: $x + y = 2.5$

$p_2(x,y)$: $2x + 2y = 5$

Estas dos ecuaciones son equivalentes (Definición 1.8, pág#7), puesto que podemos multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero, sin que tal "operación" altere el conjunto solución. A fin de comprobar esto, multiplíquese la primera por 2. Su representación gráfica es la misma, por lo tanto tiene un número infinito de soluciones. Por ejemplo los pares ordenados siguientes son soluciones: (-1,3.5), (0,2.5), (1,1.5), (2,0.5) (3,-0.5),(4,-1.5).

$$A_p(x,y) = \{ (x,y) / y=2.5-x, x \in R \} \subset R^2$$

Ver diagrama 1.2 (pág# 11)

Ejemplo 1.12 : Sistema inconsistente.

Considere el sistema:

$p_1(x,y)$: $x + y = 2.5$

$p_2(x,y)$: $x + y = 4.5$

Este sistema lo componen dos predicados (ecuaciones) que se contradicen, la primera "pide" dos números que sumados sean igual a 2.5, y la segunda ecuación pide que estos mismos números sumados sean igual a 4.5, lo cual no es posible, por lo tanto este sistema no tiene solución, es decir que la solución es el conjunto vacío Φ, subconjunto de R^2.

$$A_p(x,y) = \Phi \quad ; A_p(x,y) \subset R^2.$$

Ver diagrama 1.3 (pág# 11).

En R^3 son tres los planos que se intersectan en un punto, su solución es única, a veces la intersección es una recta o puede coincidir que los tres planos son equivalentes y el número de soluciones es infinita, o por último los planos son paralelos y no existe solución.

En R^n estos son los tres tipos de conjuntos de solución posibles: solución única, infinitas soluciones e inexistencia de soluciones.

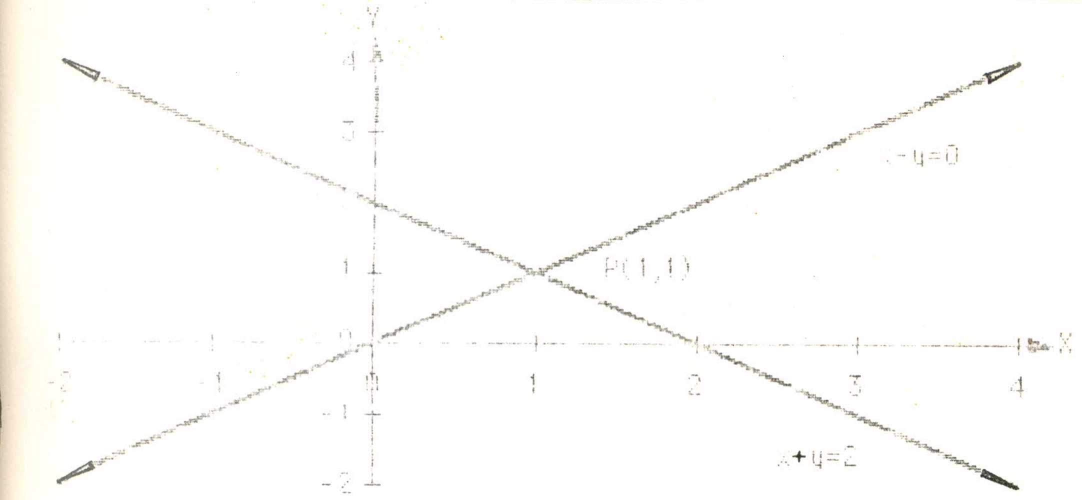

Diagrama 1.1. Sistema con solución única

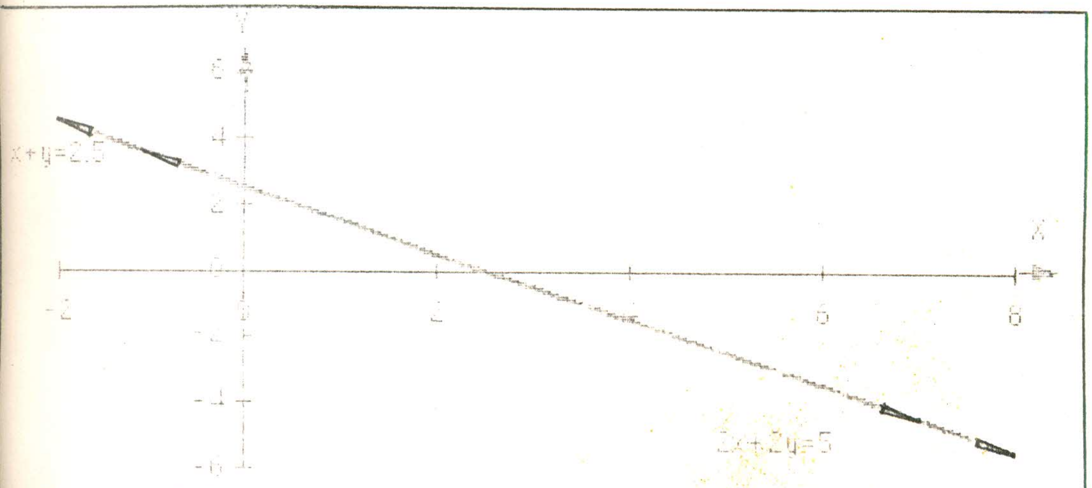

Diagrama 1.2. Sistema con infinitas soluciones

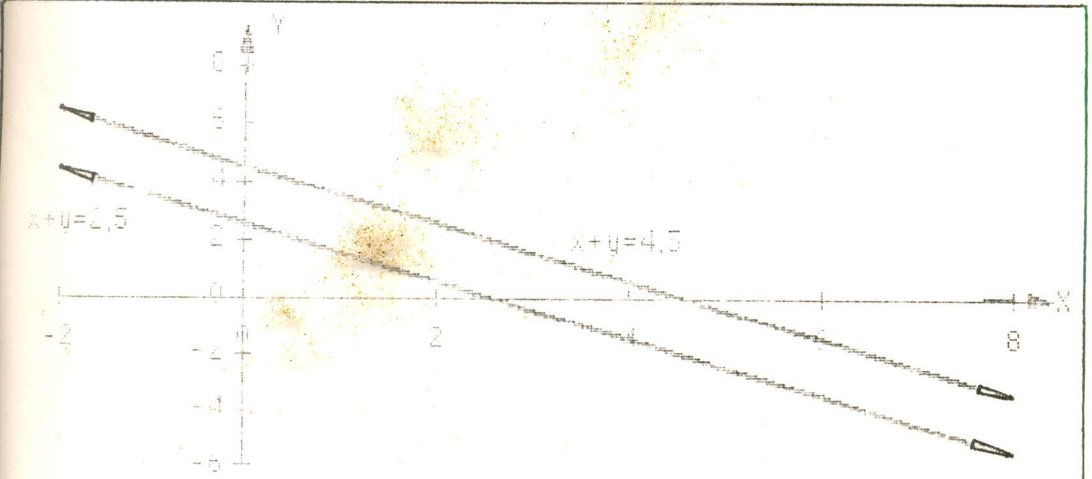

Diagrama 1.3. Sistema sin solución

1.10. Variable libre del sistema de ecuaciones lineales.

En un sistema de ecuaciones lineales una **variable** es **libre** si y sólo si no le afecta el cuantificador universal; es decir que la variable puede tomar cualquier valor númerico real y ser un elemento de las n-tuplas del conjunto solución.

En todo conjunto solución de un sistema de ecuaciones de un número infinito de soluciones existe por lo menos una variable libre.

El conjunto solución a un sistema de m ecuaciones lineales con m incógnitas nunca es única si $n > m$.

Aquí hay por lo menos $(n-m)$ variables libres si el sistema tiene solución.

En el ejemplo 1.11 de la sección 1.9 (pág#9) tenemos el caso de una variable, el cual fue escrito de la siguiente manera:

$$A_P(x,y) = \{ (x,y)/ \ y = 2.5-x, \ x \in R \} \quad (1)$$

Aquí la variable libre es x.

Pero no es la única forma de representar a este conjunto solución porque también se lo puede hacer de la siguiente forma:

$$A_P(x,y) = \{ (x,y)/ \ x = 2.5-y, \ y \in R \} \quad (2)$$

Donde la variable libre es y.

Las dos expresiones del conjunto solución son diferentes, sin embargo, como las variables libres **x** y **y** varían sobre todo el conjunto de los números reales, las dos expresiones describen al mismo conjunto solución (1) una solución particular es (1,1.5). La misma solución se obtiene del conjunto solución (2) haciendo x=1.

En conclusión esto nos demuestra que un mismo conjunto solución puede ser expresado en más de una forma dependiendo qué variable ó variables se tome como libre.

En el siguiente capítulo ilustraremos sistemas de ecuaciones lineales con más de una variable libre.

CAPITULO II

MATRICES CON ELEMENTOS REALES.

2. DEFINICIONES BASICAS.

2.1. Matriz real.

Definición.- Sean dos conjuntos A y B $\subset Z^+$;
$A = \{i/i=1,2,\ldots,m\}$, $B=\{j/j=1,2,\ldots,n\}$, una función σ, de AxB a R, σ se denomina matriz si y solo si, a cada par ordenado $(i,j) \in AxB$ le asigna un número real a_{ij} .

La representación de una matriz es un arreglo rectangular de m filas y n columnas, que describimos a continuación y con la cual permaneceremos en el desarrollo de este trabajo :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mxn}$$

donde :

$\sigma(1,1) = a_{11}$

$\sigma(1,2) = a_{12}$

$\vdots \qquad \vdots$

$\sigma(m,n) = a_{mn}$

Se denotará a las matrices como $A \in M_{mxn}(R)$ ó $M_{mxn}(C)$ que "se lee" matriz A que pertenece al conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas, (R) cuando $a_{ij} \in R$ donde R es el conjunto de los números reales y (C) cuando $a_{ij} \in C$, donde C es el conjunto de los números complejos.

Como solo vamos a trabajar con matrices reales usaremos siempre $M_{mxn}(R) = M_{mxn}$ por simplicidad.

$A \in M_{mxn}$ de aquí en adelante la representación de A será $A = (a_{ij})$, se dice que a_{ij} es el elemento general, donde el primer subíndice i, de los dos que tiene el elemento a_{ij} sitúa a a_{ij} en la i-ésima fila, el segundo subíndice j, la ubica en la j-ésima columna de la matriz.

2.2. Matriz cuadrada.

Definición.- Sea $A \in M_{mxn}(R)$, A es **cuadrada** si y sólo si m=n, siendo $m,n \geq 1$ y $m, n \in Z^+$; m,n finitos.

Si $\neg$(m=n) la matriz es **no cuadrada.**

Ejemplo 2.1 : **Matriz no cuadrada compleja ($m \neq n$).**

$$A = \begin{bmatrix} i-0.5 & 3 & -2i+1 \\ i+2 & 4 & 0,25i \end{bmatrix}, \quad A \in M_{2x3}(C)$$

Ejemplo 2.2 : **Matriz cuadrada real (m=n).**

$$B = \begin{bmatrix} 4 & \text{Sen } x \\ \pi & \log 8 \end{bmatrix}, \quad B \in M_{2x2}(R)$$

2.3. **Matriz cero.**

Definición.- Sean $i,j \in Z^+$ sea además $\underline{O} \in M_{mxn}$, $\underline{O}$ es una **matriz cero** si y sólo si $\forall i$ y $\forall j$, $a_{ij} = 0$.

Ejemplo 2.3 :

$$\underline{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2x4}$$

2.4. **Matriz Diagonal.**

Definición.- Sea A una matriz cuadrada $(A=(a_{ij}) \in M_{nxn})$. A es una **matriz diagonal** si y solamente si $\forall i$ y $\forall j$, $i \neq j$, $a_{ij} = 0$ y existe al menos un a_{ij}, $i=j$, tal que $\neg(a_{ij}=0)$.

Ejemplo 2.4 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix} \in M_{3x3} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3x3}$$

Conclusión : A y D son matrices diagonales 3x3.

2.5. <u>Igualdad de matrices</u>

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ matrices en $M_{m\times n}$; A y B son **iguales** si y solamente si $a_{ij} = b_{ij}$; $\forall i \ (1 \leq i \leq m)$, $\forall j \ (1 \leq j \leq n)$ donde $i, j, m, n \in Z^+$. Es decir cuando todos sus elementos correspondientes son iguales.

2.6. <u>Suma de Matrices</u>.

Dos matrices A y B se pueden sumar si y solamente si A y B $\in M_{m\times n}$. La suma $A+B \doteq (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$,

<u>Ejemplo 2.5</u> :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \pi \\ 7 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2^{1/2} & \pi \\ 5 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+2^{1/2} & 2\pi \\ 12 & 3/4 \end{bmatrix}$$

2.7. <u>Multiplicación de matrices</u>.

La multiplicación de dos matrices AB está definido si y solamente si $A \in M_{m\times p}$ y $B \in M_{p\times n}$. Si tal multiplicación de matrices está definida y es $AB= C$, entonnces $C \in M_{m\times n}$. Para encontrar el elemento c_{ij} distíngase la fila i de la matriz A y la columna j de la matriz B. Multiplíquese los elementos correspondientes de la fila y columna y a continuación súmese algebraicamente los productos resultantes (véase la fig#2.1). Es decir el elemento c_{ij} está definido así:

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$ para $i \in Z^{+}/i=1,2,\dots m$ y $j \in Z^{+}/j=1,2,\dots n$.

$$
\begin{array}{cc}
 & A_{m\times p} \\
 & \\
 & \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \text{fila} \\ i \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{ip}} & & & \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp}
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
B_{p\times n} \\
\begin{array}{cccccc} & & & \textbf{columna} & & \\ & & & \textbf{j} & & \end{array} \\
\begin{bmatrix}
b_{11} & b_{12} & \cdot & \mathbf{b_{1j}} & \cdot & b_{1n} \\
b_{21} & b_{22} & \cdot & \mathbf{b_{2j}} & \cdot & b_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
b_{p1} & b_{p2} & \cdot & \mathbf{b_{pj}} & \cdot & b_{pn}
\end{bmatrix}
\end{array}
=
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} & & \textbf{columna} & & \\ & & \textbf{j} & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \text{fila} \\ i \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdot & c_{1j} & \cdot & c_{1n} \\
c_{21} & c_{22} & \cdot & c_{2j} & \cdot & c_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
c_{i1} & c_{i2} & \cdot & \boxed{c_{ij}} & \cdot & c_{in} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
c_{m1} & c_{m2} & \cdot & c_{mj} & \cdot & c_{mn}
\end{bmatrix} \\
 & C_{m\times n}
\end{array}
$$

figura# 2.1

<u>**Ejemplo 2.6**</u>. Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -5 & 6 & -7 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Determinar AB.

AB está definido pues $A \in M_{2x3}$ y $B \in M_{3x1}$, $AB \in M_{2x1}$.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -5 & 6 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(-6)+(-3)(7)+(4)(-2) \\ (-5)(-6)+(6)(7)+(-7)(-2) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -41 \\ 79 \end{bmatrix} \in M_{2x1}$$

2.8. <u>**Matriz Identidad**</u>.

Sean $A \in M_{mxn}$ e $I_n \in M_{nxn}$, I_n es la **matriz identidad** nxn si y solamente si $AI_n = I_nA = A$.

También se puede decir que es una matriz diagonal tal que para todas las a_{ij}; $i=j$, $a_{ij} = 1$.

<u>**Ejemplo 2.7**</u>

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3x3}$$

2.9. Inversa de una matriz cuadrada.

Sean A y B $\in M_{n\times n}$, la matriz B se llama inversa de A si y solamente si $AB = BA = I_n$ (matriz identidad). Es decir es la inversa multiplicativa de A. Usualmente a la inversa de A se la denota A^{-1}, por lo tanto $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Decimos que una matriz A es invertible, **regular** o **no singular** si tiene inversa. Sin embargo, una matriz A puede no tener inversa, en cuyo caso se llama **no invertible** o **singular**.

Ejemplo 2.8 :

La matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ es invertible, ya que $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ es inversa de A, pues :

$$AB=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & 2-2 \\ 6-6 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$BA=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & 2-2 \\ -6+6 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Más adelante estudiaremos un método para hallar la matriz inversa de cualquier matriz invertible.

2.10. **Forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales.**

Una de las aplicaciones más importantes de las matrices es el tratamiento de sistemas de ecuaciones lineales algebraicas.

Sean $A \in M_{m\times n}$, $X \in M_{n\times 1}$ y $b \in M_{m\times 1}$ definidas de la siguiente manera :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \quad y \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

Y además supongamos la ecuación matricial $AX = b$, veamos lo que sucede :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

Desarrollando la multiplicación de matrices nos queda :

$$\begin{bmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_1 + \ldots + a_{1n}X_1 \\ a_{21}X_2 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

Siendo ésta una igualdad de matrices podemos establecer que :

$$\begin{array}{l} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_1 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_1 = b_2 \\ . \qquad . \qquad . \qquad . \\ . \qquad . \qquad . \qquad . \\ . \qquad . \qquad . \qquad . \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_1 = b_m \end{array}$$

que no es más que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, es decir que la **forma matricial** $AX = b$ es una forma compacta de escribir cualquier sistema de ecuaciones lineales.

A usualmente se llama **matriz de coeficientes** del sistema, a X se la denomina **matriz de las incógnitas** del sistema y b es la **matriz de los términos independientes** del sistema.

2.11. Matriz aumentada de un sistema lineal.

Definición.- Sea $A \in M_{mxn}$ la matriz coeficiente y $b \in M_{mx1}$ la matriz de los términos independientes de un sistema líneal, una **matriz** es **la matriz aumentada** $(A|b)$ de un sistema si y solamente si:

$$(A|b) = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & & . & \\ . & . & & . & \\ . & . & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \in M_{mx(n+1)}$$

2.12. Operaciones elementales sobre filas de una matriz aumentada de un sistema lineal.

Las siguientes operaciones se pueden hacer obteniendo "matrices equivalentes".

1.- Intercambiar dos filas cualesquiera de la matriz.

2.- Multiplicar cualquier fila de la matriz por una constante distinta de cero.

3.- Reemplaza cualquier fila de la matriz por el resultado de sumarle un múltiplo de cualquier otra fila.

Si observamos la matriz aumentada de un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, notamos que ella contiene la información necesaria para "resolver" el sistema, y que por medio de las operaciones elementales podemos transformar este sistema en otro equivalente.

2.13. Forma escalonada por filas reducidas.

Definición.- Una matriz está en forma escalonada por filas reducidas si y sólo si se cumplen las 4 condiciones siguientes:

1.- Todas las filas cuyos elementos son en su totalidad ceros (si las hay) aparecen en la parte inferior de la matriz.

2.- El primer número diferente de cero (a partir de la izquierda) en cualquier fila que no contiene solamente ceros, es 1.

3.- Si dos filas sucesivas no contienen solamente ceros, entonces el primer uno en la fila inferior ocurre más hacia la derecha que el primer 1 de la fila superior.

4.- Cualquier columna que tenga el primer 1 de una fila tiene ceros en las demás posiciones.

2.14. Forma escalonada por filas.

Definición.- Una matriz está en **forma escalonada por filas** si y sólo si se cumplen las 3 primeras condiciones de la definición anterior.

Ejemplos 2.9

Las matrices dadas a continuación están en la forma escalonada por filas reducida:

$$\text{i.}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ii.}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{iii.}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{iv.}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{v.}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplos 2.10.

Las matrices que siguen están en la forma escalonada por filas:

$$\text{i.}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ii.}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{iii.}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{iv.}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{v.}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>**Ejemplo 2.11**</u>. Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{4x5}$$

Con un ejemplo veremos que usando las tres operaciones básicas únicamente sobre las filas, la matriz se puede transformar a la forma:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{4x5}.$$

Determinar a y b

NOTA : Estas matrices no son iguales, por lo tanto no podemos usar el signo de igualdad, en su lugar usaremos ~ para indicar que las matrices son equivalentes.

Multiplicando la cuarta fila por (-1), (-2) y (-5) luego sumando a la tercera, segunda y primera fila respectivamente tenemos:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora multipliquemos la tercera fila por (-4) y la sumamos a la primera.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y por último multipliquemos la segunda fila por (-2) y la sumamos a la primera:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{4x5}$$

La solución es a= 5 y b = -1.

2.15. <u>Procedimiento para calcular la matriz inversa</u>.

Paso 1.- Formamos la matriz $(A|I) \in M_{nx2n}$ con la matriz $A \in M_{nxn}$ y la matriz identidad $I_n \in M_{nxn}$.

Paso 2.- Utilicise la reducción por filas con el objeto de reducir la matriz A a su forma escalonada por fila reducida.

Paso 3.- Para verificar si A es invertible :

a.- Si (A¦I) se puede reducir a la forma (I¦B), B es la matriz inversa de A .

b.- Si la reducción por filas de (A¦I) lleva a una fila de ceros a la izquierda de la barra vertical, entonces A no es invertible.

La prueba que asegura este hecho y la demostración está fuera del alcance de esta monografía, pero está justificada en el libro " Introducción al Algebra Lineal y a las ecuaciones diferenciales " por Dettman (pág 73-75).

Antes de procedecer a determinar la inversa de una matriz, es necesario crear alguna notación, para la mejor comprensión de lo que se va a desarrollar.

Para abreviar, se escribirá $(F_m) \longleftrightarrow (F_n)$ para indicar que se va a intercambiar las filas de la matriz (F_m) y (F_n), $k(F_m) \longleftrightarrow (F_m)$ para indicar que se ha multiplicado por k la fila (F_m) y $k(F_m) + (F_n) \to (F_n)$ para indicar que se va a sustituir la fila (F_n) por k $(\neg(k=0))$ veces la fila (F_m) más la fila (F_n).

A continuación ilustramos el método .

<u>Ejemplo 2.12</u>. Utilizando la técnica primeramente descrita, determinar la siguiente matriz inversa de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in M_{3x3}$$

Paso 1.-

$$(A|I\ ) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (F_1)+(F_2) \longrightarrow (F_2) \\ -1(F_1)+(F_3) \longrightarrow (F_3) \end{array}$$

Paso 2.-

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}(F_2) \longrightarrow (F_2) \\ -1(F_2)+(F_1) \longrightarrow (F_1) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}(F_3) \longrightarrow (F_3) \\ -1(F_3)+(F_2) \longrightarrow (F_2) \\ (F_3)+(F_1) \longrightarrow (F_1) \end{array}$$

$$(I \,|\, B) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Paso 3 .- Verificación :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+2-\frac{1}{2} & -1+1+0 & \frac{1}{2}-1+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+2-\frac{1}{2} & 1+0+0 & -\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}+2-3(\frac{1}{2}) & -1+1+0 & \frac{1}{2}-1+3(\frac{1}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$$BA = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2} & -1+0+1 & -\frac{1}{2}-1+3(\frac{1}{2}) \\ 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2} & 2+0-1 & 1-\frac{1}{2}+-3(\frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} & -1+0+1 & -\frac{1}{2}+0+3(\frac{1}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

Como $AB = BA = I_n$, B es la matriz inversa de A, es decir A^{-1}.

2.16. Rango de una matriz.

El rango de una matriz es el número de filas linealmente independientes en R^n que tiene una matriz.
Es decir que es el número de filas en la cual existe al menos un a_{ij} tal que $\neg(a_{ij} = 0)$ en la forma escalonada por filas de una matriz.

2.17. Posibilidades de solución de un sistema lineal.

Considere el sistema de ecuaciones AX=b. Debe cumplirse exactamente una de las siguientes tres posibilidades.

1.- Si el rango de la matriz aumentada $(A|b)$ es mayor que el de A el conjunto solución para AX=b es el conjunto vacío, es decir $A_p(x) = \phi$.

2.- El rango de la matriz aumentada $(A|b)$ es igual al de A, que es igual al número de incógnitas entonces el sistema AX=b tiene exactamente una solución, es decir $A_p(x)$ es unitario, esto es :
$A_p(x) = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n)\} \subset R^n$, c_i son constantes reales .

3.- El rango de la matriz aumentada $(A|b)$ es igual al de A, que es estrictamente menor que el número de incógnitas, el conjunto solución del sistema $AX=b$ tiene infinitos elementos, recuérdese que $A_p(x) \subset R^n$.

Ejemplo 2.13

Supongamos que las siguientes son matrices aumentadas de soluciones lineales que están en la forma escalonada por filas:

Cuál tiene solución única ?

$$(a)\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (b)\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Podemos notar en (a) que:

ran $(A|b) = 4$

ran $(A) = 3$

Es la primera posibilidad (sección 2.17 pág #31), por lo tanto el sistema lineal (a) no tiene solución.

Veamos en caso (b):

ran $(A|b) = 4$

ran $(A) = 3$

Número de incógnitas = 3 (columnas)

Es la segunda posibilidad (sección 2.17, pág# 31), por lo tanto el sistema lineal (b) tiene solución única.

Respuesta: el caso (b).

CAPITULO III

METODO GAUSS - JORDAN

3.1.- Método de Gauss.

El método de eliminación de Gauss es un procedimiento para hallar el conjunto solución de un sistema de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas (conjunción de m predicados y n incógnitas). Este método fue desarrollado por el gran matemático alemán Carl Friedrich Gauss.
Las ideas básicas del método ya fueron discutidas en los capítulos anteriores. Sólo falta ponerlas en orden: dado el sistema de ecuaciones lineales, del cual se quieren conocer sus soluciones, escríbase la matriz aumentada asociada al sistema y llévese, por medio de operaciones elementales en sus filas, a la **forma escalonada por filas**. El sistema que representa esta nueva matriz tiene el mismo conjunto solución que el sistema original, es decir son sistemas equivalentes, este sistema equivalente se resuelve por el método de sustitución.

Ejemplo 3.1: Solución de un sistema de **m** ecuaciones con 4 incógnitas: solución única.

Apliquen el método de Gauss al siguiente caso.

$p_1(x)$: $3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$

$p_2(x)$: $x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$

$p_3(x)$: $2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_3 = 5$

$p_4(x)$: $4x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 4$

Representémoslo al sistema primero en la forma matricial AX=b.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Su matriz aumentada (A¦b) es:

$$(A \mid b) = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -4 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \qquad (F_2) \longleftrightarrow (F_1)$$

Llevémoslo a la forma escalonada por filas. Necesitamos $a_{11}=1$, entonces intercambiamos la fila 2 con la fila 1.

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -4 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} -3(F_1)+(F_2)->(F_2) \\ -2(F_1)+(F_3)->(F_3) \\ -4(F_1)+(F_4)->(F_4) \\ \end{array}$$

Conseguimos ceros en las posiciones restantes de la columna debajo de lo logrado.

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 14 & 4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ -3(F_2)+(F_3)->(F_3) \\ \\ \end{array}$$

Ya se tiene $a_{22}=1$ por lo tanto sólo resta hacer ceros debajo de él, para transformarla a la forma escalonada por filas.

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -20 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 14 & 4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ \\ -1/11(F_3)->(F_3) \\ -5(F_3)+(F_4)\longrightarrow(F_4) \end{array}$$

Se necesita $a_{33} = 1$, lo logramos multiplicando la tercera fila por -1/11. Luego hacemos un cero debajo de él.

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 20/11 & -2/11 \\ 0 & 0 & 0 & 54/11 & 54/11 \end{array}\right] \qquad 11/54(F_4)\text{->}(F_4)
$$

Finalmente se necesita $a_{44}=1$, esto lo logramos multiplicando la cuarta fila por 11/54.

Donde $(A'|b')$ es la matriz aumentada de este sistema lineal equivalente.

$$
(A'|b') = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 20/11 & -2/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]
$$

Regresamos ahora a la forma matricial de este sistema equivalente.

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 20/11 \\ 4 & -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2/11 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Que efectuando la multiplicación de matrices y luego realizando la igualdad de matrices nos queda:

$$\begin{aligned} x_1 \quad -x_2 \quad -x_3 \quad - x_4 &= 0 \\ x_2 \quad +5x_3 \quad +10x_4 &= 1 \\ x_3+20/11x_4 &= -2/11 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

La última ecuación nos dice que $x_4 = 1$. Sustituyendo en la tercera ecuación se obtiene:

$$x_3 + 20/11(1) = -2/11$$

lo que nos da el valor de $x_3 = -20/11 - 2/11 \Rightarrow \quad x_3 = -2$

Reemplazando x_3 y x_4 en la segunda ecuación nos queda :

$$x_2 + 5(-2) + 10(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1$$

Por último reemplazamos x_2, x_3, x_4 en la primera ecuación

$$x_1 - (\ 1\ ) - (-2) -3(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$$

Entonces el conjunto solución del sistema es:

$$A_p(x_1,x_2,x_3,x_4) = \{\ (\ 2,\ 1,\ -2,\ 1\ )\ \} \subset R^4$$

El conjunto solución es único y subconjunto R^4.

Si analizamos la matriz aumentada de la forma escalonada por filas, vemos que:

$ran(\ A \mid b) = 4$ y $ran(\ A) = 4$

número de incógnitas = 4

Por lo tanto es la segunda posibilidad (sección 2.17 pág # 31), lo cual reafirma reafirma la solución única.

Cuando un estudiante ha estado acostumbrado a trabajar con sistemas lineales de igual número de ecuaciones e incógnitas ($A \in M_{nxn}$) piensa que siempre tienen solución única.

Vamos a presentar algunos ejemplos donde siendo cuadrada la matriz de coeficientes, el sistema no tiene solución ó tiene infinito número de soluciones.

<u>Ejemplo 3.2</u>

Sistema inconsistente de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

Se quiere resolver el sistema:

$$p_1(x) : \quad x + y + z = 5$$

$$p_2(x) : \quad x - y - z = 3$$

$$p_3(x) : \quad 2x \quad +2z = 7$$

Su forma matricial es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Su matriz aumentada $(A|b)$:

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -1(F_1)+(F_2)\text{->}(F_2) \\ -2(F_1)+(F_3)\text{->}(F_3) \end{array}$$

Reduciéndolo a la forma escalonada por filas. Tenemos $a_{11}=1$, hacemos ceros en las posiciones restantes de la columna debajo del 1.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ -\tfrac{1}{2}(F_2)\to(F_2) \\ 2(F_2)+(F_3)\to(F_3) \end{array}$$

Necesitamos $a_{22}=1$, por lo que multiplicamos la segunda fila por $-\frac{1}{2}$ y hacemos cero debajo de él.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ -\tfrac{1}{2}(F_2)\to(F_2) \\ 2(F_2)+(F_3)\to(F_3) \end{array}$$

Necesitamos $a_{22}=1$, por lo que multiplicamos la segunda fila por $-\frac{1}{2}$ y hacemos cero debajo de él.

$$(A'|b') = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Expresando en forma matricial al sistema lineal equivalente, multiplicando las matrices e igualándolas correctamente, nos quedan las siguientes ecuaciones algebraicas.

$$x + y + z = 5$$
$$y = 1$$
$$0x + 0y + 0z = -1$$

Como esto es imposible, puesto que 0 no puede ser igual a -1 concluimos que no existe solución para el sistema de ecuaciones lineales. Es decir que el conjunto solución del sistema es el conjunto vacío ϕ.

$$A_p(x,y,z) = \phi \subset R^3.$$

Si analizamos el sistema lineal por medio del rango de la matriz aumentada tenemos:

ran (A ¦ b) = 3

ran (A) = 2

el rango de la matriz aumentada es mayor que el de A (sección 2.17, pág#31) por lo tanto no existe solución para el sistema lineal.

Ejemplo 3.3: <u>Solución de un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas: número infinito de soluciones</u>.

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

$$p_1(r,s,t): \quad r + s + t = 6$$
$$p_2(r,s,t): \quad r + s - t = 4$$
$$p_3(r,s,t): \quad 4r + 4s = 20$$

Su forma matricial es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Su matriz aumentada es:

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 20 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -1(F_1)+(F_2)\to(F_2) \\ -4(F_1)+(F_3)\to(F_3) \end{array}$$

Llevándola a la forma escalonada por filas tenemos $a_{11}=1$ haciendo ceros en las posiciones restantes de la columna debajo del 1.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\tfrac{1}{2}(F_2) \to (F_2) \\ 4(F_2)+(F_3)\to(F_3) \end{array}$$

Necesitamos $a_{22}=1$, por lo que multiplicamos la segunda fila por $-\frac{1}{2}$ y hacemos cero debajo de él.

$$(A'|b') = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Haciendo las operaciones sobre matrices, nos queda las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$r + s + t = 6$$
$$t = 1$$
$$0 = 0$$

NOTA : Este $0 = 0$ significa $0r+0s+0t = 0$, lo cual es siempre verdadero.

Sustituyendo el valor de t en la primera ecuación nos queda:

$$r + s + 1 = 6 \quad \Rightarrow \quad r = 5 - s$$

El conjunto solución del sistema es:

$$A_P(r,s,t) = \{ (r,s,t) / \ r=4-s,\ t=1,\ s \in R \} \subset R^3$$

$A_P(r,s,t)$ tiene una variable libre, s .

Cabe recalcar que el conjunto solución es subconjunto de R^3.

Ahora analicémoslo por medio del rango de la matriz:

ran (A¦b) = 2

ran (A) = 2, número de incógnitas = 3

Es la tercera posibilidad, es decir que tiene un número infinito de soluciones, lo cual es coherente con el conjunto solución obtenido.

3.2. Método de Gauss – Jordan.

Existe una modificación del método "gaussiano" llamado método de eliminación de Gauss-Jordan que evita resolver al último el sistema equivalente por el método de sustitución. La matriz aumentada hay que llevarlo, por medio de operaciones básicas sobre fila, a la **forma escalonada por filas reducida.**

Esta modificación fue sugerida por el ingeniero alemán, Wilhelm Jordan.
Su modificación estriba en que el método de Gauss, el sistema equivalente proviene de una matriz aumentada de la **forma escalonada por filas** y en el de Gauss Jordan proviene de una matriz aumentada de la **forma escalonada por filas reducida.**

Ejemplo 3.4 : Solución de un sistema de 3 ecuaciones con 5 incógnitas que tiene infinitas soluciones.
Calcular todas las soluciones posibles por el método Gauss-Jordan del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$p_1(x)$: $x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 + 2x_5 = -3$

$p_2(x)$: $x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 1$

$p_3(x)$: $x_1 = 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 9$

En este caso $n > m$, por lo tanto hay por lo menos $(n-m)$ variables libres es decir $5-3=2$ variables libres si el sistema lineal tiene solución.

La matriz aumentada del sistema es:

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right] \quad -2(F_1)+(F_3)\to(F_3)$$

Si sumamos (-2) veces la primera fila a la tercera obtenemos:

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 14 & 4 & -5 & 15 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 7(F_2)+(F_3)\to(F_3) \\ -2(F_2)+(F_1)\to(F_3) \end{array}$$

Ahora sumamos 7 veces la segunda fila a la tercera y (-2) veces la segunda a la primera para obtener.

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 10 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -33 & 22 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 1/11(F_3) \to (F_3) \\ -1(F_3)+(F_2) \to (F_2) \\ 3(F_3)+(F_1) \to (F_1) \end{array}$$

Finalmente podemos multiplicar la última fila por 1/11 y hacer ceros en las posiciones restantes de la columna sobre este uno.

$$(A'|b') = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

Esto es todo lo que se puede reducir y nos lleva a todas las soluciones del sistema original.

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_5 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 - x_5 &= -1 \\ x_4 - 3x_5 &= 2 \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + x_3 - x_5 \\ x_2 &= -1 + 2x_3 + x_5 \\ x_4 &= 2 + 3x_5 \end{aligned}$$

Por lo tanto el conjunto solución del sistema es :

$A_p(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \{ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \ / \ x_1 = 1+x_3-x_5,$ $x_2 = -1+2x_3+x_5,\ x_4 = 2 + 3x_5 \ ;\ x_3$ y $x_5 \in R \} \subset R^5$.

$A_p(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ tiene 2 variables libres, x_3 y x_5.

En este caso el conjunto solución es subconjunto de R^5.

Si analizamos el sistema lineal por medio del rango de la matriz tenemos ran (A¦b) = 3.

ran (A) = 3, número de incógnitas = 5.

Por lo tanto el sistema tiene infinitas soluciones. Posibilidad 2 (sección 2.17, pág 31).

Estos ejemplos muestran que en general, no es posible determinar si el sistema lineal tiene una, ninguna, o infinitas soluciones en R^n, sólo a partir de los números de las ecuaciones o incógnitas. Puede suceder por ejemplo que un sistema dos ecuàciones con 10 incógnitas sea inconsistente, mientras que 2 ecuaciones con 2 incógnitas tengan solución única. El rango de la matriz nos da la cantidad de las soluciones y el método de eliminación de Gauss-Jordan nos dice cuales son todas estas soluciones.

NOTA : Si el sistema es nxm y es hommogéneo, siempre tiene por lo menos la solución trivial.

(Sección 1.7,pág#6)

Ejemplo 3.5.

Sistema homogéneo que sólo tiene la solución cero.

Resuelva el sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 0 \\ 4x + 5x + 6z &= 0 \\ 3x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Escribamos la matriz aumentada del sistema.

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \tfrac{1}{2}(F_1) \to (F_1) \\ -4(F_1)+(F_2) \to (F_2) \\ -3(F_1)+(F_3) \to (F_3) \end{array}$$

Multiplicando por $(\frac{1}{2})$ la primera fila obtenemos $a_{11} = 1$ ya podemos hacer ceros en las posiciones restantes de la columna del 1.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} -1/3(F_2) \to (F_2) \\ 5(F_2)+(F_3) \to (F_3) \\ -2(F_2)+(F_1) \to (F_1) \end{array}$$

Multiplicando por -1/3 la segunda fila y haciendo cero en las posiciones restantes de la columna tenemos:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} -1\ (F_3) \to (F_3) \\ -2(F_3)+(F_2) \to (F_2) \\ -1(F_3)+(F_1) \to (F_1) \end{array}$$

Multiplicando por (-1) (cambiando de signo) y haciendo ceros las posiciones restantes de la columna tenemos:

$$(A'|b') = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Lo que nos lleva a el siguiente sistema equivalente al original :

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

Por tanto el sistema tiene solución única (0,0,0). Es decir el sistema sólo tiene la solución trivial.

$$A_p(x,y,z) = \{(0,0,0)\} \subset R^3$$

El siguiente tipo de ecuaciones es importante para el estudio de una importante estructura algebraica denominada espacio vectorial.

Ejemplo 3.6 : Sistema homogéneo con un número infinito de soluciones.

Resuelva el siguiente sistema homogéneo:

$p_1(p,q,r)$: $p + q - r = 0$

$p_2(p,q,r)$: $p \quad + r = 0$

$p_3(p,q,r)$: $q - 2r = 0$

Escribamos la matriz aumentada del sistema:

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \qquad -1(F_1)+(F_2)\text{->}(F_2)$$

Hacemos ceros debajo del 1 de la primera columna :

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} (F_3)\text{<->}(F_2) \\ (F_2)+(F_3)\text{->}(F_3) \\ -1(F_2)+(F_1)\text{->}(F_1) \end{array}$$

Como queremos $a_{22}=1$, intercambiamos la fila con la 3, y hacemos ceros las demás posiciones de la columna 2.

$$(A'|b') = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ya está la matriz aumentada en la forma escalonada por filas reducida, el sistema de ecuaciones queda así:

$$p + r = 0 \Rightarrow p = -r$$

$$q - 2r = 0 \Rightarrow q = 2r$$

$$0 = 0$$

Por lo tanto el conjunto solución es :

$A_p(p,q,r) = \{ (p,q,r) / p=-r,\ q=2r,\ r \in R \} \subset R^3$.

$A_p(p,q,r)$ tiene una variable libre, r.

Analicemos el sistema lineal por medio del rango de la matriz:

ran $(A|b) = 2$

ran $(A) = 2$

Número de ecuaciones = 3

por lo que tiene infinitas soluciones, posibilidad 3 (sección 2.17, pág#31).

__Ejemplo 3.7.__

Solución de un sistema consistente de 5 ecuaciones con dos incógnitas.

Resuelva el sistema:

$$p_1(x) : \quad x_1 + x_2 = 3$$

$$p_2(x) : \quad x_1 - 2x_2 = 0$$

$$p_3(x) : \quad 2x_1 - x_2 = 0$$

$$p_4(x) : \quad 2x_1 + 2x_2 = 6$$

$$p_5(x) : \quad 3x_1 - 6x_2 = 0$$

Haciendo las operaciones correspondientes tenemos:

$$(A|b) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -1(F_1)+(F_2)\to(F_2) \\ -2(F_1)+(F_3)\to(F_3) \\ -2(F_1)+(F_4)\to(F_4) \\ -3(F_1)+(F_5)\to(F_5) \\ \end{array}$$

Hacemos ceros debajo de $a_{11}=1$, para que esté en la forma escalonada por filas.

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -1/3(F_2)\to(F_2) \\ -1(F_2)+(F_1)\to(F_1) \\ 3(F_2)+(F_3)\to(F_3) \\ 9(F_2)+(F_5)\to(F_5) \end{array}$$

Hacemos $a_{22}=1$ y ceros a las demás posiciones de la columna 2.

$$(A'|b') = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Llevándola al sistema de ecuaciones lineales equivalentes queda:

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 1$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Por lo tanto el sistema tiene solución única :

$$A_p = \{(2,1)\} \subset R^2$$

Ejemplo 3.8.

Sistema de 5 incógnitas y 2 ecuaciones lineales sin solución.

$$p_1(x) : \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5$$
$$p_2(x) : \quad 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 9$$

Aquí hay por lo menos 3 variables libres, si el sistema tiene solución.

La matriz aumentada del sistema es:

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & 9 \end{array}\right] \quad -2(F_1)+(F_2)\to(F_2)$$

tenemos $a_{11} = 1$, por lo tanto hacemos debajo del 1.

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \quad -2(F_1)+(F_2) \to (F_2)$$

es todo lo que se puede hacer, ahora analicemos al sistema equivalente:

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -1$$

Como esto es imposible, pues 0 no puede ser igual a -1, por lo tanto el sistema no tiene solución. ($A_p(x) = \phi$).

Este método es poderoso pues en su estructura no hay ambigüedades que sutilmente se pueden cometer en los métodos tradicionales (de igualación, de comparación y de reducción) para llevarnos a un error.

Veamos pues un ejemplo.

__Ejemplo 3.9.__

Solución de un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas (comparación del método de reducción y de Gauss-Jordan).

$p_1(x,y)$: $5x - 2y = 1$

$p_2(x,y)$: $-x + 2y = 2$

$p_3(x,y)$: $4x + 2y = 9$

Por otro método tenemos que si aplicamos libremente la "estrategia de eliminar incógnitas".

Sumando la segunda y la tercera se tiene: $3x + 4y = 11$ que junto con la primera de ellas $5x - 2y = 1$, produce (dígase que se multiplica por 2 esta última y se suma con $3x+4y=11$ eliminando así a **y**) por "solución" $x=1$, $y=2$.

Si se verifica esta "solución" del sistema de las ecuaciones, se ve que, a excepción de la primera de ellas, para la cual se tiene $5(1)-2(2) = 1$, en las dos restantes estos valores de **x** y **y** no conducen a la igualdad (se tiene $-12(2)\neq 2$, $4(1)+2(2)\neq 9$), y por lo tanto, lo que se obtuvo no son elementos de $A_P(x)$.

Podíamos también haber sumado la primera y la segunda ecuación y nos queda $4x=3$, es decir $x=3/4$, que reemplazando en la ecuación tercera $4(3/4)+2y = 9$, es decir $y=3$.

Si se verifica esta "seudo solución" del sistema de ecuaciones sólo se cumple para la tercera ecuación.

La pregunta ahora es : Cuál entonces es el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales?.

Podemos darnos cuenta que estos métodos sólo sirven para determinados sistemas de ecuaciones, para los que tienen solución única. Pero sabemos que algunos sistemas no tiene solución y muchos otros tienen un infinito número de soluciones. Esto limita mucho estos métodos.

Resolvámoslo ahora por el método de eliminación de Gauss-Jordan.

$$(A|b) = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 9 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} -1(F_2) \dashrightarrow (F_2) \\ (F_2) \dashrightarrow (F_1) \end{array}$$

Cambiemos de signo la fila 2 (multiplicando por -1) e intercambiemos la fila 2 con la 1.

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 9 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} -5(F_1)+(F_2) \dashrightarrow (F_2) \\ -4(F_1)+(F_3) \dashrightarrow (F_3) \end{array}$$

Hacemos ahora ceros la columna debajo del 1.

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 8 & 11 \\ 0 & 10 & 17 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} 1/8(F_2) \dashrightarrow (F_2) \\ -10(F_2)+(F_3) \dashrightarrow (F_3) \\ 2(F_2)+(F_1) \dashrightarrow (F_1) \end{array}$$

Multiplicamos la segunda fila por 1/8 para hacer $a_{22}=1$ y hagamos ceros las demás posiciones de la columna del 1.

$$(A'|b') = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 11/8 \\ 0 & 0 & 13/4 \end{array}\right]$$

Llevando a un sistema de ecuaciones equivalentes queda:

$$x = 3/4$$

$$y = 11/8$$

$$0 = 13/4$$

Lo cual es imposible pues 0 no es igual a 13/4, por lo tanto este sistema de ecuaciones lineales **no tiene solución**, es decir :

$$A_P(x,y) = \emptyset \subset R^2$$

Esta respuesta nos deja un sabor de que para este tipo de sistemas de ecuaciones lineales no va haber solución, lo cual no es cierto, pues vamos a dar 2 ejemplos, el primero de solución única y el otro de infinito número de soluciones.

<u>Ejemplo 3.10.</u>

Solución de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas : solución única.

$$x + y = 2$$

$$x - y = 0$$

$$2x + 2y = 4$$

Haciendo las operaciones correspondientes tenemos:

$$(A|b) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} -1(F_1)+(F_2) \rightarrow (F_2) \\ -2(F_1)+(F_3) \rightarrow (F_3) \end{array}$$

Hagamos ceros debajo de la columna del $a_{11} = 1$.

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} -\frac{1}{2}(F_2) \to (F_2) \\ -1(F_2)+(F_1) \to (F_1) \end{array}$$

Multipliquemos la segunda fila por $-\frac{1}{2}$ para hacer $a_{22}=1$ y hagamos cero sobre su columna.

$$(A'|b') = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Llevándolo a un sistema equivalente queda:

$$x = 1$$
$$y = 1$$
$$0 = 0$$

Por lo tanto la solución es única y el conjunto solución es:

$$A_p(x_1,x_2) = \{(1,1)\} \subset R^2$$

<u>Ejemplo 3.11</u>.

Solución de un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas: que tiene infinitas soluciones.

$$x + y = 1$$
$$2x + 2y = 2$$
$$3x + 3y = 3$$

Su matriz aumentada es :

$$(A|b) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \\ -2(F_1)+(F_2) \to (F_2) \\ -3(F_1)+(F_3) \to (F_3) \end{array}$$

Hagamos ceros debajo de la columna $a_{11}=1$

$$(A'|b') = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Llevándolo a un sistema equivalente queda:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

El conjunto solución puede ser escrito de las dos maneras siguientes:

$$A_p(x,y) = \{ (x,y)/ \ x= 1-y \ , \ y \in R \} \subset R^2 \text{ ó}$$

$$A_p(x,y) = \{ (x,y)/ \ y= 1-x \ , \ x \in R \} \subset R^2$$

En el primero poniendo a **x** como variable libre y en el segundo a **y**.

Podemos decir que el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales tiene un número infinito de soluciones.

Otro método interesante para encontrar $A_p(x)$ con el algebra de matrices para un sistema de n ecuaciones lineales y n incógnitas representado en forma matricial $AX=b$, donde $A \in M_{nxn}$ este método se aplica si A^{-1} existe. En este caso la solución siempre es única.

Veamos que sucede si multiplicamos por la izquierda a la matriz inversa de A.

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}b$$

Por propiedades de matrices sabemos que la multiplicación es asociativa, por lo tanto se cumple que : $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ y que $IC=C$, entonces :

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}b$$

$$IX = A^{-1}b$$

$$X = A^{-1}b$$

Por lo tanto otra manera de resolver un sistema de ecuaciones lineales es multiplicando la matriz inversa de la matriz de coeficientes por la matriz de términos independientes, siempre y cuando la matriz de coeficientes sea invertible.

Esta manera de resolver sistemas de ecuaciones es muy larga, pero veamos un ejemplo sólo por ilustración.

Ejemplo 3.12.

Solución de un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas : solución única (usando la matriz inversa).

$p_1(x,y,z)$: $x + 2y + z = 0$

$p_1(x,y,z)$: $-x + z = 2$

$p_1(x,y,z)$: $x + 2y + 3z = 2$

Sabemos que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad y \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La matriz de coeficientes A es la misma matriz que en el **Ejemplo 2.12 (pág# 29)** se le halló matriz inversa A^{-1} y es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Esto nos facilita enormemente este ejercicio, sabiendo que matricialmente $X = A^{-1}b$, procedemos a multiplicar las matrices A^{-1} y b.

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -2 & +1 \\ 0 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \quad ==> \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el conjunto solución es:

$$A_p(x,y,z)' = \{(-1,0,1)\} \subset R^4$$

es decir $x=-1$, $y=0$ y $z=1$.

Queremos tratar el último punto que nos falta por ver y es el de las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales.

3.3. Aplicaciones del sistema de ecuaciones lineales.

En los tiempos actuales, muchos problemas que surgen en la ingeniería, economía, biología, química, etc..., conducen a sistemas de ecuaciones lineales con gran número de incógnitas, tanto así que no es posible al hombre realizarlas sin la ayuda de un computador. Debemos tener presente que un 70% de los problemas se los puede representar como modelos matemáticos lineales.

Ejemplo 3.13

La suma de las medidas de los tres ángulos internos de un triángulo es 180°. La suma de el de mayor medida y el intermedio es 135°, y la suma del intermedio y el menor es de 110°. Determine la medida de 3 ángulos interiores al triángulo.

Sean :

x_1 = Medida del ángulo mayor.

x_2 = Medida del ángulo intermedio.

x_3 = Medida del ángulo menor.

Según las condiciones de problema, tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 180 \\ x_1 + x_2 &= 135 \\ x_2 + x_3 &= 110 \end{aligned}$$

Haciendo las operaciones correspondientes tenemos :

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 1 & 1 & 0 & 135 \\ 0 & 1 & 1 & 110 \end{array}\right] \qquad -1(F_1) + (F_2) \rightarrow (F_2)$$

Conseguimos ceros debajo de la columna de $a_{11}=1$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 0 & -1 & -45 \\ 0 & 1 & 1 & 110 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (F_3) \to (F_3) \\ -1(F_2)+(F_1) \to (F_1) \end{array}$$

Intercambiamos la segunda y tercera columna y hacemos cero la posición sobre la columna de $a_{22}=1$.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 0 & -1 & -45 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} -1(F_3) \to (F_3) \\ -1(F_3)+(F_2) \to (F_2) \end{array}$$

Cambiamos de signo la tercera fila (multiplicamos por -1) y hacemos cero la posición sobre la columna de $a_{33}=1$.

$$(A'|b') = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 1 & 0 & 65 \\ 0 & 0 & 1 & 45 \end{array}\right]$$

Llevándolo al sistema equivalente nos queda:

$$x_1 = 70°, \quad x_2 = 65° \quad y \quad x_3 = 45°.$$

La solución única (subconjunto de R^3) es :

$$A_P(x_1,x_2,x_3) = \{ (70, 65, 45) \} \subset R^3$$

Ejemplo 3.14.

La cifra de las centenas de un número de 3 cifras es 3/5 de las cifras de las unidades, y la cifra de las decenas es la mitad de la suma de las otras dos. Encontrar este número (de tres cifras), sabiendo que agregándole 198 se obtiene el número pero invertido el orden de las cifras.

Sean:

c = la cifra de las centenas.

d = la cifra de las decenas.

u = la cifra de las unidades.

Según las condiciones del problema tenemos el siguiente sistemas de ecuaciones lineales :

$$c = (3/5)u$$

$$d = \tfrac{1}{2}(c+u)$$

$$100c + 10d + u + 198 = 100u + 10d + c$$

Haciendo las operaciones correspondientes tenemos:

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 99 & 0 & -99 & -198 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \\ (F_2) \to (F_1) \\ 1/99(F_3) \to (F_3) \end{array}$$

Intercambiamos la fila 2 con la 3 para hacer $a_{11}=1$ y multiplicamos la fila 3 por 1/99.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ -5(F_1)+(F_2)\rightarrow(F_2) \\ -1(F_1)+(F_3)\rightarrow(F_3) \end{array}$$

Ahora hacemos ceros debajo de la columna de $a_{11}=1$.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ \frac{1}{2}(F_3) \rightarrow (F_3) \\ (F_3)\rightarrow(F_2) \end{array}$$

Multiplicamos por -1 la fila 3 (cambiamos de signo) e intercambiamos con la fila 2.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & -8 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 2(F_2)+(F_1)\rightarrow(F_1) \\ -10(F_2)+(F_3)\rightarrow(F_3) \\ \\ \end{array}$$

Hacemos cero las demás posiciones de $a_{22}=1$.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}(F_3) \rightarrow (F_3) \\ (F_3)+(F_2)\rightarrow(F_2) \\ (F_3)+(F_1)\rightarrow(F_1) \end{array}$$

Multiplicamos por ½ la tercera fila para tener $a_{33}=1$ hacemos cero las demás posiciones de su columna.

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

En el sistema equivalente nos queda:

$$c = 3$$

$$d = 4$$

$$u = 5$$

El conjunto solución es :

$$A_p(c,d,u) = \{(3,4,5)\} \subset R^3$$

Luego, la respuesta a la pregunta es:

El número de tres cifras es 345.

3.4. CONCLUSIONES.

Si en la prueba de diagnóstico aplicada el 13 de febrero de 1994 a los aspirantes a ingresar a la ESPOL, ni un alumno empleó el método de Gauss o Gauss Jordan, no es de extrañarnos que un gran número de estudiantes del ciclo diversificado identifiquen como sistema de ecuaciones lineales sólo aquellos sistemas lineales cuyo número de ecuaciones es igual al de incógnitas y que tienen solución única. Cómo no ha de suceder esto si tras la definición de lo que es un sistema de ecuaciones lineales la inmensa mayoría de los ejemplos con que se ilustra esta definición son de este tipo, porque utilizamos étodos que sólo resuelven este tipo de sistemas ineales.

a presente monografía la realicé con el objeto de que anto las definiciones de **sistemas de ecuaciones lineales matrices**, como las imagenes que proyectan las lustraciones propuestas den la idea correcta al lector.

i revisamos cualquier libro de **Algebra Lineal**, se notará ue es muy necesario el dominio completo del conjunto olución de sistemas lineales utilizando el algebra de atrices, la intención de este trabajo sencillo pero muy til es de que si se lee esta monografía, al término de a misma seguro es que podrá resolver cualquier sistema ineal por el **método de Gauss Jordan** sin problema , eniendo la definición y la imagen proyectada por la isma un mismo sentido que es como debe ser.

espués de cinco borradores de monografía corregidas por l director, teniendo siempre presente relacionar el lgebra lineal y la lógica matemática, definir orrectamente, ilustraciones claras, etc. Creo que se an cumplido los objetivos propuestos por el director y l autor.

B I B L I O G R A F I A

1.-ANTON, H. (1986) **Introducción al Algebra Lineal.**
Editorial Limusa S.A. México D.F.

2.-BRUÑO, G.(1969) **Algebra Curso Superior.**
Editorial Bruño. Madrid.

3.-DETTMAN, J.(1975) **Introducción al Algebra Lineal y a las Ecuaciones diferenciales.**
Editorial McGraw-Hill. México D.F.

4.-GUERBER,H.(1990) **Algebra Lineal.**
Grupo Editorial Iberoamérica S.A.
México D.F.

5.-GROSSMANN,S.(1991)**Algebra Lineal con aplicaciones.**
Editorial McCraw-Hill de México S.A.

6.-HERSTEIN I.N.(1988) **Algebra Lineal y teoría de matrices.**
Grupo Editorial Iberoamérica S.A.
México D.F.

7.-NOBLE B. y DANIEL J. **Algebra Lineal Aplicada.**(1989)
Prentice-Hall Hipanoamerica, S.A.
México.

8.-PITA C.(1991) **Algebra Lineal.**
McGraw-Hill/Interamericana de
México.

9.-PROTTER-MORREY (1969) **Anális Matemático Moderno.**
Fondo Educativo Interamericano. Perú.