FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2019	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Baquerizo G., Brito W., Chóez M., Cifuentes C., Córdova N., Crow P., Díaz R., García E., Mejía M., Ramos M., Ramos P., Ronquillo C., Toledo X.
EVALUACIÓN:	TERCERA	**FECHA:**	09/septiembre/2019

1. (10 PUNTOS) Calcule:

$$\int_0^2 e^{-|x-1|}\,dx$$

Solución:

Se aplica la definición del valor absoluto:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1\,, & x \geq 1 \\ -(x-1)\,, & x < 1 \end{cases}$$

Se aplica la propiedad aditiva:

$$\int_0^2 e^{-|x-1|}\,dx = \int_0^1 e^{x-1}dx + \int_1^2 e^{-(x-1)}dx$$

Se utiliza la técnica de sustitución, tomando en consideración los siguientes cambios de variable:

$$\begin{array}{ccc|ccc} & u = x-1 & & & v = -(x-1) & \\ & du = dx & & & dv = -dx & \\ x \to 0 & \Rightarrow & u \to -1 & x \to 1 & \Rightarrow & v \to 0 \\ x \to 1 & \Rightarrow & u \to 0 & x \to 2 & \Rightarrow & v \to -1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^{-|x-1|}\,dx &= \int_{-1}^0 e^u du - \int_0^{-1} e^v dv \\ &= e^u \Big|_{-1}^{0} - e^v \Big|_{0}^{-1} \\ &= (1-e^{-1}) - (e^{-1}-1) \\ &= 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 \\ &= 2 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore \int_0^2 e^{-|x-1|}\,dx = 2\left(1-\frac{1}{e}\right)}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe la técnica de integración por sustitución y cómo aplicar la propiedad aditiva de la integral definida.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No realiza proceso alguno.	Aplica correctamente la propiedad aditiva para antiderivar descomponiendo previamente el valor absoluto, reconoce que debe utilizar la técnica de integración por sustitución, pero no integra correctamente término alguno.	Aplica correctamente la propiedad aditiva para antiderivar descomponiendo previamente el valor absoluto, reconoce que debe utilizar la técnica de integración por sustitución, pero sólo integra correctamente uno de los términos.	Aplica correctamente la propiedad aditiva para antiderivar descomponiendo el valor absoluto, reconoce que debe utilizar la técnica de integración por sustitución, integra correctamente los dos términos y presenta la respuesta en forma simplificada.
	0	**1 – 4**	**5 – 8**	**9 – 10**

2. **(10 PUNTOS) De ser posible, calcule:**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(x)}{\sqrt{1-sen(x)}}\, dx$$

y concluya si la integral impropia es CONVERGENTE o DIVERGENTE.

Solución:

Al tratarse de una integral impropia:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(x)}{\sqrt{1-sen(x)}}\, dx = \lim_{b \to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^{b} \frac{cos(x)}{\sqrt{1-sen(x)}}\, dx$$

Se resolverá la integral indefinida:

$$\int \frac{cos(x)}{\sqrt{1-sen(x)}}\, dx$$

Aplicando la técnica de sustitución:

$$u = 1 - sen(x) \quad \Rightarrow \quad du = -\cos(x)\, dx$$

$$\int \frac{cos(x)}{\sqrt{1-sen(x)}}dx = \int \frac{-du}{\sqrt{u}} = -\int u^{-\frac{1}{2}}du = -\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -2u^{\frac{1}{2}} + C = -2\sqrt{u} + C$$

$$\int \frac{cos(x)}{\sqrt{1-sen(x)}}dx = -2\sqrt{1-sen(x)} + C \ ; \ C \in \mathbb{R}$$

Por lo que:

$$\lim_{b \to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^b \frac{cos(x)}{\sqrt{1-sen(x)}}dx = \lim_{b \to \frac{\pi}{2}^-} \left(-2\sqrt{1-sen(x)}\right)\Big|_0^b = -2 \lim_{b \to \frac{\pi}{2}^-} \left[\sqrt{1-sen(b)} - \sqrt{1}\right]$$

$$= -2(0-1)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(x)}{\sqrt{1-sen(x)}} \ dx = 2$$

$\therefore$ La integral impropia es CONVERGENTE.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante conoce sobre integrales impropias y su tratamiento con límites, así como sabe la derivada de una función trigonométrica.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No reconoce que es integral impropia o tiene problemas para seleccionar la técnica de integración apropiada.	**Reconoce que es integral impropia y aplica límites, pero no obtiene bien la familia de antiderivadas.**	**Reconoce que es integral impropia y aplica límites, obtiene correctamente la familia de antiderivadas; pero, o se equivoca en la evaluación o no concluye.**	**Reconoce que es integral impropia y aplica límites, obtiene correctamente la familia de antiderivadas, evalúa y concluye bien.**
	0	**1 – 4**	**5 – 8**	**9 – 10**

3. (10 PUNTOS) Un tubo cilíndrico tiene 8 $[cm]$ de altura, si el radio cambia de 2 $[cm]$ a 2.05 $[cm]$. Determine el CAMBIO aproximado correspondiente al volumen del cilindro y calcule el ERROR PORCENTUAL en la medición del volumen.

Solución:

El volumen V de un cilindro a partir de la longitud de su radio r y la longitud h de su altura es: $V = \pi r^2 h$

La diferencial de volumen dV a partir de la diferencial de la longitud de su radio dr es: $dV = 2\pi rhdr$

En donde:

$$r = 2\ [cm]$$
$$h = 8\ [cm]$$
$$dr = 0.05\ [cm]$$

Por lo que:

$$V = \pi(2)^2(8)$$
$$V = 32\pi\ [cm^3]$$

$$dV = 2\pi(2)(8)(0.05)$$
$$dV = 1.6\pi\ [cm^3]$$

El cambio en el volumen es $(32\pi \pm 1.6\pi)\ [cm^3]$

El error porcentual E se calcula así:

$$E = \frac{1.6\cancel{\pi}}{32\cancel{\pi}} \times 100\ \% = \frac{\overbrace{\cancel{16}}^{1}}{(\cancel{10})\underbrace{(\cancel{32})}_{2}} \times 10\cancel{0}\ \%$$

$$\boxed{E = 5\ \%}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante conoce sobre la estimación del error absoluto y el error relativo en una medición.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No realiza proceso alguno o deriva mal la expresión de volumen.	**Deriva bien la expresión de volumen y reemplaza los valores dados pero no simplifica bien.**	**Deriva bien la expresión de volumen, reemplaza los valores dados y simplifica bien, pero no determina el error porcentual.**	**Deriva bien la expresión de volumen, reemplaza los valores dados, simplifica bien y determina correctamente el error porcentual.**
	0	**1 – 4**	**5 – 8**	**9 – 10**

4. (20 PUNTOS) Dada la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que:

$$\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - x^3}$$

(a) (10 PUNTOS) Realizando un análisis de cálculo diferencial, BOSQUEJE LA GRÁFICA de la función f, identificando puntos críticos y de inflexión, intervalos de monotonía y de concavidad.

Solución:

Se obtiene la primera derivada:

$$f'(x) = 4x - 3x^2$$

Respecto a los PUNTOS CRÍTICOS:

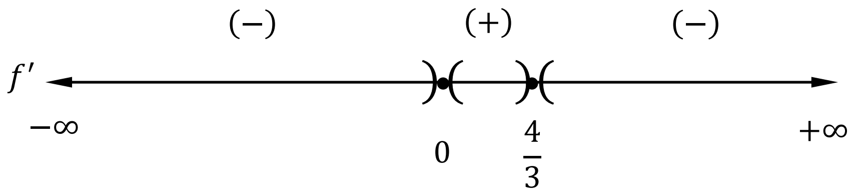
- Puntos de FRONTERA no tiene.
- Puntos SINGULARES no tiene.
- Puntos ESTACIONARIOS:

$$4x - 3x^2 = 0$$
$$x(4 - 3x) = 0$$
$$(x = 0) \vee (4 - 3x = 0)$$
$$(x = 0) \vee \left(x = \frac{4}{3}\right)$$

$$f(0) = 2x^2 - x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad P(0, 0) \in f$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{32}{9} - \frac{64}{27} = \frac{32}{27} \quad \Rightarrow \quad Q\left(\frac{4}{3}, \frac{32}{27}\right) \in f$$

Respecto a la MONOTONÍA de la función:



$$f \ es \ estrictamente \ decreciente \ en \ (-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right).$$

$$f \ es \ estrictamente \ creciente \ en \left(0, \frac{4}{3}\right).$$

Con base en la monotonía de la función, se puede concluir que:

P es un mínimo local.

Q es un máximo local.

Se obtiene la segunda derivada:

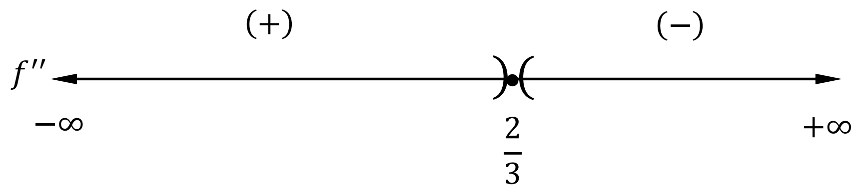
$$f''(x) = 4 - 6x$$

Respecto al PUNTO DE INFLEXIÓN:

$$4 - 6x = 0$$
$$x = \frac{2}{3}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{9} - \frac{8}{27} = \frac{16}{27} \qquad \Rightarrow \qquad R\left(\frac{2}{3}, \frac{16}{27}\right) \in f$$

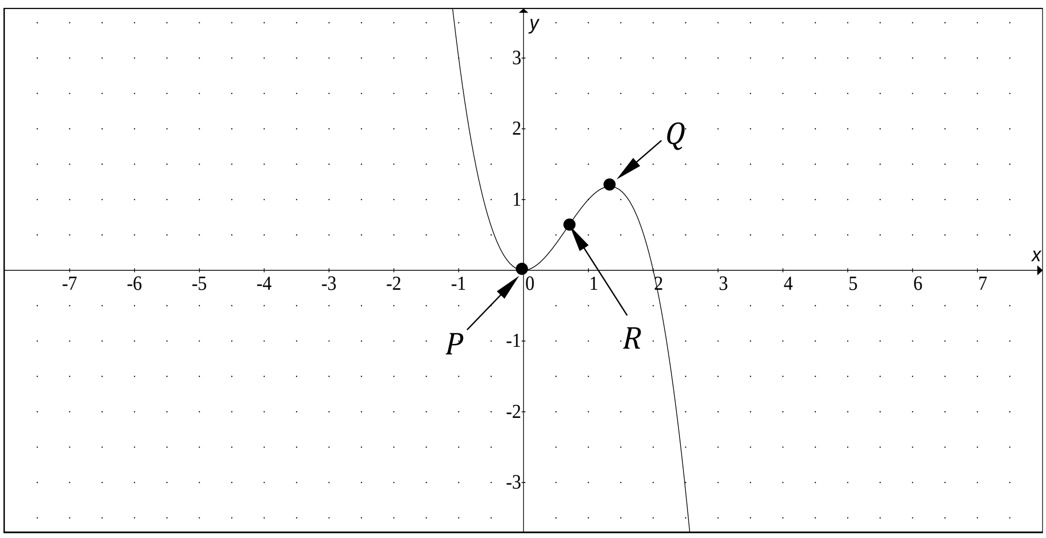
Respecto a la CONCAVIDAD de la función:



$$f \text{ es cóncava hacia arriba en } \left(-\infty, \frac{2}{3}\right).$$

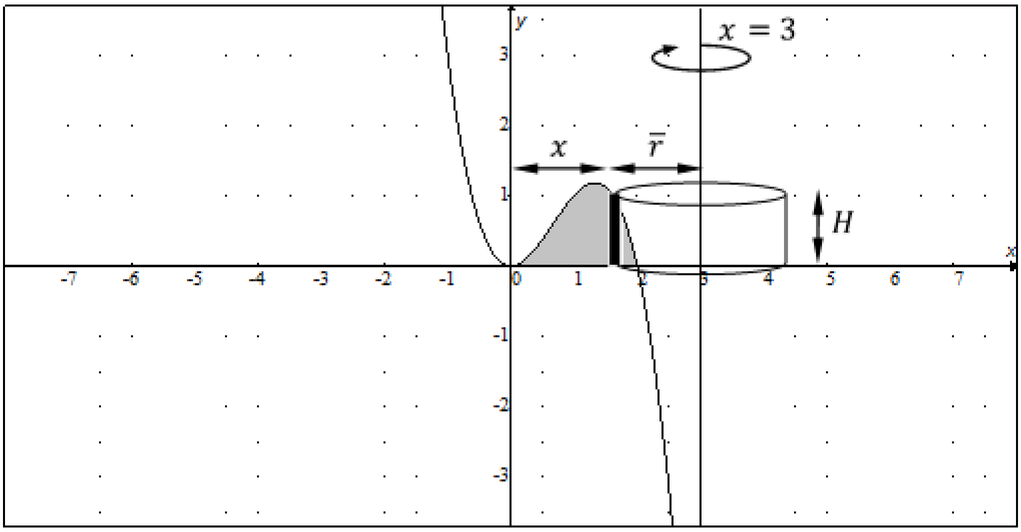
$$f \text{ es cóncava hacia abajo en } \left(\frac{2}{3}, +\infty\right).$$

La gráfica de la función f es:



(b) (10 PUNTOS) Calcule el VOLUMEN del sólido de revolución que se genera al rotar alrededor del eje $x = 3$ la región acotada por la función f en el primer cuadrante.

A continuación, se mostrará la región especificada en el problema. Para el cálculo del volumen V se utilizará el MÉTODO DE LAS CAPAS CILÍNDRICAS:



$$dV = 2\pi \bar{r} H dr$$
$$dV = 2\pi(3 - x)(2x^2 - x^3)dx$$

$$V = 2\pi \int_0^2 (6x^2 - 5x^3 + x^4)\, dx$$
$$= 2\pi \left[2x^3 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]\Big|_0^2$$
$$= 2\pi \left[16 - 20 + \frac{32}{5}\right]$$
$$= 2\pi \left(\frac{32}{5} - 4\right)$$
$$= 2\pi \left(\frac{32}{5} - \frac{20}{5}\right)$$
$$= 2\pi \left(\frac{12}{5}\right)$$
$$\boxed{V = \frac{24\pi}{5}\ \ [u^3]}$$

Rúbrica del literal a):

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe derivar una función polinomial para determinar sus posibles puntos críticos, sus intervalos de monotonía, sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No sabe que debe derivar o no deriva bien.	Deriva bien y plantea las ecuaciones para los posibles puntos estacionarios e indica que no hay puntos singulares o de frontera; así como plantea las inecuaciones para los intervalos de monotonía, pero determina incorrectamente su solución.	Deriva bien y determina los puntos estacionarios e indica que no hay puntos singulares o de frontera; así como concluye sobre los intervalos de monotonía; deriva bien por segunda vez, pero, o determina los intervalos de concavidad o su punto de inflexión.	Deriva bien y concluye sobre las coordenadas de sus puntos críticos estacionarios, intervalos de monotonía y de concavidad y las coordenadas de su punto de inflexión.
	0	**1 – 3**	**4 – 8**	**9 – 10**

Rúbrica del literal b):

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante identifica una región acotada por una función polinomial y el eje X, el sólido de revolución que se forma y mediante cálculo integral obtiene su volumen.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No logra identificar la región o no plantea correctamente la integral definida asociada al volumen.	Identifica la región a integrar pero tiene problemas para plantear la expresión de cálculo del volumen del sólido de revolución.	Identifica la región a integrar, plantea la expresión del volumen del sólido de revolución, pero se equivoca al integrar algún término.	Identifica la región a integrar, plantea la expresión del volumen, integra bien cada término y presenta el resultado correcto expresado en unidades cúbicas.
	0	**1 – 3**	**4 – 8**	**9 – 10**

5. **(15 PUNTOS) Determine la solución a la ecuación diferencial:**

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = (2x-1)y}$$

la cual satisface la condición inicial $\boldsymbol{y(0) = 3}$.

Solución:

Se adecúan los términos de la ecuación diferencial para integrar cada uno:

$$\frac{dy}{y} = (2x-1)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (2x-1)\,dx$$

$$\ln|y| + c_1 = x^2 - x + c_2\ ;\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\ln|y| = x^2 - x + C;\quad C \in \mathbb{R}$$

La solución general es:

$$\boxed{y = e^{x^2-x+C}\ ;\quad C \in \mathbb{R}}$$

Se determina la solución particular con base en las condiciones dadas:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3$$

$$3 = e^c \ \Rightarrow \ \ c = ln(3)$$

$$y = e^{x^2-x+ln(3)}$$

$$\boxed{y = 3e^{x^2-x}}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe cómo resolver una ecuación diferencial y determinar su solución general y su solución particular.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No sabe que debe integrar o realiza un proceso incorrecto.	**Integra cada variable separable y tiene inconvenientes para obtener la solución general.**	**Integra cada variable separable y obtiene la solución general, pero no la solución particular.**	**Integra cada variable separable y obtiene la solución general y la solución particular.**
	0	**1 – 6**	**7 – 13**	**14 – 15**

6. (15 PUNTOS) Dado que:

$$\int_{\arctan(e)}^{\arctan(e^3)} \frac{csc(2x)}{ln(tan(x))}\, dx = \frac{1}{2} ln(a)$$

Determine el VALOR NUMÉRICO de $a \in \mathbb{R}$.

Solución:

Se aplica la técnica de integración por sustitución:

$$u = ln(tan(x)) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{tan(x)} * sec^2(x)dx = \frac{1}{\frac{sen(x)}{\cancel{cos(x)}}} * \frac{1}{cos^{\cancel{2}}(x)} dx$$

$$du = \frac{dx}{sen(x)\,cos(x)} = \frac{2dx}{sen(2x)} = 2\,csc(2x)\,dx$$

Se resuelve la integral indefinida:

$$\int \frac{csc(2x)}{ln(tan(x))} dx = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2} ln|u| + C = \frac{1}{2} ln|ln(tan(x))| + C\ ; \quad C \in \mathbb{R}$$

Por lo que:

$$\int_{arc\,tan(e)}^{arc\,tan(e^3)} \frac{csc(2x)}{ln(tan(x))} dx = \left(\frac{1}{2} ln|ln(tan(x))|\right)\Bigg|_{arc\,tan(e)}^{arc\,tan(e^3)}$$

$$= \frac{1}{2}[ln|ln(e^3)| - ln|ln(e)|] = \frac{1}{2}[ln(3) - ln(1)]$$

$$= \frac{1}{2} ln(3)$$

$$\boxed{\therefore a = 3}$$

Rúbrica:

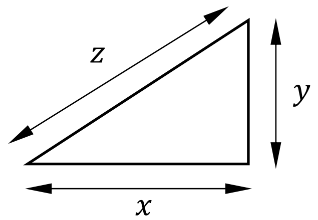
Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe cómo integrar una función logarítmica y obtener la diferencial de una función trigonométrica.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No sabe que debe integrar o realiza un proceso incorrecto.	**Aplica la técnica de sustitución, pero tiene inconvenientes para obtener la antiderivada.**	**Aplica la técnica de sustitución, obtiene bien la antiderivada, pero no evalúa bien.**	**Aplica la técnica de sustitución, obtiene bien la antiderivada, evalúa bien y determina a.**
	0	**1 – 6**	**7 – 13**	**14 – 15**

7. **(20 PUNTOS) De los siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.**

Dos barcos de vapor salen de un puerto al mismo tiempo. El primero se mueve hacia el norte a una velocidad de $20\ [millas/hora]$, mientras que el segundo se mueve hacia el oeste a una velocidad de $15\ [millas/hora]$. Calcule la rapidez con la que cambia la distancia entre ellos una $hora$ más tarde.

Solución:

Se calculan las distancias recorridas luego de $1\ [hora]$. Si se conoce que la distancia es igual a la velocidad por el tiempo:



$$y = (20)(1) = 20\ [millas]$$
$$x = (15)(1) = 15\ [millas]$$
$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{15^2 + 20^2}$$
$$z = \sqrt{225 + 400} = \sqrt{625} = 25\ [millas]$$

Se obtiene la expresión general y se deriva respecto al tiempo:

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \cancel{2}z\frac{dz}{dt} = \cancel{2}x\frac{dx}{dt} + \cancel{2}y\frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{z}$$

Se evalúa esta última expresión luego de $1\ [hora]$:

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t = 1\ [hora]} = \frac{(15)(15) + (20)(20)}{25} = \frac{225 + 400}{25} = \frac{625}{25}$$

$$\boxed{\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t = 1\ [hora]} = 25\ \left[\frac{millas}{hora}\right]}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe cómo determinar una razón de cambio derivando una función polinomial.	**No sabe que debe derivar respecto al tiempo.**	**Plantea la ecuación que relaciona las distancias, deriva la función, pero no simplifica bien.**	**Plantea la ecuación que relaciona las distancias, deriva la función y simplifica bien, pero no evalúa correcatemente.**	**Plantea la ecuación que relaciona las distancias, deriva la función y expresa la respuesta con sus unidades de medida.**
	0	**1 – 9**	**10 – 18**	**19 – 20**

El costo total diario de fabricación de x artículos es $C(x) = 0.2x^2 + x + 900$ $[dólares]$. Se ha determinado que durante las primeras t $[horas]$ del trabajo de producción diario se fabrican aproximadamente $(t^2 + 100t)$ artículos. Calcule la tasa de cambio del costo total con respecto al tiempo, una $[hora]$ después que empiece la producción.

Solución:

$$
\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} &= (0.4x + 1)(2t + 100) \\
&= [0.4(t^2 + 100t) + 1](2t + 100) \\
&= (0.4t^2 + 40t + 1)(2t + 100) \\
&= 0.8t^3 + 40t^2 + 80t^2 + 4000t + 2t + 100 \\
&= 0.8t^3 + 120t^2 + 4002t + 100
\end{aligned}
$$

Se evalúa esta última expresión luego de 1 $[hora]$:

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dC}{dt}\right|_{t = 1\ [hora]} &= 0.8(1)^3 + 120(1)^2 + 4002(1) + 100 \\
&= 0.8 + 120 + 4002 + 100 \\
&= 4\,222.8
\end{aligned}
$$

La tasa de cambio del costo total con respecto al tiempo es de \$ 4 222.80.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe cómo determinar una razón de cambio derivando una función polinomial y aplicando la regla de la cadena.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No sabe que debe derivar respecto al tiempo.	**Deriva la función de costo total diario, pero no aplica correctamente la regla de la cadena.**	**Deriva correctamente la función de costo total diario y la de producción, pero no multiplica bien los factores.**	**Deriva correctamente la función de costo total diario y la de producción, y expresa la respuesta con sus unidades de medida.**
	0	**1 – 9**	**10 – 18**	**19 – 20**