ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2018	**PERÍODO:**	SEGUNDO TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Argüello G., Baquerizo G., Chóez M., Crow P., Medina J., Mejía M., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	PRIMERA	**FECHA:**	19/noviembre/2018

1) (6 PUNTOS) Sea la función $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es:

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\pi}}, & \boldsymbol{0 < x < \dfrac{\pi}{2}} \\ \boldsymbol{k}, & \boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{2}} \\ \dfrac{\boldsymbol{cos(x)}}{\boldsymbol{\pi - 2x}}, & \boldsymbol{x > \dfrac{\pi}{2}} \end{cases}$$

Determine el valor numérico de $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$ para que la función $\boldsymbol{f}$ sea continua en todo su dominio.

Solución:

Para que f sea continua en $x = \frac{\pi}{2}$ debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Calculamos los límites laterales:

- Límite lateral por la izquierda:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{x}{\pi} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{2}$$

- Límite lateral por la derecha:

  Realizamos un cambio de variable:

$$u = \pi - 2x \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2}$$

$$x \to \frac{\pi^+}{2} \;\Rightarrow\; u \to 0^+$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{cos(x)}{\pi - 2x} = \lim_{u \to 0^+} \frac{cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{u}{2}\right)}{u} = \lim_{u \to 0^+} \frac{sen\left(\frac{u}{2}\right)}{u} = \frac{1}{2}$$

Debido a que $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x)$, concluimos que $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \frac{1}{2}$. Con base en la regla de correspondencia tenemos que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k$. Entonces, para lograr la continuidad en dicho punto:

$$\boxed{k = \frac{1}{2}}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante conoce sobre la continuidad de funciones de variable real y el cálculo de límites a partir de límites notables.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No plantea la condición de continuidad, ni calcula límites laterales, ni evalúa la función.	**Plantea la condición de continuidad y calcula bien solamente uno de los dos límites laterales.**	**Plantea la condición de continuidad y calcula bien los dos límites laterales, pero no concluye correctamente sobre $\boldsymbol{k}$.**	**Plantea la condición de continuidad, calcula bien los límites laterales, compara con la función evaluada y concluye sobre el valor de $\boldsymbol{k}$.**
	0	**1 – 2**	**3 – 4**	**5 – 6**

2) **(4 PUNTOS) Dada la función $\boldsymbol{f}: \left[-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\right] \mapsto \mathbb{R}$ definida por:**

$$\boldsymbol{f(x) = x\,(sen(x) + 1)}$$

Aplicando el TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO, demuestre que existe por lo menos un valor $\boldsymbol{c}$ en el dominio de $\boldsymbol{f}$ tal que $\boldsymbol{f(c) = 2}$.

Solución:

El enunciado del TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO es el siguiente:

"Sea f una función definida en $[a, b]$ y sea W un número entre $f(a)$ y $f(b)$. Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe al menos un número c entre a y b tal que $f(c) = W$".

Puesto que:

- $y = x$ es una función continua para todo número real.
- Si $y = sen(x)$ es una función continua para todo número real, entonces también $y = sen(x) + 1$ es una función continua para todo número real porque es la suma de dos funciones continuas.

Se infiere que $f(x) = x\,(sen(x) + 1)$ también es continua para todo número real, porque es la multiplicación de dos funciones continuas. Esto es, la función f cumple con el antecedente del teorema.

Dado que $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ es el dominio de la función, se encuentre definida en ese intervalo, podemos evaluarla en los extremos de dicho intervalo, $a = -\frac{\pi}{2}$ y $b = \frac{\pi}{2}$.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\left(sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1\right) = -\frac{\pi}{2}(-1 + 1) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right)+1\right)=\frac{\pi}{2}(1+1)=\pi$$

Como sabemos que $0 \leq 2 \leq \pi$ y se cumplen todos los requisitos del teorema, se garantiza que:

$$\boxed{\exists c \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \ / \ f(c)=2}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante conoce sobre el teorema del valor intermedio para funciones continuas.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No plantea las condiciones requeridas en el teorema del valor intermedio.	**Verifica que la función cumple con la condición de continuidad pero no evalúa bien.**	**Verifica que la función cumple con la condición de continuidad y evalúa bien los dos extremos del intervalo del dominio, pero no concluye.**	**Verifica la continuidad, evalúa bien los extremos del dominio y concluye que es posible obtener el número que satisface el teorema.**
	0	**1**	**2 – 3**	**4**

3) (6 PUNTOS) Dada la función:

$$\boldsymbol{f(x)=ln(x)\,,\quad \forall x>0}$$

(a) (4 PUNTOS) Aplicando la definición de derivada, obtenga $\boldsymbol{D_x(f(x))}$.

(b) (2 PUNTOS) Determine la ecuación de la recta tangente a $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x_0=e^3}$.

Solución:

$$D_x\big(ln(x)\big)=\lim_{h\to 0}\frac{ln(x+h)-ln(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$D_x\big(ln(x)\big)=\lim_{h\to 0}\,ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=ln\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)=ln(e)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}ln(e)$$

$$\boxed{D_x\big(ln(x)\big)=\frac{1}{x}\,,\quad \forall x>0}$$

Evaluamos en $x_0=e^3$ para obtener la ordenada correspondiente:

$$y_0=f(e^3)=ln(e^3)=3$$

Evaluamos la derivada en $x_0 = e^3$ para obtener la pendiente:

$$m_T = D_x\big(f(x)\big)\,\Big|_{x\,=\,e^3} = \frac{1}{e^3}$$

La ecuación de la recta tangente en $P_0(e^3, 3)$ es:

$$\boxed{y - 3 = \frac{1}{e^3}(x - e^3)\ \ ; \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Rúbrica del literal 3.a):

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante conoce la definición de derivada y calcula límites a partir de límites notables.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No conoce sobre la definición de derivada.	**Conoce sobre la definición de derivada pero no calcula bien el límite.**	**Conoce sobre la definición de derivada y calcula bien el límite, pero no concluye.**	**Conoce sobre la definición de derivada, calcula bien el límite y concluye.**
	0	**1**	**2 – 3**	**4**

Rúbrica del literal 3.b):

Capacidades deseadas	**Desempeño**		
El estudiante conoce sobre ecuaciones de rectas tangentes a partir de derivadas.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Excelente**
	No sabe lo que debe realizar.	**Obtiene la ordenada o la pendiente de la recta tengante, pero no ambos valores.**	**Obtiene la ordenada y la pendiente, y escribe la ecuación de la recta tangente.**
	0	**1**	**2**

4) (12 PUNTOS) Obtenga $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$ para cada expresión:

(a) (2 PUNTOS) $\boldsymbol{y = \big(sen(\pi)\big)^2}$

Solución:

π es una constante y la expresión $\big(sen(\pi)\big)^2$ también lo es, por lo tanto:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 0}$$

Rúbrica del literal 4.a):

Capacidades deseadas	Desempeño	
El estudiante sabe derivar una función constante.	Insuficiente	Excelente
	No sabe cómo derivar.	Obtiene la derivada.
	0	2

(b) **(2 PUNTOS)** $y = \boldsymbol{arc\ tan(2x)}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(2x)^2}\cdot(2) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+4x^2}}$$

Rúbrica del literal 4.b):

Capacidades deseadas	Desempeño		
El estudiante conoce sobre la derivada de una función trigonométrica inversa y la regla de la cadena.	Insuficiente	En desarrollo	Excelente
	No sabe cómo derivar.	Deriva la función trigonométrica inversa pero no aplica la regla de la cadena.	Deriva la función trigonométrica inversa y aplica la regla de la cadena.
	0	1	2

(c) **(2 PUNTOS)** $y = \sqrt{\boldsymbol{ln}\left(\frac{x}{4}\right)}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(ln\left(\frac{x}{4}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\frac{x}{\cancel{4}}}\cdot\frac{1}{\cancel{4}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x\sqrt{ln\left(\frac{x}{4}\right)}}}$$

Rúbrica del literal 4.c):

Capacidades deseadas	Desempeño		
El estudiante sabe derivar una potencia, aplicar la regla de la cadena y derivar un logaritmo natural.	Insuficiente	En desarrollo	Excelente
	No sabe cómo derivar.	Aplica la regla de la potencia, pero no aplica la regla de la cadena.	Deriva la potencia, el logaritmo y aplica la regla de la cadena.
	0	1	2

(d) (3 PUNTOS) $\boldsymbol{4x - y^2 - \frac{1}{2}cos(y) = 0}$

Solución:

$$4 - 2y\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}sen(y)\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\left(2y - \frac{1}{2}sen(y)\right)\frac{dy}{dx} = 4$$
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{4}{2y - \frac{1}{2}sen(y)}}$$

(e) (3 PUNTOS) $\boldsymbol{y = x^{sen(x)}}$

Solución:

$$ln(y) = ln\left(x^{sen(x)}\right)$$
$$ln(y) = sen(x) \cdot ln(x)$$
$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = cos(x) \cdot ln(x) + sen(x) \cdot \frac{1}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = y\left(cos(x)ln(x) + \frac{1}{x}sen(x)\right)$$
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = x^{sen(x)}\left(cos(x)ln(x) + \frac{sen(x)}{x}\right)}$$

Rúbrica de los literales 4.d) y 4.e):

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante conoce sobre derivación implícita (o logarítmica), regla de la potencia y derivada de una función trigonométrica (o un logaritmo natural y el producto).	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No sabe cómo derivar.	**Se equivoca en la derivación de alguno de los términos.**	**Deriva bien cada término pero no despeja correctamente la expresión de la derivada.**	**Deriva bien todos los términos y expresa correctamente la derivada.**
	0	**1**	**2**	**3**

5) (8 PUNTOS) Dadas las funciones de variable real f y g derivables en $\mathbb{R}$. Se conoce que los puntos $(-4,1)$ y $(3,4)$ pertenecen a la gráfica de la función f y los puntos $(-4,3)$ y $(3,-2)$ pertenecen a la gráfica de g. También se conoce que: $f'(-4)=3$, $f'(3)=-4$, $g'(-4)=-2$ y $g'(3)=6$.

(a) Si $h=f\cdot g$, calcule $h'(-4)$.

Solución:

Debe aplicarse la regla de la derivada para el producto de funciones:

$$h'(-4)=f'(-4)g(-4)+f(-4)g'(-4)$$
$$h'(-4)=(3)(3)+(1)(-2)=9-2$$
$$\boxed{h'(-4)=7}$$

(b) Si $k=(2f+3g)^4$, calcule $k'(3)$.

Solución:

Debe aplicarse la regla de la derivada para la potencia, la suma y el producto de una función por una constante y la regla de la cadena:

$$k'(3)=4\big(2f(3)+3g(3)\big)^3\cdot\big(2f'(3)+3g'(3)\big)$$
$$k'(3)=4\big((2)(4)+(3)(-2)\big)^3\big((2)(-4)+(3)(6)\big)=4(8-6)^3(-8+18)=4(8)(10)$$
$$\boxed{k'(3)=320}$$

(c) Si $m=f\circ g$, calcule $m'(-4)$.

Solución:

Debe aplicarse la regla de la derivada de una composición de funciones más conocida como regla de la cadena:

$$m'(-4)=f'\big(g(-4)\big)\cdot g'(-4)$$
$$m'(-4)=f'(3)\cdot(-2)=(-4)\cdot(-2)$$
$$\boxed{m'(-4)=8}$$

(d) Si $p=\frac{f}{g}$, calcule $p'(3)$.

Debe aplicarse la regla de la derivada de un cociente de funciones:

$$p'(3)=\frac{g(3)f^{'}(3)-f(3)g^{'}(3)}{\big(g(3)\big)^2}$$
$$p'(3)=\frac{(-2)(-4)-(4)(6)}{(-2)^2}=\frac{8-24}{4}=\frac{-16}{4}$$
$$\boxed{p'(3)=-4}$$

Rúbrica de los literales 5.a), 5.b), 5.c) y 5.d):

Capacidades deseadas	Desempeño		
El estudiante conoce sobre la regla de derivación presente en cada literal.	Insuficiente	En desarrollo	Excelente
	No sabe cómo derivar.	Deriva la función según la regla presente pero evalúa incorrectamente algún término.	Deriva bien la función y evalúa correctamente.
	0	1	2

6) (8 PUNTOS) **Dada la curva en coordenadas polares:**

$$r = 2\cos(3\theta)$$

(a) **(1 PUNTO) Bosqueje la gráfica de esta curva en el plano polar.**

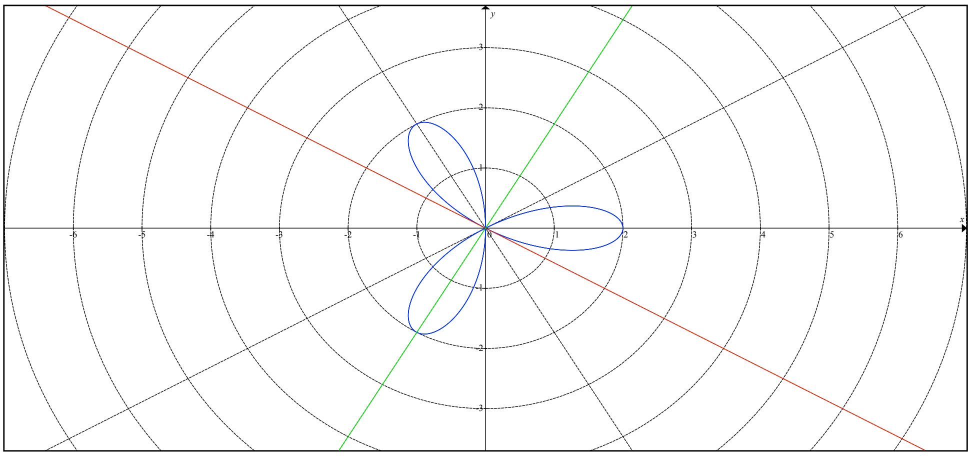
(b) **(5 PUNTOS) Calcule el siguiente valor:**

$$-\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{5\pi}{6}}}$$

(c) **(2 PUNTOS) Explique cuál es el significado geométrico del valor calculado en el literal (b) y represéntelo en la figura que elaboró.**

Solución:

La gráfica de la rosa de 3 pétalos en el plano polar es la curva de color azul:



Para determinar $\frac{dy}{dx}$ a partir de $r = f(\theta) = 2\cos(3\theta)$, se emplea derivación polar teniendo en cuenta que:

$$x = r\cos(\theta) = 2\cos(3\theta)\cos(\theta) \qquad y = r\,sen(\theta) = 2\cos(3\theta)\,sen(\theta)$$

Ahora, por definición:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{d}{d\theta}[2\cos(3\theta)\,sen(\theta)]}{\frac{d}{d\theta}[2\cos(3\theta)\cos(\theta)]} = \frac{\cancel{2}\frac{d}{d\theta}[\cos(3\theta)\,sen(\theta)]}{\cancel{2}\frac{d}{d\theta}[\cos(3\theta)\cos(\theta)]}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(cos(3\theta)\right)'\,sen(\theta)+cos(3\theta)\,\left(sen(\theta)\right)'}{\left(cos(3\theta)\right)'\,cos(\theta)+cos(3\theta)\,\left(cos(\theta)\right)'}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3\,sen(3\theta)\,sen(\theta)+cos(3\theta)\,cos(\theta)}{-3\,sen(3\theta)\,cos(\theta)-cos(3\theta)\,sen(\theta)}$$

Evaluando:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=5\pi/6}=\frac{-3\,sen\left(\frac{5\pi}{2}\right)\,sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)+cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)\,cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{-3\,sen\left(\frac{5\pi}{2}\right)\,cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)-cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)\,sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=5\pi/6}=\frac{-3(1)\left(\frac{1}{2}\right)+(0)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-3(1)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-(0)\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{-\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

El valor calculado representa la pendiente de la recta tangente $m_T=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=5\pi/6}$. Si obtenemos el valor negativo de su fracción recíproca, representa la pendiente de la recta normal.

$$m_N=-\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=5\pi/6}}=\cancel{-}\frac{1}{\cancel{-}\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}$$

En el plano polar se han bosquejado las gráficas de ambas rectas, la recta de color rojo es la recta tangente y la recta de color verde es la recta normal.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe derivar una ecuación polar, funciones trigonométricas, la regla de la cadena y calcular pendientes con derivadas.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No conoce sobre derivación polar.	**Bosqueja la gráfica de la rosa y realiza bien, o la derivada polar del numerador o la derivada del denominador.**	**Bosqueja la gráfica de la rosa, realiza bien la primera derivada (con las expresiones simplificadas) pero se equivoca al evaluar.**	**Bosqueja la gráfica de la rosa, realiza bien la primera derivada (con las expresiones simplificadas) y evalúa bien e indica que el valor es la pendiente de la recta normal.**
	0	**1 – 3**	**4 – 6**	**7 – 8**

7) (6 PUNTOS) Dada la curva en coordenadas paramétricas:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = e^{-t}} \\ \boldsymbol{y(t) = 2^{2t}} \end{cases}$$

Obtenga:

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Solución:

Por derivación paramétrica, la primera derivada $\frac{dy}{dx}$ se calcula así:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(2^{2t})}{\frac{d}{dt}(e^{-t})} = \frac{2^{2t}ln(2)\cdot(2)}{e^{-t}\cdot(-1)} = -ln(2)\frac{2^{2t+1}}{e^{-t}}$$

La segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ se calcula así:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(-ln(2)\frac{2^{2t+1}}{e^{-t}}\right)}{\frac{d}{dt}(e^{-t})}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cancel{-}ln(2)\frac{[e^{-t}2^{2t+1}ln(2)\cdot(2)]-[2^{2t+1}(-e^{-t})]}{(e^{-t})^2}}{\cancel{-}e^{-t}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ln(2)\cancel{e^{-t}}2^{2t+1}\frac{2ln(2)+1}{e^{-2t}}}{\cancel{e^{-t}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = ln(2)2^{2t+1}(2ln(2)+1)e^{2t}}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante conoce sobre derivadas de orden superior y las aplica en ecuaciones paramétricas.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No conoce sobre derivadas de orden superior o derivación paramétrica.	**Realiza bien o la primera derivada del numerador o la del denominador.**	**Realiza bien o la primera derivada y la segunda derivdada pero tiene problemas al simplificar.**	**Realiza bien la primera y la segunda derivada (con las expresiones simplificadas).**
	0	**1 – 2**	**3 – 5**	**6**