ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS

"INTEGRACION DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL"

MONOGRAFIA

Previa la obtención del Título de:
MAGISTER EN EDUCACION MATEMATICA APLICADA AL NIVEL MEDIO

Presentada por:

LUIS ZAPATA VILLACIS

Guayaquil - Ecuador

1994

DECLARACION EXPRESA

"La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestas en esta monografía, me corresponden exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL".

(Reglamento de Exámenes y Títulos profesionales de la ESPOL).

....

Luis Zapata Villacis

Mat. Jorge Medina

Director de Monografía

INTRODUCCION.- Georg Friedrich Bernhard Riemann, matemático aleman (1826 - 1866), escogió la Universidad de Gottinga, que en ese entonces era el centro del mundo de los matemáticos y que lo seguiría siendo por más de 100 años. Bajo influencia de W.E. Weeber, un físico de primer orden, y de Karl F.Gauss, el más grande matemático de esa época.

En 1851 recibió su doctorado en filosofía, después de lo cual se dedicó a la enseñanza en Gottinga. Murió de tuberculosis 15 años más tarde.

Su trabajo es impresionante por su cualidad y profundidad. Sus manuscritos de matemáticas abren nuevas direcciones en la teoría de las funciones complejas, inicia el estudio profundo de lo que hoy se llama Topología y emprende en Geometría un desarrollo que iba a culminar 50 años más tarde con la teoría de la relatividad de Einstein.

Tanto Newton como Leibniz dieron una versión de la integral e hicieron el teorema fundamental del Cálculo Integral. Riemann fue quien nos proporcionó la definición moderna de Integral Definida. Estableció la integral sobre bases aritméticas en lugar de bases geométricas.

La monografía cuyo tema es: Integración de funciones de una variable real, contiene subtemas como la suma de Riemann, Integral Definida, Antiderivada, Integral Indefinida y Teoremas del Cálculo Fundamental. Se realizó las demostraciones de los teoremas y propiedades.

Fue desarrollada pensando en los alumnos del Colegio con ejercicios y representaciones gráficas de fácil comprensión.

INDICE

MOTIVACION

Al considerar el problema de la tangente nos vimos conducidos a la noción de derivada. Considerando un problema, introduciremos la noción de integral de forma natural.

EL PROBLEMA DEL AREA

En la figura # 1 representamos una región Ω limitada en su parte superior por la gráfica de una función de una variable real continua f en [a,b], en su parte inferior por el eje x, a la izquierda por x=a y a la derecha por x=b.

¿Qué número si lo hubiese, debería considerarse como el área de Ω?.

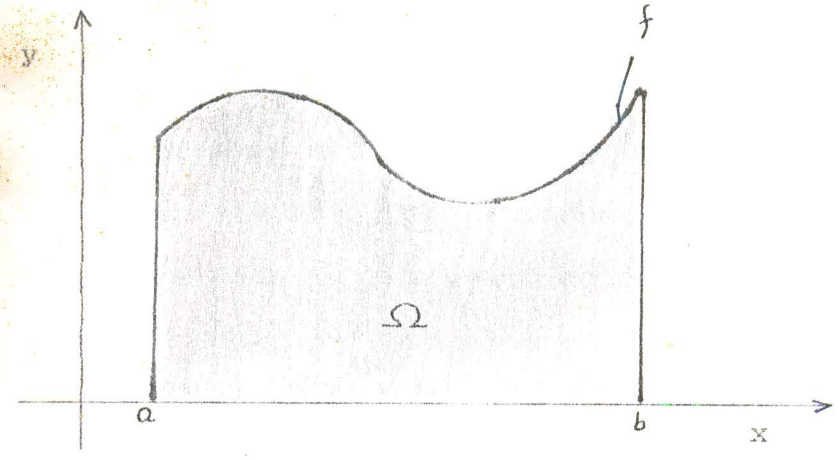


fig.#1

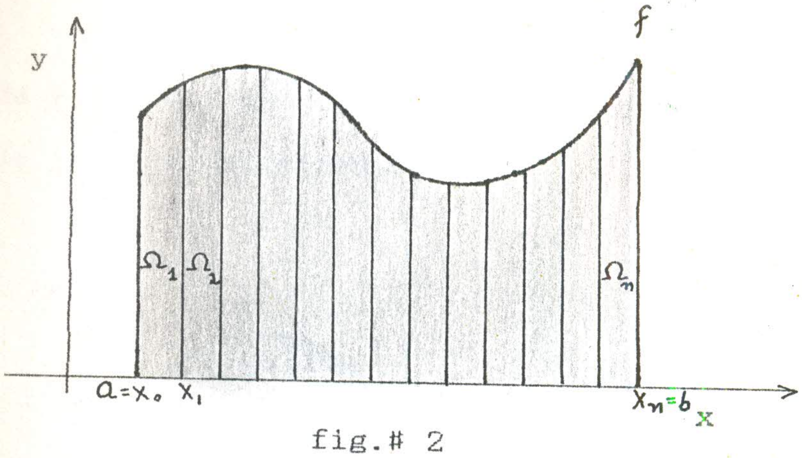


fig.# 2

Para llevar esto a cabo comenzamos dividiendo el intervalo [a,b] en un número finito de intervalos que no se superponen $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$ con $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Como consecuencia, la región Ω queda dividida en n regiones: $\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_n$. Podemos estimar el área total de Ω estimando el área de cada una de las regiones Ω_j sumando los resultados. Aproximamos la región mediante polígonos, en dos formas. Sobre cada uno de los subintervalos eregimos un rectángulo con su base sobre el eje x y cuyo lado superior se encuentra completamente bajo la curva (fig.#3). Los rectángulos así construidos forman un polígono que se encuentra contenido completamente en la región dada, cuya área se desea definir. El área de este polígono es menor que el área de la región (fig.#4). Construyamos ahora un nuevo polígono.Sobre cada subintervalo colocamos un rectángulo cuyo lado superior está siempre sobre la curva (fig.#5). Estos forman un polígono que encierra a

la región dada y de aquí que deba esperarse que tenga un área mayor que la de nuestra región.

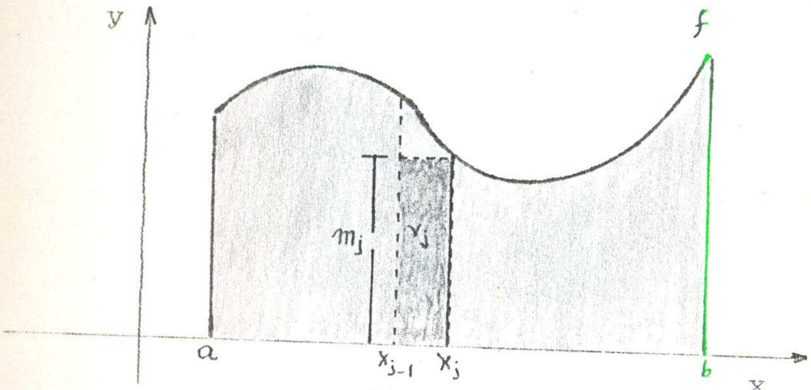


fig.# 3

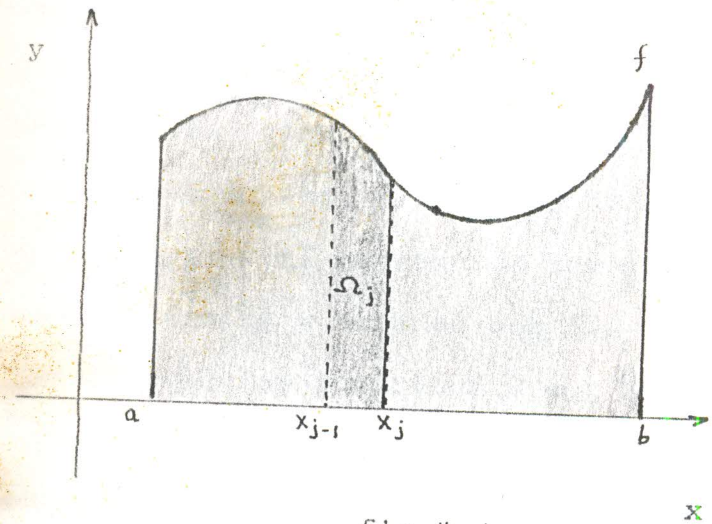


fig.# 4

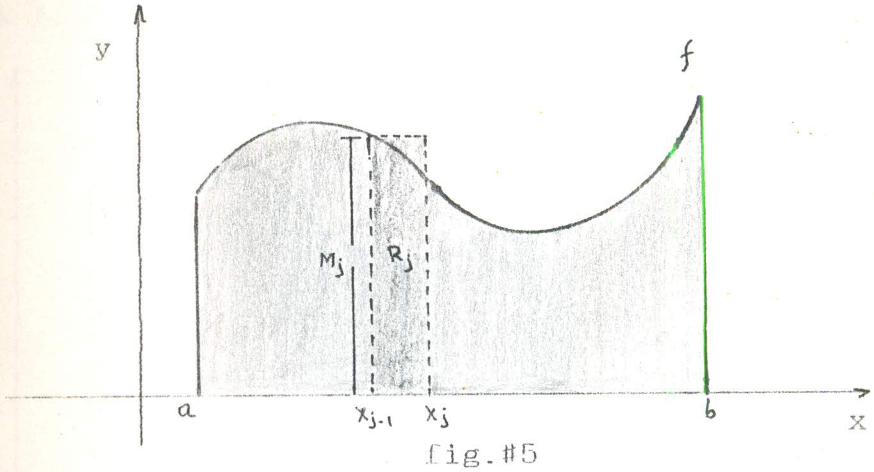


fig.#5

El área aproximada de la región Ω por rectángulos.

Sea $P=\{x_0,x_1,x_2,...,x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Considerando como la base de los rectángulos inscritos y de los circunscritos en cada subintervalo determinado por la partición P y como las alturas el ínfimo de los $f(x)=m_{j+1}$ para $x\in[x_j,x_{j+1}]$ y el supremo de los $f(x)=M_{j+1}$ para $x\in[x_j,x_{j+1}]$ respectivamente y notando con S_{-n} la suma de las áreas de los rectángulos inscritos y con S^{-n} la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos.

Consideremos ahora los rectángulos r_j y R_j de las figuras # 3,4 y 5 $r_j \subset \Omega_j \subset R_j$ hemos de tener: área de $r_j \leq$ área de $\Omega_j \leq$ área de R_j.

El área de los rectángulos viene dada por el producto de base y altura, asi obtenemos: $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$

$S-f_{(P)} = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n$ se denomina suma inferior para f y $S^-{}_f(P) = M_1\Delta x1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n$ se denomina suma superior para f.

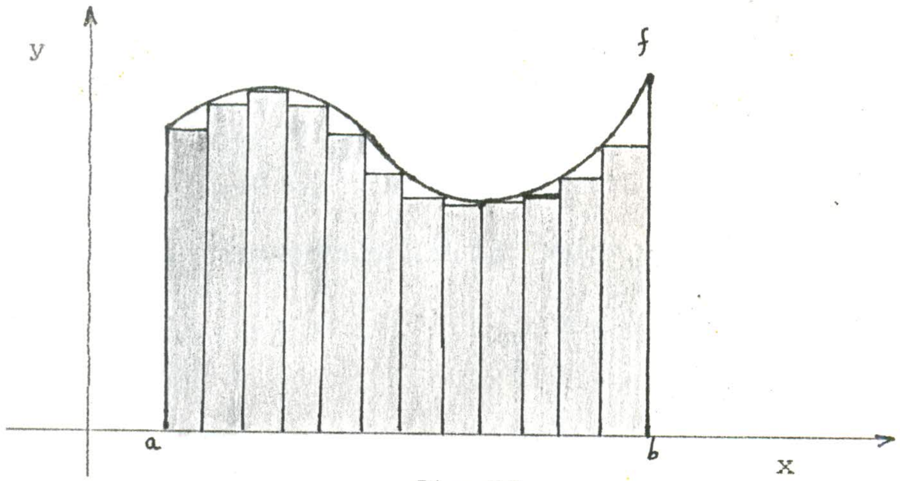


fig #6

El área de la zona sombreada es suma inferior para f.

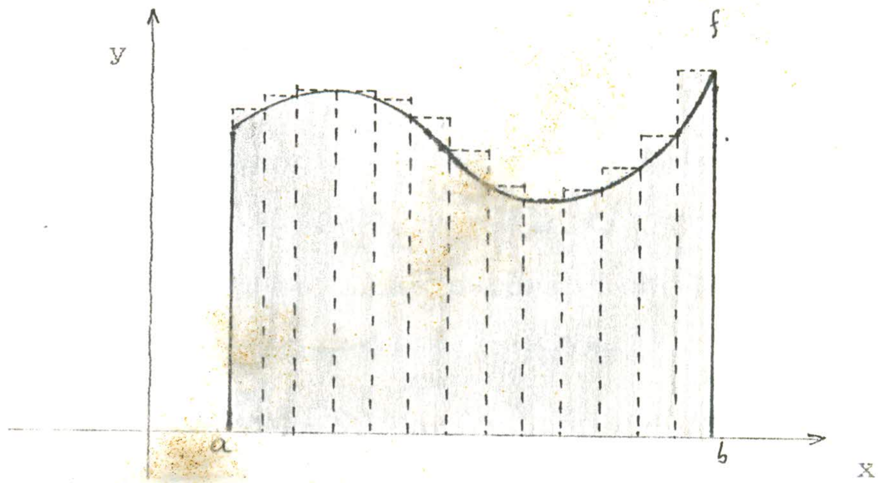


fig #7

El área de la zona sombreada es suma superior para f.

PARTICIONES, SUMA SUPERIOR E INFERIOR

Definición de Partición.- Sea $[a,b]$ un intervalo cerrado, con $a<b$. P es una partición de $[a,b]$ si y solo si es el conjunto $P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\}$ tal que $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$

Observación.- Una partición es un conjunto finito de puntos.

Ejemplo

Particiones del intervalo $[0,1]$ son entre otras las siguientes:

$P_0 = \{0,1\}$

$P_1 = \{0,\ 1/4,\ 1/2,\ 2/3,\ 1\}$

$P_2 = \{0,\ 1/3,\ 2/3,\ 3/4,\ 9/10,\ 1\}$, etc.

Asi podemos encontrar infinitas particiones de $[0,1]$

Los intervalos de la forma $[x_j,x_{j+1}]$ se denominan subintervalos cerrados correspondientes a la partición P

Definición de Suma Superior.- Sea M_j el supremo de $f(x)$ en el subintervalo $[x_{j-1},x_j]$, y sea $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$, el número $S^-_f(P)$ se denomina suma superior de P de f si y solo si $S^-_f(P)=M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+\ldots+M_n\Delta x_n$.

Definición de Suma inferior.- Sea m_j el infimo de $f(x)$ en el subintervalo $[x_{j-1},x_j]$ y sea $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$. El número $S_{-f}(P)$ se denomina la suma inferior de P de f si y solo sí

$S_-f(P)=m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2+\ldots+m_n\Delta x_n$. $\quad S_{-f}(P)=\sum_{j=1}^{n} m_j\Delta x_j$

Podemos observar que a medida que se añaden puntos a una partición, los subintervalos $[x_{j-1}, x_j]$ se vuelven más pequeños. Como resultado tenemos que el ínfimo m_j se hace mayor y el supremo M_j más pequeño. En consecuencia las sumas inferiores crecen, mientras que las sumas superiores decrecen de valor. Esto podemos observar en las figuras # 8, 9, 10 y 11.

Podemos decir que:

$$\text{área de } \Omega = \lim_{n \to \infty} [f(x_0)\Delta x_1 + f(x_1)\Delta x_2 + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_n]$$

$$\text{área de } \Omega = \lim_{n \to \infty} [f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x2 + \ldots + f(x_n)\Delta x_n]$$

es decir $\lim_{n \to \infty} S_{-n} = \lim_{n \to \infty} S^{-n} = \text{área de } \Omega$

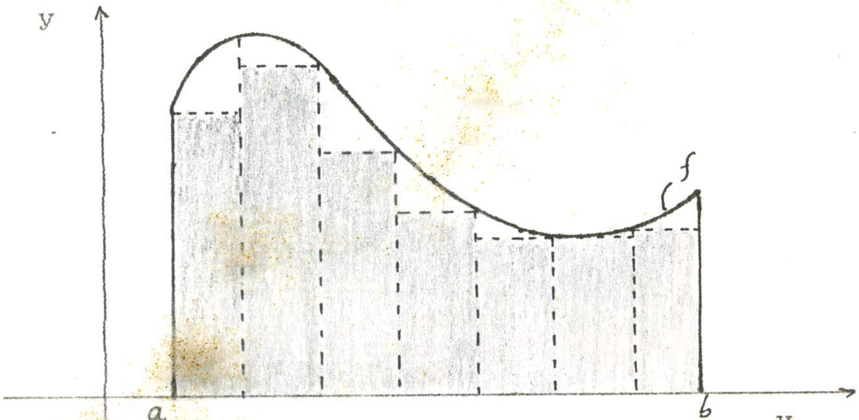


fig # 8

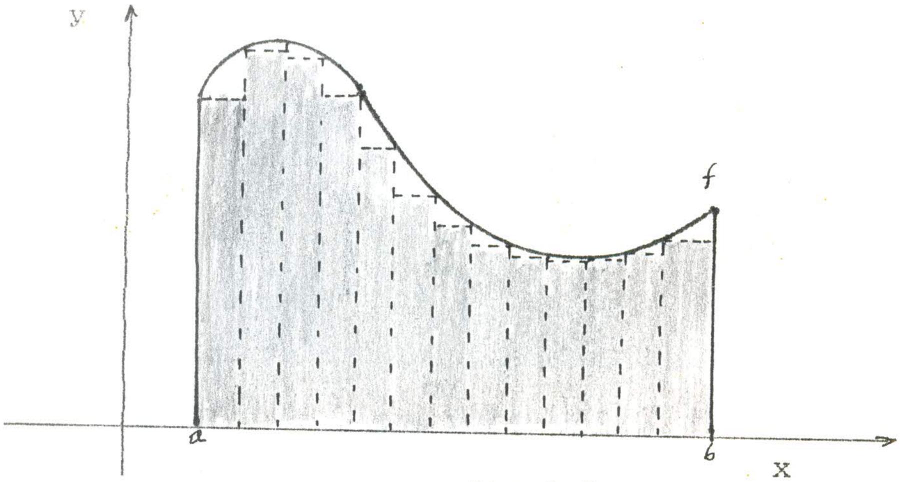


fig # 9

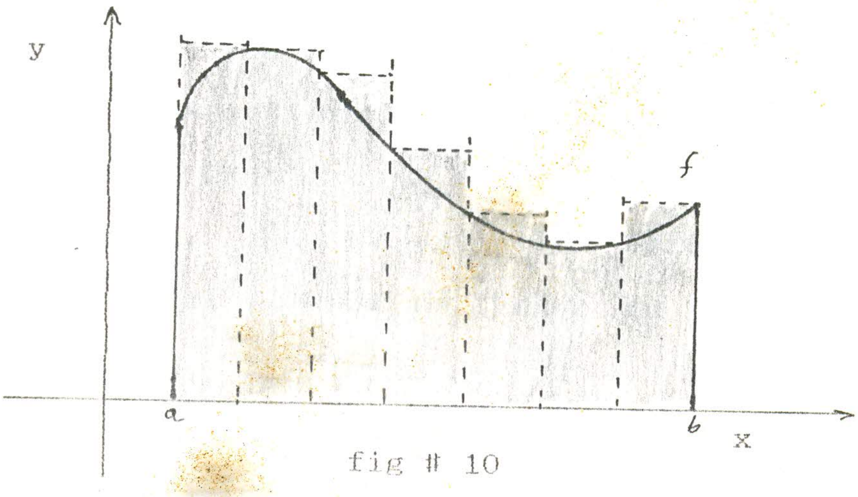


fig # 10

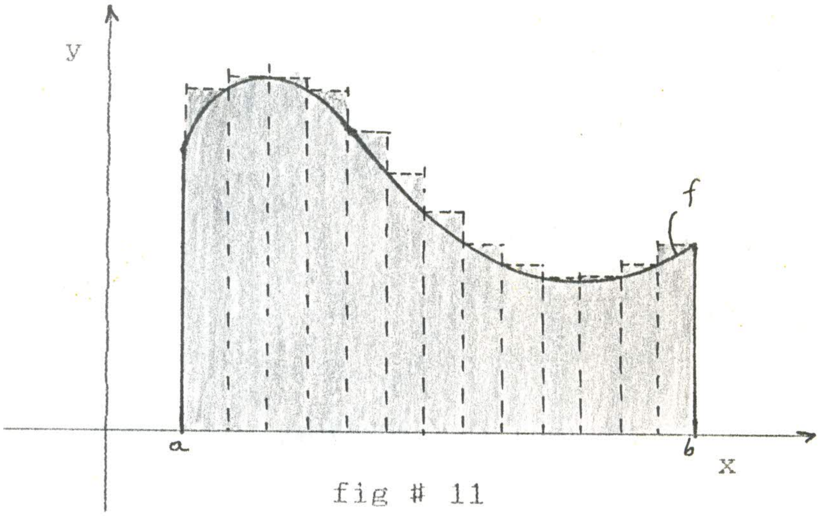


fig # 11

Supongamos ahora que f es continua en [a,b]. Si $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ es una partición de [a,b], entonces P divide [a,b] en un número finito de intervalos que no se superponen:

$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$, con longitudes $\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_n$ respectivamente; $\Delta x_i=(b-a)/n$ .La norma de la partición P se denota por $\|P\|$ y es el $\text{máx}_P\Delta x_j$ es decir $\|P\|=\text{máx}_P\Delta x_j$. En cada uno de estos intervalos $[x_{j-1},x_j]$, M_j es el supremo de f(x) y m_j es el ínfimo de f(x)

Ejemplo. Encontrar la suma superior e inferior de la función dada en el intervalo [0,1], sea $P=\{0,1/4,1/2,1\}$, y $f(x)=x^2$, entonces $S^-_f(P)=(1/16)(1/4)+(1/4)(1/4)+1(1/2)$

$\to S^-_f(P)=37/64$

$S_{-f}(P)=0(1/4)+(1/16)(1/4)+(1/4)(1/2)$

$\to S_{-f}(P)=9/64$

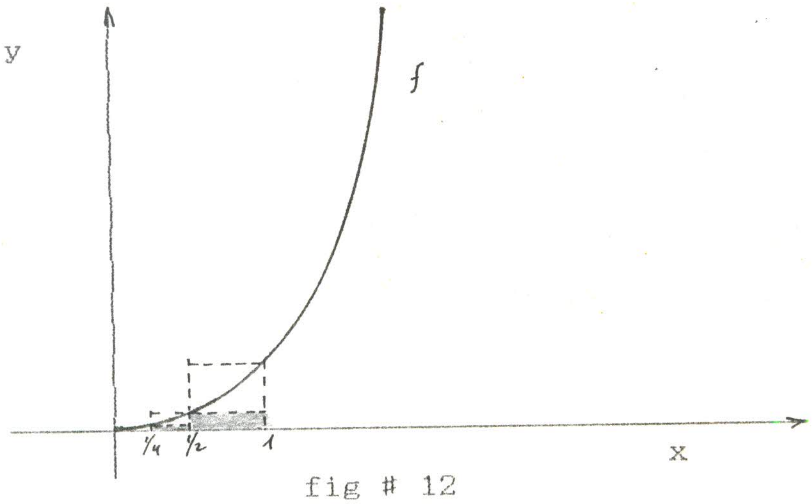


fig # 12

SUMA DE RIEMANN

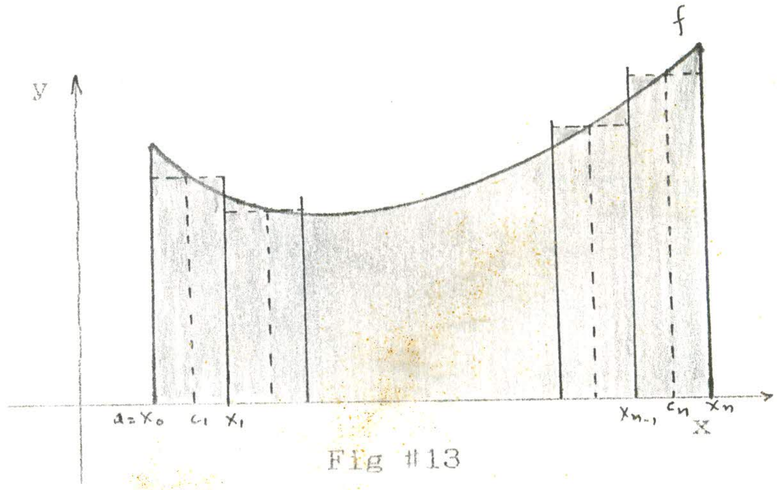


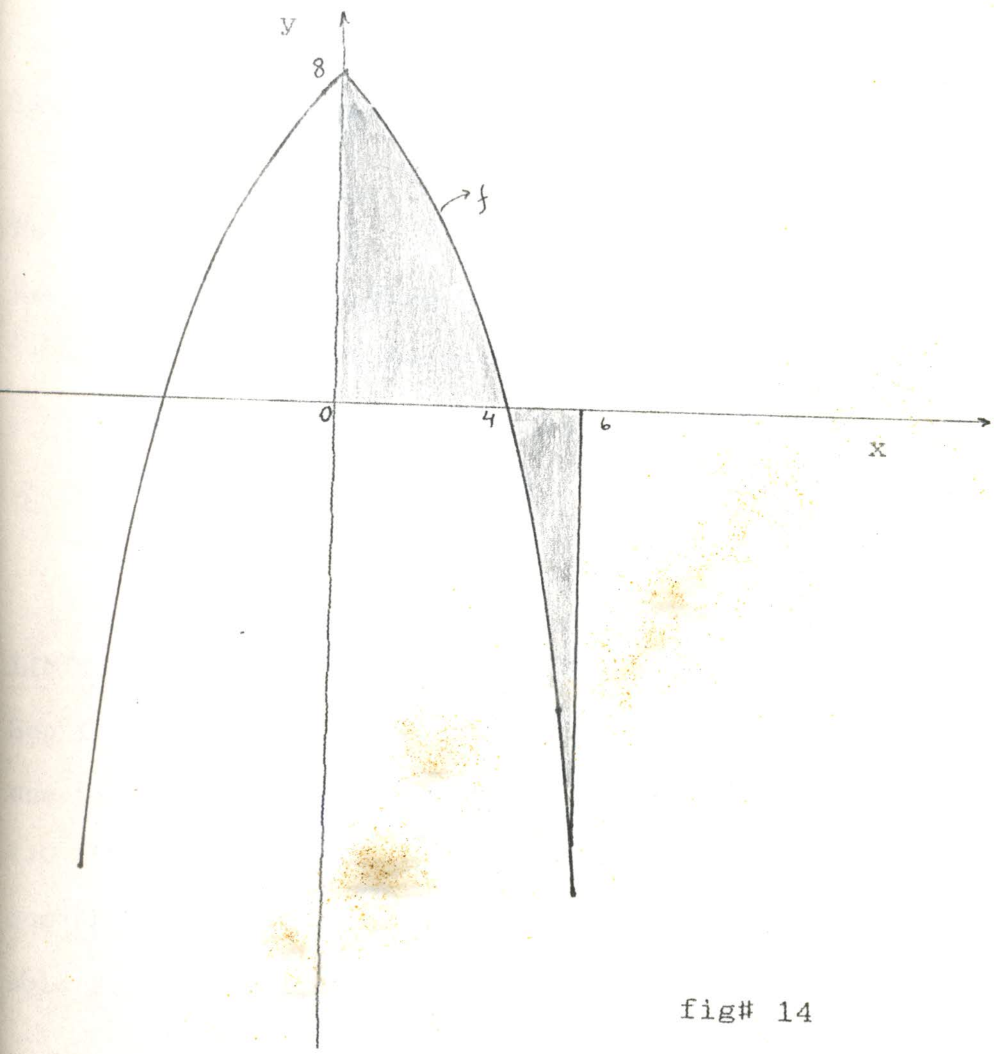
Fig #13

Definición de la Suma de Riemann.- Sea $P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ una partición de $[a,b]$, f una función definida en $[a,b]$ y $c_j\in[x_{j-1},x_j]$, con $j=1,2,\ldots,n$ R_p es una suma de Riemann si y solo sí $R_p=\sum_{j=1}^{n} f(c_j)\,\Delta x_j$

De la definición $f(c_j)$ no es necesariamente el ínfimo o el supremo de $f(x)$ en $[x_{j-1},x_j]$. Además $f(x)$ puede ser negativa para algún x, algunos de los términos de la suma de Riemann R_P pueden ser negativos. Por tanto la suma de Riemann no siempre representa una suma de áreas de rectángulos.

Ejemplo: Sea $f: R \longrightarrow (-\infty, 8]$

$$x \longrightarrow f(x) = 8 - x^2/2 .$$



fig# 14

Halle la suma de Riemann R_p de f para la partición P de [0,6] en los cuatro subintervalos determinados por:

$x_o = 0,\ x_1 = 1.5,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4.5,\ x_4 = 6$, eligiendo $c_1 = 1,\ c_2=2,\ c_3 = 4,\ c_4 = 5$ $\quad \Delta x_j = x_j - x_{j-1}$

$\Delta x_1 = x_1 - x_o \dashrightarrow \Delta x_1 = 1.5-0 \dashrightarrow \Delta x_1 = 1.5$

$\Delta x_2 = x_2 - x_1 \dashrightarrow \Delta x_2 = 3-1.5 \dashrightarrow \Delta x_2 = 1.5$

$\Delta x_3 = x_3 - x_2 \dashrightarrow \Delta x_3 = 4.5-3 \dashrightarrow \Delta x_3 = 1.5$

$\Delta x_4 = x_4 - x_3 \dashrightarrow \Delta x_4 = 6-4.5 \dashrightarrow \Delta x_4 = 1.5$

$R_p = \Sigma^n_{j=1} f(c_j)\,\Delta x_j$

$R_p = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + f(c_3)\Delta x_3 + f(c_4)\Delta x_4$

$\dashrightarrow R_p = (8-1^2/2)1.5+(8-2^2/2)1.5+(8-4^2/2)1.5+(8-5^2/2)1.5$

$\dashrightarrow R_p = (8-1/2)1.5+(8-2)1.5+(8-8)1.5+(8-25/2)1.5$

$\dashrightarrow R_p = 11.25 + 9 - 6.75$

$\dashrightarrow R_p = 13.5$

LIMITE DE LA SUMA DE RIEMANN

Sea f una función definida en [a,b], $P=\{x_o,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ una partición de [a,b] y si existe un número L tal que $\forall\ \epsilon>0$, $\exists\ \delta>0$, para el cual $|\Sigma_j f(c_j)\ \Delta x_j - L| < \epsilon$, siempre que $\|P\| < \delta$, L es el límite de las sumas Riemann si y solo sí $\lim_{\|P\|\to 0} \Sigma_j f(c_j)\Delta x_j = L$

INTEGRAL DEFINIDA

Definición.- Sea f una función definida en $[a,b]$, $P=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}$ una partición de $[a,b]$, $S_{-f}(P)$, suma inferior de P de f, $S^{-}_{f}(P)$ suma superior de P de f, I un número. I se llama integral definida de f sobre $[a,b]$ si y solo sí $S_{-f}(P) \leq I \leq S^{-}_{f}(P)$. Se denota la integral definida como $\int_a^b f(x)dx$.

INTEGRAL DEFINIDA COMO EL AREA DE UNA REGION

Definición.- Sea f una función continua y no negativa en $[a,b]$, $P=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}$ una partición de $[a,b]$, $S_{-f}(P)$ suma inferior de P de f y $S^{-}_{f}(P)$ suma superior de P de f el número A se llama área de la región limitada por f , el eje x, y x=a, x=b si y solo sí $A = \int_a^b f(x)dx$.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL

1.- $\int_a^b cdx = c(b-a)$; $c \in R$, c= cte

2.- Si f y g son integrales en $[a,b]$ y $c \in R$, entonces cf

f+ g y f- g son integrables en $[a,b]$.

i) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

ii) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

iii) $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

3.- Propiedad de aditividad del intervalo

Si f es integrable en los tres intervalos definidos por a,b y c, entonces :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Demostración de la primera propiedad $\int_a^b cdx = c(b-a)$

c=cte

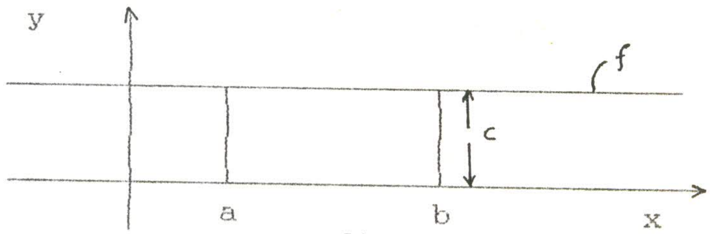


fig # 15

Sea f la función constante definida por $f(x) = c \;\forall\; x \in [a,b]$ y sea $P=\{x_0,x_1,x_2,...,x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Puesto que en cada subintervalo $[x_{j-1},x_j]$, f posee un valor constante c. m_j y $M_j=c$ $S^{-}_{f}(P)=M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2+...+M_n\Delta x_n$

$\rightarrow \quad S^{-}_{f}(P)=c\Delta x_1+c\Delta x_2+...+c\Delta x_n$

$\rightarrow \quad S^{-}_{f}(P)= c(\Delta x_1+\Delta x_2+...+\Delta x_n)$

$\rightarrow \quad S^{-}_{f}(P)=c(b-a)$

$S_{-f}(P)= m_1\Delta x_1+ m_2\Delta x_2+....+m_n\Delta x_n$

$\rightarrow \quad S_{-f}(P)=c\Delta x_1+c\Delta x_2+....+c\Delta x_n$

$\rightarrow \quad S_{-f}(P)=c(\Delta x_1+\Delta x_2+....+\Delta x_n)$

$\rightarrow \quad S_{-f}(P)=c(b-a)$

$S_{-f}(P)\leq c(b-a)\leq S^{-}_{f}(P)$

$\rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx=c(b-a)$

$\rightarrow \quad \int_a^b cdx=c(b-a)$

Demostración de la propiedad # 2

Si f y g son integrables en [a,b] y c $\in$ R, f + g son integrables en [a,b] $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Sean f y g dos funciones definidas en [a,b], $P=\{x0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una partición de [a,b].

$S^-(p)=M_1\Delta x_{1(f+g)}+M_2\Delta x_{2(f+g)} + M_3\Delta x_{3(f+g)}+ \ldots, M_n\Delta x_{n(f+g)}$

$\text{-->}S^-(P)=M_1\Delta x_{1f}+M_1\Delta x_{1g}+M_2\Delta x_{2f}+ M_2\Delta x_{2g} +\ldots+ M_n\Delta x_{nf}+ M_n\Delta x_{ng}$

$\text{-->}S^-(P)=M_1\Delta x_{1f}+M_2\Delta x_{2f}+\ldots+M_n\Delta x_{nf}+M_1\Delta x_{1g}+M_2\Delta x_{2g}+ \ldots+M_n\Delta x_{ng}$

$\text{-->}\ S^-(P) = S^-_f(P) + S^-_g(P)$

$\text{-->}S_{-(f+g)}(P) = m_1\Delta x_{1(f+g)} + m_2\Delta x_{2(f+g)}+\ldots+ m_n\Delta x_{n(f+g)}$

$\text{-->}S-(f+g)(P)= m_1\Delta x_{1f}+m_1\Delta x_{1g}+m_2\Delta x_2f+m_2\Delta x2g+\ldots+m_n\Delta x_{nf}+m_n\Delta x_{ng}$

$S_{(f+g)}(P)=m_1\Delta x_{1f}+m_2\Delta x_{2f}+\ldots+m_n\Delta x_{nf}+m_1\Delta x_{1g}+m_2\Delta x_{2g}+\ldots+m_n\Delta x_{ng}$

$\text{-->}\ S_{-(f+g)}(P)= S_{-f}(P) + S_{-g}(P)$

$\text{-->}\ S_{-f}(P)+ S_{-g}(P)\leq\int_a^b [f(x)+g(x)]dx \leq S^-_f(P)+S^-_g(P)$

$\text{-->}\ \int_a^b[f(X)+g(x)]dx= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Propiedad 2-i)

Si f es integrable en [a,b] y c $\in$R, entonces cf es integrable en [a,b] $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

Demostración.- Sea f una función continua en [a,b] y $c \in R$, sea $P=\{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n\}$ una partición de [a,b]

$S^{-}_f(P) = cM_1\Delta x_1 + cM_2\Delta x_2 + \ldots + cM_n\Delta x_n$

$\dashrightarrow \quad S^{-}_f(P) = c(M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n)$

$\dashrightarrow \quad S_{-f}(P) = cm_1\Delta x_1 + cm_2\Delta x_2 + \ldots + cm_n\Delta x_n$

$\dashrightarrow \quad S_{-f}(P) = c(m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n)$

$\dashrightarrow \quad cS_{-f}(P) \leq c\int_a^b f(x)dx \leq cS_{-f}(P)$

Propiedad de aditividad del intervalo.

Si f es integrable en los tres intervalos definidos pora,b y c si a<b<c entonces:

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c fx)dx + \int_c^b f(x)dx$

En el caso de funciones no negativas se interpreta en términos de área

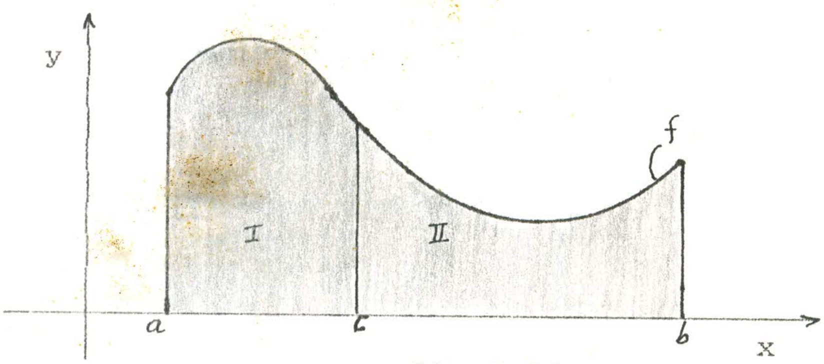


fig # 16

Para demostrar esta propiedad, necesitamos probar solamente

que cada partición $P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ de $[a,b]$, se cumple

$S_{-f}(P)\leq\int_a^c f(t)dt+\int_c^b f(t)dt\leq S^{-}{}_f(P)$. Puesto que la

$Q=P\cup\{c\}$ contiene a P (1) $S_{-f}(P)\leq S_{-f}(Q)$ y $S^{-}{}_f(Q)\leq S^{-}{}_f(P)$

$Q_1= Q\cap[a,c]$ y $Q_2=Q\cap[c,b]$ son particiones de $[a,c]$ y $[c,b]$,

--> $S_{-f}(Q_1) + S_{-f}(Q_2) = S_{-f}(Q)$ y $S^{-}{}_f(Q_1)+S^{-}{}_f(Q_2)=S^{-}{}_f(Q)$

puesto que

$S_{-f}(Q_1)\leq\int_a^c f(t)dt\leq S^{-}{}_f(Q_1)$ y $S_{-f}(Q_2)\leq\int_c^b f(t)dt\leq S^{-}{}_f(Q_2)$

$$S_{-f}(Q_1)+S_{-f}(Q_2)\leq\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt\leq S^{-}{}_f(Q_1) + S^{-}{}_f(Q_2)$$

$S_{-f}(Q)\leq\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt\leq S^{-}{}_f(Q)$ .Según (1)

$$S_{-f}(P)\leq\int_a^c f(t) + \int_c^b f(t)dt\leq S^{-}{}_f(P)$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

Si f es continua en $[a,b]$ entonces existe un número c en (a,b) tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

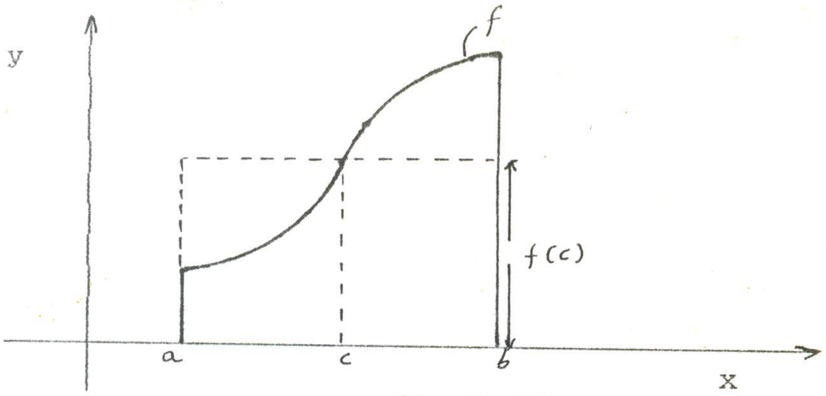


fig # 17

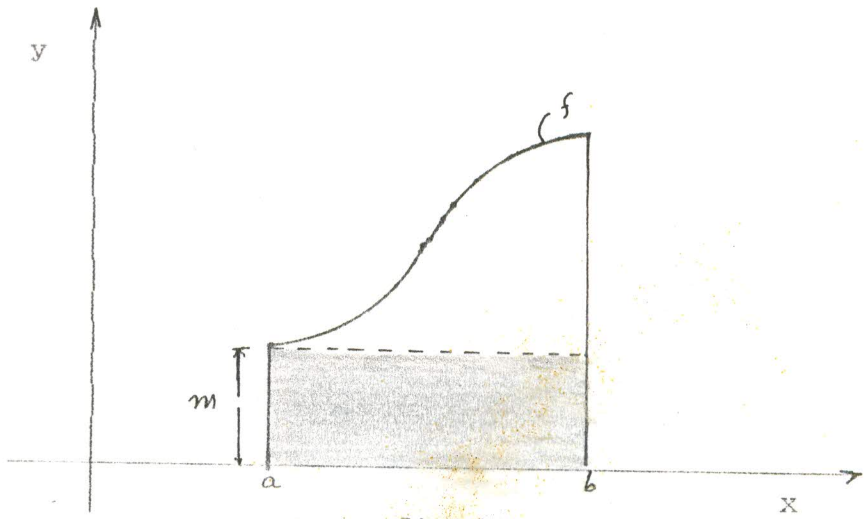


fig #18

Rectángulo inscrito
(área menor que el actual)
$\int_a^b m\,dx = m(b-a)$

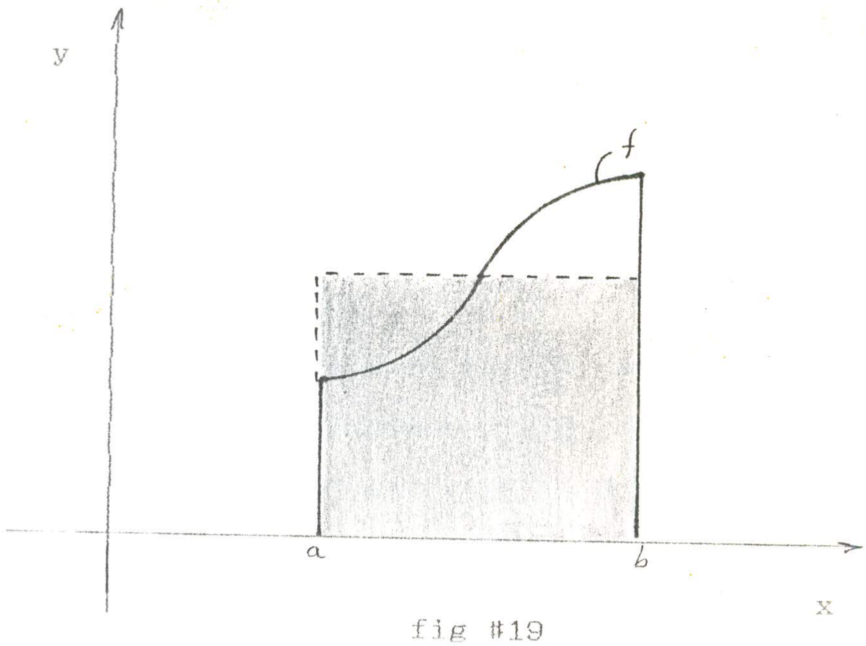


fig #19

Rectángulo del valor medio
(área igual al actual)
$\int_a^b f(x)dx$

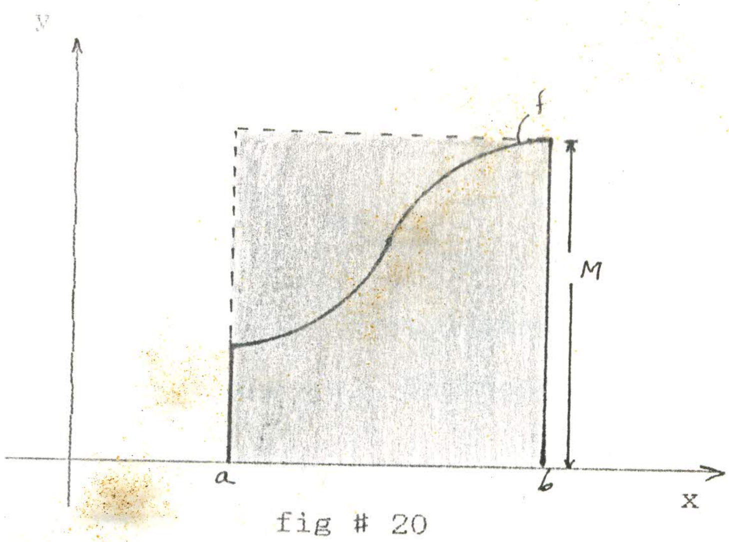


fig # 20

Rectángulo circunscrito
(área mayor que el actual)
$\int_a^b Mdx = M(b-a)$

Demostración

Caso 1.- Si f es constante en el intervalo [a,b], el resultado es trivial puesto que c puede ser cualquier punto en (a,b)

Caso 2.- Si f no es constante en [a,b], entonces por el teorema del valor extremo elegimos m y M como el ínfimo y el supremo de f(x) en [a,b]. $m \le f(x) \le M$; $\forall\, x \in [a,b]$

$$\Longrightarrow \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$\Longrightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \quad \text{como } b-a>0$$

$$\Longrightarrow m \le (1/(b-a))\int_a^b f(x)\,dx \le M \;;$$

Por el teorema del valor intermedio $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = (1/(b-a))\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

NOTA.- El teorema del valor medio para integrales no especifica como determinar c. Solamente garantiza la existencia del número c.

El valor de f(c), dado en el teorema del valor medio para integrales, se le llama valor promedio de f en el intervalo [a,b].

ANTIDERIVADA

Dada la derivada de una función. hallar la función original.

Ejemplo. Hallar una función F que tiene la siguiente derivada

$F'(x)=3x^2$ $F(x)=X^3$ porque $(d/dx)(x^3)=3x^2$

Llamamos a la función F una antiderivada de F´. Por conveniencia usaremos la frase F(x) es una antiderivada de f(x) y su sinónimo F es una derivada de f. Por ejemplo es conveniente decir que x^4 es una antiderivada de $4x^3$

Definición de Antiderivada.- Sea f una función continua en [a,b], una función F se denomina antiderivada de f en [a,b] si y solo sí

i) F es continua en [a,b] y

ii) $F'(x)=f(x)$ $\forall$ $x \in (a,b)$

En esta definición, llamamos a F una antiderivada de f, y no la antiderivada de f. Para ver el por qué, considérese el hecho de que:

$F_1(x)=x^3$, $F_2(x)=x^3-5$ y $F_3(x)=x^3 + 97$ son antiderivadas de $f(x)=3x^2$. Esto sugiere que para cualquier constante C, la función dada por $F(x)=x^3 + C$ es una antiderivada de f.

INTEGRAL INDEFINIDA

Definición de Integral Indefinida.- Sea C una constante de integración y F(x) una antiderivada de f la notación

$\int f(x)dx = F(x) + C$ se llama integración si y solo sí es la solución general de la ecuación $dy = f(x)dx$.

x : variable de integración

f(x): integrando

C: constante de integración

$\int f(x)dx$ leemos como la antiderivada general de f con respecto a x.

La diferencial dx sirve para identificar a x como a la variable de integración.

El término integral indefinida es un sinónimo de antiderivada general. También usaremos el término primitiva como sinónimo de antiderivada.

La naturaleza inversa de la integración y la derivación puede ser vista por el hecho de que mediante la sustitución de F´(x) por f(x) .

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

La integración es la inversa de la derivación. Además, si

$\int f(x)dx = F(x) + C$, entonces $(d/dx)[\int f(x)dx] = (d/dx)[F(x)+C]$

$\longrightarrow (d/dx)[\int f(x)dx] = F'(x) = f(x)$

La derivación es la inversa de la integración.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO

Si una función f es continua en el intervalo [a,b] entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$, donde F es cualquier función tal que

$F'(x)=f(x) \;;\quad \forall\, x \in [a,b]$

1* TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO

Sea f continua en [a,b] y sea G una función definida dela forma $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ entonces G(x) es la antiderivada de f(x) en [a,b], $x\in[a,b]$ $G'(x)=f(x)$

Demostración

$G(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$

$\Rightarrow G(x+\Delta x)-G(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^{x} f(t)dt$

$\Rightarrow G(x+\Delta x)-G(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_x^{a} f(t)dt$

$\Rightarrow G(x+\Delta x)-G(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$

Utilizando el teorema del valor medio para integral

$c; x<c<x+\Delta x$

$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x$

$(G(x+\Delta x)-G(x))/\Delta x=f(c)$

$\lim\limits_{\Delta x \to o^+} f(c) = \lim\limits_{c \to x^+} f(c) = f(x)$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} (G(x+\Delta x)/\Delta x = f(x)$$

$$G'(x)=\lim_{\Delta x \to 0} (G(x+\Delta x)-G(x))/\Delta x = f(x)$$

2.- TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO (Newton y Leibniz)

Sea f continua en [a,b] y sea F(x) cualquier antiderivada de f(x) en [a,b], entonces $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

Demostración

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt$$

$$\int_a^x f(t)dt=F(x) + C$$

si $x=a$

$$\int_a^a f(t)dt=F(a) + C = 0$$

$$c=-F(a)$$

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$$

si $x=b$

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

COROLARIO

Si f es continua en [a,b] y F es cualquier antiderivada de f entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

Ejemplos.

Evaluar la siguiente integral como el área bajo la curva de la función

a) $\int_a^b kdx$

Solución

Si $f(x)=k \dashrightarrow F(x)=kx$ es una primitiva de f

$\int_a^b kdx = F(x)|^b_a = F(b)-F(a)$

$\dashrightarrow \int_a^b kdx = kx|^b_a$

$\dashrightarrow \int_a^b kdx = kb-ka$

$\dashrightarrow \int_a^b kdx = k(b-a)$

fig # 21

Evaluar la siguiente como el área bajo la curva

b) $\int_1^5 xdx$

Solución

Si $f(x)=x \dashrightarrow F(x) = x^2/2$ es una primitiva de f

$\dashrightarrow \int_1^5 xdx=F(x)|^5_1 = F(5)-F(1)$

$\dashrightarrow \int_1^5 xdx=x^2/2|^5_1$

$\dashrightarrow \int_1^5 xdx=5^2/2-1^2/2$

$\dashrightarrow \int_1^5 xdx= 25/2-1/2$

--> $\int_1^5 xdx=24/2$

--> $\int_1^5 xdx=12$

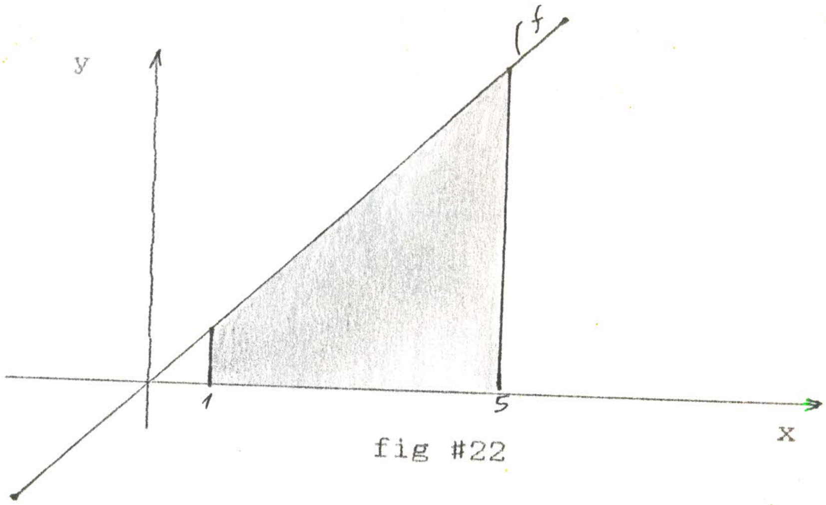


fig #22

Evaluar la siguiente integral como el área bajo la curva

c) $\int_{-2}^{2} x^2dx$

Si $f(x)=x^2$ --> $F(x)=x^3/3$ es una primitiva de f

--> $\int_{-2}^{2} x^2dx=F(x)|^2_{-2}= F(2) - F(-2)$

--> $\int_{-2}^{2} x^2dx=x^3/3|^2_{-2}$

--> $\int_{-2}^{2} x^2dx=2^3/3 - (-2)^3/3$

--> $\int_{-2}^{2} x^2dx=8/3+8/3$

--> $\int_{-2}^{2} x^2dx=16/3$

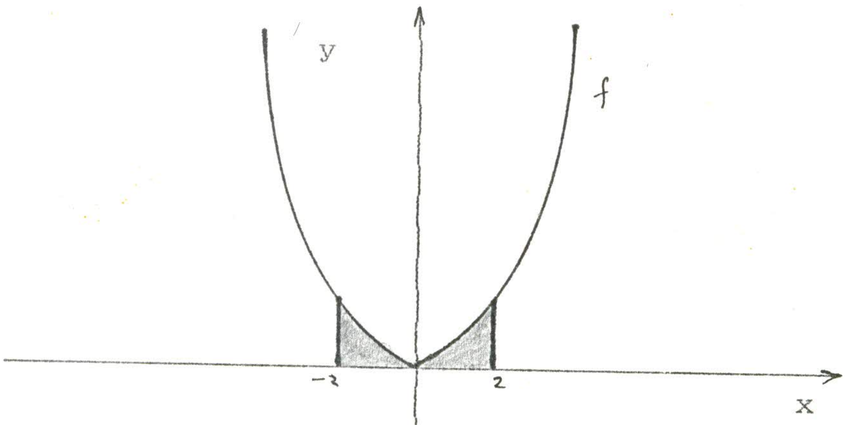


fig.# 23

Evaluar la siguiente integral

d) $\int_0^3 (x^2-2x)dx$

Solución

--> $\int_0^3 (x^2-2x)dx=\int_0^3 x^2dx-\int_0^3 2xdx$

--> $\int_0^3 (x^2-2x)dx=F(x)|^3{}_0 -F(x)|^3{}_0$

--> $\int_0^3 (x^2-2x)dx=x^3/3|^3{}_0 -2x/2|^3{}_0$

--> $\int_0^3 (x^2-2x)dx=(3^3/3-0)-(3^2-0)$

$$\longrightarrow \int_0^3 (x^2-2x)dx=(27/3-0)-(9-0)$$

$$\longrightarrow \int_0^3 (x^2-2x)dx=9-9$$

$$\longrightarrow \int_0^3 (x^2-2x)dx=0$$

Significa que el área bajo el eje x es igual al área sobre el eje x de la función dada

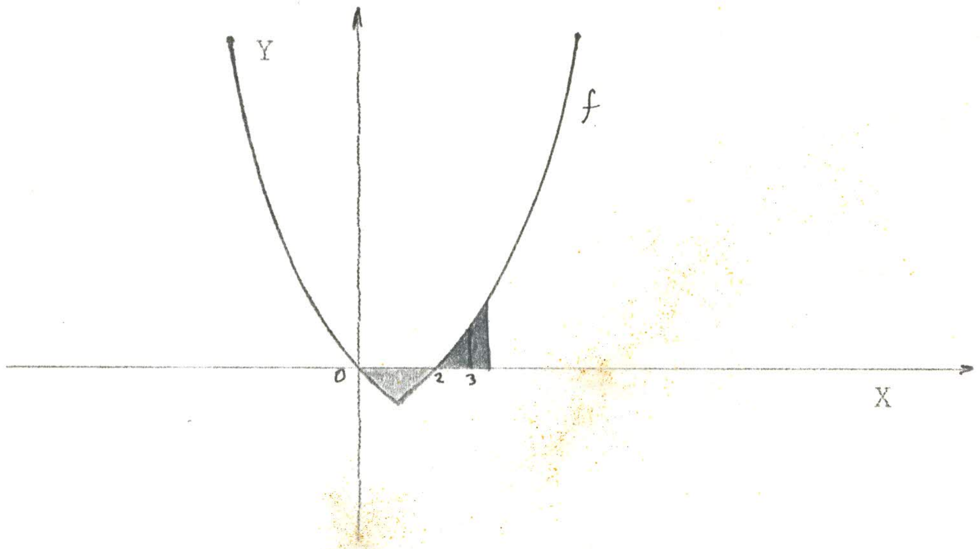


fig #24

GUIA PARA LA INTEGRACION

1.- Memorizar las expresiones matemáticas de integración

2.- Hallar una expresión matemática de integración que se parezca a todo o a parte del integrando , y a fuerza de pruebas encontrar un cambio de u que haga que el integrando se ajuste a la expresión matemática.

3.- Si no puede hallar una u-sustitución que funcione, inténtelo de nuevo cambiando el integrando. Puede probar con una identidad trigonométrica, dividiendo o sumando y restando la misma cantidad.

INTEGRACION POR SUSTITUCION (TECNICA)

El papel de la sustitución de la integración es comparable al de la regla de la cadena en la derivación. Recuérdese que para las funciones derivables dadas por $y=F(u)$ y $u=g(x)$, la regla de la cadena establece que:

$(d/dx)[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$

EL METODO DE SUSTITUCION

Dada la integral indefinida $\int f(g(x)\ g'(x)dx$, sea $u=g(x)$ y $u=g'(x)dx$. Si F es una antiderivada de f, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du=F(u) + C =F(g(x)) + C$$

Teorema. Sea f continua en $\{a\leq y\leq b\}$, sea v una función con una derivada continua v' en $\{c \le x \le d\}$, y sea $v(c)=a$ y $v(d)=b$.

Entonces, si $a \le v \le b$, se tiene

$$\int_a^b f(y)dy=\int_c^d f[v(x)]v'(x)dx$$

Demostración.- Sea $g(y)=\int_a^y f(t)dt$.

Como $\{g(v(x))\}'=g'[v(x)]v'(x)$.

Entonces $g[v(x)]$ es una primitiva de $g'[v(x)]v'(x)$.

Por el teorema fundamental,

$$\int_c^d f[v(x)]v'(x)dx=g[v(x)]\Big|_c^d$$

$$\int_c^d f[v(x)]v'(x)dx= g[v(d)]-g[v(c)]$$

$$\int_c^d f[v(x)]v'(x)dx=g(b)-g(a)$$

$$\int_c^d f[v(x)]v'(x)dx=\int_a^b f(y)dy$$

Ejemplo. Evaluar la integral mediante la sustitución u

a) $\int_0^1 (x^2-1)^4 2xdx$

Solución

Sea $u=x^2-1$ ---> $du=2xdx$

para $x=0$, $u=-1$;   para $x=1$, $u=0$

---> $\int_0^1 (x^2-1)^4 2xdx=\int_{-1}^0 u^4du$

--> $\int_0^1 (x^2-1)^4 2xdx=[u^5/5]^0{}_{-1}$

--> $\int_0^1 (x^2-1)^4 2xdx=1/5$

) Evaluar la integral mediante la sustitución u

$\int_0^1 x(x^2+1)^3dx$

Solución

Sea $u=x^2+1$ --> $du=2xdx$ ---> $du/2 = xdx$

para $x=0$, $u=1$; para $x=1$, $u=2$

--> $\int_0^1 x(x^2+1)^3dx=1/2\int_1^2 u^3du$

--> $\int_0^1 x(x^2+1)^3dx=(1/8)u^4|^2{}_1$

--> $\int_0^1 x(x^2+1)^3dx=(1/8)[16-1]$

--> $\int_0^1 x(x^2+1)^3dx= 15/8$

Ejemplos:

Desarrollar la siguiente integral indifinida

a) $\int 3(3x-1)^4d$

Solución

$\int 3(3x-1)^4dx=\int (3x-1)^4 3dx$

Si $u=3x-1$ -->$du=3dx$

--> $\int (3x-1)^4 3d=\int u^4du$

$\rightarrow \int (3x-1)^4 3dx = u^5/5 + C$

$\rightarrow \int (3x-1)^4 3dx = (3x-1)^5/5 + C$

b) Desarrollar la siguiente integral

$\int (2x+1)(x^2+x)dx$

$\int (2x+1)(x^2+x)dx = \int (x^2+x)(2x+1)dx$

Si $u = x^2+x \rightarrow du = (2x+1)dx$

$\rightarrow \int (x^2+x)(2x+1)dx = \int udu$

$\rightarrow \int (x^2+x)(2x+1)dx = u^2/2 + C$

$\rightarrow \int (x^2+x)(2x+1)dx = (x^2+x)/2 + c$

RESUMEN PARA LA INTEGRACION POR SUSTITUCION

1.- Elegir una sustitución $u=g(x)$. Por lo general, es mejor elegir la parte interior de una función compuesta, por ejemplo, una cantidad elevada a una potencia.

2.- Evaluar el diferencial $du = g'(x)dx$. Anotar cualquier factor k de $g'(x)$ que no sea un factor del integrando dado.

3.- Reexpresar el integrando en la forma $f(u)(du/k)$.

4.- Evaluar la integral resultante en términos de u

5.- Deshacer la sustitución para obtener una primitiva en términos de x.

EXPRESIONES MATEMATICAS DE INTEGRACION

1.- $\int u^n du = u^{n+1}/(n+1) + C; \quad n \neq -1$

2.- $\int du/u = \ln|u| + C$

3.- $\int e^u du = e^u + C$

4.- $\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$

5.- $\int \cos u du = \operatorname{sen} u + C$

6.- $\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C$

7.- $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

8.- $\int \sec u du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

9.- $\int \operatorname{cosec} u du = -\ln|\operatorname{cosec} u + \operatorname{ctg} u| + C$

10.- $\int \sec^2 u du = \operatorname{tg} u + C$

11.- $\int \operatorname{cosec}^2 u du = -\operatorname{ctg} u + C$

12.- $\int \sec u \operatorname{tg} u du = \sec u + C$

13.- $\int \operatorname{cosec} u \operatorname{ctg} u du = -\operatorname{cosec} u + C$

EJERCICIOS

Calcular $\int x^2 \operatorname{sen} x^3 dx$

Solución

Sea $u = x^3$ --> $du = 3x^2dx$ --> $du/3 = x^2dx$

--> $\int x^2 \text{ sen } x^3 dx = \int \text{sen } u \ (du/3)$

--> $\int x^2 \text{ sen } x^3 dx = (1/3)\int \text{sen } u du$

--> $\int x^2 \text{ sen } x^3 dx = -(1/3)\cos u + C$

--> $\int x^2 \text{ sen } x^3 dx = -(1/3)\cos x^3 + C$

Ejercicio # 2

Calcular: $\int (2x/(x+1)2)dx$

Si $u=x+1$ --> $du= dx$, $x= u-1$

--> $\int (2x/(x+1)^2)dx = \int ((2(u-1))/u^2)du$

--> $\int (2x/(x+1)^2dx = 2\int [u/u^2 - 1/u^2]du$

--> $\int (2x/(x+1)^2dx = 2\int du/u - 2\int u^{-2}du$

--> $\int (2x/(x+1)^2dx = 2\ln|u| - 2(u^{-1}/-1) + C$

--> $\int (2x/(x+1)^2dx = 2\ln|u| + 2/u + C$

--> $\int (2x/(x+1)^2dx = 2\ln|x+1| + 2/(x+1) + C$

Ejercicio # 3

Calcular : $\int (2x-1)^{1/2}dx$

si $u= 2x - 1$ --> $du = 2dx$, --> $dx= du/2$

--> $\int (2x-1)^{1/2}dx = \int u^{1/2}(du/2)$

--> $\int (2x-1)^{1/2}dx = (1/2)\int u^{1/2}du$

--> $\int(2x-1)^{1/2}dx = (1/2)(u^{3/2}/(3/2)) + C$

--> $\int(2x-1)^{1/2}dx = (1/3)u^{3/2} + C$

--> $\int(2x-1)^{1/2}dx = (1/3)(2x-1)^{3/2} + C$

CONCLUSION

- Este trabajo es realizado para alumnos del Colegio que estan iniciando el estudio del Cálculo Integral, al revizar el mismo, tendrá una visión más clara de los conocimientos que ha recibido.

- El método utilizado para integrar es el de Sustitución, para integrales definidas e indefinidas

- Las representaciones gráficas son las más familiares de los estudiantes

BIBLIOGRAFIA

FULKS,W.(1 991), Cálculo Avanzado. Editorial Limusa. México

ARA,J.(1 982).Análisis Matemático, 2@ Edición, Editado n el Centro de Matemática de la Universidad Central. uito

LAS, S.(1 976), Cálculo. Editorial Reverte. España