**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

| | |
|---|---|
| **AÑO:** 2020 | **PERIODO:** SEGUNDO TERMINO |
| **MATERIA:** Álgebra Lineal | **PROFESORES:** Garcia A, Laveglia F, Martinez M, Ramirez J, Valdiviezo J, Varas A, Vielma J. |
| **EVALUACIÓN:** SEGUNDA | **FECHA:** 28/01/2021 |

# COMPROMISO DE HONOR

"Yo declaro que he sido informado y conozco las normas disciplinarias que rigen a la ESPOL, en particular el Código de Ética y el reglamento de Disciplina.

Al aceptar este compromiso de honor, reconozco y estoy consciente de que la presente evaluación está diseñada para ser resuelta de forma individual; que puedo comunicarme únicamente con la persona responsable de la recepción de la evaluación; y, que al realizar esta evaluación no navegaré en otras páginas que no sean las páginas de la sidweb/plataforma de la evaluación; que no recibiré ayuda ni presencial ni virtual; que no haré consultas en libros, notas, ni apuntes adicionales u otras fuentes indebidas o no autorizadas por el evaluador; ni usaré otros dispositivos electrónicos o de comunicación no autorizados.

Además, me comprometo a mantener encendida la cámara durante todo el tiempo de ejecución de la evaluación, y en caso de que el profesor lo requiera, tomar una foto de las páginas en las que he escrito el desarrollo de los temas y subirlas a la Sidweb/plataforma de la evaluación, como evidencia del trabajo realizado, estando consciente de que el no subirlo, anulará mi evaluación.

Acepto el presente compromiso, como constancia de haber leido y aceptado la declaración anterior y me comprometo a seguir fielmente las instrucciones que se indican para la realización de la presente evaluación (incluyendo los requisitos de uso de la tecnología).

Estoy consciente de que el incumplimiento del presente compromiso, anulará automáticamente mi evaluación y podría ser objeto del inicio de un proceso disciplinario".

***Acepto el presente compromiso, como constancia de haber leído y estar de acuerdo con la declaración anterior.***

*"Como estudiante de la ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".*

# TEMA 1:

Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita con producto interno sobre el campo R. Sea dimV=n y dimW=m. Sea T una transformación lineal de V en W. Califique las siguientes proposiciones de acuerdo a su nivel de veracidad en una de las siguientes tres categorías:

**S**: Siempre verdadera

**A**: A veces verdadera

**N**: Nunca verdadera

1.- Si U= $\{v_1, v_2, v_3 \ldots v_k\}$ es un conjunto ortogonal, entonces U es linealmente independiente

2.- Si $\{v_1, v_2, v_3 \ldots v_k\}$ es un conjunto linealmente independiente, entonces $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3),..T(v_k)\}$ es linealmente independiente

3.- Si $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3),..T(v_k)\}$ es linealmente independiente, entonces

$\{v_1, v_2, v_3 \ldots v_k\}$ es un conjunto linealmente independiente

4.- Si U= $\{v_1, v_2, v_3 \ldots v_k\}$ es un conjunto ortogonal, entonces $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3),..T(v_k)\}$ es ortogonal

5.- Si $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3),..T(v_k)\}$ genera a W, entonces $\{v_1, v_2, v_3 \ldots v_k\}$ genera a V

6.- Si Si $\{v_1, v_2, v_3 \ldots v_k\}$ es un conjunto de vectores propios de una matriz simétrica, entonces $\{v_1, v_2, v_3 \ldots v_k\}$ es un conjunto ortogonal.

7.- Si U= $\{v_1, v_2, v_3 \ldots v_k\}$ es un conjunto ortonormal, entonces U es linealmente independiente

8.- Si $\{v_1, v_2, v_3 \ldots v_k\}$ es un conjunto linealmente dependiente, entonces $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3),..T(v_k)\}$ es linealmente dependiente.

9.- Si $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3),..T(v_k)\}$ es linealmente dependiente, entonces

$\{v_1, v_2, v_3 \ldots v_k\}$ es un conjunto linealmente dependiente

10.- Si U= $\{v_1, v_2, v_3 \ldots v_k\}$ es un conjunto de vectores propios correspondientes a valores propios distintos ente si, entonces U es un conjunto linealmente independiente

11.- Si U=$\{v_1, v_2, v_3 \ldots v_k\}$ es un conjunto de vectores propios de una matriz simétrica correspondientes a valores propios distintos ente si, entonces U es un conjunto linealmente independiente.

12.- Si U=$\{v_1, v_2, v_3 \ldots v_k\}$ es un conjunto de vectores propios de una matriz simétrica correspondientes a valores propios distintos ente si, entonces U es un conjunto ortogonal de vectores.

13.- Si A es una matriz simétrica, entonces A tiene valores propios reales

14.- Si $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3),..T(v_m)\}$ es linealmente independiente, entonces T es sobreyectiva

15.- Si T es un isomorfismo, entonces cualquier matriz que represente a T es una matriz cuadrada inversible

16.- Sea A una representación matricial de T. Si el rango de A es menor a n, entonces T no es inyectiva

17.- Si $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3),..T(v_k)\}$ es linealmente dependiente, entonces

$\{v_1, v_2, v_3 \ldots v_k\}$ es un conjunto linealmente independiente

18.- Si T es un isomorfismo entonces la representación matricial de T es una matriz singular

19.- Si T es inyectiva y B= $\{v_1, v_2, v_3 \ldots v_n\}$ es una base de V entonces $n < m$.

20.- Si H es un subespacio no nulo de V entonces dim $(H^{\perp}) = n$

21.- Sea H y M subespacios de V entonces T(H) y T(M) son disjuntos.

22.-Es posible construir isomorfismos de V en $R^n$.

23.- Si x es un vector del núcleo de T, entonces T(x) no pertenece a $W^{\perp}$.

24.-Sea A una representación matricial de T, entonces $A^TA$ es una matriz diagonalizable de manera ortogonal.

# TEMA 2:

1. Sea $T: M_{2X2} \longrightarrow M_{2X2}$ una transformación lineal tal que:

$$T(A) = MA + AM^T \quad , \qquad donde\ M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Determine una base y la dimensión del $KerT\ e\ \ ImT$.
   b) Determine si T es inyecta y sobreyectiva.

2. Sea $T: M_{2X2} \longrightarrow M_{2X2}$ una transformación lineal tal que:

$$T(A) = M^TA + AM \quad , \qquad donde\ M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine una base y la dimensión del $KerT\ e\ \ ImT$.
b) Determine si T es inyecta y sobreyectiva.

3. Sea $T: M_{2X2} \longrightarrow M_{2X2}$ una transformación lineal tal que:

$$T(A) = MA + AM^T \ , \qquad donde\ M = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine una base y la dimensión del $KerT\ e\ ImT$.
b) Determine si T es inyecta y sobreyectiva.

4. Sea $T: M_{2X2} \longrightarrow M_{2X2}$ una transformación lineal tal que:

$$T(A) = MA + AM^T \ , \qquad donde\ M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine una base y la dimensión del $KerT\ e\ ImT$.
b) Determine si T es inyecta y sobreyectiva.

5. Sea $T: M_{2X2} \longrightarrow M_{2X2}$ una transformación lineal tal que:

$$T(A) = M^T A + AM \ , \qquad donde\ M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine la base y dimensión del $KerT\ e\ ImT$.
b) Determine si T es inyecta y sobreyectiva.

# <u>TEMA 3:</u>

1. Sea $W$ el espacio columna de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & 8 \end{pmatrix}$. Hallar la distancia del vector $z = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ al espacio $W$

2. Sea $W$ el espacio columna de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & -8 & 3 \end{pmatrix}$. Hallar la distancia del vector $z = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ al espacio $W$

3. Sea $W$ el espacio columna de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$. Hallar la distancia del vector $z = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ al espacio $W$

4. Sea $W$ el espacio columna de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 4 & -2 & -14 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar la distancia del vector $z = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ al espacio $W$

5. Sea $W$ el espacio columna de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Hallar la distancia del vector $z = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ al espacio $W$

# TEMA 4:

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

   Expresar $A^{10}$ utilizando diagonalización de matrices

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

   Expresar $A^{20}$ utilizando diagonalización de matrices

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   Expresar $A^{20}$ utilizando diagonalización de matrices

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Expresar $A^{25}$ utilizando diagonalización de matrices

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

   Expresar $A^{25}$ utilizando diagonalización de matrices

# TEMA 5:

Demuestre la siguiente proposición en caso de ser verdadera, caso contrario presente un contraejemplo:

Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Sean $v, w \in V$, $w \neq 0_V$, entonces $\left\| \text{proy}_w^v \right\| \leq \|v\|$

2. Si $v, w \in V$, entonces $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$

3. Sean $v, w \in V$, $v \neq 0_V$, $w \neq 0_V$, entonces $\text{proy}_w^v = -\text{proy}_v^w$

4. Sea $v_0 \in V$, se define el funcional lineal $L : V \to \mathbb{R}$ como $L(v) = \langle v, v_0 \rangle$, entonces $v_0 \in N(L)^\perp$

5. Sean $v, w \in V$, tal que $\langle v, w \rangle = 0$, entonces $\|v\| \leq \|v + \alpha w\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$