Procesos Estocásticos

Primera Evaluación

20 de noviembre de 2018

Nombre:____

1. El crecimiento de un tipo de tumor depende de varios factores: la constitución genética del paciente, su alimentación, su edad, entre otros. La historia muestra que en el 30% de los pacientes el tumor crece a razón de 1% diario, en el 42% el crecimiento es del 2% diario, y en el resto es del 3% diario. Una resonancia magnética revela que cierto paciente tiene un tumor de este tipo de 2 cm^3, pero no se sabe su tasa de crecimiento diario. Suponga que X_n es el tamaño del tumor el día n (el día cero es el día que se descubrió el tumor).

   a. (5 puntos) ¿Cuál es la distribución de probabilidades de X_n? (SUGERENCIA: defina la variable aleatoria Z como $P(Z = 1.01) = 0.30$, etc.)
   Solución: Si crece a razón de 1% diario, entonces $X_n = 1.01 \times X_{n-1}$. Como $X_0 = 2$, entonces $X_n = 2 \times (1.01)^n$. Pero, no sabemos si el porcentaje de crecimiento será del 1%, 2% ó 3%. Entonces, podemos definir la variables aleatoria Z con la distribución de probabilidades $P(Z = 1.01) = 0.30, P(Z = 1.02) = 0.42, P(Z = 1.03) = 0.28$. Entonces $X_n = 2 \times Z^n$.
   Ahora, la distribución de probabilidad de X_n es

$$
\begin{aligned}
P(X_n = 2 \times (1.01)^n) &= 0.3 \\
P(X_n = 2 \times (1.02)^n) &= 0.42 \\
P(X_n = 2 \times (1.03)^n) &= 0.28
\end{aligned}
$$

   b. (5 puntos) Calcule $\mu_n = \mathrm{E}(X_n)$.
   Solución:

$$
\begin{aligned}
\mu_n &= 2 \times (1.01)^n \times 0.3 + 2 \times (1.02)^n \times 0.42 + 2 \times (1.03)^n \times 0.28 \\
&= 0.6 \times (1.01)^n + 0.84 \times (1.02)^n + 0.56 \times (1.03)^n
\end{aligned}
$$

   c. (5 puntos) Calcule $\sigma_n^2 = \mathrm{var}(X_n)$.
   Solución:

$$
\begin{aligned}
\sigma_n^2 = \mathrm{E}(X_n^2) - \mu_n^2 &= 4 \times (1.01)^{2n} \times 0.3 + 4 \times (1.02)^{2n} \times 0.42 + 4 \times (1.03)^{2n} \times 0.28 \\
&\quad - \big(0.6 \times (1.01)^n + 0.84 \times (1.02)^n + 0.56 \times (1.03)^n\big)^2 \\
&= 0.84 \times (1.01)^{2n} + 0.9744 \times (1.02)^{2n} + 0.8064 \times (1.03)^{2n} \\
&\quad - 1.008 \times (1.0302)^n - 0.672 \times (1.0403)^n - 0.9408 \times (1.0506)^n
\end{aligned}
$$

   d. (5 puntos) Calcule $\sigma_{mn} = \mathrm{cov}(X_m, X_n)$.
   Solución:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{mn} &= \mathrm{E}(X_m X_n) - \mu_m\mu_n = \mathrm{E}(2 \times Z^m \times 2 \times Z^n) - \mu_m\mu_n = \mathrm{E}(4 \times Z^{m+n}) - \mu_m\mu_n \\
&= 4 \times (1.01)^{m+n} \times 0.3 + 4 \times (1.02)^{m+n} \times 0.42 + 4 \times (1.03)^{m+n} \times 0.28 \\
&\quad - \big(0.6 \times (1.01)^m + 0.84 \times (1.02)^m + 0.56 \times (1.03)^m\big) \times \big(0.6 \times (1.01)^n + 0.84 \times (1.02)^n + 0.56 \times (1.03)^n\big) \\
&= 0.84 \times (1.01)^{m+n} + 0.9744 \times (1.02)^{m+n} + 0.8064 \times (1.03)^{m+n} \\
&\quad - 0.504 \times \big((1.01)^m(1.02)^n + (1.01)^n(1.02)^m\big) - 0.336 \times \big((1.01)^m(1.03)^n + (1.01)^n(1.03)^m\big) \\
&\quad - 0.4704 \times \big((1.02)^m(1.03)^n + (1.02)^n(1.03)^m\big)
\end{aligned}
$$

   e. (5 puntos) ¿Es el proceso estacionario? Justifique su respuesta.
   Solución: No porque la media no es constante.

2. Un amplificador recibe como entrada la señal $\sin(2\pi t/10)$ y se espera una salida amplificada de 5 veces la señal de entrada. Sin embargo, el amplificador aumenta un ruido de acuerdo a una distribución normal con media cero y varianza uno, por lo que si se toma una muestra por segundo de la salida obtenida, la medición será $X_n = 5\sin(2\pi n/10) + Z_n$, donde $Z_n \sim N(0,1)$. Suponga que los ruidos medidos en cada segundo son independientes.

   a. (5 puntos) Encuentre la media del proceso $\mu_n = E(X_n)$.
   Solución:

$$\mathrm{E}(X_n) = \mathrm{E}\big(5\sin(2\pi n/10) + Z_n\big) = 5\sin(2\pi n/10) + \mathrm{E}(Z_n) = 5\sin(2\pi n/10)$$

   b. (5 puntos) Encuentre la varianza del proceso $\sigma_n^2 = \mathrm{var}(X_n)$.
   Solución:

$$\mathrm{var}(X_n) = \mathrm{var}\big(5\sin(2\pi n/10) + Z_n\big) = \mathrm{var}(Z_n) = 1$$

   c. (5 puntos) Encuentre la covarianza del proceso $\sigma_{mn} = \mathrm{cov}(X_m, X_n)$.
   Solución:

$$\begin{aligned}\sigma_{mn} = \mathrm{E}(X_m X_n) - \mu_m\mu_n &= \mathrm{E}\Big(\big(5\sin(2\pi m/10) + Z_m\big)\big(5\sin(2\pi n/10) + Z_n\big)\Big) - \big(5\sin(2\pi m/10)\big)\big(5\sin(2\pi n/10)\big)\\ &= \mathrm{E}\big(25\sin(2\pi m/10)\sin(2\pi n/10) + \sin(2\pi m/10)Z_n + Z_m\sin(2\pi n/10) + Z_m Z_n\big)\\ &\quad - 25\sin(2\pi m/10)\sin(2\pi n/10)\\ &= 25\sin(2\pi m/10)\sin(2\pi n/10) + \sin(2\pi m/10)\,\mathrm{E}(Z_n) + \mathrm{E}(Z_m)\sin(2\pi n/10) + \mathrm{E}(Z_m Z_n)\\ &\quad - 25\sin(2\pi m/10)\sin(2\pi n/10) = 0\end{aligned}$$

   d. (5 puntos) ¿Es el proceso estacionario? Justifique su respuesta.
   Solución: No porque la media no es constante.

3. Suponga que $X_1, X_2, \ldots$ son variables i.i.d con $P(X_n = -1) = 0.4$ y $P(X_n = 1) = 0.6$. Defina la caminata aleatoria $S_0 = 0$ y $S_n = S_{n-1} + X_n$.

   a. (5 puntos) Calcule $P(S_7 = 3)$.
   Solución:
   $$P(S_7 = 3) = \binom{7}{5} 0.6^5 0.4^2 = 0.2612736$$

   b. (5 puntos) Calcule $P(S_8 = -2)$.
   Solución:
   $$P(S_8 = -2) = \binom{8}{3} 0.6^3 0.4^5 = 0.123863$$

   c. (5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad condicional de que $S_{10} = 4$ dado que $S_7 = 3$? (SUGERENCIA: considere una caminata aleatoria nueva desde el tiempo 7 y que en tres pasos sea igual a 1)
   Solución: Tomando en cuenta que $S_{10} = S_7 + X_8 + X_9 + X_{10}$ y que $S_7 = 3$, entonces para que $S_{10} = 4$ tiene que cumplirse que $X_8 + X_9 + X_{10} = 1$. Este último es una caminata aleatoria de 3 pasos con la misma distribución que la original, por lo que
   $$P(S_{10} = 4 | S_7 = 3) = P(S_3 = 1) = \binom{3}{2} 0.6^2 0.4^1 = 0.432$$

   d. (5 puntos) Calcule la probabilidad de que la primera vez que la caminata llegue a 1 sea en el séptimo paso.
   Solución: Suponga que $N = \min\{n : S_n = 1\}$. Entonces,
   $$P(N = 7) = \frac{1}{7} \binom{7}{4} 0.6^4 0.4^3 = 0.041472$$

4. Un estudiante sale de su trabajo a las 4:00 pm y corre al paradero que queda a 3 minutos para coger un bus que lo lleve a la universidad. El horario de llegada del bus es a las 4:05, pero por lo variable del tráfico en el recorrido previo a ese paradero, el tiempo de llegada es las 4:05 más una variable aleatoria T con distribución $f(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}|t|, -3 < t < 3$, tal que $T = 2.5$ quiere decir que el bus llega a las 4:07:30. Si pierde el bus, el siguiente bus pasará a las 4:15, y por ende el estudiante llegará tarde a su clase. El tiempo de recorrido después de ese paradero es fijo, y es de 20 minutos hasta el paradero de la universidad, donde el estudiante, si corre, se hace dos minutos para llegar al aula de la clase de las 4:30. Esta rutina la tiene dos veces por semana. El profesor de la clase tiene la siguiente política de atrasos: si el estudiante llega atrasado, tiene un punto menos, pero si llega a tiempo le sube un punto. La clase dura 4 semanas, por lo que el estudiante puede ganar o perder hasta 8 puntos.

   a. (5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante llegue atrasado a su clase?
   Solución: El estudiante siempre llega a las 4:03 al paradero, por lo que si el bus llegara entre las 4:03 y las 4:08, el estudiante llegaría a tiempo a su clase. En otras palabras, si $-2 \leq T \leq 3$, el estudiante llega a tiempo. Por otro lado, si el bus llegara entre las 4:02 y 4:03, el estudiante perdería el bus, tendría que esperar el siguiente y por ende llegará tarde. Por eso, $P(\text{estudiante llegue tarde}) = P(T < -2)$.
   Esta probabilidad se puede hallar de dos maneras. La primera es geométricamente, notando que el área deaseada es un triángulo con base 1 ($-3 \leq t < -2$) y altura $f(-2) = 1/9$. Entonces, el área deseada es base por altura sobre dos que es $P(T < -2) = 1/18$. La segunda manera se puede hacer integrando:

$$\begin{aligned} P(T < -2) &= \int_{-3}^{-2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}|t|\right) dt = \int_{-3}^{-2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}t\right) dt = \frac{t}{3} + \frac{1}{18}t^2 \Big|_{-3}^{-2} \\ &= \left(\frac{-2}{3} + \frac{1}{18}(-2)^2\right) - \left(\frac{-3}{3} + \frac{1}{18}(-3)^2\right) = \left(-\frac{4}{9}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

   b. (5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante reciba los 8 puntos por puntualidad?
   Solución: La probabilidad de que suba un punto es $p = 17/18$, y de que pierda un punto es $q = 1/18$. Por ende

$$P(S_8 = 8) = \binom{8}{8} \left(\frac{17}{18}\right)^8 \left(\frac{1}{18}\right)^0 = 0.6330111$$

   c. (10 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que, al final del curso, el estudiante pierda puntos por sus atrasos?
   Solución: El estudiante perderá puntos si $S_8 < 0$. Entonces

$$\begin{aligned} P(S_8 < 0) &= P(S_8 = -2) + P(S_8 = -4) + P(S_8 = -6) + P(S_8 = -8) \\ &= \binom{8}{3}\left(\frac{17}{18}\right)^3\left(\frac{1}{18}\right)^5 + \binom{8}{2}\left(\frac{17}{18}\right)^2\left(\frac{1}{18}\right)^6 + \binom{8}{1}\left(\frac{17}{18}\right)^1\left(\frac{1}{18}\right)^7 + \binom{8}{0}\left(\frac{17}{18}\right)^0\left(\frac{1}{18}\right)^8 \\ &= 2.4966333 \times 10^{-5} + 7.343039 \times 10^{-7} + 1.2341242 \times 10^{-8} + 9.0744426 \times 10^{-11} \\ &= 2.5713068 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

   Es muy poco probable que el estudiante pierda puntos al final por atrasos.

5. Existen caminatas aleatorias con la posibilidad de no se avance en un paso. Suponga que $X_1, X_2, \ldots$ son iid, tales $P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = -1) = q$ y $P(X_n = 0) = r$, donde $p + q + r = 1$. El valor r representa la probabilidad de no avanzar en un paso. Sea $S_0 = 0$ y $S_n = S_{n-1} + X_n$.

   a. (5 puntos) Calcule $\mu_n = \mathrm{E}(S_n)$.
   Solución:
$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_n) &= 1 \times p + (-1) \times q + 0 \times r = p - q \\ S_n &= X_1 + \cdots + X_n \\ \mathrm{E}(S_n) &= \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_n) = (p - q) + \cdots + (p - q) = n(p - q) \end{aligned}$$

   b. (5 puntos) Calcule $\sigma_n^2 = \mathrm{var}(S_n)$.
   Solución:
$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X_n) &= \mathrm{E}(X_n^2) - (\mathrm{E}(X_n))^2 = 1^2 \times p + (-1)^2 \times q + 0^2 \times r - (p - q)^2 \\ &= p + q - (p - q)^2 \\ \mathrm{var}(S_n) &= \mathrm{var}(X_1 + \cdots + X_n) \\ &= \mathrm{var}(X_1) + \cdots + \mathrm{var}(X_n) + 2\,\mathrm{cov}(X_1, X_2) + \cdots + 2\,\mathrm{cov}(X_{n-1}, X_n) \\ &= p + q - (p - q)^2 + \cdots + p + q - (p - q)^2 + 0 + \cdots + 0 \\ &= n\left(p + q - (p - q)^2\right) \end{aligned}$$

   c. (5 puntos) Calcule $P(S_2 = 1)$.
   Solución: Si $X_1 = -1$ sería imposible que $S_2 = 1$. Si $X_1 = 0$, entonces $X_2 = 1$ sería la única manera de que $S_2 = 1$. Si $X_1 = 1$, entonces $X_2 = 0$ lograría el objetivo. Entonces
$$\begin{aligned} P(S_2 = 1) &= P(X_1 = 0, X_2 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 0) \\ &= P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) \\ &= rp + pr = 2pr \end{aligned}$$

Fórmulas Útiles

Si $X_1, X_2, \ldots$ son iid, tales $P(X_n = 1) = p$ y $P(X_n = -1) = q = 1 - p$, $S_0 = 0$ y $S_n = S_{n-1} + X_n$ para $n = 1, 2 \ldots$, entonces

$$P(S_n = k) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

donde $r = \frac{1}{2}(n + k)$ deber ser un entero (recuerde que $r(+1) + (n - r)(-1) = k$).

Si

$$N = \inf\{n \geq 1 : S_n = 1\}$$

entonces

$$P(N = 2j - 1) = \frac{1}{2j - 1} \binom{2j - 1}{j} p^j q^{j-1}$$