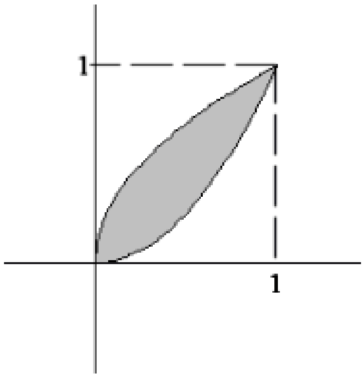
AÑO: 2022	PAO2
MATERIA: **CÁLCULO VECTORIAL**	**SOLUCIÓN Y RÚBRICA**
MEJORAMIENTO	
TIEMPO DE DURACIÓN: 2 Horas	FECHA: Febrero 13 de 2023

PRIMER TEMA (40 puntos)
Justifique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) **C es la curva cerrada formada por las curvas $y = x^2$, $x = y^2$, entonces si se aplica el Teorema de Green para calcular la integral de línea $\int_c \left(y + e^{\sqrt{x}}\right) dx + \left(2x + cos(y^2)\right) dy$, su resultado es $\frac{1}{3}$**

VERDADERO

$$M = y + e^{\sqrt{x}} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$
$$N = 2x + cos(y^2) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2$$



$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \iint_R (2-1)\, dA = \iint_R dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\, dx = \int_0^1 y|_{x^2}^{\sqrt{x}}\, dx =$$

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1}{3}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe utilizar correctamente el teorema de Green para calcular una integral de línea dada.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No realiza proceso coherente alguno, no realiza un gráfico correcto ni plantea bien el teorema de Green.	Realiza correctamente el gráfico, identifica la curva cerrada con su región interna y plantea correctamente el teorema de Green.	Realiza un gráfico correcto, plantea el teorema de Green, deriva bien y coloca correctamente los límites de integración en la integral doble	Realiza un gráfico correcto, plantea el teorema de Green, deriva bien, coloca bien los límites de integración en la integral doble, la resuelve y concluye que la proposición es verdadera.
	0	1-4	5-8	9-10

b) Dada las funciones $g(x,y) = (x^2+1,\ y^2)$ y $f(u,v) = (u+v,\ u\,, v^2)$, entonces la suma de los elementos de la matriz $D(f\circ g)_{(1,1)}$ es igual a 8.

FALSO

$$D(f\circ g)_{(1,1)} = D(f)_{g(1,1)}\, D(g)_{(1,1)}$$

$$g(1,1) = (2,1)$$

$$Df(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix} \rightarrow D(f)_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \rightarrow Dg(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D(f\circ g)_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$10 \neq 8$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante sabe calcular la matriz Jacobiana de una composición de funciones utilizando la regla de la cadena generalizada.	No realiza proceso coherente alguno.	Plantea correctamente la regla de la cadena generalizada indicando en qué puntos debe evaluar cada matriz.	Plantea correctamente la regla de la cadena generalizada y calcula las matrices Jacobianas de las funciones f y g evaluándolas bien en los puntos correctos.	Plantea correctamente la regla de la cadena generalizada, calcula D_f y D_g evaluadas puntos correctos, realiza la multiplicación matricial, suma los elementos y concluye que el enunciado es falso.
	0	1-3	4-8	8-10

c) Si a usted se le asegura que el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos\left(x^2+y^2+\frac{3\pi}{2}\right)}{x^2+y^2}$ **existe, entonces su valor es -1**

FALSO

Note que si $(x, y) \to (0,0)$ entonces $\cos\left(x^2 + y^2 + \frac{3\pi}{2}\right) \to 0$ y $(x^2 + y^2) \to 0$, teniendo una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$

Como el límite existe, el límite puede ser determinado a través de cualquier trayectoria.

Escojemos la trayectoria: $y = x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos\left(x^2 + y^2 + \frac{3\pi}{2}\right)}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(x^2 + x^2 + \frac{3\pi}{2}\right)}{x^2 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(2x^2 + \frac{3\pi}{2}\right)}{2\,x^2}$$

Podemos aplicar la Regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(2x^2 + \frac{3\pi}{2}\right)}{2\,x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-4x\,sen\left(2x^2 + \frac{3\pi}{2}\right)}{4x} = \lim_{x\to 0}\left(-sen\left(2x^2 + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = 1$$

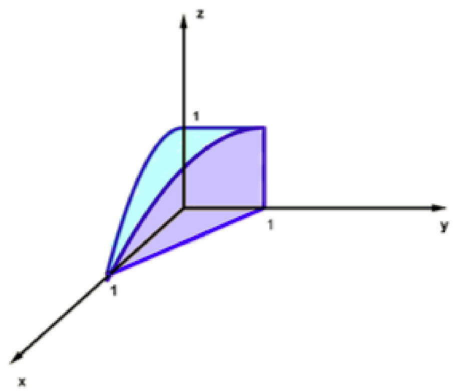
Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe calcular un límite para una función de dos variables.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No realiza proceso alguno, pero identifica que hay una indeterminación de tipo 0/0	Indica que hay indeterminación 0/0, y elabora una estrategia para resolver el límite o para probar que no es -1, sea usando identidades trigonométricas o mediante la elección de una trayectoria.	Indica la indeterminación, elabora la estrategia de resolución llegando a un límite que o no resuelve o lo resuelve de forma errada.	Indica la indeterminación, elabora la estrategia de resolución llegando a un límite que resuelve correctamente usando límites notables o regla de L'Hopital. Además, concluye que el enunciado es falso.
	0-1	2-4	5-7	8-10

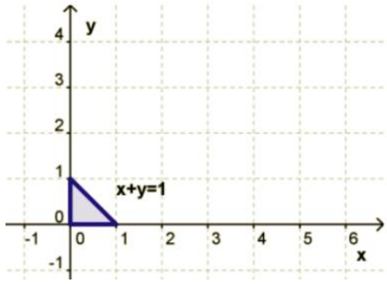
d) **Sea Q la región tridimensional ubicada en el primer octante y limitada por las superficies $x + y = 1$, $z = 1 - x^2$, entonces el volumen de Q es igual a $\frac{5}{12}\ u^3$**

VERDADER0

Un bosquejo de la región limitada por el plano y la superficie cilíndrica dada es el siguiente:



Entonces, la proyección de Q en el plano XY es el triángulo limitado por las rectas $x + y = 1$, $x = 0$, y $y = 0$:



$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x^2} dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x^2)\; dy\, dx = \int_0^1 (1-x^2)(1-x)\; dx =$$

$$\int_0^1 (1-x-x^2+x^3)\, dx = \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}\; u^3$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe cómo calcular el volumen de un sólido en el espacio mediante el uso de integrales dobles o triples.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No realiza proceso coherente alguno.	Grafica correctamente el sólido en el espacio y la región de integración en uno de los planos coordenados.	Plantea la integral doble o triple con base en los gráficos correctos para calcular el volumen colocando adecuadamente los límites de integración.	Plantea la integral doble o triple con base en los gráficos correctos para calcular el volumen colocando adecuadamente los límites de integración y además resuelve bien la integral y concluye que el enunciado es verdadero.
	0	1-3	4-7	8-10

SEGUNDO TEMA (15 puntos)

Obtenga, identifique y bosqueje la superficie en coordenadas cartesianas, cuya ecuación en coordenadas esféricas es $\boldsymbol{\rho = 3\, csc(\phi)}$

Para obtener la superficie partimos de la ecuación

$$\rho = 3\, csc(\phi) \;\Rightarrow\; \rho = \frac{3}{sen(\phi)} \;\Rightarrow\; \rho\, sen(\phi) = 3 \qquad (1).$$

De las coordenadas esféricas se sabe que:

$x = \rho\cos(\theta)\, sen(\emptyset)$; $y = \rho\, sen(\theta)\, sen(\emptyset)$, por tanto, multiplicando en (1) en ambos lados de la igualdad por $cos(\theta)$ con $cos(\theta) \neq 0$, se tiene que

$$\rho cos(\theta)\ sen(\phi) = 3cos(\theta) \;\Rightarrow \mathrm{x} = 3cos(\theta)$$

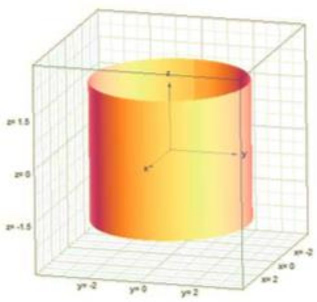
De forma análoga multiplicando (1) por $sen(\theta)$ con $sen(\theta) \neq 0$, se tiene que

$y = 3sen(\theta)$. Elevando al cuadrado tanto a x como a y, se tiene que

$$x^2 + y^2 = 9\, cos^2(\theta) + 9\, sen^2(\theta) = 9.$$

Entonces, la ecuación en cartesianas es: $x^2 + y^2 = 9$

Es una superficie cilíndrica con eje principal Z y con traza circunferencia centrada en el origen de radio igual a 3.



Rúbrica:

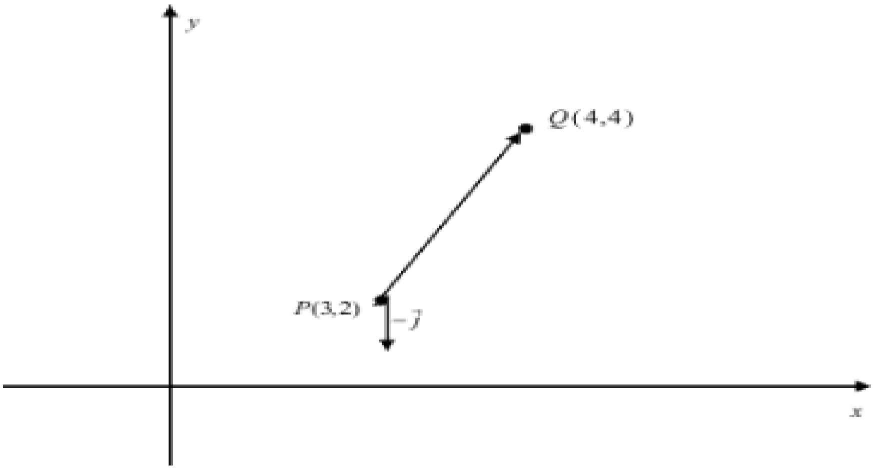
Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante tiene la capacidad de obtener, identificar y de graficar superficies, expresadas en coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	El estudiante no sabe diferenciar que la ecuación está expresada en coordenadas esféricas y por tanto plantea mal todo el problema.	El estudiante expresa correctamente el valor de x, y, pero no sabe identificar la superficie en cartesianas, ni grafica dicha superficie.	El estudiante expresa correctamente el valor de x, y, sabe identificar la superficie en cartesianas, pero no grafica dicha superficie.	El estudiante expresa correctamente el valor de x, y, sabe identificar la superficie en cartesianas y grafica dicha superficie.
	0-2	3-8	9-12	13-15

TERCER TEMA (15 puntos)

La temperatura en cualquier punto (x, y) de una placa metálica es T grados. Se conoce que en el punto $P(3,2)$ la temperatura crece a razón de $2\sqrt{5}$ grados por decímetro en la dirección de P hacia $Q(4,4)$ y disminuye 1 grado por decímetro en la dirección $-\mathbf{j}$. Determine el vector gradiente de temperatura en el punto P.

La razón de cambio de T en cualquier punto (x, y) en la dirección unitaria $\vec{u}$ está dada por la derivada direccional, entonces: $T'\big((x,y),\vec{u}\big) = \nabla T(x,y)\cdot\vec{u}$

Considerando la siguiente gráfica:



El vector unitario en la dirección del vector $\overrightarrow{PQ}$ está dado por:

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{(4,4)-(3,2)}{\|(1,2)\|} = \frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Por lo tanto, $T'\left((3,2),\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) = \nabla T(3,2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}(3,2),\ \frac{\partial T}{\partial x}(3,2)\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\partial T}{\partial x}(3,2) + \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\partial T}{\partial y}(3,2) = 2\sqrt{5}$$

Por otra parte, $T'\big((3,2),-\boldsymbol{j}\big) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}(3,2),\ \frac{\partial T}{\partial x}(3,2)\right)\cdot(0,-1) = -\frac{\partial T}{\partial y}(3,2) = -1 \ \rightarrow\ \frac{\partial T}{\partial y}(3,2) = 1$

Puesto que: $\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\partial T}{\partial x}(3,2) + \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\partial T}{\partial y}(3,2) = 2\sqrt{5}$ y $\frac{\partial T}{\partial y}(3,2) = 1$, tenemos que:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(3,2) + 2 = 10 \quad\rightarrow\quad \frac{\partial T}{\partial x}(3,2) = 8$$

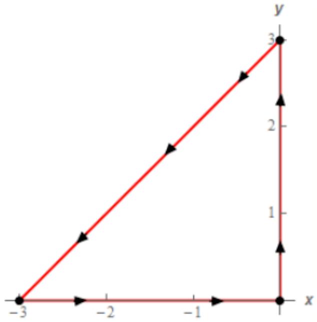
El gradiente solicitado es: $\nabla T(3,2) = (8,1)$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante entiende el concepto de derivada direccional y sabe cómo esta se relaciona con el gradiente cuando la función es diferenciable.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No realiza proceso coherente alguno.	Plantea la ecuación que relaciona a la derivada direccional con el gradiente para ambas direcciones, pero no coloca los vectores unitarios $\overrightarrow{PQ}$ y $-j$ de manera correcta en las ecuaciones o no coloca una expresión general para las componentes del gradiente.	Plantea la ecuación que relaciona a la derivada direccional con el gradiente para ambas direcciones sustituyendo datos correctamente, luego resuelve las ecuaciones que quedan pero comete errores y no llega a la respuesta.	Plantea la ecuación que relaciona a la derivada direccional con el gradiente para ambas direcciones sustituyendo datos correctamente, resuelve las ecuaciones que quedan de forma correcta y concluye su respuesta.
	0	1-5	6-12	13-15

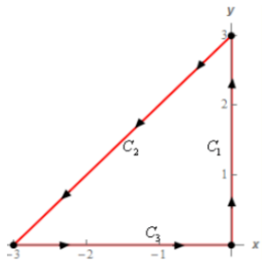
CUARTO TEMA (20 puntos)

Calcule la integral de línea $\oint_C \left(xy^2 + x^2\right)\, dx + \,(4x - 1)\, dy$ para la curva C mostrada en la siguiente figura:



a) De manera directa
b) Utilizando el Teorema de Green

a) Disponemos de 3 segementos de recta $C_1, C_2\ y\ C_3$



Parametrizamos:

C_1: $\vec{r}(t) = (0, t)\ ;\ \ 0 \le t \le 3$
entonces, $x = 0 \Rightarrow dx = 0dt,\ y = t \Rightarrow dy = dt$

C_2: $\vec{r}(t) = (1 - t)(0{,}3) + t(-3{,}0) = (-3t, 3 - 3t);\ \ 0 \le t \le 1$
entonces, $x = -3t \Rightarrow dx = -3dt,\ y = 3 - 3t \Rightarrow dy = -3dt$

C_3: $\vec{r}(t) = (t, 0)\ ;\ -3 \le t \le 0$
Entonces, $x = t \Rightarrow dx = dt,\ y = 0 \Rightarrow dy = 0dt,$

así las integrales de línea están dadas por:

$$\oint_{C_1} (xy^2 + x^2)\, dx + \,(4x - 1)\, dy = \int_0^3 [(0)(t)^2 + (0)^2](0)\ \ \mathrm{dt} + \int_0^3 [(4)(0) - 1]\ (1)\ \mathrm{dt} = -3$$

$$\oint_{C_2} (xy^2 + x^2)\, dx + \,(4x - 1)\, d$$

$$= \int_0^1 [(-3t)(3 - 3t)^2 + (-3t)^2](-3)\ \ \mathrm{dt} + \int_0^1 [(4)(-3t) - 1]\ (-3)\ \mathrm{dt} =$$

$$= \int_0^1 (81t^3 - 189t^2 + 81t)\ \mathrm{dt} + \int_0^1 (36t + 3)\ \ \mathrm{dt} = \frac{75}{4}$$

$$\oint_{C_3} (xy^2 + x^2)\, dx + \,(4x - 1)\, dy = \int_{-3}^0 [(t)(0)^2 + (t)^2](1)\ \ \mathrm{dt} + \int_{-3}^0 [(4)(t) - 1]\ (0)\ \mathrm{dt} = 9$$

$$\oint_C (xy^2 + x^2)\,dx + (4x-1)\,dy = (-3) + \frac{75}{4} + 9 = \frac{99}{4}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante está en capacidad de resolver integrales de línea por definición.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	El estudiante no puede establecer correctamente la integrales de líneas requeridas	El estudiante parametriza correctamente las curvas, pero no plantea correctamente las integrales de línea	El estudiante parametriza correctamente las curvas, plantea correctamente las integrales de línea, pero comete algunos errores al resolverlas.	El estudiante parametriza correctamente las curvas, plantea correctamente las integrales de línea y resuelve correctamente dichas integrales.
	0-2	3-5	6-8	9-10

b) Utilizando Teorema de Green

$$M = xy^2 + x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2xy$$

$$N = \quad 4x - 1\,x^2 \rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4$$

de ésto se tiene que:

$$\int\int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \int\int_R (4 - 2xy)\,dA$$

Los límites de la región de integración son: -3$\leq x \leq 0$; $0 \leq y \leq x + 3$

$$\int\int_R (4-2xy)\,dA = \int\int_R dA = \int_{-3}^{0}\int_{0}^{x+3} (4-2xy)\,dy\,dx = \int_{-3}^{0} (4y - xy^2)|_0^{x+3}\ dx =$$

$$\int_{-3}^{0} (12 - 5x - 6x^2 - x^3) = \frac{99}{4}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante esta en capacidad de utilizar el teorema de Green para resolver integrales de línea.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	El estudiante no puede establecer correctamente el Teorema de Green	El estudiante establece correctamente el Teorema de Green, pero comete errores en los límites de integración	El estudiante establece correctamente el Teorema de Green, plantea correctamente los límites de integración, pero comete errores al integrar	El estudiante establece correctamente el Teorema de Green, plantea correctamente los límites de integración, y resuelve correctamente al integrar.
	0-2	3-5	6-8	9-10

QUINTO TEMA (10 puntos)

Demostrar que el área de una región R limitada por una curva cerrada simple a trozos C está dada por:

$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx}$$

Escojemos un campo vectorial tal que $\vec{F} = (M, N) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$

Aplicando el Teorema de Green: $\int\int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \oint_C M\,dx + N\,dy$

$$\int\int_R \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) dA = \oint_C -\frac{1}{2}\,y\,dx + \frac{1}{2}x\,dy$$

$$\int\int_R dA = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

Rúbrica:

<table>
<tr><th>Capacidades deseadas</th><th colspan="4">Desempeño</th></tr>
<tr><td rowspan="3">El estudiante esta en capacidad de demostrar porque el Teorema de Green sirve para calcular el área de una región plana.</td><td>Inicial</td><td>En desarrollo</td><td>Desarrollado</td><td>Excelente</td></tr>
<tr><td>El estudiante no puede establecer correctamente la forma de iniciar la demostración.</td><td>El estudiante expresa correctamente los componentes M y N del campo vectorial, requeridos para la demostración y establece la expresión del Teorema de Green.</td><td>El estudiante obtiene las derivadas de M y N con respecto a “y” y a “x” respectivamente, reemplaza en el Teorema, y procede a trabajar ambos lados de la igualdad.</td><td>El estudiante finalmente comprueba que efectivamente la expresión sirve para calcular el área de una región plana.</td></tr>
<tr><td>0-1</td><td>2-4</td><td>5-9</td><td>10</td></tr>
</table>